ЛЕКЦИЯ №1

Множества и отображения.

Множество – понятие, неопределяемое в математике. Более сложные объёмы определяются через более простые, поэтому некоторые основные понятия не определяются. Их смысл поясняется на примерах:

1) Множество книг, стоящих на полке
2) Множество букв в слове “книга”
3) Множество всех треугольников на плоскости

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами

Множество состоит из элементов (латинские буквы)

Также существует знак принадлежности. Он обозначается развернутой в право буквой “Э”

Множество можно задать перечислением элементов M = {a, b, k …}

Другой способ задания с помощью свойства, характеризующего элемента множества.

N = {x\x – буквы, входящие в слово “книга”}

Вертикальную черту в создании множества можно рассматривать “таких, что”

Множество Аявляется подмножеством множества В, если каждый элемент Апринадлежит В.

Заметим, что множество тоже является своим подмножеством. Множество, в котором нет ни одного элемента, называется пустым.

Операции над множествами.

Пересечением множеств Аи Вназывается множество, состоящее из элементов, входящих и в А, и в В.А
Объединением множеств А и Вназывается множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В.

Разностью множеств Аи Вназывают множество тех элементов, которые не входят в В.

Дополнением к множеству Аназывается множество, состоящее из элементов, не входящих в А.

При этом всегда считается, что подмножества, участвующие в решении данной задачи, являются некоторыми подмножествами некоторого универсального множества U.
Наглядно представить операции над множествами можно с помощью диаграмм Эйлера – Венна:

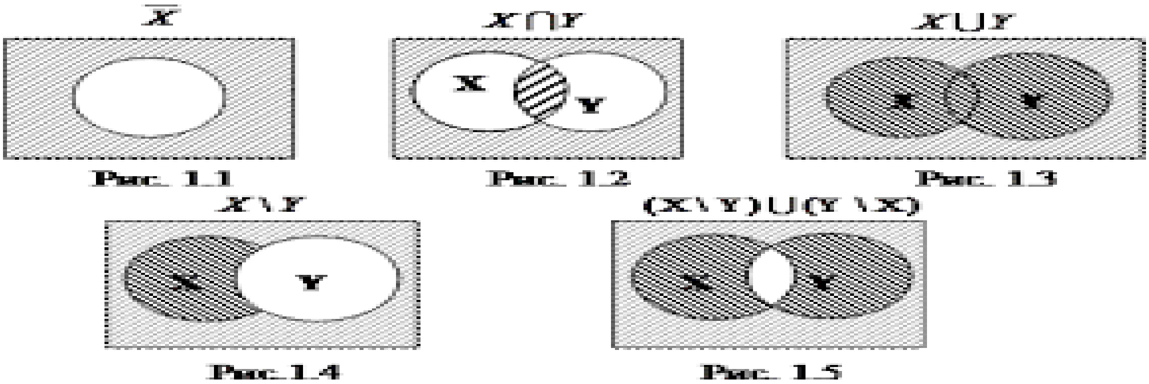


Рис. 1.1 Рис. 1.2 Рис. 1.3 Рис. 1.4 Рис. 1.5

Пусть А – множество целых чётных чисел, а В–множество целых чисел: 5

В качестве универсального множества рассмотрим множество целых чисел Z

Апересекает В = {хпринадлежитZ| х–чётно и : 5} = {хпринадлежит Z| х - : 10}

АUВ = {хпринадлежит Z| х– чётно или :5} = {хпринадлежит Z| х–оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8}

А \ В = {хпринадлежит Z| х – чётно и не делится на 5} = {хпринадлежит А| х–оканчивается на 2, 4, 6, 8}

В \ А = {хпринадлежит Z| х - : 5 и нечётно} = {хпринадлежит А| х - : 5 и оканчивается на 5}

Дополнение А = {хпринадлежит Z| х- нечётно} – множество нечётных чисел.

Декартово произведение – это множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

Упорядоченными называют пару элементов, у которых важен порядок элементов. Их ставят в ( ).

Если порядок не важен, то в { }.

Лекция №2

Отображения

Если каждому элементу множества А по некоторому определенному правилу ставится в соответствие единственный элемент из множества В называется отображением или функци- ей множества А в множество В. Эти слова лишь поясняют понятие отображения, но не могут служить его определением. Понятие отображения, как и понятие множества, также является неопределяемым . Тот факт, что отображение f действует из множества А в множество В, обозначают **f : A → B.** Если отображение φ элементу **x из A** ставит в соответствие элемент y из B, то y называется образом элемента x и обозначается **fx или f(x).** Также пишут
x f –→ y
Множество **(A)** – область отображения
(f) – функция

Примеры:

Пусть (**T) – множество треугольников**
(S) – множество окружностей

S(t) – окружность описанная около треугольника
T:T → S

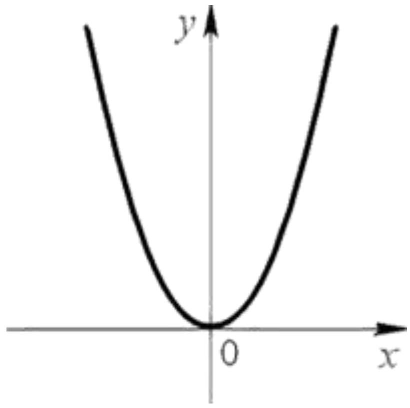
Получили отображения соответствующие каждому треугольника описанную около него окружность
Отметим . что ∀ **- для всех квантор всеобщности**
∃- квантор существования

Любое отображение f:A→**B** удовлетворяет 2м требованиям для любого B из A можно найти значения f(a)=b
$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}$ $\exists \mathbf{b} \in \mathbf{B} : \mathbf{f(a)} = b$

И значения f(a) определяются единственным образом
f(a) : ∀a∈A f(x) = b , таких что , A(a) = b2 b2→b1=b2

Пример:

Покажем, что множество R равномощно множеству точек произвольно выбранного на числовой прямой интервала (a, b), где a 6= b. Действительно, равномощность множеств R и (0, 1) устанавливается, например, взаимно однозначным отображением φ(x) = 1 π arcctg x, а равномощность множеств (0, 1) и (a, b) (а так же [0, 1] и [a, b]) — биекцией ψ(x) = a + (b − a)x Функции φ(x) и ψ(x) — строго монотонные и, следовательно, как известно из математического анализа, — взаимно однозначные.
g(x) = x^2
График (g) – это подмножество декартовом произведении RxR=R^2



изображение параболы

Мощность множества

Подведем итог. Мы рассмотрели несколько бесконечных множеств. Оказалось, что **|N| = |Z| = |Q| и |R| = |(a, b)|,** однако пока не решен вопрос “|N| ?= |R|”. Так как N ⊆ R, то, конечно, |N| ≤ |R|. Скоро мы увидим, что биекции N → R не существует и, таким образом, **|N| < |R|.** Множества, равномощные множеству натуральных чисел называются счетными, или множествами мощности ℵ0 (читается ‘алеф-0’). Множества, равномощные множеству дей- ствительных чисел называются континуальными (мощности континуума), или множествами мощности ℵ1 (читается ‘алеф-1’).

Теорема Кантора

Доказательство. Сперва установим равномощность множеств 2 N и [0, 1]. Пусть6 для любого A ∈ 2 N φ(A) = (0, α1α2α3 . . .) 2 , где αi = (0, если i ∈ A, 1, если i /∈ A . В частности, φ(∅) = 0), φ(N) = 1). Очевидно, что φ — сюръекция, однако, следующие приме- ры: φ({1, 3}) = (0, 101(0))2 = 1 2 + 1 8 = 5 8 , φ({1, 4, 5, 6, . . .}) = (0, 100(1))2 = 1 2 + 1 16 + 1 32 + . . . = 1 2 + 1 8 = 5 8 — показывают, что φ не является инъекцией: двум разным подмножествам множества натуральных чисел соответствует одно и то же число, или, что эквивалентно, существует α ∈ [0, 1], обладающее двумя прообразами. Это возможно, если в двоичной системе счисления α пред- ставимо как бесконечная дробь с периодом (1) или (0). Легко видеть, что множество N таких чисел счетно: оно есть объединение счетного числа конечных множеств, состоящих из чисел, период (1) которых начинается с первого, второго и т. д. места после запятой. Счетным яв- ляется также множество M прообразов всех чисел из N (M = x ∈ 2 N : φ(x) ∈ N). Пусть ψ — некоторая биекция из M в N. Скорректируем теперь отображение φ. Для любого A ∈ 2 N положим θ(A) = (ψ(A), если A ∈ M, φ(A), если A /∈ M. Легко видеть, что θ — биекция из 2 N в [0, 1]. Так как |[0, 1]| = |R|, то

= |R|. |R| > |N|

Для множеств с конечным числом элементов, мощность множества является фактически количеством элементов этого множества. Иначе можно сказать, что множество *A* является конечным , если существует такое натуральное число *n*, что A ~ $\{k, k \in \boldsymbol{N} \wedge k \leq n\}$. В противном случае, множество называется бесконечным.

Между двумя конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда их мощности совпадают, т.е. | A | = | B |.

Пусть *A* = {a $_{1,}$ a $_{2,}$..., a $_{n\}}$ - конечное множество с *n* элементов (| A | = n), тогда количество всех подмножеств множества A равна 2 ^{n,} т.е. 2 $^{|A|.}$

Множество всех подмножеств некоторого множества *A* (конечной или бесконечной) часто обозначают через β *(A)* (или B *(A)* или 2 $^{|A|)}$ и называют Булеан множества A. Очевидно, что для конечного множества *A* выполняется | B (A) | = 2 $^{|A|.}$

В общем случае, справедливом и для бесконечных множеств,
множества A и B является *равномощных,* или имеют одинаковую мощность, если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, т.е. если
существует биекции f: $A \to B$. Равномощных множества обозначаются как $A \sim B$.

Отношение ривнопотужности
есть рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть отношением эквивалентности.

Для бесконечных множеств мощность множества может совпадать с мощностью ее собственной подмножества.

Примеры:

Множество натуральных чисел **N** равномощных множестве $S = \{1,4,9,16, ...\}$, состоящая из квадратов натуральных чисел. Необходима биекции устанавливается по закону (n, n $^{2)}$, n $\in$ **N,** n ^{2} $\in S$.

Множество **Z** всех целых чисел равномощных множестве P всех четных чисел. Здесь взаимно однозначное соответствие устанавливается следующим образом: (n, 2n), n $\in$ **Z,** 2n $\in P$ = |R|. Теперь из теоремы Кантора получаем
Утверждение 1.12. |R| > |N|

Лекция №4 "Кольцо"

Кольцом называется алгебраическая система с двумя двухместными операциями. По аналогии с арифметическими действиями их называют "сложением" и "умножением". Они могут быть заданы различными способами. Важно лишь выполнение определённых свойств.

$\langle K; +; \bullet \rangle$ если выполнены следующие требования (аксиомы кольца):

1. $\forall_{x,y,z} \in K \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ - "сложение" ассоциативно (сочетательность)
2. Существует нейтральный элемент 0. $\exists\, 0 \in K,\ x \in K,\ x+0=0+x=x,$

0 - нейтральный элемент для "сложения".

3. Для $\forall x{\in}K \exists\ x{\in}K$, что $x+(-x) = 0$. Существует обратный элемент для "сложения".

Эти аксиомы показывают, что кольцо относительно операции "сложение" образует группу.

4.Для любых $x,y{\in}K$ выполняется коммутативность сложения $x+y= y+x$

5.Для любых $x,y,z{\in}K$ выполняется ассоциативность относительно умножения -

$(x\bullet y)\bullet z = x\bullet(y\bullet z)$

6.Для любых $x,y,z{\in}K$ выполняется дистрибутивность умножения относительно сложения. $x\bullet(y+z) = x\bullet y + x\bullet z$

Пример:

Z с обычными операциями "Сложение" и "умножение" образует кольцо $\langle Z; +; \bullet\rangle$. Действительно, все условия выполнены, имеет место коммутативность умножения. Поэтому $\langle Z; +; \bullet\rangle$ коммутативное кольцо $x\bullet y = y\bullet x$.

Существует ещё один важный тип алгебраических систем - поля.

Поле - коммутативное кольцо с единицей(нейтральный элемент для умножения), в котором любой не нулевой x имеет обратный x^{-1} такой, что $x\bullet x^{-1} =1$. Другими словами: поле - алгебраическая система $\langle P; +; \bullet\rangle$, в которой выполняются аксиомы кольца(1-6) и кроме того, выполняются условия:

7.Для любых $x,y \in P$ $x \bullet y = y \bullet x$ - умножение коммутативно.

8.Существует 1 - нейтральный элемент относительно умножения.

$\exists 1$ элемент такой, что $\forall x \in P$ выполняется $x \bullet 1 = x$.

9.Любой элемент отличный от нуля имеет обратный элемент.

$\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1} \in P \ x \bullet x^{-1} = 1$

Пример:

R с обычными операциями: умножение и сложение чисел, образует поле, так как все аксиомы поля выполнены.

Пример:

〈 Z; +; •〉 не является полем. Это кольцо коммутативно и имеет единицу(т.е. выполнены восемьаксиом кроме девятой). Не для всех чисел существует обратный элемент: $2 \bullet x \neq 1$ т.к. для 2 нет обратного элемента для умножения.

Метод математической индукции.

Как известно: математические утверждения т.е. теоремы должны быть доказаны. Метод математической индукции является одним из методов доказательств. В широком смысле индукция - это способ рассуждений, позволяющий переходить от частных утверждений к общим. Обратный переход от общих утверждений к частным называется дедукцией. Дедукция всегда приводит кправильным выводам.

Пример: Общий результат: все числа, оканчивающиеся на 0 делятся на 5.$\Rightarrow$ Частное любое конкретное число, оканчивающееся на 0 делится на 5.

В тоже время индукция может привести к неверным выводам. Заметим: 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, можем сделать вывод, что 60 делится на любое число.

Метод математической индукции позволяет во многих случаях строго доказать справедливость общего утверждения P(n), в формулировку которого входит натуральное число n. Применение метода включает три этапа:

1.База индукции: проверяем справедливость утверждения P(n) для n=1 или для другого частного значения n, начиная с которого предполагается справедливость P(n).

2.Предположение индукции: предполагаем, что P(n) справедливость для $n=k\neq 1$.

3.Шаг индукции: используя предположение, доказываем, что P(n) справедливо для n=k+1. В результате можно сделать вывод о справедливости P(n) для любого n натурального.

1)P(n) для n=1

2)P(n) для n=k

3)P(n) для n=k+1 P(n) $\forall n \in N$

Действительно для n=1 P(n) - справедливо, согласно базе индукции $\Rightarrow$всё верно и для n=2 , т.к. переход от n=1 кn=2 обоснован (шаг индукции). Применяя шаг индукции снова, получаем справедливость P(n) для n= 3,4,5... ,т.е. справедливость P(n) для всех n

Пример:

Сумма первых n – нечётных натуральных чисел равна n^2 $(1+3+5... +(2n-1)=n^2)$. Доказательство проведём методом математической индукции.

1)База при n=1. Слева только одно слагаемое 1=1.

2)Предположение: полагаем, что для некоторого k: $1+3+5... +(2k-1)=k^2$

3)Шаг индукции: докажем, что утверждение верно для n=k+1, т.е.

$1+3+5...+(2k-1) +(2k+1) = (k+1)^2$

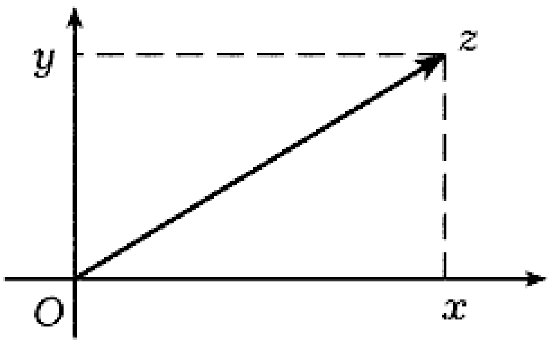
Учитывая предположение, сумма первых k слагаемых равна k^2 , значит то, что требуется доказать можно записать так : $k^2 +(2k+1) = (k+1)^2$ очевидно. ЧТД.

Лекция №5

Комплексные числа

Комплексным числом называется любое выражение вида, где x, y, e, r, i – мнимая единица со свойствами i^2= -1,

Выражение 1 – это алгебраическая формула комплексного числа



Сумма и разность двух комплексных чисел определяется путем операций с их действительными и мнимыми частями.

Для определения произведения комплексных чисел сначала определим квадрат мнимой единицы: i^2=1,

а затем - произведение двух произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ как результат почленного умножения $z_1 = x_1 + y_1 i$ на $z_2 = x_2 + y_2 i$ с использованием соотношения $i^2 = -1$ и последующего сложения полученных результатов:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 x_2 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

Любое комплексное число может быть записано в виде: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

r= $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

φ =arctgy/x

x=rcosφ , y=rsinφ

Если n принадлежит N, то z^n=(r^n)(cosφ +isinφ) при этом W(n)= корень n-ой степени из Z= (корень n-ой степени из r)(cos(φ +2пk/n) +isin(φ +2пk/n), k=1,2,3…

Т.е. имеется n различных корней.

i=корень квадратный из -1, i^2=-1

Z=x+iy x-действительная часть, y- мнимая часть.

Правила

1. (a + ib) ± (c + id) (x(1) + iy(1)) ± ((x(2) + iy(2)) = x(1)± x(2) + i(y(1) ± y(2)).

2. Z(1)+Z(2)=(x(1)+iy(1))*(x(2)+iy(2))=x(1)x(2)-y(1)y(2)+i(x(1)y(2)+x(2)y(1)).

3. Z(1)/Z(2)= $\dfrac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \dfrac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$

Лекция 6

Математическая логика.

Высказывание- некоторое осмысленное выражение языка, т.е. выражение языка о котором имеет смысл говорить истинно оно или ложно, т.е. верно оно или не верно.

И- истинно, Л-ложно, S- четное число (Л).

При этом предполагаем, что высказывание удовлетворяет закону исключенного третьего и закону противоречия, т.е. каждое высказывание или истинно или ложно. Высказывание не может быть истинным и ложным.

Понятно, что истинные и ложные высказывания образуют соответствующие множества. С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами “и”, “или”.

Таким образом, операции с высказываниями можно описывать с помощью некоторого математического аппарата.

Вводятся следующие *логические операции* (связки) над высказываниями

1) **Отрицание**. *Отрицанием* (логическим “*не*”) высказывания P называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание P ложно.

Обозначается $\neg$ P или $\overline{P}$.

Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

P	$\neg$ P
И	Л
Л	И

2) **Конъюнкция.** *Конъюнкцией* (логическим “*и*”) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначается P&Q или PÙQ.

P	Q	P&Q
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

3) **Дизъюнкция.** *Дизъюнкцией* (логическим “*или*”) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается PÚQ.

P	Q	PÚQ
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

4) **Импликация.** *Импликацией* (логическим *следованием*) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q – ложно.

Обозначается PÉQ (или PÞQ). Высказывание P называется посылкой импликации, а высказывание Q – следствием.

P	Q	PÞQ
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

5) **Эквиваленция.** *Эквиваленцией* (логической *равносильностью*) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначается P~Q или PÛQ.

P	Q	P~Q
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

С помощью этих основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Запись xy можно рассматривать как обозначение бинарной операции умножения переменных x и y, а, с другой стороны, так же обозначается функция двух переменных $f(x,y) = xy$.

Пример 1. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы j и y.

$\varphi = \overline{p} \Rightarrow (p \wedge r)$

$\psi = \overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$

Составим таблицы истинности для каждой формулы:

p	r	$\overline{p}$	(pÙr)	$\overline{p} \Rightarrow (p \wedge r)$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л

p	r	$\overline{p}$	$\overline{r}$	$(\overline{p} \vee \overline{r})$	$\overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Данные формулы не являются эквивалентными.

Пример 2. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы j и y.

$\varphi = (p \Leftrightarrow q) \vee r$

$\psi = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$

Составим таблицы истинности для заданных формул.

p	q	r	pÛq	(pÛq)Úr
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И
И	Л	И	Л	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И

p	q	r	pÞq	qÞp	(pÞq)Ú(qÞp)	(pÞq)Ú(qÞp)Úr
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И

Л	И	Л	И	Л	И		И
Л	Л	И	И	И	И		И
Л	Л	Л	И	И	И		И

Из составленных таблиц видно, что данные формулы не равносильны.

Основные равносильности.

Для любых формул А, В и С справедливые следующие равносильности:

A & B º B & A; A & A º A; A & (B & C) º (A & B) & C;

A Ú B º B Ú A; A Ú A º A; A Ú (B Ú C) º (A Ú B) Ú C;

A Ú (B & C) º (A Ú B) & (A Ú C); A & (B Ú C) º (A & B) Ú (A & C);

A & (A Ú B) º A; A Ú (A & B) º A; ØØA º A; Ø(A & B) º ØA Ú ØB;

A º (A & B) Ú (A & ØB); A º (A Ú B) & (A Ú ØB);

Булевы функции.

Определение. Булевой функциейf(X1, X2, …, Xn) называется произвольная n – местная функция, аргументы и значения которой принадлежат множеству {0, 1}.

Если логические функции могут принимать значения истинно или ложно, то для булевой функции аналогами этих значений будут значения 0 или 1.

Для булевых функций также можно составить таблицы значений, соответствующим основным логическим операциям.

X1 X2 ØX1 X1&X2 X1ÚX2 X1ÞX2 X1ÛX

Лекция №7

Определители и системы линейных алгебраических уравнений.

К понятию определителя мы приходим рассматривая систему алгебраических уравнений 1-ой степени.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$$

x, y – неизвестные

Решение системы уравнений 1-ой степени имеет вид:

$$x = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{d_2b_1 - d_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Выражение стоящее в знаменателе $a_1b_2 - a_2b_1$называется определителем 2-ого порядка.

Аналогично рассмотрим систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решение в виде дробей у которых в знаменателе стоит выражение:

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Так и рассмотрим на определители третьего порядка. Определитель имеет 3 строки, 3 столбца и 9 элементов. Строки, столбы называются – ряд.

Свойства определителей

Следующие свойства справедливы для определителей любого порядка, позволяют упростить вычисления определителей.

Свойство 1. Определитель не меняет своего значения, если его строки заменить столбцами с теми же номерами, а столбцы строками, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Введенное действие называется транспонированием строк и столбцов.

Свойство 2. Если переставить две строки (столбца) определителя, то знак значения определителя изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Если определитель имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. Если две строки (столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & k\cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & k\cdot a_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 7. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых все ряды, кроме данного, прежние, а в данном ряду в первом определителе стоят первые слагаемые, а во втором определителе – вторые:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы параллельной строки (столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором какого-либо определением называется определитель полученный из данного вычеркиванием столбца и строки на пересечении которых стоит данный элемент.

Минор a_1

$M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением какого-либо элемента определителя называется минор взятый со знаком «+» или «-» в зависимости от положения данного элемента в исходной системе, от суммы номеров строки и столбца для верхнего левого элемента берется знак «+», а для остальных элементов в шахматном порядке.

Лекция №8

Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему $\begin{cases} a11x + a12y + a13z = d1 \\ a21x + a22y + a23z = d2 \\ a31x + a32y + a33z = d3 \end{cases}$

Определитель состоящий из коэффициентов этой системы есть определитель$D = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$

Чтобы найти x элементы каждого столбца умножить на алгебраическое дополнения элемента 2-го столбца и почленно сложить.

(a11A12+a21A22+a31A32)x+(a12A12+a22A22+a32A32)y+(a13A12+a23A22+a33A33)z

Коэффициент при x есть сумма произведений элементов 1-го столбца на алгебраическое дополнение 2-го столбца

Коэффициент при y есть сумма произведений 2-го столбца на их собственное алгебраическое дополнение, что равно определителю D.

Коэффициент при z есть сумма произведений элементов 3-го столбца на алгебраическое дополнение 2-го столбца.

Справа стоит определитель $D2 = \begin{vmatrix} a11 & b1 & a13 \\ a21 & b2 & a23 \\ a31 & b3 & a33 \end{vmatrix} Dy = D2$

Можно проверить разложив элемент 2-го стобца

Аналогично можно найти $Dx = D, \quad Dz = D3$

Если определитель имеет D≠0 то находим решение

Формула Крамера

$$D \neq 0 \quad \begin{aligned} x &= \frac{D1}{D} \\ y &= \frac{D2}{D} \\ z &= \frac{D3}{D} \end{aligned}$$

В числителе стоят определитель, в котором стоит коэффициент при соответствии неизвестный заменен столбцом свободных членов.

В знаменателе стоит определитель, называемый определителем системы.

1) Если D≠0, то существует единственное решение
2) Если D=0, то имеют место такие сценарии
   а) Система противоречит и решений не имеет

$$D = 0 \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = 5 \end{cases}$$

$3x + 3y - 3z = 3$ - Что противоречит 3-му уравнению

Системапротеворечива, решениянет.

б) Имеется бесчисленное множество решений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения почленнополучмуравнение совпадающее с 3-им

Это означает, что 3-е уравнение является линейной комбинацией первых 2-х

В этом случае отбрасываем 3-е уравнение и записываем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y = z + 1 \\ 2x + y = 2z + 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 - 2 * 2 = -3$$

$$D1 = \begin{vmatrix} z+1 & 2 \\ 2z+2 & 1 \end{vmatrix} = z + 1 - 4z - 4 = -3 * 3z$$

$$D2 = \begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 2 & 2z+2 \end{vmatrix} = (2z + 2) * 1 - (z + 1) * 2 = 0$$

$$x = \frac{D1}{D} = \frac{-3 - 3z}{-3} = 1 + z$$

$$y = \frac{D2}{D} = \frac{0}{-3} = 0, \quad z = z$$

Услов. отсутствия в решении есть условие непропорциональности столбцов свободных членов какому-либо столбцу определителя.

Если элементы столбцов определителей пропорцинальны столбцам свободных членов, то сиситема имеет бесчисленное множество решений.

Отдельным случаем является система однородного алгебраического уравнения. Так для 3-х уравнений с 3-мя неизвестными имеем

$$\begin{cases} a11x + a12y + a13z = 0 \\ a21x + a22y + a23z = 0 \\ a31 + a32y + a33z = 0 \end{cases}$$

$$x = y = z = 0 - \text{тревиально}$$

Часто нужно знать имеются ли другие нетривеальные решения.

Если D≠0, то существует только 1 тривеальное решение. Если D=0, то имеются бесчисленное число решений, кроме тривиального.

В рассмотренном примере положим правые части равные нулю

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Имеется бесчисленное число решений

Если число уравнение превышает число неизвестных, система называются переопределенной и в общем случае решений не имеет, в противном случае система неопределенная и имеет бесчисленное множество решений.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

y=0   x=1 переопределенная

ЛЕКЦИЯ №9

Матрица и действия на ней.

Матрица – прямая таблица элементов (чисел), содержащая mстрок и nстолбцов, при этом размерность матрицы читается mна n (mxn).

A = (a11, a12 … a1n)

(a21, a22 … a2n)   = (aij) m*n

(am1, am2 … amn)

aij – элемент матрицы, стоящий на пересечении строки iи столбца j. При этом i = 1,2 …m, а j = 1,2 … n.

Если m = n, то матрица называется квадратной.

Если количество строк не совпадает с количеством столбцов, то матрица называется прямой.

C = 1 (m = n = 1), то эта матрица состоит из одного элемента. Величина элемента называется определителем Iпорядка.

Если порядок квадратной матрицы B = 2 , то она имеет вид:

B = || b11, b12 ||

|| b21, b22 ||

Определитель IIпорядка называется число Δ = b11*b22 – b12*b21=

|| b11, b12 ||

|| b21, b22 ||

Пример,B = || 1 2 ||

|| 3 4 ||

Если порядок квадратной матрицы A = 3, то она имеет вид:

A = (a11, a12, a13)

(a21, a22, a23)

(a31, a32, a33)

ТогдаопределителемIIIпорядка Δ = a11*a22*a33 – a11*a23*a32 – a12*a21*a33+ a12*a23*a31 + a13*a21*a32 – a13*a22*a31

Δ = (a11, a12, a13)

(a21, a22, a23)

(a31, a32, a33)

Это справедливо для любой квадратной матрицы любой размерности.

Квадратная матрица называется диагональной, если все её элементы равны нулю, кроме элементов, стоящими в главной диагонали.

C = (a11, 0, 0)

(0, a22, 0)

(0, 0, a33)

Это относится к матрице любого порядка mxn.

Если в диагональной матрице элементы равны единице в главной диагонали, то матрица называется единичной.

E = || 1, 0, 0 ||

|| 0, 1, 0 ||

|| 0, 0, 1 ||

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой.

0 = || 0, 0, 0 ||

|| 0, 0, 0 ||

|| 0, 0, 0 ||

Квадратная матрица называется вырожденной, если соответствующий ей определитель равен нулю.

Две матрицы называются равными, если число строк и столбцов одной матрицы равно другой, а элементы этих матриц располагаются на соответственных местах одинаково.

Произведение матрицей А на число лямбда называется матрица А1, которая получила умножение каждого её элемента на число лямбда.

Это действие обусловлено свойством коммуникативности.

h*A = A*h

Из определения произведения матрицы на число следует, что если все элементы имеют общий множитель, то его можно вынести за знак матрицы.

Суммой двух матриц одинаковых размерностей называется матрица той же размерности, элементы которой являются суммами элементов слагаемых, стоящих на тех же местах, что и элементы матрицы С.

Cij = aij + bij

C = A + B

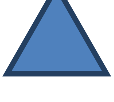
Аналогично и разность матрицы.

1) A + B = B + A – коммуникативность
2) (A + B) + C = A + (B + C) – ассоциативность
3) h(A + B) = hA + hB – дистрибутивность
4) A + 0 = 0 + A – нулевая матрица

Умножение матриц.

Умножить Ана Вимеет смысл только тогда, когда число столбцов умноженного равно числу строк матрицы множителя.
Для того, чтобы получить элемент матрицы произведения, стоящей в строке с номер р и в столбце с номер i, нужно элементы строки jпервой матрицы умножить поочерёдно на элементы столбца i 2 матрицы и сложить их.

1) A*B = B*A
2) A*B = 0 при А не равном 0 и Вне равном 0
3) Определить матрицы произведения С = Axbравено произведению определителей матриц Аи B:det(A*B) = detA*detB

Операция обращения возможна, когда  не равен нулю.

ЛЕКЦИЯ №10

Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным способом.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

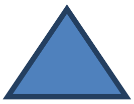
a11*x1 + a12*x2 … + a1n*xn = b1

a21*x1 + a22*x2 … + a2n*xn = b2

an1*x1 + an2*x2 … + ann*xn = bn

Пусть эта система невырожденная.

Введём матрицу.



Матричная система

A = (a11, a12 … a1n)

(a21, a22 … a2n) (1)

(an1, an2 … ann)

x = (x1)

(x2) (2)

(…)

(xn)

B = (b1)

(b2) (3)

(…)

(bn)

Матрица – столбец.

Дадим определение.

Матрица системы (1)

Матрица – столбец неизвестных (2)

Матрица столбец свободных членов (3)

Определительматрица“A”D = | A | = | a11, a12 … a1n |

| a21, a22 … a2n | неравно 0

| an1, an2 … ann |

Системы уравнений можно записать в матичном виде:

A*x = B

Определим обратную матрицу 1/Aи умножим обе части уравнения, записанного в матричной форме, на обратную матрицу 1/Aслева, получим:

1/A*A*x = 1/A*B

Таккак 1/A*A = E, где E–единичная матрица, получаем:

E*x = 1/A*B, следовательно x = 1/A*B

Приравнивая элементы матрицы слева и справа, стоящих на одинаковых местах, найдём x(решение системы):

x + y = 2

2x + 3y = 5

A = | 1 1 |, x = (x/y), B = (2/5)

| 2 3 |

D = | A | = | 1 1 | = 3 – 2 = 1 и не равно 0

| 2 3 |

A11 = B   A21 = -1

A12 = -2   A22 = 1

1/A = 1/Δ|| 8 -1 || = 1/1 || 3 -1 ||

|| -2 1 || || -2 1 ||

(x/y) = | 3 -1 | (2/5)

| -2 1 |

(x/y) = (6 -5) = (1)

(-4 5)   (1)

x = 1, y= 1

Применение матрицу к привидению уравнения второго порядка каноническому виду:

A11* x^a + 2a12*xy + a22y^2 иa11*x^2 + a22*y^2 + a33*z^2 + 2a12*xy + 2a13*xz + 2a23*yz

Такие уравнения называют квадратичными формами и соответственно 2хи 3х переменных

Симметричные матрицы ->

A2^(2) = (a11, a12)

(a21, a22) , гдеa21 = a12

A3^(3) = (a11, a12, a13)

(a21, a22, a23)

(a31, a32, a33), гдеa12 = a21, a13= a31, a23 = a32

Квадратичные формы при помощи линейного преобразования переменных могут быть преобразованы в формы не содержащие произведения новых переменных.

&1*x^2 + &2*y^& - для 2 – х переменных, а для 3 – хпеременных

&1x^2 + &a*y^& + &3*3*z^2 (здесь речь идёт только о старших степенях)

Это означает поворот системы координат.

Назовём характеристическим уравнением матрицу A
A = || a11, a12, a13 || (a11- &, a12, 13)

|| a21, a22, a23 || (a21, a22 - &, a23) = 0

|| a31, a32, a33 || (a31 , a32, a33 - &)

Корни этого уравнения &1, &2, &3 называются характеристическими числами матриц. Они всегда действительны, если исходная матрица является симметричной.

Система таких уравнений, в которой &принимает одно из 3 – х значений &1, &2, &3 имеет определитель равный 0 и определяеттройку чисел эпсилон 1, 2, 3, соответствующее данному характеристическому числу &.Совокупность

эпсилон определяет вектор r,которые называют собственными векторами матрицы.
Вид квадратичных форм для двух переменных x1*x^2 + &2*y^2 + &3*Z^2 для 3 – х переменных подразумевает, что &1, &2 для 2 – х переменных для 2 – х переменного и &1, &2, &3 для 3 – х переменных является характеристическими числами матриц соответствующих форм.

(X^| - 1/$\sqrt{5}$)^2/ 3^2 + (y^| - 8/$\sqrt{5}$)^2/ 2^2 = 1 – это каноническое уравнение элипса.

Лекция номер 11

Векторная алгебра

В своей практической деятельности человек встречается с величинами различного рода. Одни из них, например, площадь, объем, масса, температура полностью характеризуются заданием своих численных значений. Такие величины называются скалярными. Другие же величины, например, сила, скорость, ускорение определяются не только своим числовым значением, но и направлением их действия. Такие величины называют векторными. При этом для анализа векторных величин с одинаковым успехом используют как геометрическую, так и алгебраическую формы их представления.

Векторы бывают трех видов:

Свободный вектор— вектор, начало которого может быть совмещено с любой точкой пространства, в котором рассматривается данный вектор. С. в. можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. Таким образом, С. в. задается своей длиной и направлением.

Скользящий вектор - может перемещаться вдоль прямой, отрезком которой он является. Прямую эту называют основанием или линией действия вектора.

Связанный вектор – начало которых. не может менять своего положения.

Определение:

1.Векторы называются равными, если они имеют равные модули, коллинеарны и направлены в одну сторону. (Если вектора направлены в противоположные стороны при равных модулях и наличии коллинеарности, то они противоположны).

Определение:

2.Векторы называются коллинеарными, если они располагаются на одной прямой или на параллельных прямых, то есть если существует прямая, которой они параллельны.

Определение:

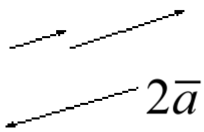
3.Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или если существует плоскость, которой они параллельны. Если компланарны векторы имеют общее начало, то они лежат в одной плоскости

Определение:

4. Нуль-вектор (О-вектор), имеющий длину равную нулю и неопределенное направление.

Действия над векторами

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}$, определяемый следующими условиями: $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; вектор $\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$; векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противоположны, если $\lambda<0$.



$2\overline{a}$ $\overline{b}=-2\overline{a}$

Из этого определения следует условие коллинеарности двух векторов**:**

Пусть $\overline{b}$ ненулевой вектор, тогда для любого коллинеарного ему вектора $\overline{a}$ существует единственное число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.

Действительно, $\lambda=\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$, если векторы одинаково направлены и $\lambda=-\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$, если они противоположно направлены.

Сложение и вычитание векторов

Сумму двух коллинеарных векторов, имеющих одинаковое направление называется такой вектор, который имеет такое же направление и длина которого равна сумме их длин.

Если вектор направлен противоположно, то за их сумму принимается вектор имеющий направление большого по модулю вектора, а длина равна разности их длин.

Сложение двух неколлинеарных векторов по правилу параллелограмма.
Правило параллелограмма - если два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ привести к общему началу, то вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ совпадает с диагональю

параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2). Причем начало вектора $\bar{c}$совпадает с началом заданных векторов.

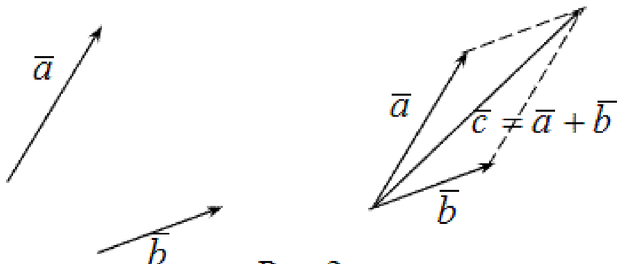
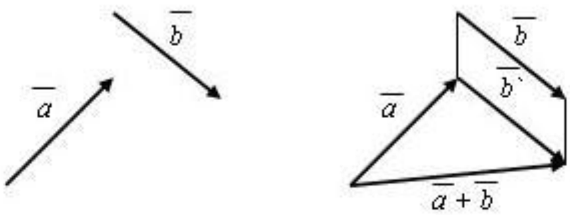


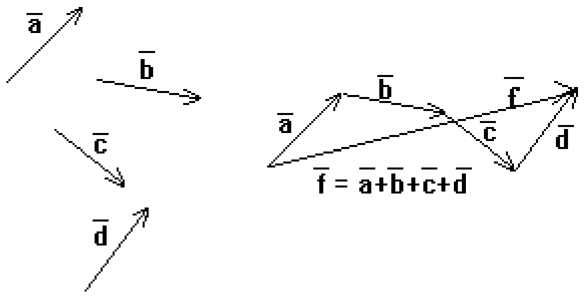
Рис. 2

Если количество векторов больше двух, то это правило применяется для каждого вектора, сначала складывается первый к второму, затем к этой сумме прибавляется третий вектор.

Правило треугольника:Пусть есть произвольные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}$, равный вектору $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец совпадет с концом вектора $\bar{b}$, будет суммой $\bar{a}$ +$\bar{b}$.



Правило многоугольника. Если векторы расположить так, чтобы начало каждого следующего вектора поместить в конец предыдущего, то суммой нескольких векторов называется вектор, соединяющий начало самого первого вектора с концом последнего.



Свойства операции сложения

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$- коммутативность.
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - ассоциативность.
3. (a + b +... + c)n = an + bn +... + cn–дистрибутивность.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называется вектор $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$.Линейная комбинация векторов образуется из них с помощью операций умножения на число и сложения, следовательно, она также является вектором. По определению n-мерный вектор $\overline{b}$ разлагается по системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, если можно подобрать такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что векторы $\overline{b}$ и $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$ равны, т. е. $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$ Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называются коэффициентами разложения.

Определение: Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ называется линейно зависимой, если из этих векторов можно составить нулевую (равную нулю) линейную комбинацию, т.е. $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$, причем хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации отличен от нуля.

В противном случае система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ называется линейно независимой.

Очевидно, что если нуль-вектор входит в систему векторов, то система всегда линейно – зависима, т.к. нуль-вектор можно представить в виде линейной комбинацией векторов с нулевым коэффициентом.

Определение: Линейной независимой системы векторов можно получить как отрицание линейной зависимости, т.е. если вектор системы нельзя представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы, то системы векторов называется линейной независимой.

Линейной комбинация этой системы равна нулю, тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейных комбинаций равны нулю.

Доказательство:

Система векторовназывается линейно зависимой, если существует такой набор коэффициентов, из которых хотя бы один не равен нулю, что линейная комбинация данной системы векторов с этим набором коэффициентов равна нулевому вектору:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$$.**(12)**

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда

$$\overline{a_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overline{a_3} + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\overline{a_n} = 0$$

$$\overline{a_1} = \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} + ... + \alpha_n\overline{a_n}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \alpha_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, ..., \alpha_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Линейная зависимость векторов на плоскости.

Теорема 1. *Всякие три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ на плоскости линейно зависимы.*

Доказательство

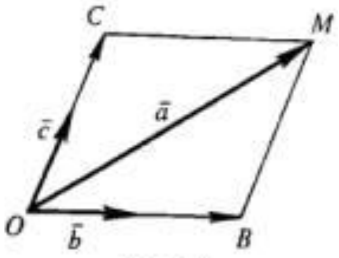


Рис. 30

1.Среди данных векторов имеется пара $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда

$$\overline{a} = \lambda\overline{b} \text{ или } \overline{a} = \lambda\overline{b} + 0\overline{c},$$

т.е. вектор $\overline{a}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

2.Среди данных векторов нет ни одной пары коллинеарных. Допустим, что все три вектора имеют общее начало О (рис.30). Покажем, что вектор $\overline{a}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых коллинеарен вектору $\overline{b}$, а другой - вектору $\overline{c}$.

Для этого через конец М вектора $\overline{a}$ проведем прямые, параллельные векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$, до их пересечения в точках *B и C* с прямыми, на которых соответственно расположены векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Имеем очевидное равенство

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

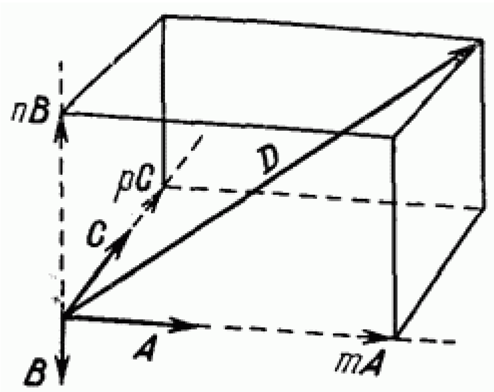
Так как векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ коллинеарны соответственно векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$, то $\overline{OB} = \lambda_1\overline{b}$ и $\overline{OC} = \lambda_2\overline{c}$.

Поэтому $\overline{a} = \lambda_1\overline{b} + \lambda_2\overline{c}$, т.е. $\overline{a}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Предположим теперь, что имеются три некомпланарных вектора А, В и С. Всякий вектор можно представить как диагональ параллелепипеда, три ребра которого параллельны векторам А, В и С. Таким образом всякий вектор может быть выражен через три некомпланарных вектора в виде (рис. 83):

$$\mathbf{D} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C}.$$



Отсюда следует, что между всякими четырьмя векторами существует соотношение вида

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + d\mathbf{D} = 0.$$

Если три первых вектора компланарны, то надо считать лишь d = 0.

В общем случае, если существует система линейных векторовn($\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$)

А любой n+1 вектор в виде линейных n-векторов системы $\overline{a}$n+1= $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$, то любые n+1 вектор линейно зависимы и пространство называется n-мерное.

Лекция 12

<u>Линейная зависимость вектора на плоскости.</u>

На прошлой лекции мы получили, что на прямой линии один вектор линейно не зависим, а два вектора линейно зависимы.

Р/м три вектора: **a, b, c**.

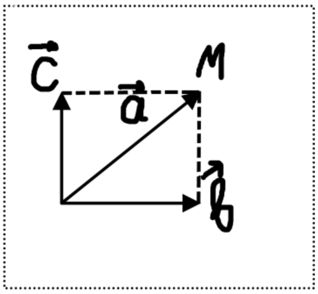
Теорема 1.

Любые три вектора **a, b, c** на плоскости линейно зависимы.

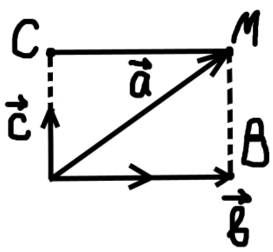
Доказательство:

1) Среди данных векторов имеется пара коллинеарных **a || b**, тогда **a = ß*b** или **a = ß*b + 0*c**, то есть вектор **a** – линейная комбинация векторов **b** и **c**, значит, три вектора линейно зависимы.

2) Среди данных векторов нет коллинеарных. Допустим, что вектора имеют общее начало в точке О. Покажем, что вектор **a** можно представить в виде суммы векторов, один из которых коллинеарен вектору **b**, а второй коллинеарен вектору **c.**



Для этого через точку М (конец вектора **a**) проведем прямые, параллельные векторам **b** и **c** до их пересечения в точке В и С с прямыми, на которых расположены векторы **b, c.**



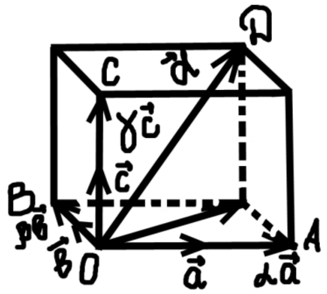
Имеем очевидное равенство: **OM**(век)=**OB**(век) **+ OC**(век), так как вектор **OB** коллинеарен вектору **b**, то **OB**(век) **= ß1*b** , **OC**(век) коллинеарен вектору **c**, то **OC**(век) **= ß2*c.** Получим, **a**(век)= **ß1*b+ ß2*c,** т.е. вектор **a** – линейная комбинация векторов **b** и **c.** Значит три вектора линейно зависимы.

Любые два неколлинеарных вектора линейно не зависимы. Разложим вектор по трем некомпланарным векторам в пространстве.

Любые три некомпланарных вектора линейно независимы, т.к. если в пространстве **a, b, c** (некомпланарные) линейно зависимы, то **a**(век)= **ß1*b+ ß2*c,** следовательно три вектора компланарны.

Теорема 2

. Пусть даны четыре некомпланарных вектора **a, b, c, d.** Приведем все четыре вектора к общему началу **O** и построим параллелепипед с ребрами коллинеарными векторам **a, b, c** и диагонали **d.**



Ребра **ƛa || a, ßb || b, Ӽc || c.** Из рисунка видно, что (**OA+OB) + OC=OD.**

ƛa + ßb + Ӽc = d.

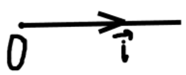
Разложим три вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам. **ƛa + ßb + Ӽc +ðd = 0.**

3 некомпланарных вектора в пространстве линейно независимы, а 4 вектора зависимы.

В общем случае, если существует система n-линейно независимых векторов, а любой (n+1) вектор можно представить в виде линейной комбинации n-векторов системы, то любые (n+1) векторы линейно зависимы и пространство n-мерное.

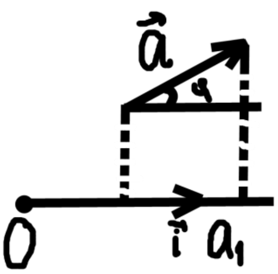
<u>Проектирование вектора на ось.</u>

Ось (ориентированная) – прямая, на которой закреплена точка , называемая началом отсчета, выбранные единица длины и направление отсчета , и которая характеризуется единичным вектором – ортом оси. На рисунке i – орт оси, | i | =1.



Спроецируем вектора a на ось с ортом i.

1) Назовем вектор – проекцией вектора a вектора a1, начало которого служит проекцией начала вектора a , а концом – проекция конца a на ось с ортом i.



2) Назовем проекцию вектора a на ось с ортом i – скаляр, равный модулю вектора a1, если a1 ↑↑ i, и равный отрицательному модулю вектора a1, если a1 ↑↓ i.

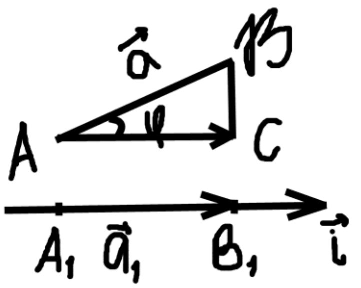
При это если a1 перпендикулярен i, то модуль вектора a1 равен нулю.

Прi a (проекция вектора a на ось с ортом i)

Примечание: угол наклона вектора к оси – угол наклона между вектором и положительным направлением оси. Вектор должен быть отложен от точки, лежащей на это оси.

Теорема 1. (свойства проекции)

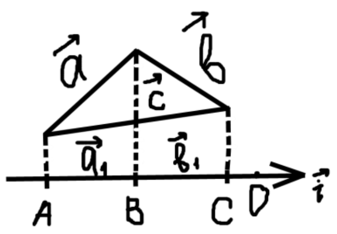
1) Прi a = | a | * cos(a, i), где (a, i) =ƛ



Из рисунка видно, что если угол альфа – острый, то a1 ↑↑ i, то из треугольника ABC: AC = AB *cos ƛ. Если угол альфа – тупой, то a1 ↑↓ i, то AC=-AB *cos ƛ.

2) Проекция суммы вектором равна сумме их проекций.

Доказательство:



Пусть даны 2 невзаимно перпендикулярных вектора вектору i. Тогда имеем 3 случая:

1 - a1 ↑↑ i , b1 ↑↑ i

2 - a1 ↑↑ i , b1 ↑↓ i

3 - a1 ↑↓ i , b1 ↑↓ i

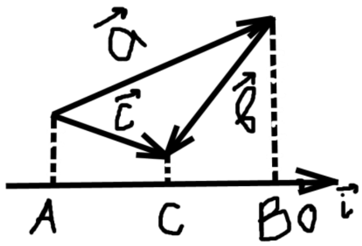
Отметим, что для трех и более векторов результат аналогичен.

<u>Рассмотри первый случай:</u>

Прi a = AB, Прi b = BC, Прi c = AC

AC = AB + BC, т.е. прi (a + b) = прi a + прi b

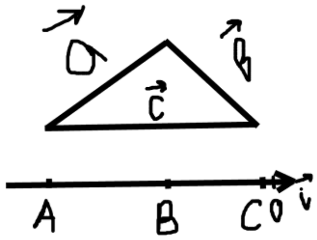
<u>Рассмотрим второй случай:</u>



Прі a = AB, Прі b = BC, Прі c = AC

AC = AB – BC следовательно прі (a + b) = прі a + прі b

<u>Рассмотрим третий случай:</u>



Прі a = -BA, Прі b = -CB, Прі c = -AC = прі (a + b)

AC = AB + CB

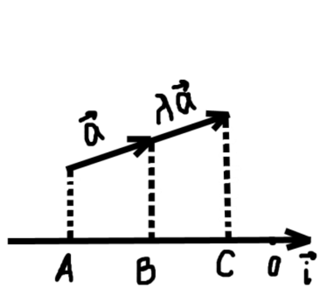
-AC = -AB – CB

прі (a + b) = прі a + прі b

Теорема 3:

Прі (ƛa) = ƛ прі a

x > 0, a ↑↑ƛa



1) Прі (ƛa) =AC при a ↑↑ i

2) Прі (ƛa) = - AC при a ↑↓ i
AC = ƛ*AB, т.е. Прі (ƛa) = ƛ прі a
3) -AC = ƛ*(-AB), т.е. Прі (ƛa) = ƛ прі a
Аналогично и для ƛ < 0.

Лекция 13

Прямоугольные координаты вектора в пространстве.

Система координат в пространстве называется системой 3 взаимно перпендикулярных осейOx,Oy,Oz, с ортами $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ и общим началом O.

Разложим произвольный вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_x\vec{\jmath}+a_x\vec{k}$ (1) и построим параллелепипед на направляющих $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, диагональю которого служит $\vec{a}$.

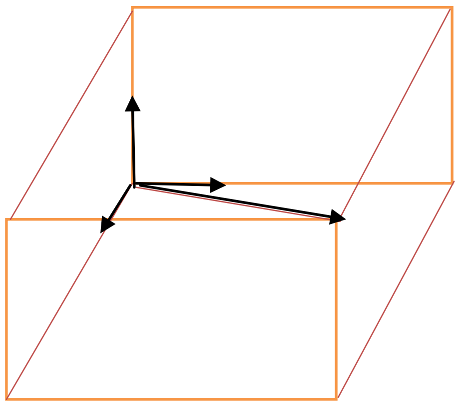


рис.1

Параллелепипед будет прямоугольным т.к$\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}\perp\vec{k}$ M-конец $\vec{a}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$

На осях Ox,Oy,Ozотложим точки A ,B ,C-вершины параллелепипеда. Очевидно что треугольники OMA, OMB, OMC прямоугольные, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, есть векторы проекции $\vec{a}$ на оси Ox,Oy,Oz соответственно, т.е на орты $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Следовательно $\vec{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=пр_i\, a\vec{\imath}+пр_j a\vec{\jmath}+пр_k a\vec{k}$ (2).

Из уравнения (1) и (2) мы заключаем $a_{x=}пр_i a$, $a_{y=}пр_j a$, $a_{z=}пр_k a$.

Определение: координатами вектора $\vec{a}$ в системе координат Oxyz называют его проекции на осьOx,Oy,Oz или коэффициенты в разложении вектора $\vec{a}$ по ортам базиса $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Длинна вектора.

Из рис.1 видно что $OM^2=OA^2+OB^2+OC^2$. $OM=|\vec{a}|$, $OA=a_{x,}$ $OB=a_{y,}$ $OC=a_{z,}$ следовательно имеем: . $|\vec{a}|^2=a_x{}^2+ a_y{}^2+a_z{}^2$, следовательно $a=|\vec{a}|=\sqrt{}a_x{}^2+ a_y{}^2+a_z{}^2$.

Направляющие косинусы векторов.

Пусть дан вектор $\vec{a}$, углы, которые он образует с осями координат обозначим так: $\alpha(\vec{a}\hat{}\vec{i})$,$\beta(\vec{a}\hat{}\vec{j})$, $\gamma(\vec{a}\hat{}\vec{k})$. Косинусы углов α, β, γ называются направляющими косинусами $\vec{a}$. По первому свойству проекции вектора имеем: $a_{x=}$ $|\vec{a}| \times \cos\alpha$, $a_{y=}$ $|\vec{a}| \times \cos\beta$, $a_{z=}$ $|\vec{a}| \times \cos\gamma$.

Рассмотрим сумму их квадратов: $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ => $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты единичного вектора.

Пусть $|\vec{a}|=1$,тогда $a_{x=}\cos\alpha$, $a_{y=}\cos\beta$, $a_{z=}\cos\gamma$. Координатами единичного вектора являются его направляющие косинусы.

Координаты точки в пространстве.

Пусть в пространстве введена прямоугольная(Декартова) система координат Oxyz см.рис.1. Каждой точке пространства M можно соотнести $\overrightarrow{OM}=\vec{a}=\vec{r}_{M.}$

$\vec{r}_M$ – радиус-вектор точки M проведенный из начала координат O.

Координатами точки M в пространстве называют координаты ее радиус-вектора. Выразим координаты вектора через координаты начала и конца, пусть дан $\overrightarrow{AB}$, при этом $A(x_1, y_1, z_1)$,$B(x_2, y_2, z_2)$.Найдем координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. При этом A (a_x, a_y, a_z) через координаты его начала и конца.

Рассмотрим рис.2

Из рисунка видно что $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B - \vec{r}_A$

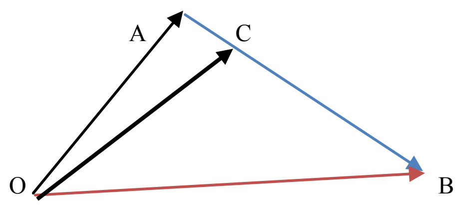


рис.2

Три вектора в пространстве линейно независимы. Расписываем последнее равенство и в силу его линейной независимости получим: $a_{x=}x_2 - x_1$, $a_{y=}y_2 - y_1$, $a_{z=}z_2 - z_1$.Найдем длину отрезка AB, если известны $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$,$AB=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Деление отрезка в данном отношении.

Рассмотрим рис.2

Пусть дан отрезок AB, где A (x_1, y_1, z_1) и B(x_2, y_2, z_2) и дана точка C(x,y,z) ,которая делит отрезок AB в заданном отношении $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda$, λ- заданное число.

Требуется найти координаты точки C, O- начало координат, $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ – радиус-векторы A,B,C соответственно, при этом имеем $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A$, $\overrightarrow{BC}=\vec{r}_C-\vec{r}_B$,пусть $\overrightarrow{AC}$ со направлен с $\overrightarrow{CB}$, тогда $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$, $\overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{BC}$или$\vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda(\vec{r}_C-\vec{r}_B)$ => $1+\lambda\vec{r}_C=\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_B$, $\vec{r}_C=\frac{\vec{r}A+\lambda\vec{r}B}{1+\lambda}$. Учитывая что $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ линейно независимы находим: $x=\frac{x1+\lambda x2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y1+\lambda y2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z1+\lambda z2}{1+\lambda}$.

В частности, если C делит AB пополам =>$\lambda=1$: $x=\frac{x1+x2}{2}$, $y=\frac{y1+y2}{2}$,$z=\frac{z1+z2}{2}$.

Если $\lambda<0$, то точка C лежит вне отрезка. Если $\lambda=0$,то C уходит в бесконечность.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число(скаляр) равное произведению длин векторов сомножителей на косинус угла между ними.

Итак $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.

Свойства скалярного произведения:

1.Так как $|\vec{a}|\times\cos\alpha=\text{пр}_b\vec{a}$,$\vec{b}\times\cos\alpha=\text{пр}_a\vec{b}$,то $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_b\vec{a}=|\vec{b}|\text{пр}a\vec{b}$.

2.Так как $\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\cos(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a})$ в силу четности косинусов $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$– коммутативность.

3.Ассоциативность относительно умножения на скаляр m $(\vec{a},\vec{b})=(m\vec{a},\vec{b})$.

4.Дистрибутивность относительно сложения $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{b}$.

5.Скалярное произведение равно 0, когда $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$,или $\vec{a}\perp\vec{b}$т.е$\cos\alpha=0$.

Лекция 14

Скалярное произведение в координатах.

Рассмотрим 2 вектора a=a_{xi}+a_{yi}+a_{zk}и b=b_{xi}+b_{yi}+b_{zk}, учитывая, что орты базиса

Взаимно⊥, i⊥j⊥k, имееmi*j=0, i*k=0, j*j=j^2 j*k=0, i*i=i^2=1.

Перемножим векторы, как k*k=k^2=1

Многочлен на многочлен, получим
a*b=ax*bx*i*i+axbyi*j+axbzi*k+aybxji+aybyjj+aybzjk+azbx=axbx+ayby+azbz

Сумма произведений одноимённых координат.

Ориентированая тройка векторов.

Пусть 3 некоторые abсприведённых к общему началу 0.

Назовём их правой тройкой (ориентированной 3-ой с правой ориентации).

Рис…

Если для наблюдателя помещённого в конец (с) движение а к b

В их плоскости по кротчайшему пути будет происходить против движения стрелки часов.

Если это движение будет происходить почасовой, движение будет левым. Обозначаю(abc)

Для орнтр важен порядок следования векторов если переставить местами 2 рядом стоящих вектора то ориентация 3-ки изменится на противоположную. Циклическая перестановка векторов не меняет ориентацию (перестановка по кругу).

(a,b,c)~(cab)~(bca)

Если у одного из векторов изменить знак, то ориентация изменится на противоположную.

Если один из векторов заменить зеркальным отражением, относительно плоскости 2-ух других векторов, то ориентация изменится на противоположную.

Введённый в системе координат 0xyz, три вектора орт вектора базиса ijk будут ориентированной правой тройкой векторов.

Векторное произведение 2-ух векторов.

Пусть даны 2 вектора a a не =0, b не =0.

Векторным произведением векторов aиb, называется 3-й вектор c, обладающий след свойствами.

1)c⊥ пл-три (aи b)c ⊥ a,c⊥b

2)|c|-численно равна площади параллелограммапостроенного на векторах сомножителей как на ортах.

|c|=|a|*|b|*sinã ã=(a ^ b)

3) 3ка (abc)- правая

(C=a*b=[a,b]- обозначается

Свойства векторного пароизведения

|a=0

1)a*b=0 |b=0

|a||b (sinã=0)

2) Антикомунативность

[a,b]=-[b,a]

(abc)- правая (bac)-левая (ba-c)-правая

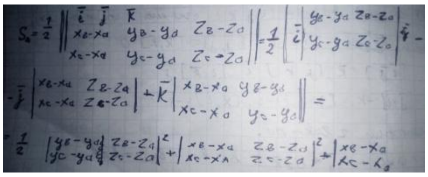
C=a*b, -c=b*a, c=-[b×a]

3) Ассоциативность умножения на скаляр

m[ab]=[ma,b];

a) m>0; a↑↑ ma

b)m<0; a↑↓ma sin(a ^ b)-= sin (ma,b)



|m|=-m

4) Дистрибутивность относительно сложения.

a*(b+c)=a*b+a*c

Векторное произведение в координатах.

Для ортов базиса (ijk)Система координат 0xyzимеем

[i,i]=[j,j]=[k,k]=0

[ij]=k, [jk]=-i,[i,k]=j

[j*i]=-k, [k,j]=-i, [k,i]=-j

Рассмотрим 2 вектора.

a=axi+ayj+azk и bbxi+byj+bzk

[a,b]=axbx[ii]+axby[ij]+axby[i,k]+aybx[j,i]+ayby[j,j]+aybz[j,k]+azbx[k,i]+azby[k, j]+azbz[k,k]=i(aybz-azby)-j(azbx-axbz)+k(axby-aybx)=

| i.   j k. |

=| ax ay az|

| bx by bz|

Площадь треугольника

Пусть даны 3 точки лежащие в одной плоскости.

A(xa ya za).   AB=(xb-xa)j+(yb+ya)j+(zb-za)k

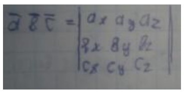
B(xb yb zb).   AC=(xc-xa)i+(yc+ya)j+(zc-za)k

C(xc yc zc)

SΔABC=1/2[AB×AC]

Смешанное произведение 3 векторов.

Смешанным произведением abc называется векторное произведение вектора аи b, скалярно умноженное на c, обозначается abc.



По определению abc=[a,×b]*c

C=axi+cyj+czk

d=a*b,   d*c=hвысота

abc=V пар-ма (a,b,c) правая.

Свойства

1) Смешанное произведение в координатах

2) Если два вектора поменять местами, то смешанное произведение изменить знак на противоположный.
3) Циклическая перестановка сомножителей знак не меняет.
4) Если среди вектора сомножество есть компланарный, то произведение векторов =0.
5) Если вектора сомножетелей компланарны, то смешанное произведение обращается в ноль, параллепипедпревращается в плоскость v=0.

Лекция №15

Аналитическая геометрия на плоскости

Рассмотрим плоскость и введенную на ней систему координат Оху. Это система двух взаимно перпендикулярных осей Ох (орт $\overline{i}$)Оу (орт $\overline{j}$) и общего начала О.

Вектора на плоскости имеют 2 координат $\overline{a}$ (a_x,a_y) M (x,y)

Все формулы векторной алгебры для трехмерного пространства справедливы и для плоскости с учетом того, что проекция вектора на ось Oz=0, а третья координата т. М, т.е. z=0 (аппликата).

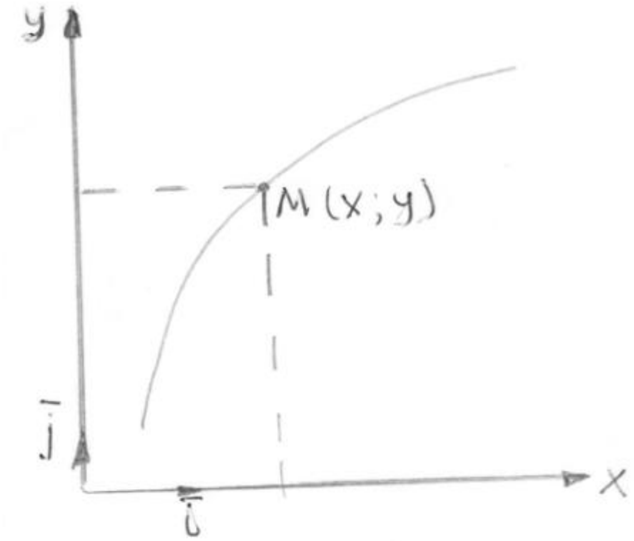


рис 1

Пусть в системе Оху задана линия. М – текущая точка лини, а (х,у) – текущие координаты.

Если абсциссех т. М придавать различные значения, то значения ординаты у надо вычислять исходя из того, что т. М находится на заданной линии.

Таким образом, если т. М лежит на заданной линии между ее координатами существует зависимость. Если эта зависимость выражается уравнением связывающее х и у, то это уравнение линии. Уравнение линии – это уравнение, связывающее текущие координаты этой лини

Пример: дано уравнение y=f(x) (1)
Задав ряд значений х получим значения у из формулы (1). Таким образом, уравнение (1) определяет на плоскости множество точек, координаты которых связаны этим уравнение. Это множество точек образует линию в системе (Оху), которые называют графиком этого уравнения.

Прямая линия

Нормальное уравнение прямой

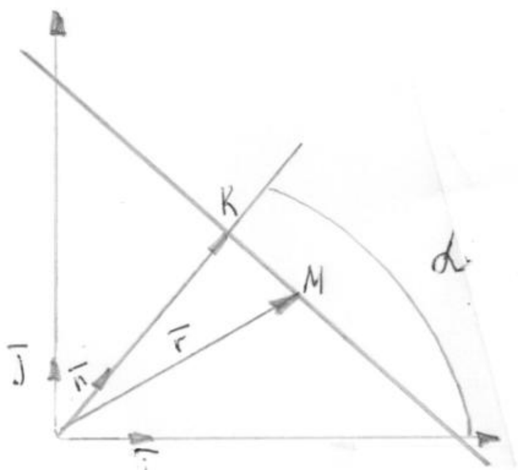


рис 2

т. M – текущая точка прямой (x,y)

$\bar{i}$ – радиус-вектор = x$\bar{i}$+y$\bar{j}$

Пусть $\overline{OK}$=p$\bar{n}$, $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j}$,|$\bar{n}$|= 1, где

$\bar{n}$ – единичный вектор нормальной прямой

$\alpha = (\widehat{\bar{n},\bar{i}})$, $\mathrm{p} = |\overline{OK}|$ – длина вектора $\overline{OK}$, $\overline{OK} \perp$ прямой

Пусть вектор $\bar{N} = \mathrm{A}\bar{i} + \mathrm{B}\bar{j}$ – постоянный вектор, а p – постоянный скаляр

$\frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \bar{N}_0$ – единичный вектор, где $|\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\frac{P}{|N|} = p$$

Прямая обладает тем свойством, что проекция и радиус-вектор ее текущей точки M (x,y) на нормаль $\bar{n} = p$. Учтем $\text{пр}_n\bar{r} = \bar{r} * \bar{n}$ по свойству скалярного произведения

Получим: $\boxed{\bar{r}\bar{n} = \mathrm{p}}$ (2) – нормальное уравнение прямой в векторной формуле

Переписав векторное уравнение через координаты получим

$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$ (3)

Общее уравнение прямой

Решением $\boxed{\bar{r}\bar{N} = \mathrm{P}}$ (4), где $\bar{N}$ и P ввели ранее.

Разделив обе части (4) на $|\overline{N}|$ получим

$$\overline{r}\frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}=\frac{P}{|\overline{N}|}\ (5)$$

Если считать $\overline{r}$ – радиус-вектором текущей точки М с координатами (x,y) прямой, а $\overline{N}_0=\frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$ – единичным вектором нормали прямой, т.е. уравнение (4) приведено к нормальному виду (2) ⇒ является уравнением некоторой прямой.

Уравнение (4) в координатной форме имеет вид:

$$Ax+By=P,\qquad P>0\ (6)$$

Оно приводится к нормальному виду (3) делением обеих частей на $\sqrt{A^2+B^2}=\ |\overline{N}|$

Рассмотрим уравнение более общего вида:

$Ax+By\ +C\ =0\ (7)$, где A,B,C –действительные постоянный числа.

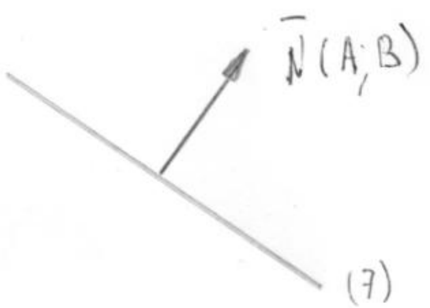
Его легко привести к виду (6) ⇒ оно является уравнением прямой на плоскости.

Таким образом, всякая прямая на плоскости имеет свое уравнение первой степени относительно координат (x, y) и наоборот, всякое уравнение 1ой степени относительно координат (x,y) является уравнением прямой линии.

Уравнение (7) называют общим уравнение прямой, а уравнение (3) нормальным уравнением прямой.

Имеет место следующее правило:

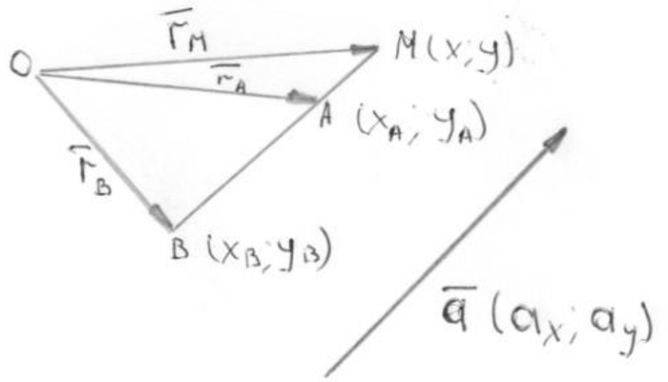
Чтобы (7) привести к уравнению вида (3) надо обе части уравнения (7) умножить на множитель $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\ (8)$, при этом знак μ выбирается противоположным знаку в точке С



Общее уравнение в скалярной форме прямой имеет вид: $\overline{r}\overline{N}\ +\mathrm{C}=0\ (9)$, где $\overline{N}$ с координатами (A,B). Т.к. общее уравнение прямой приводится к нормальному уравнению $\Rightarrow \overline{N} \uparrow\uparrow \overline{n}$,т.к$\overline{n}$ ⊥ прямой, то $\overline{N}$ ⊥ прямой.

Это означает, что коэффициенты А и В в уравнении (7) есть координаты вектора этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору



Пусть дана точка А и $\overline{a}$ (a_x,a_y)

$\boxed{\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}}$ $(11')$ – уравнение прямой, проходящей через 2 точки.

Проведем прямую || $\overline{a}$. Возьмем на прямой т. М (x,y).

$\overline{r}_A = x_A\overline{i} + y_A\overline{j}$ – радиус-вектор т. А

$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$ – радиус-вектор т.М

Из рисунка видно $\overline{r} - \overline{r}_A = \overline{AM} \ ||\ \overline{a}$

$\boxed{\overline{r} - \overline{r}_A = \lambda\overline{a}}$ (10), где λ - некоторый скаляр. (10) – это искомое уравнение в векторной форме

В координатной форме можно записать:

$$x - x_A = \lambda a_x$$

$$y - y_A = \lambda a_y$$

Исключая параметр λ найдем

$\boxed{\frac{x-x_A}{a_x} = \frac{y-y_A}{a_y}}$ (11) – искомое уравнение (ур-ние прямой, проходящей через 2 точки)

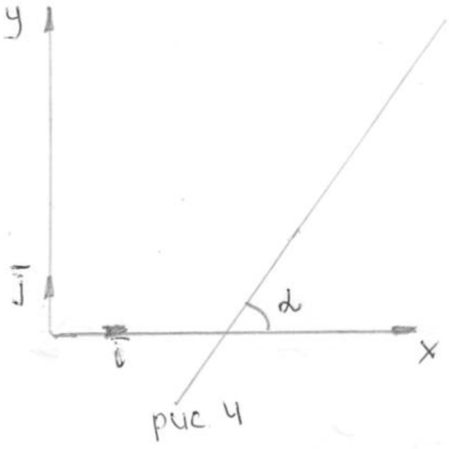
Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Из (11) легко найти

$\boxed{y - y_A = \frac{a_y}{a_x}(x - x_a)}$ $(12)\overline{a}^0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \cos\alpha\,\overline{i} + \sin\alpha\,\overline{j}$, тогда $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}^0 \Rightarrow$

$$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha$$

$$a_y = |\overline{a}|\sin\alpha$$



$\frac{a_y}{a_x} = tg\alpha = k$ – угловой коэффициент прямой

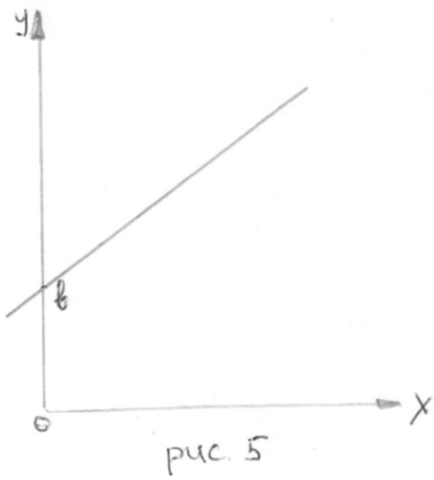
$\alpha = (\widehat{\overline{a}, \overline{i}})$(см. рис. 1)

Уравнение (12) примет вид (13)

$$\boxed{y - y_A = k(x - x_a)} (13)$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Уравнение (13) называют уравнением прямой проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом.

Если выбрать т.А (0, b), то получим уравнение $y = kx + b$, где b – начальная функция

Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть даны 2 прямые

$$Ax + By + C = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$\overline{N}\perp$первой (A,B)

$\overline{N}_1\perp$ второй $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$

Если $\overline{N}$ || $\overline{N}_1$, то прямые параллельны и наоборот. При этом $\frac{A}{A_1} = \frac{\boldsymbol{B}}{B_1}$ (14) – условие параллельности

Если $\overline{N}$ || $\overline{N}_1$, то и прямые перпендикулярны и $\overline{N} * \overline{N}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{AA_1 + BB_1 = 0}\,(14')$$

Угол между двумя прямыми

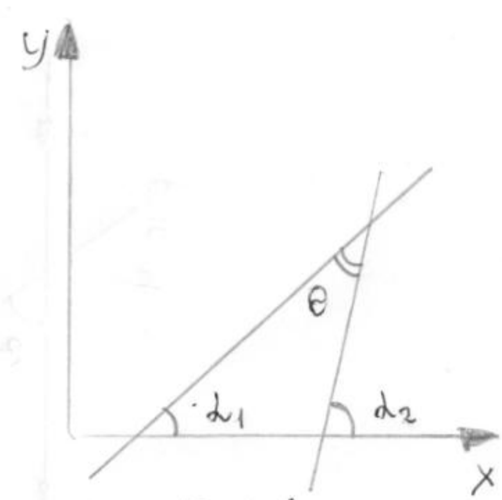


рис. 6

Пусть даны две прямые

$$y = k_1 + b_1 \ (15)$$

$$y = k_2 + b_2 \ (16)$$

Из рисунка 6 видно, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\theta = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 * tg\alpha_1}$$

$$= \boxed{\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 * k_1}} \ (17)$$

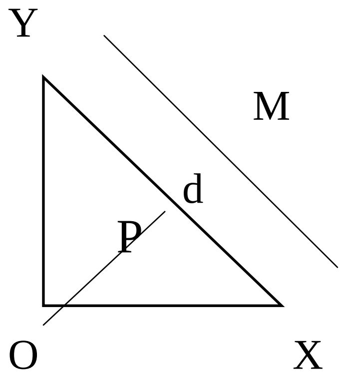
Из (17) видно, что если прямые параллельны, то $\boxed{k_1 = k_2}$ (18) и$tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ или } \pi$

Если прямые взаимно перпендикулярны ($\perp$), то $\theta = \frac{\pi}{2}, tg\theta = \infty,\ 1 + k_1 k_2 = 0$

$$k_2 = -\frac{1}{k} \ (19)$$

Лекция №16: **Расстояние от точки до прямой**.

Пусть на плоскости OXY дана прямая линия. Проведём через начало координат прямую, которую назовём *нормалью*.



P- длина нормали

d-пересечение с данной прямой, установим в + направлении от 0 до d.

Пусть α- угол (xy) полярный нормали ∟(OXOd), P=(Od).

Тогда уравнение имеет вид:

$x*\cos\alpha + y*\sin\alpha=P$

Рассмотрим другую прямую с точкой M, обозначающая расстояние от точки M до данной прямой.

Отклонение δ от данной прямой- + значение d, если данная точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой.

-значение d, если точка M и начало координат лежат по одну сторону от данной прямой.

Для точки M, лежащей на данной прямой, отклонение δ равно нулю.

$(X_m ;Y_m)$ – точки, лежащие вне прямой.

Отклонение δ точки M вычисляется по формуле:

$\delta = X_m* \cos\alpha + Y_m*\sin\alpha$

Таким образом, чтобы найти δ от данной прямой, нужно в левую часть нормального уравнения прямой подставить координаты М (X_m ;Y_m) вместо (x;y).

Чтобы найти d, нужно вместо δ взять его модуль $d = |\delta|$

Если дано общее уравнение прямой, то чтобы привести его к нормальному виду, нужно все члены умножить на нормирующий множитель μ, где знак выбирается противоположно знаку С.

$\mu = \pm 1/\sqrt{(A^2 + B^2)}$

После этого можно находить расстояние от точки М до данной прямой.

Исследование общего уравнения прямой

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ называют *полным,* если все его коэффициенты отличны от нуля. В противном случае называют *неполным*.

Рассмотрим всевозможные варианты неполного общего уравнения:

1) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$

   $By + C = 0$ — неполное уравнение прямой в системе координат OXY прямую параллельную OX, так как при любых значениях X упринимает одно и то же значение. В этом случае неполное общее уравнение прямой определённое геометрическое место точек, ординаты которых равны одному и тому же числу $-C/B$

2) При $A = 0$ и $C = 0$, $B \neq 0$

   $y = 0$ определяет ось абсцисс OX

3) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$

   $Ax + C = 0$ — уравнение параллельное оси ординат OY

4) $A \neq 0, B = 0, C = 0$

   $Ax = 0$, $x = 0$ — уравнение оси OY

5) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$

$Ax + By = 0$ — неполное общее уравнение, которое задаёт прямую через начало координат, удовлетворенное этому уравнению.

Уравнение кривых 2-го порядка

Общее уравнение кривой 2-го порядка имеет вид:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A*C> 0$, то уравнение принимает эллиптический вид.

Эллиптическое уравнение- есть уравнение обычного эллипса, либо мнимого эллипса (уравнение не определяет ни одного геометрического образа).

$A*C < 0$, то уравнение принимает гиперболический вид, который выражает либо простую гиперболу, либо вынужденную (две пересекающиеся прямые).

$A*C = 0$, то уравнение вида 2-го порядка не будет центральным и является параболическим видом, который выражает либо простую параболу, либо совпадающую прямых, либо не выражают ни одного геометрического образа.

Эллипс

Эллипс— геометрическое место точек M плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F1 и F2, называются фокусами постоянного или большего расстояний между фокусами.

Обозначим эту постоянную величину 2A, а расстояние между фокусами 2C, M – произвольная точка эллипса.

Тогда$MF1 + MF2 = 2A$, $A = const> C$.

Введём систему координат OXYи через фокусы проведём ось абсциссOX, а через середину F1F2 проведём перпендикулярно ему ось ординат OY.

$F1 (-C ; 0)$; $F2 (C ; 0)$; $M (x ; y)$.

$MF1 = \sqrt{(x + c)^2 + y}$

$MF2 = \sqrt{(x - c)^2 + y}$

Уравнение эллипса принимает вид:

$\sqrt{(x + c)^2 + y} = \sqrt{(x - c)^2 + y}$

Один из радикалов перенесём вправо и возведём всё в квадрат.

В итоге получится уравнение эллипса примет вид:

$x^2/a^2 + y^2/(a^2 + c^2) = 1$, $2C > 2A$

Так как по условию $a + c = b$, то $x^2/a^2 + y^2/b^2$

Это *каноническое уравнение эллипса, где*

a – длина большой полуоси;

b – длина малой полуоси.

Директриссы и Эксцентриссицет (ε) .

Форма эллипса определяет характер ε, обоз. буквой с и равна отношению расстояния между фокусами к длине большой полуоси.

$\varepsilon = 2c/2a = c/a < 1$, так как $c < a$

Для текущей точки эллипса выполним $r1 = a + \varepsilon x1$, $r2 = a - \varepsilon x2$

Приэтом при выводе уравнения эллипса найдём эту формулу.

*Директриссой*называют две прямые, которые выбраны в системе координат и имеют уравнение:

Расстояние от секущей точки n —$L1 = x + a/c$;$L2 = x - a/c$.

Тогда имеем уравнение: $r1/d1 = r2/d2 = c$.

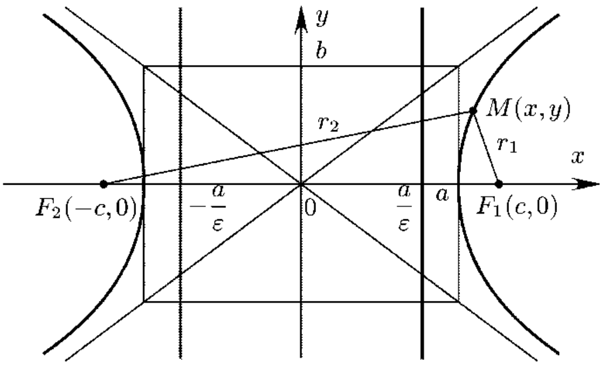
ЛЕКЦИЯ №17

ГИПЕРБОЛА

Гипербола – это геометрическое место точек, разность расстояния которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Обозначим фокусы F1 и F2, а расстояние между ними – 2c. Разность расстояния от этой гиперболы до двух фокусов обозначим 2c=const.

Выберем систему координат как в случае с эллипсом.



Обозначим через M текущую точку гиперболы.

r1 и r2 – расстояния между M и фокусами 2c>2a, c>a

По определению:

r1-r2=2a

r1=$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

r2=$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ - $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ =2a

Преобразуем так же как и для эллипса:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ = $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ - 2a

x^2 +2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2=y^2+4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ +4a^2

4cx-4a^2=4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)

(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

Обозначим:

$b^2=c^2-a^2>0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - **каноническое уравнение гиперболы**

Исследуем форму гиперболы по её уравнению:

1)x и y входят в уравнение только в чётной степени

Ox и Oy являются осями симметрии, а начало координат в точке O – центр симметрии.

2) Точки пересечения с осью абсцисс имеют y=0 и x=$\pm$ a – этокоординаты вершин гиперболы (-a;0) и (a;0)

При этом 2a – длина действительной оси

Рассмотрим пересечение с осью ординат x=0 и $-y=b^2$, чего быть не может. С осью ординат не пересекается 2b – длина мнимой оси.

Из канонического уравнения имеем:

$y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2+a^2}$, $x\in R\forall y$, т.е. график гиперболы состоит из двух бесконечных ветвей.

Асимптотой кривой называется прямая линия, расстояние до которой от точки прямой стремится к нулю по мере удаления этой точки от начала координат вдоль кривой.

Если x стремится к бесконечности, то a можно пренебречь.

Для гиперболы асимптотой является прямая, с уравнением $y=\pm\frac{b}{a}x$.

В силу симметрии, достаточно показать это для одной асимптоты.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right]$ - **ордината асимптоты**

Расстояние от точки гиперболы до прямой есть величина бесконечно малая, значит прямая является асимптотой.

Элементы гиперболы:

Точки пересечения с осью Ox, есть вершины гиперболы, а расстояния между ними равно 2a.

Расстояние от точки гиперболы до фокусов – фокальные радиус-векторы.

$\frac{c}{a}=e>1$ – эксцентриситет гиперболы

Директрисы гиперболы – это две прямые, с уравнениями $x = \pm \frac{a}{c}$

По определению, $r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = 4cx$

$$r_1 - r_2 = 2cx, r_2 = a + ex$$
$$r_1 - r_2 = 2a, r_1 = ex - a$$
$$r_1 + r_2 = \frac{4cx}{2a}$$
$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \frac{4cx}{2a}$$

Расстояние d от точки M до директрисы есть:

$$d_2 = x - \frac{a}{c} = \frac{ex - a}{e} = \frac{r_2}{e}, т.е. \frac{r_2}{d_2} = e$$

$$d_1 = x + \frac{a}{c} = \frac{ex + a}{e} = \frac{r_1}{e}, т.е. \frac{r_1}{d_1} = e$$

$$e = \frac{a}{c} = const.$$

Лекция №18

Парабола- геометрическое место точек на плоскости , равноудаленных от данной прямой, называемой директрисой параболы, и данной точки называемой фокусом параболы.

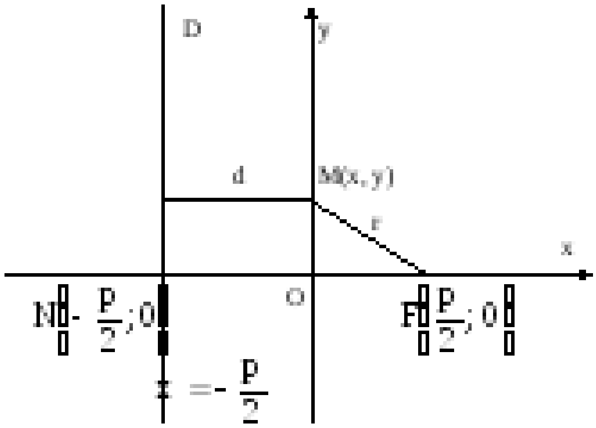


Рис.1

Введем систему Оху. Через фокус проведем прямую перпендикулярную биссектрисе. За начало координат примем точку равноудаленную от фокуса и от точки пересечения оси с абсцисой.

За ось Оу примем прямую проведенную через О.

Расстояние от фокуса до директрисы дано и равно Р, тогда фокус имеет координаты F($\frac{P}{2}$; 0) и директриса имеет уравнение x=$\frac{-P}{2}$. М текущая точка параболы.

По определению параболы MF=MB при этом MB=x+$\frac{P}{2}$; MF=$\sqrt{(x-\frac{P}{2})^2+y^2}$

x+$\frac{P}{2}$ =$\sqrt{(x-\frac{P}{2})^2+y^2}$

$y^2 = 2xP$ –каноничное уравнение параболы

Свойства параболы:

1. Всегда проходит через начало координат О(0;0), которая является вершиной.
2. у-четное → x≥0
3. В силу четности у, ось Ох есть ось симметрии.

4. Кривая параболы бесконечна
5. Элемент параболы: принимает эксцентриситет e=1.
6. Т.кпо определению параболы расстояния от ее точки до директрисы dравно расстоянию от ее точки до фокуса, имеем, что $\frac{r}{d} = 1$и в силу пункта 5 можно записать $\frac{r}{d} = e$

Полярная система координат

Рассмотрим плоскость в которой задан луч, называемый полярной осью.

Положение точки M определяется расстоянием от точки O, т.е.$|\bar{r}| = |\overline{\mathrm{OM}}| = \mathrm{OM}$ и угол φ между полярной осью и $\overline{\mathrm{OM}}$

$$\varphi = (\overline{\mathrm{OM}}; \overline{\mathrm{OX}})$$

Если ввести Де-Картову систему координат приняв полярную ось за положительное направление оси абсцисс, а перпендикулярную ей прямую исходящую из полюса O принять за ось ординат OУ, то согласно рис.2 OA=x AM=y, что видно из

▲OAM. Из ▲OAM видно, что x=$\sqrt{\ }$ * cosφ, y=$\sqrt{\ }$ * sinφ

Обратное соотношение: $\sqrt{\ } = \sqrt{x^2 + y^2}$; φ=arctg$\frac{y}{x}$

Нормальное уравнение прямой на плоскости

x*cosα+y*sinα=p

в полярных координатах примет вид:

$\sqrt{\quad}$ cosφ* cosα+$\sqrt{\quad}$ sinα* sinφ=p

$\sqrt{\quad}$ cos(φ-α)=p

В полярной системе координат уравнения второго порядка примут вид:

1. Окружность $\sqrt{\quad}$ =R, центр O, радиус R
2. Эллипс примем за полюс левый фокусF1, а финальную ось симметрии примем за полярную ось, направленную в сторону противоположную от ближайшей вершины, т.е. полярная ось-есть ось абсцисс. В этом случае r = $\frac{P}{1-ecos\varphi}$, e<1 p=$\frac{b^2}{a}$
3. Гипербола.аналогично примем за полюс правый фокус F2.

Тогда полярная ось есть факальнаяось симметрии направленная в сторону противоположную ближайшей вершине. r = $\frac{P}{1-ecos\varphi}$, e<1 p=$\frac{b^2}{a}$

4.полюсом является фокусF, полярная ось **** оси абсциссr = $\frac{P}{1-cos\varphi}$, e=1 p-параметр параболы

Все кривые второго порядка выражаются одной и той же формулой

r = $\frac{P}{1-ecos\varphi}$ e>1-эллипс

e<1-гипербола

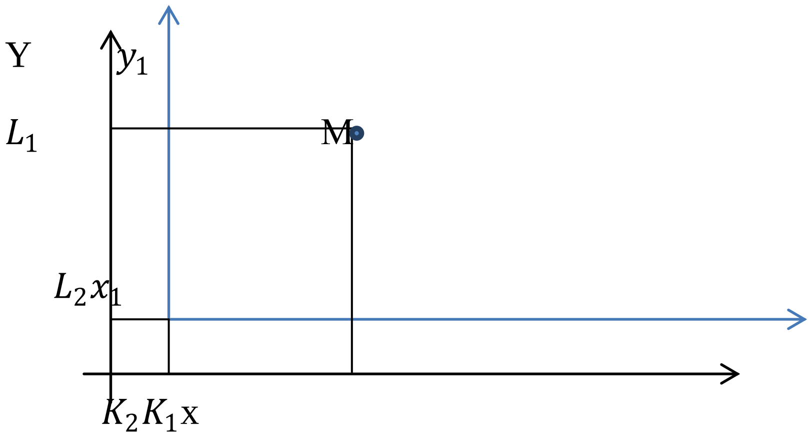
e=1-парабола

Преобразования координат на плоскости

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно выбранной системы координат

Первообразная координат представляет собой:

1)Перенос начала координат (смещение)



ЛЕКЦИЯ №19

Плоскость. Нормальное уравнение плоскости.

ОКперпендикулярен П (плоскость)

Вектор |ОК| = pОК/p = n–единичный вектор (перпендикулярен П)

Вектор n (cosα, cosβ, cosγ)

α= (Между вектором nи ox)

β = (Между вектором nи oy)

γ = (Между вектором nи oz)

Вектор r (x, y, z) – радиус – вектор

n*вектор R = p

Это и есть нормальное уравнение плоскости в векторной форме.

xcosα + ycosβ + zcosγ = p

В координатах:

Cos^2α + cos^2β + cos^2γ = 1

Общее уравнение плоскости.

Ax + By + Cz + D = 0

Линейное уравнение 1 – ого порядка по xyz.

Ax + By + Cz = -D

A, B, C, D – константы

Пусть -D = pбольше или равно 0

Иначе обе части уравнения умножаются на -1

Вектор N (A, B, C) Вектор r (x, y, z)

Тогда можно записать в виде:
Вектор N* Вектор r = p

Вектор | N | = $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

Можно записать:

(Вектор N / Вектор | N |) * Вектор r = p / Вектор | N |

Координаты:

Ax + By + Cz / $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ = D / $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

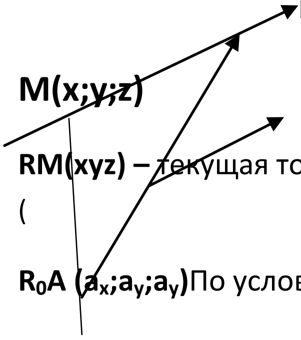
Мы доказали, что уравнение любой плоскости есть уравнение 1 – ой степени по x, y, z.

Поскольку Вектор N // вектор n, следовательно, вектор Nперпендикулярен П.

-D / $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ = p – есть уравнение расстояния до плоскости

Лекция №20

Прямая линия в пространстве.



L La ($a_x a_y a_z$)

M(x;y;z) **$R_0 = Ix_0+Jy_0+kz_0$**

RM(xyz) – текущая точка прямой с координатами
((Ix0+Jy0+kz0).

R_0A (a_x;a_y;a_y) По условию AM = αA α– скаляр.

0

$$\frac{X-X0}{\mathrm{Ax}}=\frac{y-y0}{Ay}=\frac{z-z0}{Az}$$

Рис. 1

Любая прямая линия целиком принадлежит некоторой плоскости в пространстве. Это вытекает из аксиом:

1) через любые две точки проходит прямая, при том только одна.

2) если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то точки прямой лежат в этой плоскости.

3) прямая в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей.

Варианты взаимного расположения прямых в пространстве

1) прямые могут совпадать.

2) могут пересекаться.

3) могут быть параллельными.

4) могут быть скрещивающимися.

5) могут быть перпендикулярными.

Направляющий вектор прямой в пространстве.

Любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или ей параллельной ей называется **направляющим** вектором этой прямой.

Способы задания прямой в пространстве.

если известны две точки в системе координат, то прямую можно определить (задать) с помощью уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.$\frac{X-X1}{X2-X1} = \frac{Y-Y1}{Y2-Y1} = \frac{Z-Z1}{Z2-Z1}$(1)

Или же параметрическое уравнение прямой:

$X-X_0 = \lambda a_x$

$Y-Y_0 = \lambda a_x$

$Z-Z_0 = \lambda a_z$

Есть ещё один способ задания прямой в пространстве: если задана плоскость и не лежащая в ней точка, то существует единственная прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к заданной плоскости.

Нормальное уравнение прямой в пространстве выглядит так:

$A_1x + B_1y + C_1z + D1 = 0$

А уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{ax}{bx} = \frac{ay}{by} = \frac{az}{bz}$$

Вычисление косинуса угла между прямыми производят с помощью формулы скалярного произведения векторов. эту формулу можно использовать, потому что координаты направляющего вектора прямой совпадают с координатами прямой в пространстве:

a·b = $\mathbf{\cos\boldsymbol{\lambda}}\,|\boldsymbol{a}||b|$Гдеаиb – координаты этих векторов, а выделенное в скобки – это их модули, $\cos\lambda$ - косинус угла между векторами.

произведение модулей двух векторов на косинус угла между ними равно скалярному произведению этих векторов

Лекция №21.

Цилиндрические поверхности.

Цилиндром называется поверхность движущая параллельно заданному направлению всё время пересекающая прямую, называемую направляющую.

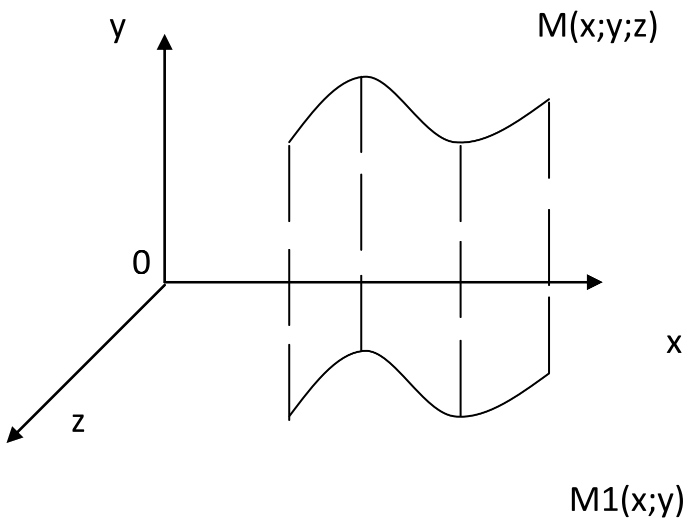


рис. *

F(x;y)=0 (1)

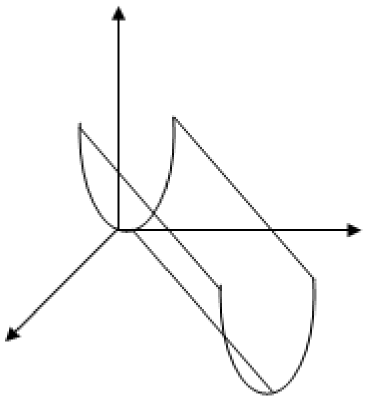
На плоскости Оxy этому уравнению соответствует некоторая прямая, примем её за направляющую цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна Oz.

Точка M(x;y;z) цилиндрической поверхности проектируется на плоскость Оxy в точку M1(x;y), координаты которой связана с уравнением (1).

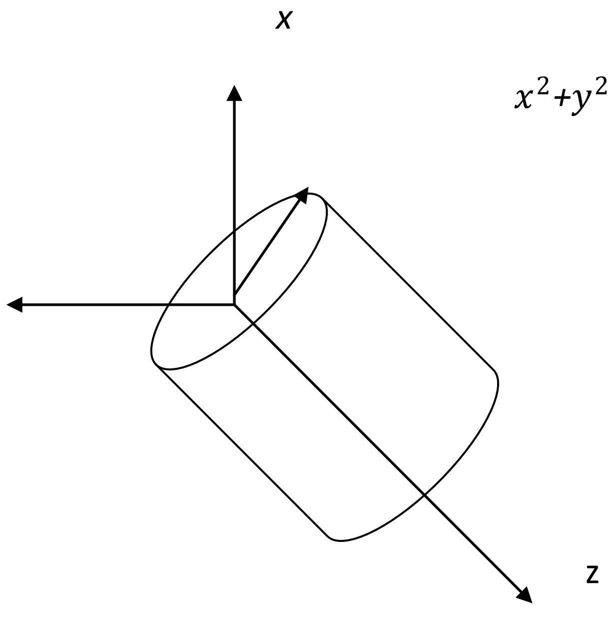
При этом координата Z может быть любой, т.н. не входящей в уравнение (1). Таким образом уравнение (1) - уравнение указанной цилиндрической поверхности. Если уравнение поверхности не содержит какой-нибудь текущей координаты, то оно является уравнением цилиндрической поверхности параллельной оси координат соответствующей осей координат. А на соответствии это уравнение направляющий данного цилиндра.

Например:

Параболический цилиндр x^2*=az* (параллельной оси Y)



Прямой круговой цилиндр с образующей параллельной оси Z и имеющей направляющий вектор



$x^2+y^2=R^2$

Конический поверхности

Конусом - называется поверхность, образованная движущей прямой (образующей).

Рассмотрим частный вид конической поверхности. Пусть дана однородная функция с тремя переменными в степени n.

F(xyz) - это означает, что F(tx ty tz)= t^n F(xyz), где t - произвольный параметр, при этом n=0, то F(tx ty tz).

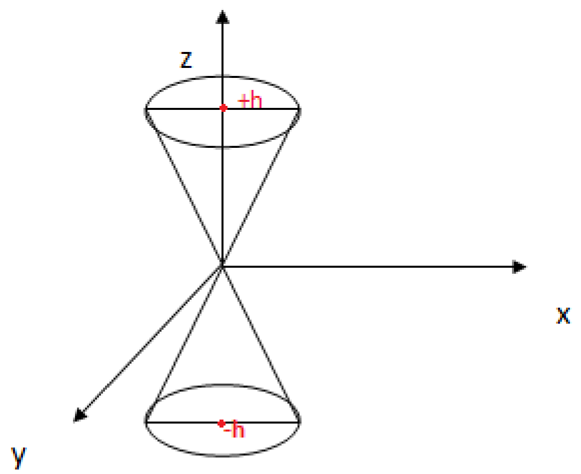
В том уравнение конической поверхности имеет вид $\boxed{F(xyz)=0}$

Рассмотрим однородную функцию второй степени F(xyz)= $x^2 + y^2 - z^2$

Прямой круговой конус или уравнение: $z^2 = x^2 + y^2$ которое получается из уравнения F(xyz)=0.

Начало координат точка O(000) - является вершиной конуса. Координаты плоскости Oxy, уравнение z=0 встречается только в его вершине. Плоскость z=h, пересекает конус по окружности : $h^2 = x^2 + y^2$

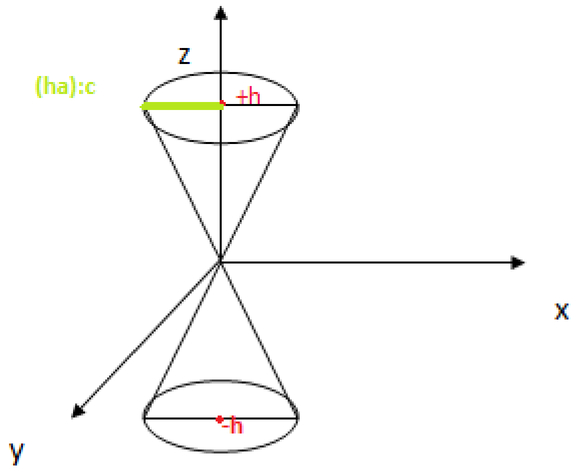
Координатная плоскость уравнивают y=0, пересекающей конус по прямым линиям z=+-x. А плоскость Oyz пересекает конус по прямым z=+-y



Напишем уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат: $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2}{a^2}$

$x^2 + y^2$- $\frac{a^2}{c^2}z^2$=0 При z=h получается окружность.

$x^2 + y^2$ =$\frac{a^2}{c^2}h^2$



Сечение плоскости Oxy, получили две прямые *z=+-(c:a)x*

А сечение плоскости Oyz (с уравнением x=0) даст две прямые

z=+-((cy):a)

В дифференциальном исчислении решается задача нахождения производной или дифференциала данной функции. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда по определению производной $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$. Обозначим $F'(x) = f(x)$.

В интегральном исчислении решается задача, обратная задаче нахождения производной: отыскание функции $F(x)$ по заданной её производной $f(x)$. Таким образом, для заданной функции $f(x)$ нужно найти такую функцию $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$ на некотором множестве*D*, если на этом множестве $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$, где *C* - произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$, так как

$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

Таким образом, ***если функция*** $f(x)$ ***имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций и все они отличаются одна от другой на постоянную величину.***

Совокупность всех первообразных функций *F*(*x*)+*C* для функции *f*(*x*) называется ***неопределённым интегралом*** от функции *f*(*x*) и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется***интегрированием***. Переменная *x* называется ***переменной интегрирования***, функция *f*(*x*) называется ***подынтегральной функцией***, выражение *f*(*x*)*dx*– ***подынтегральным выражением***.

Неопределённый интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций.

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

- Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций,
т.е. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

- Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$,то при замене переменной интегрирования *x* на *t* $\int f(t)dt = F(t) + C$. Такое свойство называется ***инвариантностью формулы интегрирования***.

2. **Таблица основных интегралов**

1	$\int dx = x + C$	7	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\int \frac{1}{\cos^2 x dx} = tgx + C$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	9	$\int \frac{1}{\sin^2 x dx} = - ctgx + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	10	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + C$
6	$\int \sin x dx = - \cos x + C$		

Интегралы данной таблицы называются ***табличными***. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

3. **Основные методы интегрирования**

При интегрировании функций не всегда можно сразу использовать таблицу интегралов. Как правило, вначале нужно данный интеграл преобразовать таким образом, чтобы свести его к одной или нескольким формулам таблицы. Для этого используются специальные методы интегрирования, основными из которых являются ***непосредственное интегрирование, замена переменной (или метод подстановки), метод интегрирования по частям***.

Суть ***метода непосредственного интегрирования*** состоит в том, что данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределённого интеграла сводится к табличным интегралам.

Примеры 1 –3. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int x^6 dx$; б) $\int\left(2x^3 - 4x^2 + 5\right)dx$; в) $\int\left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$.

Решение. а) $\int x^2 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$;

б) $\int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx = 2\int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 5\int dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\cdot\frac{x^3}{3} +$

$+5\cdot x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C$;

в) $\int\left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 3\int x^{\frac{3}{4}} - 2\int\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx + \int\frac{1}{1+x^2}dx =$

$= 3\int x^{\frac{3}{4}}dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx + \int\frac{1}{1+x^2}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + arctgx + C =$

$= 3\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + arctgx + C = \frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - 3\sqrt[3]{x^2} + arctgx + C$.

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью ***метода замены переменной (подстановки)***. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя, то такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т.е. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$.

Примеры 4 – 7. Найти интегралы: а) $\int \sin 3x dx$; б) $\int (3-x)^5 dx$; в) $\int\sqrt[5]{3x-4}dx$; г) $\int xe^{x^2}dx$.

Решение. а) $\int \sin 3x dx =${заменим u=3x, тогда du=3dx, $dx = \frac{du}{3}$} =

$= \int \sin u \cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u du = \frac{1}{3}(-\cos u) + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$;

б) $\int (3-x)^5 dx$ ={заменим u=3 – x, du= – dx, dx= – du}= $\int u^5(-du) =$

$= -\int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{(3-x)^6}{6} + C$;

в) $\int \sqrt[5]{3x-4}\,dx$ ={u=3x - 4, du=3dx, $dx=\dfrac{du}{3}$} = $\int \sqrt[5]{u}\,\dfrac{du}{3}=\dfrac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}du$ =

= $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{u^6}+C=$ $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(3x-4)^6}+C$;

г) $\int xe^{x^2}dx$ ={$u=x^2$, du=2xdx, $xdx=\dfrac{du}{2}$}= $\int e^u\,\dfrac{du}{2}=\dfrac{1}{2}\int e^u du=$

= $\dfrac{1}{2}e^u+C=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Для нахождения интеграла вида $\int udv$ используется ***формула интегрирования по частям*** $\int udv=uv-\int vdu$. Если в результате получилось, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то применение этой формулы оправдано. Обычно в подынтегральном выражении за функцию u принимают тот множитель, который после его дифференцирования становится более простым. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал dv некоторой функции v.

При использовании данного метода интегрирования удобно пользоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin xdx$, $\int P(x)\cos xdx$ имеет смысл положить u=P(x), а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

- в интегралах вида $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$, $\int P(x)\ln xdx$ следует положить dv=P(x)dx, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u;

- в интегралах вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$ можно положить $u=e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за dv.

Примеры 8 – 9. Найти интегралы: а) $\int x\cos xdx$; б) $\int \ln xdx$.

Решение. а) $\int x\cos xdx$ = $\{u=x,\ du=dx,\ dv=\cos xdx,$

$\int dv=\int\cos xdx,\ v=\sin x\}$ = $x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$;

б) $\int \ln x dx$ = $\{u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx,\ dv = dx,\ \int dv = \int dx,\ v = x\}$ =

= $x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

4. **Определённый интеграл и его основные свойства**

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выполним следующие действия.

- Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,$ … , $x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$, которые называются частичными.

- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно выберем точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то он называется ***определённым интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа *a* и *b* называются ***нижним и верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ - ***подынтегральным выражением***, *x* – ***переменной интегрирования***, $[a, b]$ - ***отрезком интегрирования***.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью *Ox*, сбоку – прямыми *x*=*a* и *x*=*b*, называется ***криволинейной трапецией***.

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Основными свойствами определённого интеграла являются следующие:

- постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

- определённый интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

- если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит знак на противоположный, т.е. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

- если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю, т.е. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

- определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$;

- если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбит на две части $[a,c]$ и $[c,b]$ и если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Для вычисления определённых интегралов используется ***формула Ньютона-Лейбница***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ - любая первообразная функция для $f(x)$.

Лекции №5.

Оценка несобственного интеграла

Пусть функция f (x) определена на интервале X =(a,b). Говорят, что в точке x0 ∈ X функция f имеет локальный максимум (минимум), если существует такое δ> 0 , что для всех x из δ - окрестности точки 0 x выполняется неравенство ()() 0 f x ≤ f x (()()) 0 f x ≥ f x , () 0 x U x ∀∈δ . Если в любой точке этой окрестности, за исключением точки 0 x , имеет место строгое неравенство ()() 0 f x < f x (()()) 0 f x > f x , то точка x0 ∈ X называется точкой строго локального максимума (минимума), а значение функции в ней – строгим локальным максимумом (минимумом). Точки локального максимума и минимума называются точками локально экстремума, а значения функции в них – локальными экстремумами функции. Если функция f определена на отрезке [a, b] и имеет локальный экстремум на каком-то из концов этого отрезка, то такой экстремум будем называть локальным односторонним экстремумом. В этом случае соответствующая δ- окрестность является правой для a и левой для b полуокрестностью. Теорема Ферма. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x (a, b)0 ∈ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке 0 x существует конечная производная () 0 f ′ x , то f ′(x0)= 0 . Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в следующем: если точка x (a, b)0 ∈ является точкой локального максимума или локального минимума функции и существует () 0 f ′ x , то касательная, проведенная к графику функции в точке (()) 0 0 x , f x , параллельна оси Ox . Теорема Ролля. Пусть функция f непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) и f (a)= f(b) . Тогда существует хотя бы одна точка c , a < c < b , такая, что f ′(c)= 0 . Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: при выполнении условий теоремы внутри отрезка [a, b] обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику f в точке (c, f (c)) параллельна оси Ox . Теорема Коши. Пусть функции f и g непрерывны на отрезке [a, b], дифференцируемы во всех точках интервала (a, b) , причем g ′(x)≠ 0 , ∀x∈(a, b). Тогда на (a, b) найдется точка c , такая, что ()()()()() g (c), то есть отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению их производных в точке c . Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при g(x) = x . Геометрический смысл теоремы Лагранжа следующий: при выполнении условий теоремы внутри отрезка [a, b] обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику f в точке (c, f (c)) параллельна прямой, проходящей через точки (a, f (a)) и (b, f (b)). Следствием теоремы Коши является правило Лопиталя–Бернулли, представляющее собой совокупность теорем, позволяющих вычислять пределы, связанные с раскрытием неопределенностей типа 0 0 и ∞∞ . При этом сложные по своей природе задачи вычисления пределов сводятся к сравнительно простым задачам вычисления производных. Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (x ,b) 0 , причем g ′(x) ≠ 0 для всех x (x ,b)∈ 0 . Пусть также lim( )lim ( ) 0 0 0 0 0 ==→+→+ f x g x xxxx . Если существует (конечный или бесконечный) предел ( ) ( ) lim 0 0 g x f x xx′′→+ , то существует и ( ) ( ) lim ( ) ( ) lim 0 0 0 0 g x f x g x f x xxxx′′=→+→+ . Эта теорема будет справедлива с очевидными изменениями также в случаях x → x0 − 0 и 0 x → x . Пусть функции f и g дифференцируемы при x > M , причем g ′(x) ≠ 0 для всех x > M . Пусть также lim( )=lim ( ) = 0 →+∞→+∞ f x g x xx . Если существует (конечный или бесконечный) предел ( ) ( ) lim g x f x x′′→+∞ , то существует и ( ) ( ) lim ( ) ( ) lim g x f x g x f x xx′′=→+∞→+∞ . Данная теорема с очевидными изменениями будет справедлива и в случае x →−∞. Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (x ,b) 0 , причем g ′(x) ≠ 0 для всех x (x ,b)∈ 0 . Пусть также =∞→+lim( ) 0 0 f x xx и =∞→+lim ( ) 0 0 g x xx . Если существует (конечный или бесконечный) предел ( ) ( ) lim 0 0 g x f x xx′′→+ , то существует и ( ) ( ) lim ( ) ( ) lim 0 0 0 0 g x f x g x f x xxxx′′=→+→+ . Данная теорема остается справедливой также в случаях x → x0 − 0, 0 x → x , x →+∞, x →−∞. Правило Лопиталя–Бернулли дает также возможность раскрывать неопределенности типа 0 0 , 0 ∞ , ∞ 1 , 0⋅∞, ∞−∞. Действительно, неопределенности типа 0 0 , 0 ∞ , ∞ 1 можно свести к неопределенности 0⋅∞, предварительно прологарифмировав соответствующее выражение или воспользовавшись тождеством g f g f f e e g lnln==(f > 0). Неопределенность же типа 0⋅∞ (f →0 , g →∞) сводится к неопределенности типа 0 0 или ∞∞ следующим образом: (g) f f g 1/ ⋅= или (f) g f g 1/ ⋅= . Для неопределенности∞−∞ (f →∞, g →∞) получаем ()()()()(f)(g)g f f g f g 1/ 1/ 1/ 1/ 1/ 1 1/ 1 ⋅−−=−= , и тем самым неопределенность ∞−∞ сводится к неопределенности 0.

Лекция 8 Дифференциальные уравнения

Диф. Ур. Называется уравнение связывающее независимую переменную x, искомую функцию y=f(x) и ее производную

Общий вид диф. ур. Записывается f(x,y,y’,y^n…)=0

Порядком диф. ур. Называют порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение

Всякая функция y=ф(x) которая будуи подставлена в диф. ур. Называется реш. уравнения

Решение диф. ур., записанное в неявном виде, называется интегралом этого уравнения siny=ф(x)

А действие интегрирования называется квадратура

Y=ф(x,C1,C2,…,Cn)

Всякое решение диф.ур. которое получается из его общего решения если принимают опр. значения произвольные постоянно в него входящие назыв. частным решением этого диф. ур.

Произвольные постоянные C1, C2, Cn определяются из доп. условия y(x0)=y0,y(x0)=y0;… $y^{(n-1)}$(x0)=$y0^{(n-1)}$; y^n(x0)=$y0^{(n-1)}$

Диф. ур. называется задачей Коши

Общий вид f(x)yy’=0

Диф. ур. можно записать в виде f(x,y)dx+p(x,y)dy=0; dy/dx=f(x,y)

Задача Коши для диф. ур. имеет вид $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x0) = y0 \end{cases}$

Существуют определенные условия при которых решение задачи Коши сущ и единственно в том числе и для диф. ур. первого порядка

Рассмотрим диф. ур. с раздельными переменными

M(x)dx+N(y)dy=0

M(y)dx=-N(y)dy=0

В этом ур. слева стоит диф. ур. функции от x а с права от y. Тогда взяв интеграл от обеих частей и добавив постоянный интеграл получим решение

$$\int M(x)dx = \int N(y)dy + C$$

Это общий интеграл исходных диф ур записанный в квадратурах. Подобные диф. ур. могут быть записанны так dy/dx=M9x)/N(y)

Диф. ур. с разделяющими разделенными P1(x) q;(y)dx+P2(x)=ydy=0

Это ур. приводит к ур с разделенным делениемобеих его частей на P2(x) q1(y) при этом получаем P1(x)/P2(x)dx+q2(y)/q1(y)dy=0

От сюда получим общий интеграл

$$\int \frac{P1(x)}{P2(x)}\,dx = -\int \frac{q2(y)}{q1(y)}dy + C$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

y'=f(x,y) есть однородн. функция нулевого порядка

f(λx,λy)=λf(x,y)=f(x,y)

Обозначим, что правая часть равна 0 и так ур приобретает вид x'=ф(y/x) диф. ур. называется однородным диф. ур-ом первого порядка

Решаются такие ур-ния с помощью замены переменной u=y/x или y=x/u

y'=u+xu'

u+xu'=ф(u)

xdu/dx=ф(u)-u

Разделим переменные. Получим du/ф(u)-u=dx/x все что к u в лев часть, все что к x в правую часть

$$\int \frac{du}{\phi(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\int \frac{du}{\phi(u)-u} = lnx + C$$

Вычислим интеграл в левой части и подставим в место uy/x получим исходный интеграл общего уравнения например y^2+(x^2-xy)y'=0 обе части делим на x^2 (y/x)^2+(1-y/x)dy/dx=0

dy/dx=((y/x)^2)/((y/x)-1)

$z = e^{(n-1)\int p(x)dx}\left[C_1 + (1-n)\int q(x) e^{(1-n)\int p(x)dx} dx\right].$

Находим это общ. реш-е. Нах-м y

$$\boxed{y = z^{\frac{1}{1-n}}}$$

Лекция 9

Лин. диф-ур-ие 2го пор-ка с пост-ми коэф-ми.

Это ур-ие им-т вид:

$y'' + py' + qy = f(x)$ (1), p, q - зад. const
$f(x)$ - зад-ая ф-ия.

Это ур-ие 1 степени относительно иск-ой ф-ии (y), первой произв-ой (y') и 2ой (y'')

Если правая часть $f(x) = 0$, то

$y'' + py' + qy = 0$ (2) - наз-ся однородным лин ур-м без правой части

Общее реш-ие диф ур-ия 1 предст-т собой сумму общего решения соотв-го однородному реш-нию 2 и какого-то частного решения однородного реш-ия 1. $y = y_0 + \bar{y}$ (3) - общее решени ур-ия 2.

$\bar{y}$ - частное неоднородное реш ур. 1.

Эта формулировка - принцип суперпозиции (для лин. ур.) (Σ реш - явл реш-м)

Общее решение однородного диф-го ур-я 2го порядка.

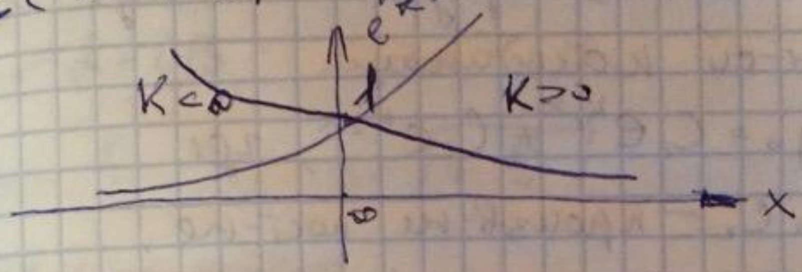
Общ. реш-ие в силу линейности ур-ия 2 предст-ся в виде лин-ой комбинации 2х частных лин-но независимых решений.

Запишем лин-ое предст-ое реш-ия 2.: $y_1 = e^{kx}$, $y_1' = ke^{kx}$, $y_1'' = k^2 e^{kx}$

Подставив это в 2, получим:

$k^2 e^{kx} + kpe^{kx} + qe^{kx} = 0$

$e^{kx}(k^2 + kp + q) = 0$



т.к $e^{kx} \neq 0$

$k^2 + pk + q = 0$ (4) – характеристическое уравнение относительно k.

Если k – корень ур-ия, то e^{kx} – явл-ся реш-м ур-ия (2).

Р-м разн-ые случ-аи корней хар. ур. (характеристическое уравнение):

1. корни действ-ые и разные

$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $\frac{p^2}{4} - q > 0$

$y_{ч1} = e^{k_1 x}$, $y_{ч2} = e^{k_2 x}$

$\frac{y_{ч1}}{y_{ч2}} = e^{(k_1-k_2)x} \neq const$ – это озн-т лин-ую независимость.

Тогда ~~обще~~ общее реш-ие однор-го реш-ия (2) предст-ся в виде его лин-ой комбинации

$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где

C_1 и C_2 — произв-ные пост-ные.

(4)

2. Корни хар.-ур. дейст-ые и равные

$K_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $\frac{p^2}{4}-q=0$

тогда имеет место 2 частных лин незав-х решения

$y_{ч1} = e^{k_0 x}$, $y_{ч2} = xe^{k_0 x}$, $K_0 = -\frac{p}{2}$

$\frac{y_{ч1}}{y_{ч2}} = x + const$

x_0 — 1 кр. корень хар-го ур-ия

Тогда общ-ее реш-ие зап. в виде.

$y_0 = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x}$

Подст-ой в диф ур можно проверить.

3) корни хар ур комп-но сопр-ые

$$K_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0$$

$$K_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = -\frac{p}{2} \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

~~$\frac{y_{ч1}}{y_{ч2}} = e^{\alpha x} \ne \text{конст}$~~

Частное реш-ие им-т вид:

$$y_{ч1} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_{ч2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \qquad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

$$\cos \beta x + i \sin \beta x = e^{i\beta x}$$

$$\cos \beta x - i \sin \beta x = e^{-i\beta x}$$

Общее реш. диф ур (2) им-т вид: $y_о = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Частное реш-ие лин-го неодн-и диф-ур-ия (1) с пост-ми коэф-ми.

Частное ~~диф~~ реш-и неоднор-го ур-ия (1) по виду правой части.

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

Если 1. $f(x) = e^{mx} \cdot P_n(x)$, где

$P_n(x)$ - многочлен с зад-ми коэф-ми

В этом случае ~~коэф~~ неод-ое реш. 1

можно представить в виде

$y = x^{\lambda} e^{mx} Q_n(x)$, здесь $Q_n(x)$ - многочлен в той же степени n, но с неиз-ми коэф-ми, кот-ые находятся в процессе реш-ния по методу неоп-х коэф-в приравн-ие коэф при од-х степенях ~~частях~~ x в левой и правой час-х ур-ния. При этом $\lambda = 0$, если корни соот-го хар-го ур-ия 4 не совпадают с m, m - не явл-ся реш-м хар. ур. $\lambda = 1$, если m - однократный корень хар. ур, $\lambda = 2$, если m - двукратный корень хар ур (4)

2. Более общ-ий случай

Если $f(x) = e^{mx}[P_{n1}(x)\cos bx + P_{n2}\sin bx]$, где $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ – заданные многочлены в степени ~~n~~ n, тогда частное реш-ие диф ур (1) можно искать в виде:

$$y = x^{\lambda} e^{mx}[Q_{n1}\cos bx + Q_{n2}(x)\sin bx]$$

где $Q_{n1}(x)$ и $Q_{n2}(x)$ многочлены той же степени n с неизв-ми коэф-ми, кот. опр-ся по методу неопр-х коэф-в. При этом $\lambda = 0$ если $m \pm il$ не явл-ся корнями хар ур 4, $\lambda = 1$, если $m \pm il$ – явл корнями хар ур 4.

Другой способ получ-ия реш-ия метод вариаций произв-х пост-х рассм-м на практике.

Реш-ие задачи Коши для диф ур-ния 2го пор-ка.

$y\cancel{(x_0)}$

$$\begin{cases} y''+py'+qy=f(x)\\ y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0' \end{cases}$$

Чтобы найти частное реш-ие нужно найти общее диф. реш (1) и подст-ть в нач-ое усл-ие **(5)**.

$y=y_0+\bar{y}$

$$\left.\begin{aligned} y_0(x_0)+\bar{y}(x_0)&=y_0\\ y_0'(x_0)+\bar{y}'(x_0)&=y_0' \end{aligned}\right\}(6)$$

При этом мы получаем сис-му лин-х алг-х ур-ий относительно пост-х C_1 и C_2, вход-х в общ. реш-ие соотв-го общ ~~реш~~ ур-ия (2)

Опред-т эти пост-ые C_{10} и C_{20} и тем самым выделяем частное реш-ие удовл-ее нач-м усл-ие

Диф ур-ие допускающее понижение порядка.

1. $y^{(n)} = f(x)$, Реш-е посл-ем n кратным инт-м этого ур-ия. (правая часть не сод-т y)

Например

$$y^{IV} = \sin x \Rightarrow y''' = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$$

$$y'' = -\int \cos x\,dx + C_1 x = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y' = -\int \sin x\,dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x = \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$y = \int \cos dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_1 x = \sin x + C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4 \frac{x}{0!}$$

Ур-ие не сод-т в явном виде неиз. 1-ую ~~искомую~~ ф-ию. и ее мл-ую ф пр-ую ~~Ур-ие~~

2. $F(x, y^k, y^{k-1}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Д-м замену.

$y^k = z,\ y^{k+1} = z' \ldots y^{(n)} = z^{(n-k)}$

и относит-но z это ур-ие прин-т вид

$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$

3. Ур-ие не сод-т в явном виде x

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Порядок ~~это~~ такого ур-ия может быть понижен на 1 y с пом-го след. приема: $y' = p(y)$, $y'' = p'(y) = pp'(y)$

Т.обр. нее нах-ся и все от-ые производные т.е пон-ся пор-к на 1.

Например для дифура 2го пор-ка

$F(y, y', y'') = 0$

$y' = p(y)$, $y'' = pp'(y)$ и $F(y, p, pp'(y)) = 0$

Получ-м диф- 1го пор-ка.

Находим $p = f(y, C_1)$

затем реш-м диф ур $\frac{dy}{dx} = f(y, C_1)$

$\frac{dy}{f(y, C)} = dx$ это ур-ие с раз-ми пер-ми.

$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2$ - общ-ий инт-л мин-ой квадратуры

Лекция 10

Примеры реш-ия задач. 1в

Лекция №10

Примеры решения задач Коши.

1) Дифференцируемое уравнение первого порядка:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} = x \sin x$$

Для получения общего решения применим метод Бернулли

$y = u(x) * v(x)$

$y^{'} = u^{'}v + u^{'}v$

Подставим эти формулы в исходное диф. уравнение

$u^{'}v + uv^{'} - \dfrac{uv}{x} = x \sin x$

Перепишем уравнение в виде

$\left(u^{'} - \dfrac{u}{x}\right)v + uv^{'} = x \sin x$

Принимаем, что: $u^{'} - \frac{u}{x} = 0 \ \ (1)$

Тогда от уравнения остается:

$v^{'} = \frac{x}{u} \sin x$ (2)

Уравнение (1) это уравнение с разделяющимися переменными, разделим их на Х

$\dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x}$

$\ln u = \ln x$

u= x

Подставим это выражение в уравнение (2)

$v^{'} = \sin$

$dv = \sin x dx$

Интегрируем обе части

$v = \int \sin x dx$

$v = -\cos x + c$

Тогда решение запишем в виде

$y = x * (c - \cos x)$

Общее решение исходного уравнения

$y = e^{-\int pdx}(c + \int qe^{\int pdx}\, dx$

$p = -\frac{1}{x}$, $\qquad q = x \sin x$

В общем случае имеем:

$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[c + \int x \sin x \, e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right]$=x$[e - \cos x]$

Удовлетворим начальному условию

$1 = \frac{\pi}{2}(\mathrm{c} - \cos\frac{\pi}{2}) => 1 = \mathrm{c} * \frac{\pi}{2} => \mathrm{c} = \frac{2}{\pi}$

$y = x\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)$

В общем виде имеем: $y = e^{-\int pdx}\left[c + \int qe^{\int pdx}\, dx\right]$

$$y' + p(x)y = q(x) - \text{ общий вид диф. уравнения первого порядка}$$

Имеем: $u' + p(x)v = 0 \quad (1'); \; y = u * v$

$$uv' = q(x) \quad (2')$$

Из $(1') = \frac{dv}{v} = -p(x)dx \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{q}{u}$

$\ln v = -\int p(x)dv \qquad dv = \frac{q}{u} * dx$

$v = e - \int p(x)dx$

В результате получим:

$y = e^{\int pdx}\left[c + \int q(x)e^{\int pdx}\, dx\right]$- общее решение

Удовлетворим условию

$y = (x_0) = y_0$

$y = e^{-\int x_0} p(x)\left[y_0 + \int q(x)e\right]$

Задача Коши для линейного диф. уравнения второго порядка.

Запишем однородное уравнение соответствующее диф. уравнению (3)

$y" - 2y' + y = 32e^{\int x}$ (3)

$y(0) - 0\,, \qquad y^{'}(0) = 2 \;\; (4)$

$y" - 2y' + y = 0 \;\; (5)$

Характеристическое уравнение для него имеет вид:

$k^2 - 2k + 1 = 0 \;\; (6)$

Находим корни:

$k_1 = k_2 = 1$-один двухкратный корень

Общее решение имеет вид:

$y_0 = c_1 C + c_2 x e^x$

Найдем частное решение по виду правой части:

$f(x) = e^{5x} * 32$

Показатель 5 не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение заканчивается так:

$\bar{y} = x^0 e^{5x}\,(A)$

Тогда: $\bar{y}^{'} = 5e^{5x}A$

$\bar{y}" = 25e^{5x}A$

$25e^{5x}A - 2 * 5e^{5x}A + e^{5x}A = e^{5x} * 32 => A = 2$

$16A = 32 => A = 2$

$\bar{y} = e^{5x} * 2$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2e^{5x}$

Найдем:$y^{'} = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x) + 10 * e^{5x}$

И удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + 2 \\ 2 = c_1 + c_2 + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -2 \\ c_1 + c_2 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = -6 \end{cases}$$

Получим решение задачи:

$y = -2e^x - 6xe^x + 2e^{5x}$

Получение частного решения методом вариации произвольных постоянных.

Сначала рассматриваем соответствующее однородное уравнение (5) м находим его общее решение:

$y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x$

Получаем, что c_1 и c_2- есть функции от x

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$$

Найдем производную с учетом этого замечания

$$y_0' = c_1'(x)e^x + c_2(x)xe^x + c_2'(x)xe^x + c_2(x)(e^x + xe^x)$$

Получим

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0(*)$$

и получим

$$y_0' = c_1(x)e^x + c_2(x)\ (e^x + xe^x)$$

Вид такой же, когда c_1 и c_2=const.

Найдем вторую производную

$$y''_0 = c_1'(x)e^x + c_1\ (x)e^x + c'_2(x)(e^x + xe^x) + c_2(x)(e^x + xe^x + e^x)$$

И подставим эти выражения в однородное диф. уравнение (3)

$c_1'(x)e^x + c'_2(x)(e^x + xe^x) + c_1(x)e^x + c_2(x)\big(2e^x + xe\quad\big) - 2[c_1(x)e^x + c_2(x)(e^x + xe^x)] + c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x = 32e^{5x}$

Получим:

$$c_1'(x)e^x + c'_2(x)(e^x + xe^x) + c_1(x)[e^x - 2e^x] + c_2(x)[2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x] = c$$

Получаем:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c'_2(x)xe^x = 0(*) \\ c_1(x)e^x + c'_2(x)(e^x + xe^x) = 32\mathrm{C}(*)(*) \end{cases}$$

Запишем уравнение со * и с ** под систему

Эта система лин. алгебраич. уравнений для определения c_1' и c'_2

Определитель этой системы есть определитель Вронского, и он всегда отличен от 0

$$V = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{-x} \neq 0$$

Находим дополнительный определитель:

$$V_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 32 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = 32e^{6x}$$

$$V_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 32e^{5x} \end{vmatrix} = 32e^{6x}$$

Найдем:

$$c_1'(x) = \frac{V_1}{V_2} = -32e^{4x}$$

$$c'_2(x) = \frac{V_2}{V_1} = 32e^{4x}$$

$$c_1(x) = -32\int xe^{4x}dx = \begin{Bmatrix} x = 4 & dx = du \\ e^{4x} & dx = du, \quad v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{Bmatrix} = -\left(\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}\int xe^{4x}\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + c_1$$

$$c_2(x) = 32\int xe^{4x}dx = 8e^{4x} + c_2$$

$$y = [(-8xe^{4x} + 2e^{4x}) + c_1] + (8e^{4x} + c_2)xe^x = c_1c^x + c_2xe^x + 2e^{5x}$$

Лекция 11

Ряды

Суммой членов этой последовательности называется числовым рядом называется общим членом ряда

Если члены ряда

1) Число- то ряд числовой
2) Числа одного знака – знакопостоянный
3) Положительные числа- знакоположительный
4) Числа разных знаков- знакопеременный
5) Знаки членов ряда чередуются – знакочередующийся
6) Члены ряда функции-функциональный
7) Члены ряда где есть степень х- степенный
8) Члены ряда тригонометрические функции- тригонометрический

Определение

Числовые ряды называется ряд один ,где члены ряда числа

Определение

Сумма конечного числа членов ряда ,состоящая из первых членов ряда один, называется частичными суммами этого ряда

Каждому числовому ряду один можно сопоставить частичную сумму этого ряда ,гдеS1=U1,S2=U1+U2,Sn=U1+U2+…..+Un

Определение

Если при бесконечном возрастание номера «n»существует конечный предел Sn=S, то ряд называется сходящимся ,S- сумма сходящегося ряда

Определение

Если не существует конечного предела ,то ряд называется расходящимся

Если ряд сходится ,то значение «Sn» для ряда 1при достаточно большем «n» является приближенным выражением суммы ряда «S»

Определение 2n=S-Sn – называется остатком ряда

Если ряд сходится, то $Zn_{n\to 0} \to 0$

$\lim_{n\to 0} Zn = 0$,то ряд сходится

Примеры числовых рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{aq^n} = \boldsymbol{a + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}, a} \neq 0$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Sn=a $+$ aq $+ \cdots +$ aq^{n-1} $= \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

а) |q |<1 $\lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$ – ряд сходится

б) q=1 a+a+….+a=na

Sn=na $\to_{n\to\infty} \infty$

в) q=-1

a+a+….+$(-1)^n a$ ={ 0-n- четная , a-n- нечетная – предела нет

г) |q |>1 $\lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(\frac{1}{a}-a^n)}{a(\frac{1}{a}-1)}$

a$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{-1}-1/a}{1-1/a}$=∞ - ряд сходится

Данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$

МетодШенке

S1=a

S2=a+aq

S3=a+aq+aq^2

e1(S2)=$\frac{S1S3-S2^2}{S1+S3-2S2} = \frac{a(a+aq+aq^2)-(a+aq)^2}{a+a+aq+aq^{2)}-2(a+aq)} = \frac{-a^2q}{-aq+aq^2} = \frac{a}{1-q}$

2) $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} =$ гармонический ряд

$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}$)эта сумма больше суммы представленной следующим образом

Sn>$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + .. + \frac{1}{16}\right)$

Sn>$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

$$\lim_{N\to\infty}[1+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}(\ n-1)]$$

3)p=1 ряд превращается в гармонический и он расходится

4)p<1 , то член данного ряда больше соответствует членам гармонического ряда ,который расходится

p>1 , то ряд сходится

Теория о сходящихся рядах

1) a1+a2+…+an=S (3) αa1+ αa2+… αan= αS
2) если ряд (3) сходится ,то сходится и ряд a1+an2+2+… - называемым остатком исходного ряда и наоборот .Остаток получим первых n-членов ядов
3) b1+b2+…bn=   (4)

(a1+b1)+ (a2+b2)+….+ (an+bn)+….=S+

4)Если ряд (3) ,его сумма равна S$\lim_{n\to\infty} an=0$- это необходимый признак сходимости , он же является достаточным признаком не расходимости ряда

$\lim_{n\to\infty} an\neq 0$- то ряд расходится

Лекция 12

3

Знакочередующиеся ряды. Ряд из абсолютных величин его членов гармоничен и он расхододится.

1+1/2+1/3+…=1/n+…

Функциональные ряды:

A0+a1z+a2z^2+…+an^n+…(4)

An – коэффициент ряда, z – комплексная величина

Основная теорема(1)

Для степенного ряда существует число R (0<=R<беск) конечное или бесконечное оюладает следующими свойствами:

1) Ряд сходится абсолютно в открытом круге комплексное плоскости IzI<R и расходится в точках, где IzI>R
2) Число R определяется по формуле:
   R=1/lim$\sqrt{\ \ } an$
   1/беск =0, 1/0=беск – тогда если указанный верхний предел = 0, то R=беск, если он = беск, то R=0.
   Открытый круп IzI<R – круг сходимости степенного ряда, при R=беск он превращается в комплексную плоскость.
   При R=0 степенной ряд имеет 1 точку сходимости z=0. Эту величину R называют радиусом сходимости.
   Замечание. Очевидно, что R единственно.
   Если для ряда (4) существует обычнй предел, то он равен верхнему пределу. Поэтому R=1/$lim\sqrt{An}$
   Доказательство теоремы (1)
   Пусть число R определяется формулой (5) В точке z ряд сходится.
   R=1/$lim\sqrt{An}$
   Будем считать, что модуль z>0. На ряду с рядом введем второй ряд, состоящий из абсолютных величин членов данного ряда.
   Ia0I+Ia1Zi+IA2Z^2I+…+Ianz^nI+…(6)
   Общий член ряда (6) – Un=I Ianz^n I , n = 0,1,2,3….

Лекция 13

Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция f(x) бесконечное число раз дифференцируема в интервале (-R;R)оси OX.

Представим ее в виде разложения в ряд $f(x)=C_0 +C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n$, в том же интервале, который является интервалом сходимости степенного ряда.

Коэффициент ряда вычислим через значение этой функции и ее производных в точке x=0 по следующей формуле: $C_n=\frac{1}{n!}f(0)$,подставив эти значения в степенной ряд получим что $f(x)=f(0)+ \frac{1}{1!}f`(0)x +\frac{1}{2!}f``(0)x^2\ldots$.

Правая часть формулы называется рядом Маклорена.

В более общем случае $f(x)=f(0)+ \frac{1}{0!}f`(x_0) +\frac{1}{1!}f``(x_0)(x-x_0)+ \ldots +\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+k(x-x_0)$, $0<k<1$.

В этом случае интервал сходимости $–R<x-x_0<R$.

В правой части ряд называется рядом Тейлора.

$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+k(x-x_0)$-остаточный член ряда Тейлора.

Таким образом мы имеем f(x)=Sn(x)+ Rn(x).

В случае ряда Маклорена нужно положить $x_0=0$.

Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция f(x) представляла сумму ряда Тейлора(Маклорена) необходимо и достаточно, чтобы остаточный член ряда стремился к 0, при n стремящемся к бесконечности.

Отметим что это условие выполнено, если все производные f(x) ограничены одним и тем же числом по модулю.

Например: f(x)=sinx, $|sinx|<=1$,$|cosx|<=1$

f’(x)= cosx= sin(x+п/2)

f’’(x)=-sinx=sin(x+п), $f^{n'}(x)=sin(x+n*п/2)$

$|sin(x+n*п/2)|<=1$, ряд Маклорена для f(x)=sinx сходится.

Степенной ряд можно почленно интегрировать, поэтому можно вычислять приближенное значение определенного интеграла не прибегая к его вычислению.

Лекция №14

Ряды Фурье

Функция F(x), на промежутке [-pi;pi]называется тригонометрический ряд.

$$\frac{a_0}{2} + \int_{pi}^{pi} (a_n \sin^n x + b_n \sin n - x)$$

$$a_n = \frac{1}{pi} + \int_{-pi}^{pi} f(x) \cos x dx (n = 0,1,2 \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{pi} + \int_{-pi}^{pi} f(x) \sin x dx (n = 1,2 \dots)$$

При этом если x_0точка разрыва функции f(x) первого рода, то сумма ряда Фурье, определяет функцию, совпадающую в точках непрерывности и с функцией f(x), а в точках разрыва первого рода, это сумма ряда

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(f_x - 0)}{2}$$

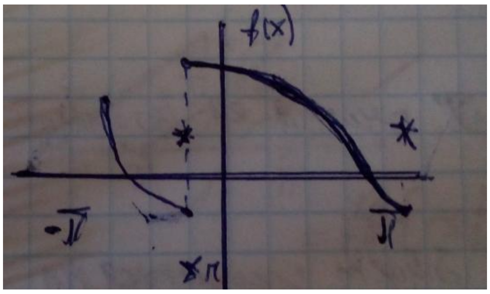
Условимся также, что значение суммы ряда Фурье для функции f(x), на каждой из границ отрезков (-pi;pi) принимает значение

$$f \frac{(-pi + 0) + f(pi - 0)}{2}$$

Теорема Дирихле

Если функция f(x), на [-pi;pi] имеет конечное число экстремумов и непрерывна, за исключением, быть может, точек разрыва первого рода, то ряд Фурье для функции f(x) сходится.

При этом легко видеть, что ряд Фурье является периодической функцией с периодом (2pi)



Если f(x) задана на [-l;l], где l произвольное число, то привыполнений условий Дирихле на этом отрезке, указанная сумма представляется в виде ряда Фурье.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\ (n=0,1,2,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\ (n=1,2\dots)$$

Если f(x) четная, то её ряд Фурье содержит только свободный член косинуса

$$f(x)\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi x}{l}\,dx,\ b_n=0.$$

Если не чётная, то её ряд Фурье содержит только синусы.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$

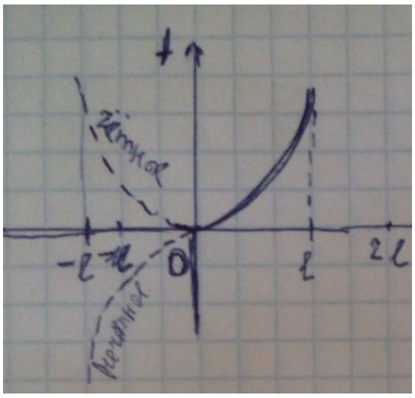
Если f(x)задана на половине интервала [a;l], то для разложения в ряд Фурье нужно доопределить эту функцию до интервала [-l;0], лишь бы выполнились условия.

А затем разложить в ряд Фурье, считая её заданной на отрезке [-l;l]

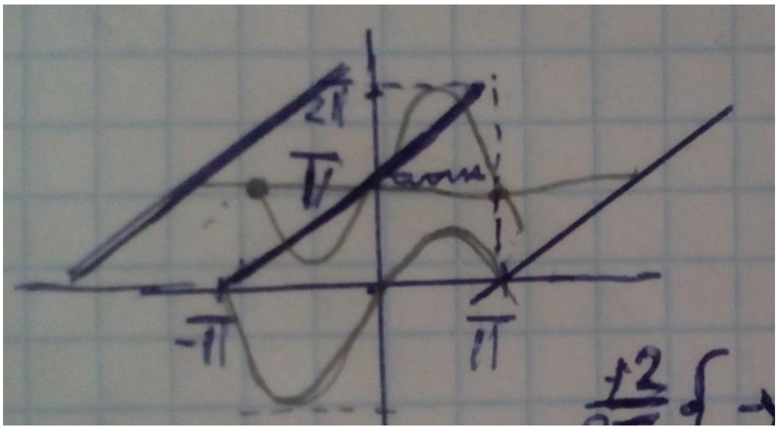
f(-x)=f(x)

Не чётной на [-l;l], то есть f(-x)=- f(x)

При этом коэффициенты определяются как указанно выше.



Пример: Разложить в ряд Фурье [-pi;pi] функцию f(x)= pi+x



$f(x) - \pi = x = \sum_{n=1} B_n \sin x$ – в силу нечётности

$B_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, du = dx & a_n = 0 \\ dV = \sin nx\, dx, & V = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\} =$

$= \frac{2}{2\pi}\left\{ -x\frac{1}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right\} =$

$= \frac{2}{2\pi}\left\{ -\frac{1}{n}\pi \underbrace{\cos n\pi}_{-1} + 0 + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + 0 + \frac{1}{n^2}(0-0) \right\} =$

$= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin x = \pi + 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}$

$\sin 3x - \ldots + \frac{2}{n}(-1)\sin nx$

Лекция №15

Двойные интегралы

Пусть требуется найти объем V цилиндрического тела. Плоскость z=0, а область D ограничивается линиями y= φ (x), y= ψ (x). При этом a≤x≤b.

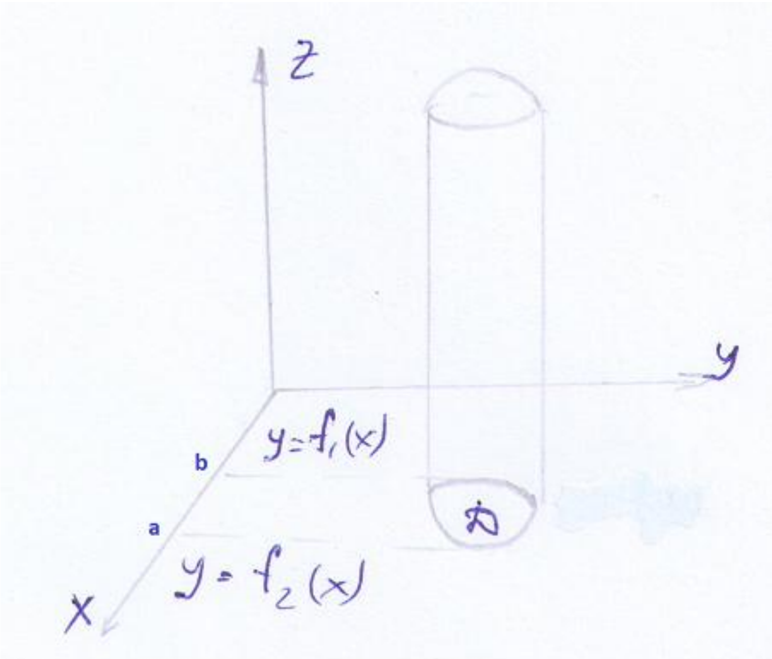


Рис. 1

Найдем приближенный объем этого тела. Для этого разобьем область Dна n-частичных плоскостей, площадями ΔS_1, ΔS_2,…, ΔS_n. Внутри каждой частичной области выберем произвольную точку $\varepsilon_i(x_i, y_i)$ и найдем значения функции f в этих точках. Далее рассмотрим сумму всех площадок $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta S_i = f(\varepsilon_1)\Delta S_1 + f(\varepsilon_2)\Delta S_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta S_n.$ Эта сумма имеет значение объема n-ступенчатой фигуры. Этот объем приблизительно равен объему цилиндрического тела.

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ иmax$\Delta S_n \to \infty$. В пределе получим двойной интеграл области D$\iint_D f(x,y)dS$, который численно равен D. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dS.$

Для функции f(x,y) стоящей справа под знаком интеграла … стоящий слева существует и не зависит от разбиения области D на частичные области. В точках случая x=const, y=const частичные области превращаются в прямоугольники $\Delta S_i = \Delta x_i * \Delta y_i$. При этом элемент площади dS=dx*dy и следовательно $\iint_D f(x,y)dxdy$

Вычисление двойного интеграла. Двукратный интеграл.

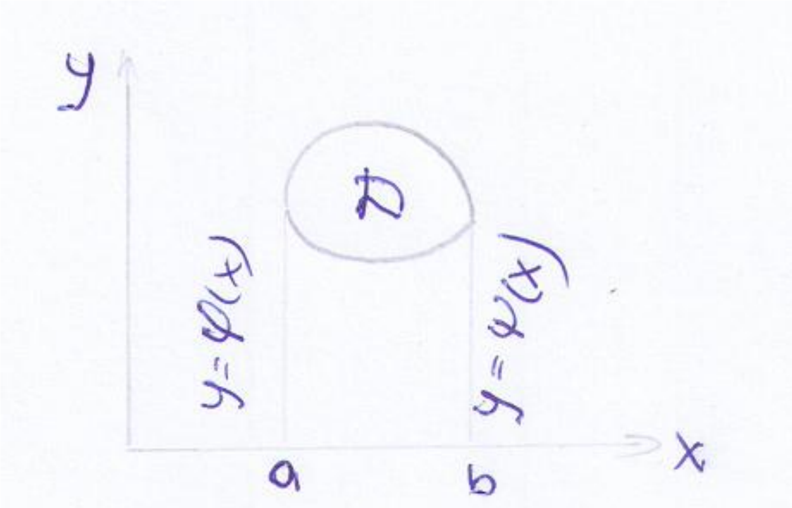


Рис. 2

Рассмотрим область D интегрированием. Если D ограничена сверху графиком функции, а снизу y= φ (x) и прямыми, при этом a≤x≤b, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi\ (x)}^{\psi\ (x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

справа в этой формуле стоит повторный или двукратный интеграл. Здесь сначала вычисляют внутренний интеграл, а затем внешний

Иногда удобно менять порядок интегрирования.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{c}^{d} \left[\int_{\theta\ (x)}^{3\ (x)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Если делается переходx=x(u,ϑ), y=y(u,ϑ). При этом элемент S определитель

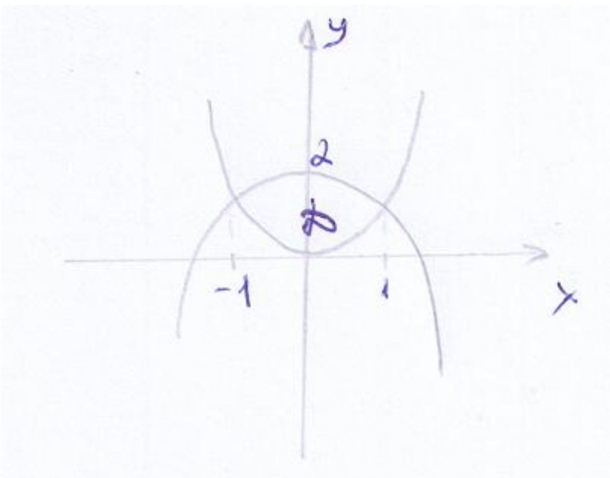


Рис. 3

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{d\vartheta} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{d\vartheta} \end{vmatrix} dud\vartheta$$

I=$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{d\vartheta} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{d\vartheta} \end{vmatrix}$— определитель Якоби.

$$\iint_D f(x,y)dxdy \iint_D f(x(u,\vartheta)y(u,\vartheta))Idud\vartheta$$

$y=x^2$, $y=2- x^2$

x^2=2-y$\Rightarrow x^2 = 2 - x^2; 2x^2 = 2; x = \pm 1$ (это точки пересечения абсциссы)

$$\iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{2-x^2}^{x^2} dy \right] dx$$

Тройной интеграл

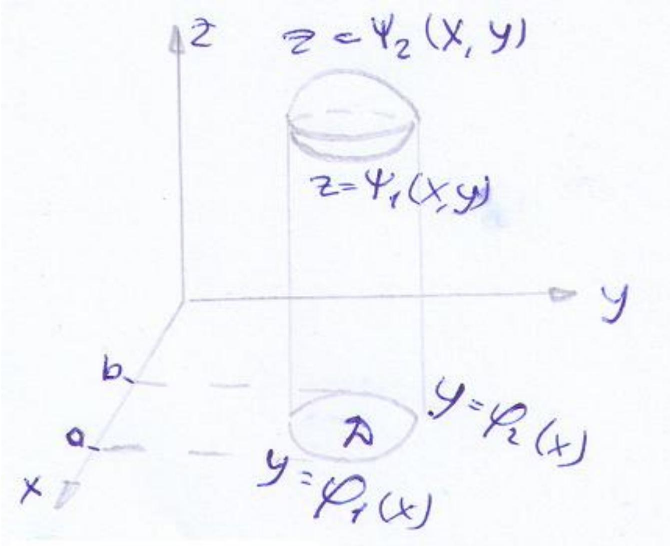


Рис. 4

Рассмотрим область Ω и функцию f(x,y,z) в этой области. Разобьем на n частей $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$,…, $\Delta\vartheta_n$и внутри каждой частичной области выберем точку ξ_i (x_i,y_i,z_i):

ξ_1 (x_1,y_1,z_1) … ξ_n (x_n,y_n,z_n). Рассмотрим значение функции f в этих точках и составим $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, x_i)\Delta\vartheta_i$– которая называется n-ой интегральной суммой для функции f(x,y,z) по области Ω.

Она дает приближенное значение массы сосредоточенное в Ω плотность которой = f(x,y,z) при пределе $n \to \infty$ и max$\Delta\vartheta_i \to \infty$. Получим массу сплошной среды в Ω. Если такой предел существует, то он называется тройным интегралом. А он существует для непрерывной функции f(x,y,z) и не зависит от способа разбиения области Ω и от выбора в них точек ψ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i, x_i)\Delta\vartheta_i = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)d\vartheta$$

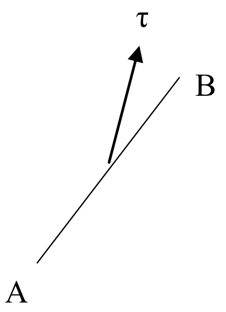
Если Ω разбивать на части: x= const, y=const, z=const, тогда элементарный объем dV=dxdydz

Лекция №16

Криволинейный интеграл

Рассмотрим в некоторой функции гладкую кривую АВ (А-начало, В-конец).

τ – ед. вектор, касательный в каждой её точке.



Координаты кас. вектора служат направлением τ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), где α,β,γ – углы, которые составляют с ортами i, j, k.

Выделяют элемент dl. Будем считать его прямолинейным с координатами dl (dx,dy,dz).

Так как дуга коллинеарнакас. τ, будем иметь $dx= dl\cos\alpha$, $dy= dl\cos\beta$, $dz= dl\cos\gamma$.

Пусть в пространство каждой точки область задана непрерывное векторное поле.

$F(x,y,z)= iF(x,y,z) + jF(x,y,z) + kF(x,y,z)$

$f(x,y,z)=F * \tau= P(x,y,z) \cos\alpha + Q(x,y,z) \cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma$.

Функция непрерывна в каждой точке.

Рассмотрим криволинейный интеграл по дугеАВ: $\int fdl = \int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl = \int Pdx + Qdy + Rdz)$ (1)

Разобьём дугу АВ на частичные дуги длиной Δli, внутри каждой из них выделяем точку $\xi i(x,y,z)$.

n

$\Sigma f (\xi i) \Delta li$ – n-ая интегральная сумма для крив. интеграла 1-го рода.

I=1

$n\to\infty$ $\max\Delta li\to 0$

Для непрерывной функции предел сущ. И даёт крив. интеграл 1-го рода по линии АВ, стоящий в левой части (1).

$\mathrm{Lim}\Sigma f (\xi i) \Delta l = \int fdl$.

$n\to\infty$AB

В правой части (1) стоит крив. интеграл 2-го рода. Он зависит от вектроного поля F, от выбора сис. коор. (α,β,γ).

Крив. интеграл по замкнутой кон. наз. Циркуляцией векторного поля Fпо замкнутой кон. l, которая всегда обходится в + направлении.

Область ограничения кривой находится слева.

Физический смысл (1) в том, что эта работа силы F (P,Q,R) по перемещению точки ед. массы по кривой AB.

Св-ва интеграла 2-го рода:

$\int P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz= -\int P(x,y,z)dx+ Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

BAAB

Меняем местами A и B.

В то же время интеграл 1-го рода не зависит от направления пути интегрирования. Остальные св-ва аналогичны св-ам опр. Интеграла.

1) Если кривая задана параметрически
2) x1<=x<=x2 ; y=y(x), z=z(x)

x2
$\int$fdl=$\int$ f(x,y,z) Z(x)$\sqrt{}$(1 + y^2 (x) + z^2 (x)dx)
AB x1

Лекция №18

Формула Стокса.

Формула Остроградского-Гауса.

Рассмотрим плоскую поверхность S, опирающуюся на гладкий контур C.

Формула Стокса:

ϕρ(x;y;z)dx+Q(x;y)z/dy+K(x;y;z)dz=$\int\int\left[\left(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta R}{\delta z}\right)cos\alpha+\left(\frac{\delta R}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x}\right)cos\beta+\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)cos\gamma\right]ds$ (1);

Формула Остроградского-Гауса:

$\int\int(Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)ds=\iiint(\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z})dxdydz$ (2)

Элементы теории поля

Пусть F(x;y;z) является вектором, определяющим векторное поле, т.е. является переменной точки пространства.

Pcos(x;y)=[P(x;y;z)tgQ(x;y;z)+TR(x;y;z)]=dl=idx+jdy+kdx

В левой части (1) стоит произведение kdl называемое скаляром divK=$\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}$.

Ротором векторного поля F называется векторное произведение Оператора Гамелтона на вектор F.

$r_0tF=\nabla xF$

$$r_0=\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{matrix}$$

Формулу (1) можно переписать, как

$\oint Fxde$=$\iint r_0tPD(1)$

(2) можно переписать, как

$\iint F\lambda ndl$=$\iiint_{\nabla}\ divFdxdydz$

Векторное поле называется безвихревым если rotF=0

Условие безвихренности имеет вид:

$$\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} = 0; \frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x} = 0; \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} = 0;$$

Если поле безвихревое, то оно положительное т.е. существует такая скалярная функция ϕ(x;y;z), что ∇ϕ=F

gradϕ=F

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} = P; \frac{\delta \phi}{\delta y} = Q; \frac{\delta \phi}{\delta z} = R;$$

gradϕ=i$\frac{\delta \phi}{\delta x}$+$\frac{z}{j}$$\frac{\delta \phi}{\delta y}$+$\frac{\delta \phi}{\delta z}$;

Рассм. дейст. ф-цию дейст.-го переменного $f(t)$ (Функция может быть комплексная)

Она должна удовлетворять:

1. Ф-я кусочно-непрерывная на $(-\infty, +\infty)$

2. $f(t) = 0$ при $t<0$

3. Сущ. такие числа $M>0$ и $S>0$ что при $t \geq 0$ выполняется неравенство: $\boxed{|f(t)| < M \cdot e^{S \cdot t}}$

Самая мал величина S - показатель роста ф-ии $f(t)$

Рассм. несобств. интеграл

комплекс величина

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{где} \begin{cases} p = a + ib \\ a>0 \end{cases}$$

$real\, p = a > 0$

Справа интеграл Лапласа

$f(t)$ - оригинал

$F(P)$ - изображение по Лапласу

$F(P) = L[f(t)]$; $F(p) \risingdotseq f(t)$

По опр. несобств. интеграла имеем

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{\gamma \to \infty} \int_0^{\gamma} f(t) e^{-pt} dt$$

Формула Эйлера как мы помним имеет вид $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

$$e^{-pt} = e^{-(a+ib)t} = e^{-at} \cdot e^{-ibt} = e^{-at}(\cos bt - i \sin bt)$$

$$\int_0^{\gamma} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\gamma} e^{-at}(\cos bt - i \cdot \sin bt) dt =$$

$$= \int_0^{\gamma} (e^{-at} \cdot \cos bt - i \cdot e^{-at} \cdot \sin bt) dt =$$

$$= \int_0^{\gamma} (e^{-at} \cos bt \, dt - i \int_0^{\gamma} e^{-at} \sin bt \, dt$$

Это справедливо для любого действ. знач. γ и для $\gamma \to \infty$.

Теорема

Если $f(t)$ имеет показатель роста $S < a$, то интеграл Лапласа сходится и явл. аналитической функцие. Т.о каждый $f(t)$ с $S < a$ ставится в соответствие некоторая аналит. ф-ия $F(p)$ называемая изображением по Лапласу.

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$$

при этом

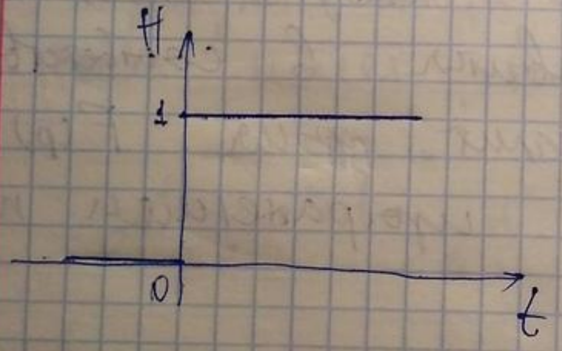
$$\frac{d^n F(p)}{d p^n} = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n \cdot f(t) e^{-pt} \, dt$$

Всё это верно в силу равномерной сходимости ин-ла Лапласа.

Найти изображение заданной ф-ции.

1. Ед. ф-ция. Хевисайда

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$



Отметим, что при $\gamma\to\infty$: $e^{-p\gamma}=e^{-a\gamma}(\cos b\gamma - i\sin b\gamma)=0$

Расим $L(H(t)) = \int_0^{\infty} H(t)\, e^{-pt}\, dt =$

$= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-at} dt = \lim_{\gamma \to \infty} \int_0^{\gamma} e^{-pt} dt =$

$= \lim_{\gamma \to \infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^{\gamma} = \lim_{\gamma \to \infty} -\frac{1}{p} e^{-p\gamma} - \left(-\frac{1}{p}\right)$

$= 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$

$$\boxed{L(H(t)) = L(1) = \frac{1}{p}}$$

Пример 2

$f(t) = e^{ct}$

$L(e^{ct}) = \int_0^{\infty} e^{ct} \cdot e^{-pt}\, dt = \int_0^{\infty} e^{(c-p)t}\, dt =$

$= \frac{1}{p-c}$

$$\boxed{L(e^{ct}) = \frac{1}{p-c}}$$

Лекция №20.

Двойные и тройные интегралы.

Пусть D некоторая замкнутая ограниченная область, а z = f (x, y) произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области. Потребуем также, чтобы граница этой области была кусочно-непрерывной, то есть состояла из конечного числа кривых вида y =φ(x) или x =ψ(y) , где φ(x) и ψ(y) непрерывные функции. Разобьем область D произвольно на n частей Di (i =1, n), таких что D1 Y D2 YKY Dn = D и Di I Dj =∅, i ≠ j . Обозначим ΔSi площадь Di (i =1, n). В каждой области Di выберем произвольно точку (,) i i i M x y и составим сумму ∑==Δ n i n i i Si S f x y 1 (,) . Сумма n S называется интегральной суммой для функции f (x, y) в области D . Диаметром d(D) области D называется наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим max ( ) 1 i i n d D ≤≤λ= . Если существует предел интегральной суммы n S при n →∞ и λ→ 0 , не зависящий ни от способа разбиения области D на части Di , ни от выбора точек Mi , то этот предел называется двойным интегралом от функции f (x, y) по области D , и обозначается ∫∫∫∫∑=λ→→∞λ→→∞===Δ n i i i i n n n D D f M d S f x y dxdy S f x y S 1 0 0 ( ) (,) lim lim (,) . Функция f (x, y) при этом называется подынтегральной функцией, D – областью интегрирования, x, y – переменными интегрирования, dS (или dxdy) – элементом площади. Функция f (x, y) , для которой в области D существует двойной интеграл, называется интегрируемой в области D . Отметим некоторые свойства двойного интеграла. 1) Если f (x, y) ≡1 в области D , то D D D dxdy = dxdy = S ∫∫∫∫ 1 , где SD – площадь области D. 2) Для любых постоянных α,β∈R [()()]()()∫∫∫∫∫∫α+β=α+β D D D f x, y g x, y dxdy f x, y dxdy g x, y dxdy. 3) Пусть D1 Y D2 = D и D1 I D2 =∅ , тогда.

∫∫∫∫∫∫=+ 1 2 (,) (,) (,) D D D f x y dxdy f x y dxdy f x y dxdy. Предположим, вначале, что функция f (N) интегрируема на прямоугольнике D . Отнесем плоскость, на которой находится область интегрирования D , к прямоугольной декартовой системе координат xOy , ориентированной таким образом, чтобы стороны прямоугольника были параллельны координатным осям. Поскольку f (N) интегрируема на прямоугольнике D , то двойной интеграл ()∫∫ D f N dS не зависит от способа разбиения D . Поэтому разобьем область D прямыми, параллельными осям Ox и Oy на элементы Dij , представляющие собой прямоугольники со сторонами Δ i = i − i−1 x x x , Δ j = j − j−1 y y y , где a = x0 < x1 <K< xn = b , c = y0 < y1 <K< ym = d ; a,b и c, d –

соответственно абсциссы и ординаты крайних сечений прямоугольника D . Учитывая, что в интегральной сумме точки (,) ξi ηj внутри прямоугольников Dij могут быть выбраны произвольно, положим i i ξ= x , j j η= y . Тогда N y x D f x y dxdy S j i (,) lim max 0 max 0 Δ→Δ→=∫∫ , где N = nm – число прямоугольников Dij в области D ; ∑∑===ΔΔ n i m j N i j i j S f x y x y 1 1 (,) – интегральная сумма. Перепишем интегральную сумму в виде ∑∑===ΔΔ n i m j N i i j j S x f x y y 1 1 (,) . Если теперь в этом выражении перейти к пределу при max Δy j → 0 , то получим ∑()∫∫Δ→=Δ→Δ→==Δ n i i i x N y x D f x y dxdy S F x x i j i 1 max 0 max 0 max 0 (,) lim lim , где ( ) i F x – значения функции ∫= d c F(x) f (x, y)dy в точках i x , i =1,n. Переходя к пределу в правой части последнего выражения при maxΔxi → 0 , находим

∫∫∫∫∫∫ ⎟⎠⎞⎜⎝⎛==Δ→Δ→ b a d c b a d c N y x D f x y dxdy S f x y d y d x d x f x y d y j i (,) lim (,) (,) max 0 max 0 . Аналогично можно показать, что ∫∫∫∫∫∫ ⎟⎠⎞⎜⎝⎛= d c b a d c b D a f (x, y)dxdy f (x, y)dx dy dy f (x, y)dx . Интегралы в правых частях двух последних формул называются повторными и позволяют свести задачу о вычислении двойного интеграла к последовательному вычислению однократных интегралов. Область D называется правильной или элементарной по отношению к оси Oy (Ox), если прямая, параллельная оси Oy (Ox) и проходящая через любую внутреннюю точку области D , пересекает границу Г этой области не более, чем в двух точках. Пусть функция f (x, y) интегрируема на правильной по отношению к оси Oy области D , ограниченной прямыми x = a, x = b и графиками функций ( ) 1 y =φ x и ( ) 2 y =φ x , причем ∀x∈[a,b] ( ) ( ) 1 2 φ x ≤φ x . Тогда двойной интеграл от функции f (x, y) по данной области D равен ∫∫∫φφ= b a x D x f x y dxdy dx f x y dy ( ) ( ) 2 1 (,) (,) . Одним из эффективных методов вычисления двойных интегралов является метод замены переменных. Пусть f (x, y) – непрерывная функция, определенная в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей Г . Рассмотрим криволинейные координаты u и v на плоскости xOy . Тогда отображение u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y)∈D преобразует область D в область * D на плоскости uOv . Тогда формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид ()()∫∫∫∫= * , (,), (,) [(,), (,)] D D f x y dxdy f x u v y u v J x u v y u v dudv, где ()() 0, (,) * , , [,] u v D y y x x u v x y J x y u v u v ≠∀∈′′′′=∂∂= – якобиан преобразования. Применяя эту формулу, например, в полярной системе координат ρ , φ , можно записать ()()∫∫∫∫=ρφρφρρφ * , cos , sin D D f x y dxdy f d d . Площадь σ плоской области D в этой криволинейной системе координат определяется формулой σ==ρρφ * D D dxdy d d . Пусть T некоторая замкнутая ограниченная область в 3 R , а u = f (x, y,z) произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области. Разобьем область T произвольно на n частей Ti (i =1,n), таких что T1 YT2 YKYTn = T и Ti ITj =∅, i ≠ j . Обозначим ΔVi объем Ti (i =1,n). В каждой области Ti выберем произвольно точку (, ,) i i i i M x y z и составим сумму ∑==Δ n i n i i i Vi S f x y z 1 (, ,) . Сумма n S называется интегральной суммой для функции f (x, y,z) в области T . Обозначим max ( ) 1 i i n d T ≤≤λ= . Если существует предел интегральной суммы n S при n →∞ и λ→0 , не зависящий ни от способа разбиения области T на части Ti , ни от выбора точек Mi , то этот предел называется тройным интегралом от функции f (x, y,z) по области T , и обозначается ∫∫∫∫∫∑=λ→→∞λ→→∞===Δ n i i i i i n n n T T f M d V f x y z dxdydz S f x y z V 1 0 0 ( ) (, ,) lim lim (, ,) . Функция f (x, y,z) при этом называется подынтегральной функцией, T – областью интегрирования, x, y,z – переменными интегрирования, dV (или dxdydz) – элементом объема. Функция f (x, y,z) , для которой в области T существует тройной интеграл, называется интегрируемой в области T . Отметим некоторые свойства двойного интеграла. 1) Если f (x, y,z) ≡1 в области T , то T T T dxdydz= dxdydz=V ∫∫∫∫∫ 1 , где VT – объем области T . 2) Для любых постоянных α,β∈R [()()]()()∫∫∫∫∫∫∫∫α+β=α+β T T T f x, y,z g x, y,z dxdydz f x, y,z dxdydz g x, y,z dxdydz . 3) Пусть T1 YT2 = T и T1 IT2 =∅ , тогда ∫∫∫∫∫∫∫∫=+ 1 2 (, ,) (, ,) (, ,) T T T f x y z dxdydz f x y z dxdydz f x y z dxdydz. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов.

Область 3 T ⊂ R называется правильной или элементарной по отношению к оси Oz (Oy или Ox), если прямая, параллельная оси Oz (Oy или Ox) и проходящая через любую внутреннюю точку области T , пересекает границу S этой области не более, чем в двух точках. Область T называется простой, если еѐ можно разбить на конечное число элементарных областей. Пусть функция f (x, y,z) непрерывна в правильной по отношению к оси Oz области T , ограниченной снизу и сверху поверхностями (,) 1 z = z x y и (,) 2 z = z x y , причем ∀M(x, y)∈D (,) (,) 1 2 z x y ≤ z x y , и ограничена с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью, параллельной плоскости xOy , является область D ⊂ xOy . Тогда тройной интеграл от функции f (x, y,z) по данной области T равен ∫∫∫∫∫= (,) (,) 2 1 (, ,) (, ,) z x y T D z x y f x y z dxdydz dxdy f x y z dz. Если правильная область D , ограничена прямыми x = a, x = b и графиками функций ( ) 1 y = y x и ( ) 2 y = y x , причем ∀x∈[a,b] ( ) ( ) 1 2 y x ≤ y x , то тройной интеграл от функции f (x, y,z) по области T равен ∫∫∫∫∫= (,) (,) ( ) ( ) 2 1 2 1 (, ,) (, ,) z x y z x y y x y x b T a f x y z dxdydz dx dy f x y z dz. Одним из эффективных методов вычисления тройных интегралов является метод замены переменных. Пусть f (x, y,z) – непрерывная функция, определенная в замкнутой ограниченной области T , ограниченной кусочногладкой поверхностью. Введем криволинейные координаты u , v , w , связанные с прямоугольными декартовыми координатами x , y , z взаимно обратными отображениями x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), (u, v, w)∈V *, u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z), (x, y, z)∈V . Тогда можно записать формулу замены переменных в тройном интеграле: ()()∫∫∫∫∫∫= * , , (, ,), (, ,), (, ,) [, ,] V V f x y z dxdydz f x u v w y u v w z u v w J x y z dudvdw, где ()() 0, (, ,) * , , , , [, ,] u v w V z z z y y y x x x u v w x y z J x y z u v w u v w u v w ≠∀∈′′′′′′′′′=∂∂= – якобиан преобразования. В частном случае для вычисления объема тела V применяется формула ∫∫∫∫∫== * [, ,] V V v dxdydz J x y z dudvdw. Очевидно, что в круговой цилиндрической системе координат ρ,φ,z формула замены переменных и выражение для объема v тела V имеет вид ()()∫∫∫∫∫∫=ρφρφρρφ * , , cos , sin , V V f x y z dxdydz f z d d dz, ∫∫∫∫∫==ρρφ V V v dxdydz d d dz * , а в сферической системе координат r,θ,φ – ()()∫∫∫∫∫∫=θφθφθθθφ * 2 , , sin cos , sin sin , cos sin V V f x y z dxdydz f r r r r drd d , ∫∫∫∫∫==θθφ * 2 sin V V v dxdydz r d

Лекция №21

Если f(z)=u(x,y)+iu(x,y) в точке z=x+iy, то в этой точке существует частная функция

$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ условие Коши-Ришана

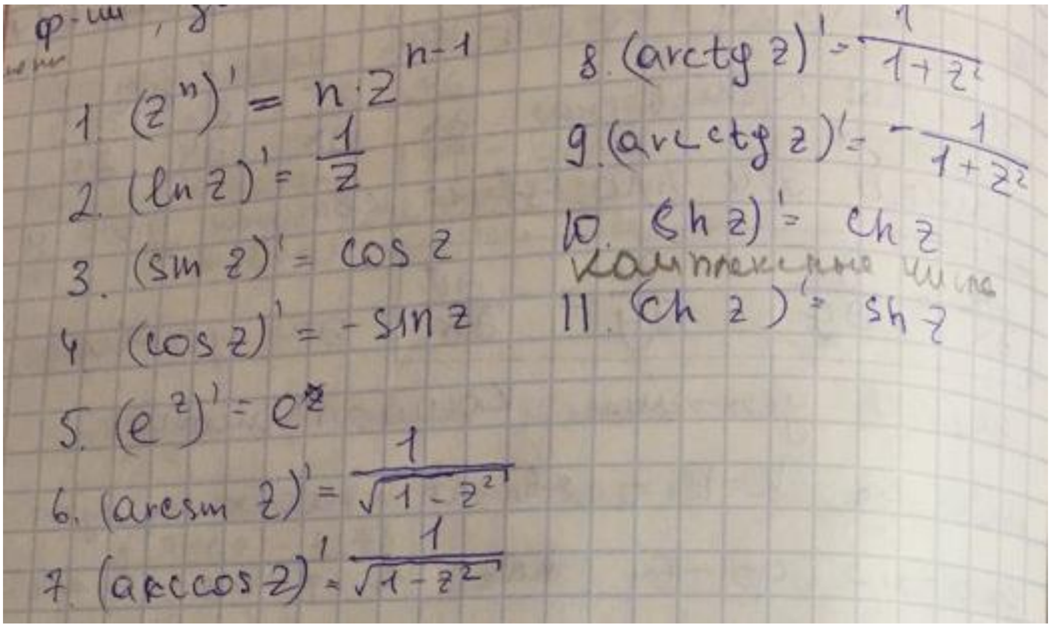
Условия К-Р являются необходимостью условия диф-ия функции f(z) в точку z=x+iy

И обратно если частные производной непрерывны в точке z=x+iy, условия К-Р выполнены, то есть функция w=f(z) диф-ма в точке z=x+iy.

Производная f(z)=u(x,y)+iv(x,y) выражается из 4-3 части функции yiv по формуле

$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}$

Таблица производных от элементарных функций:


1. $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$
2. $(\ln z)' = \frac{1}{z}$
3. $(\sin z)' = \cos z$
4. $(\cos z)' = -\sin z$
5. $(e^z)' = e^z$
6. $(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
7. $(\arccos z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
8. $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$
9. $(\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}$
10. $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$

Комплексные числа

11. $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$

1.f(z)=y+ix

$u=y$, v=x $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ $\frac{\partial v}{\partial y}=1$ $\frac{\partial v}{\partial x}=1$ (1 условие К-Р выполнено)

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (2 условие $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ $1 \neq -1$) (2 условие не выполнено)

Понятие конфорного отображении .

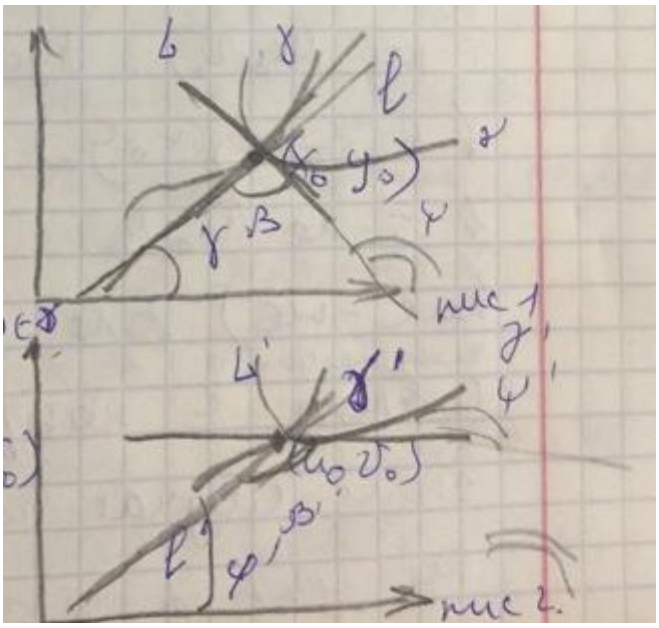
Пусть дана аналит. w(z) в области D. В области D переменное определение значение z=x+iy

В точке (xy) на плоскости OX y опорная точка (u, v) на плоскости OY v.

Если точка (xy) на плоскости *OXY* описывает некоторую линию γ на D (γ принадлежит D), то точка *uv* на плоскости *OUV* описывает некоторую линию γ' и эту линию называют отображением линии на плоскость *OUV* с помощью аналитической функции *w=f(x)*

Рассмотрим рис.1 и рис.2

Возьмём на γ точку *(x0y0)*, т.е. z0=*x0+iy0* на линии γ' точка *(u0 v0)*, то есть *w0 = u0 +iv0*



Проведём от γ касательную *l* к точке (*x0 y0*). От γ' проведём касательную *l'* к точке (*u0 v0*). См. рис.1 и рис.2

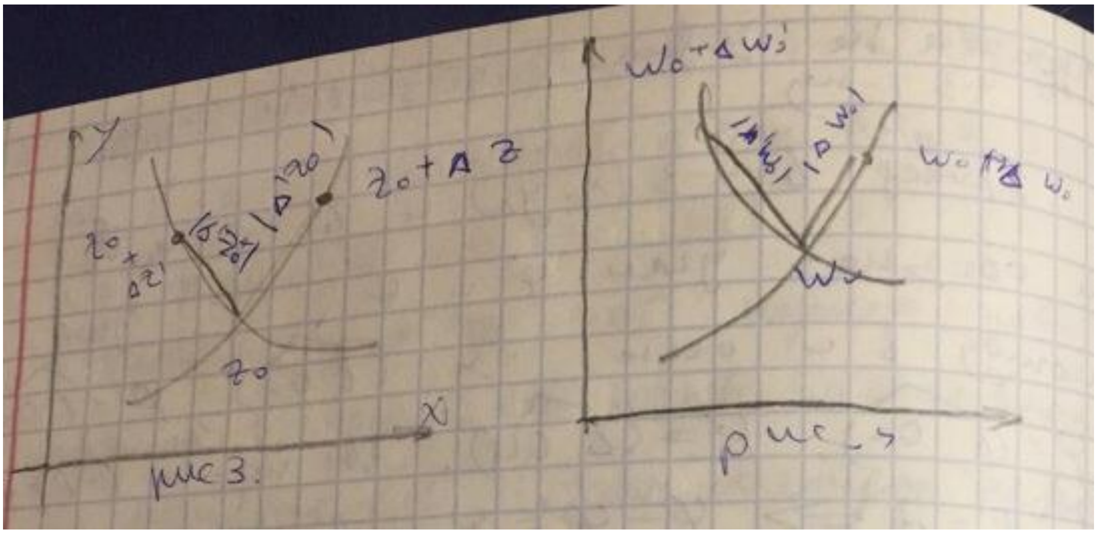
Пусть α - угол на которую нужно провести прямую *l* чтобы её направление совпадает с направлением *l'* (угол между первоначальным отображением и отображением направлении)

В теории аналитическая функция доказывает, что α аргумент производной f'(z0) при условии, что *f'(z0)* ≠ 0*, α=arg f'(z0).*

Рассмотрим другую линию *(x0 y0)* и её отображение, линию γ'' проходящую 4 - 3 точку *(u0 v0*). Пусть *l* - касательная к γ в *(x0 y0*) и *l'* - касательная к γ' в *(u0 v0).* Для того чтобы направление с *l* совпадало с направлением *l'* нужно и в этом случае повернуть на тот угол α, т.к *=arg f'(z0).*

Проведём *L* 4-3 (*x0 y0)* и *L'* 4-3 (u*0 v0)* и обозначить углы ψ (угол между L и OX) и ψ' (угол между L и OY) , η (угол между *l* и OX) и η ' (угол между *l* и OY). η- η'= α, ψ- ψ'= α
=> ψ- ψ'= η- η'   ψ- η=β, ψ'- η'= β'

Угол между L и l' и l и L - один и тот же. Таким образом 2 произвольные линии пересекаются в точке *(x0 y0)* отображается в 2 соответственно линии пересекаются в точке *u0v0* так что угол βмежду касательными и данной линии и их отображениями один и тот же.



Рассмотрим другую кривую проходящую через её отображении (рис.3 и рис.4). Из рисунков видно, что $|f'(z0)|$ предел отношения расстояния между отображениями точками $w0+\Delta'w0$ и $w0$. К первоначальным точкам $z0\text{-}\Delta'z0$ и $z0$, таким образом $|f'(z0)|$ является вершиной искажения масштаба в точке $z0$ при отображении с помощью функции $w=f(x)$.

Итак, если бесконечно малый Δ к плоскости OXY отображается с помощью функции $w=f(z)$ на плоскость OUV , то получится бесконечно малый Δподобно первоначальному в следствие равенства соответствующих углов и в пределах пропорциональности углов. Итак, отображением с помощью аналитической геометрии $w=f(z)$ называют конфорным отображением .

Лекция №22. Интеграл по комплексным переменным.

Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Рассмотрим комплексную функцию, непрерывную в области D. Пусть γ - произвольная гладкая линия, лежащая в областиD.

Рассмотрим дугу этой линии с началом в точке Z и концом в точке Z_0.

Разобьём дугу на n частей точками $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$.

Рассмотрим некоторую сумму:

$S(n)=f(z_0)*dZ_0+f(z_1)*dZ_1+ f(z_{n-1})*dZ_{n-1}$ где $dZ_0=Z_1-Z_0 \ldots dZ_n=Z_n-Z_{n-1}$.

Пусть λ максимальное значение $dZ_k(k=0;1;2;\ldots n-1)$;

Если nстремится к бесконечности, а λ к 0, то S_nимеет предел. Его называют интегралом функции f(Z) по дуге γ, заключённой между точками Z_0 и Z.

dZ=dX+idY;

Тогда указанный интеграл сводится к двум криволинейным интегралам по формуле:

$$\int_d f(z) = \int_\gamma u(x,y)dX - V(x,y)dY + i * \int_\gamma u(x,y)dY + V(x,y)dx$$

Пусть γ - кусочно-гладкая дуга, состоящая из гладких кусков $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Еслиf(z) – аналитическая функция в области D, то значение интеграла взято вдоль производной кусочно-гладкой линии γ с областью D, не зависит от γ и определяется положением начальной и конечной точек этой линии.

Для всякой аналитической функции F(z) в области D, интеграл, взятый по любому замкнутому кусочно-гладкому контору в области Dравен 0. Это и есть теорема Коши.

F(z)=$\int_{z0}^{z} f(t)dt$За путь интегрирования принимается производная кусочно-гладкой линии γ в области D, соединяющей точки zbz$_0$.

Функция F(z) предполагается, как аналитическаяв области D. При этом можно показать, что F`(z)=f(z) и функция F(z), производная которой называется первообразной по отношению к f(z).

Если известна одна из первообразных F(z), то все остальные получаются по функции F(z)+C, где C-производная постоянная.

Это выражение называется неопределённым интегралом от f(z). Так же, как и для определённого интеграла функции действительной переменной имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формулу Ньютона-Лейбница называют **основной формулой интегрального исчисления**.

Для доказательства формулы Ньютона-Лейбница нам потребуется понятие интеграла с переменным верхним пределом.

Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b]*, то для аргумента $x \in [a; b]$ интеграл вида $\int_a^x f(t)dt$ является функцией верхнего предела. Обозначим эту функцию $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, причем эта функция непрерывная и справедливо равенство $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \Phi'(x) = f(x)$.

Для получения первообразной применяются обычные формулы интегрирования.

Рассмотрим п+1 замкнутую кусочно-гладкую линию $\gamma : \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_п$ такие, что находящиеся из γ лежат вне остальных и все одновременно внутри γ_0 и вне:γ_1, γ_2, $\gamma_п$представляют собой (п+1) – связанную область D. Пусть f(z) аналитическая лежит в области D, включая значения на контурах γ_0 ,γ_1,γ_2,$\gamma_п$. В этом случае выполняется равенство:

$$\int_{\gamma 0} f(z) = \int_{d1} f(z)dz = \int_{d2} f(z)dz = \int_{dn} f(z)dz$$

Вычислить $\int_{AB} f(z)dz$где f(z)=(y+1)-ix, а AB – отрезок прямой, соединяющий точки $Z_A=1$ и $Z_B=I$

Решение:

Z=x+iy;

Dz=dx+idy;

F(z)dz=(y+1)dx+xdy+i((y+1)dy-xdx) ПриэтомX$_A$=1; Y$_A$=0;

(Z_A=1+i*0); X_B=0; Y_B=1; (Z_B=0+i*1)

Отсюда получаем:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} (y+1)dx + xy$$

$$+ i \int_{AB} (y+1)dy - xdx$$

$$= (y+1)x \int_{x=1\ y=0}^{x=0\ y=1} 0$$

$$+ xy \int_{x=1\ y=0}^{x=0\ y=1} 0$$

$$+ i({}^{1}/{}_{2(y+1)(y+1)}) \int_{x=1\ y=0}^{x=0\ y=1} 0 - \frac{1}{2x}$$

$$* x \int_{x=1\ y=0}^{x=0\ y=1} 0 = 0 - 1 + 0 + i(\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = -1 + 2i$$

$$y = 1 + iy = 1 + i(x + iy) = 1 - iz$$

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{1}^{i} (1 - iz)dz = (z - \frac{1}{2} * i * z * z) \int_{1}^{i} 0 = -1 + 2i$$

Дифференциальные уравнения

§1. Общие понятия

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением *n*–ого порядка называется соотношение вида: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

(1),

где x – независимая переменная; y – искомая функция переменной;

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции; F – известная функция своих аргументов.

Считается, что производная $y^{(n)}$ на самом деле входит в выражение (1), а величины $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ могут и не входить в него.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения, *n*, называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Пример.

1) $y' + 2x^3 y = 0$ – уравнение первого порядка;
2) $y'' + y = 0$ – уравнение второго порядка;
3) $y^{(5)} + 2x^2 y''' + e^x y + 1 = 0$ – уравнение пятого порядка.

Определение 3. Всякая функция $\varphi(x) \in C^{(n)}$, которая, будучи подставленная вместо *y* в выражение (1), обращает это выражение в тождество, называется решением дифференциального уравнения (1).

Если $\varphi(x)$ – решение, то по определению

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \; x \in < a, b > \qquad (2)$$

Пример.

$y' - y = 0$, $\varphi(x) = e^x$ – решение, так как $(L^x)' - e^x = 0$

У рассматриваемого уравнения есть еще такое решение: $\varphi(x) = C\,e^{x}$,

где *C* – произвольная постоянная.

Это значит, что это уравнение имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра (*C*).

Можно показать, что уравнение *n*–ого порядка имеет семейство решений, зависящих от произвольных независимых друг от друга постоянных.

Пример.

Уравнение $y^{(n)} = 0$ имеет решение:

$$y(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

Определение 4. Процесс разыскания решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Определение 5. Решение дифференциального уравнения (1), содержащее *n* независимых между собой произвольных постоянных, называется его общим решением.

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad (3)$$

Замечание. Дифференциальное уравнение может иметь не одно, а несколько общих решений. Например, для уравнения $y' = y$ функции $y = C\,e^{x}$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями, причем разными, так как первая из них обращается в нуль (*C*=0), а вторая – никогда в нуль не обращается.

Определение 6. Соотношение $\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, (4)

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и *n* произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (1). Следовательно, в общем интеграле решение задано в неявном виде.

Пример.

Рассмотрим уравнение: $y\,y' = x$. Отсюда $2y\,y' = -2x$ или $(y^2)' = (-x^2)'$. Поэтому $y^2 = -x^2 + C$, где *C* – произвольная постоянная.

$y^2 + x^2 = C \geq 0$ – общий интеграл; $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ – общее решение.

<u>Определение 7.</u> Решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

<u>Пример</u>. Уравнение $y' = y$. Его общее решение $y = C\,e^x$. Положим *C*=2, тогда $y = 2e^x$ – частное решение.

<u>Определение 8.</u> Особым решением по отношению к данному общему решению называется такое решение, которое не может быть получено ни при каких значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

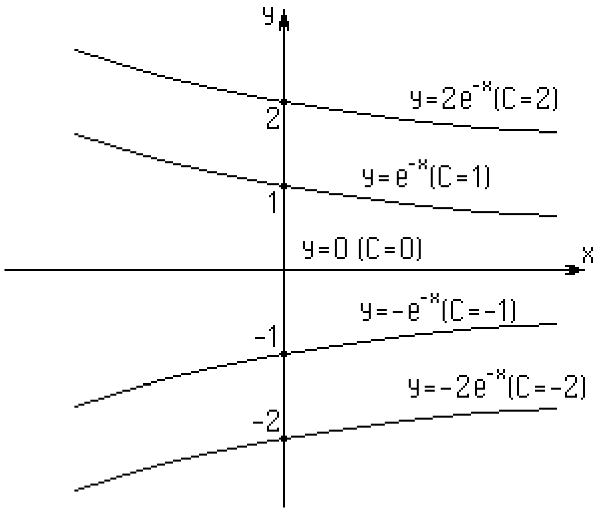
<u>Пример</u>. Уравнение $y' = y$ имеет два общих решения:

1) $y = C\,e^x$ 2) $y = e^{x+C}$

<u>Решение</u>: $y = 0$ есть частное по отношению к первому и особое по отношению ко второму общему решению.

<u>Определение 9</u>. График частного решения называется интегральной кривой рассматриваемого дифференциального уравнения. Уравнение этой линии есть уравнение (3) и (4) при фиксированных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Таким образом, общее решение (или общий интеграл) определяет семейство интегральных кривых, каждая из которых соответствует определенному набору значений $C_1^{-x}, C_2^{-x}, \ldots, C_n^{-x}$ произвольных постоянных.



<u>Пример</u>. $y' = y$. Общее решение $y = Ce^{-x}$.

§2. Дифференциальные уравнения I порядка

<u>Определение 1</u>. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную: $F(x, y, y') = 0$ (1)

Обычно мы будем иметь дело с уравнениями, которые можно разрешить относительно производной $y' = f(x, y)$ (2)

Если в (2) положить $f(x, y) = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то уравнение (2) можно записать в симметричной форме: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (3)

Здесь переменные x и y равноправны.

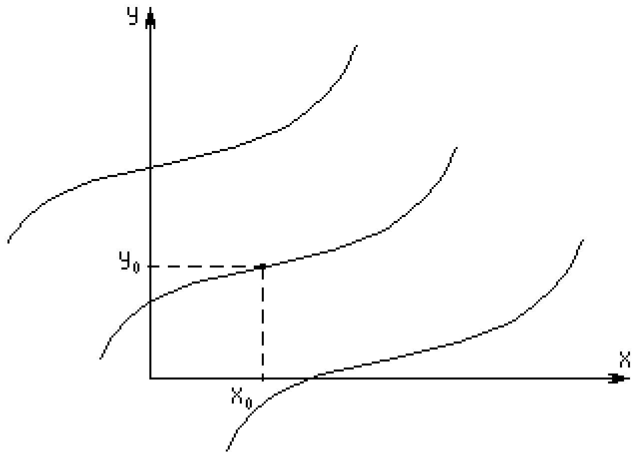
Иногда бывает выгодно рассматривать x как функцию y. В этом случае часто применяют форму записи (3).

<u>Пример</u>.

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

Задача Коши.

Пусть $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением уравнения (2). Это общее решение определяет семейство интегральных кривых. Для того чтобы из этого семейства выделить какое-либо частное решение, необходимо задать еще дополнительные условия, в частности, частное решение можно



выделить путем задания на плоскости точки (x_0, y_0), через которую проходит интересующая нас интегральная кривая. Следовательно, возникает задача отыскания такого решения уравнения $y' = f(x, y)$, которое при заданном x_0 принимает заданное значение y_0.

Это записывают так: $\left.\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{array}\right\}$ (4)

Такая задача называется задачей Коши.

Условие $y|_{x=x_0} = y_0$ называется начальным условием. Начальные условия необходимы для определения соответствующего значения произвольной постоянной *C*. Покажем на примере как вычисляется *C*.

Пусть требуется среди решений уравнения $y' = 1 + y^2$
(5)

найти такое, которое при $x=0$ обращается в нуль, т.е. $y\big|_{x=0}=0$.

(6)

Общим решением служит функция $y=tg\,(x+C),\ \ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (7)

Так как требуется, чтобы выполнялось (6), то должно быть $0=tg\,(0+C)$, а это возможно только при $C=0$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее условию (6), получается из общего решения при $C=0$, т.е. $y=tg\,x,\ \ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Это и есть решение задачи Коши.

Основное свойство общего решения:

Общее решение $y=\varphi(x,C)$ дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ обладает тем свойством, что из него по любому заданному допустимому начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$ может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этому условию. Это означает, что подставив в общее решение x_0 вместо x и y_0 вместо y, получаем уравнение относительно *C*: $y_0=\varphi(x_0,C)$, из которого всегда может быть найдено значение $C=C_0$ и притом единственное. Функция $y=\varphi(x,C_0)$ служит искомым частным решением.

<u>Замечания</u>:

1. Сформулированное основное свойство общего решения справедливо при определенных требованиях, наложенных на функцию $f(x,y)$. Эти требования даются теоремой существования и единственности.
2. Допустимыми начальными условиями $y\big|_{x=x_0}=y_0$ называются такие условия, когда точка $(x_0,y_0)\in D$, где *D* – область определения функции $f(x,y)$.
3. Пусть $y=\varphi(x,C)$ будет общим решением некоторого дифференциального уравнения.

Поставим вопрос: можно ли по известному общему решению «восстановить» то дифференциальное уравнение, для которого данное решение является общим?

На этот вопрос отвечает теорема:

Теорема. Для того, чтобы по известному общему решению $y = \varphi(x, C)$ восстановить дифференциальное уравнение, нужно исключить *C* из равенств:

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x, C) \\ y' = \varphi'(x, C) \end{array}\right\}$$

Полученное соотношение $\phi(x, y, y') = 0$ и есть то дифференциальное уравнение, для которого $y = \varphi(x, C)$ служит общим решением. Эту теорему примем без доказательств.

Пример. Пусть дана функция $y = tg(x + C)$, где *C* – произвольная постоянная. Требуется определить то дифференциальное уравнение, для которого она служит общим решением.

Решение. Используем теорему $y = tg(x + C)$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + C)} = 1 + tg^2(x + C) = 1 + y^2$$

Искомым дифференциальным уравнением будет $y' = 1 + y^2$.

Может случиться, что в равенстве $y' = \varphi'(x, C)$ исчезнет произвольное постоянное. Это значит, что это равенство и дает искомое дифференциальное уравнение.

Например, пусть дано общее решение $y = x^3 + C$. Дифференцируем - $y' = 3x^2$. Исчезло *C*. Следовательно, функция $y = x^3 + C$ служит общим решением уравнения $y' = 3x^2$.

Если вместо общего решения задан общий интеграл, то уравнение восстанавливается аналогично.

Именно, надо исключить C из системы: $\varphi(x,y,C)=0,\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial y}y'=0$.

Перейдем к рассмотрению отдельных видов дифференциальных уравнений первого порядка.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными.

Эти уравнения самые простые. При решении какого-либо уравнения его стараются свести к уравнению с разделяющимися переменными.

А. Уравнение с разделенными переменными

Уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида:

$$S(y)dy=P(x)dx \qquad (1)$$

Переменные разделены, каждая из них находится только в той части равенства, где ее дифференциал. $S(y)$ и $P(x)$ – заданные функции.

Теорема. Общим интегралом уравнения (1) служит соотношение $\int S(y)dy=\int P(x)dx+C$. (2)

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(1+y)dy=x^2dx$.

Решение. $\int(1+y)dy=\int x^2dx+C$ или $y+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x^3}{3}+C$ – общий интеграл.

Теорема. Частным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$ будет функция $y(x)$, определенная из равенства $\int\limits_{y_0}^{y} S(u)du = \int\limits_{x_0}^{x} P(t)dt$. (4)

Пример. Найти решение уравнения $\frac{1}{y}dy = 2x\,dx$, удовлетворяющего условию $y\big|_{x=0} = 3$

Решение. $\int\limits_{3}^{y} \frac{1}{u}du = \int\limits_{0}^{x} 2t\,dt \Rightarrow \ln\frac{y}{3} = x^2 \Rightarrow y = 3e^{x^2}$.

В. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: $P(x)\,Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$

(5)

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим уравнение на произведение $R(x)\,Q(y) \not\equiv 0$. Тогда получим: $\frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0$. (6)

Это уравнение с разделенными переменными. При переходе от уравнения (5) к уравнению (6) мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в нуль произведение $R(x)\,Q(y)$, именно $R(x)\cdot Q(y) \equiv 0$ или $Q(y) = 0$. (7)

Уравнение (7) есть конечное (без производных) уравнение относительно y. Его решением служат $y_1 = 0_1 = const$, $y_2 = 0_2 = const$, … и т.д. Заметим, что константы $y_k = a_k$ служат решениями уравнения (5), т.к. $Q(a_k) = 0$ и $da_k = 0$.

Общим интегралом (5) будет $\int \frac{P(x)}{R(x)} dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)} dy = C$. (8)

Если решения $y_k = a_k$ получаются из (8) при подходящем выборе *C*, то такие решения суть частные, если же подобрать нужное *C* невозможно, то они особые решения.

Следовательно, если у уравнения (5) есть особые решения, то соответствующие им графики, т.е. интегральные кривые – это прямые параллельные оси ОХ.

Частным решением уравнения (5), удовлетворяющим начальному условию $y\big|_{x=y_0} = y_0$ будет функция $y(x)$, определенная уравнением:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(t)}{R(t)} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{S(u)}{Q(u)} du = 0.$$

(9)

<u>Пример</u>. Для уравнения $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее условию $y\big|_{x=-1} = 0$.

<u>Решение.</u>

а) <u>Общий интеграл.</u> Делим на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$.

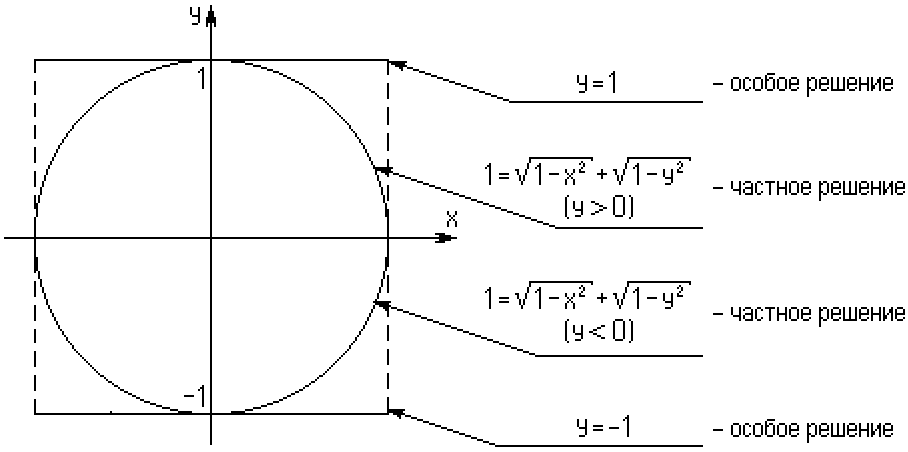
$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Отсюда $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$ или $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C \Rightarrow$ – общий интеграл.

б) <u>Частное решение.</u> $\sqrt{1-(-1)^2} + \sqrt{1-0^2} = C \Rightarrow C = 1$

Частное решение: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$.

с) <u>Особое решение.</u> $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0, \ -1 \le x \le 1, \ \ y = \pm 1$



Возможна потеря решений $y_1 = 1,\ y_2 = -1$. Оба эти решения особые.

§4. Однородные уравнения.

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ (1) называется однородным, если $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов, т.е. $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. (2)

Таким образом, однородное уравнение имеет вид: $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (3)

Теорема. Однородное уравнение (3) имеет общий интеграл:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u}\Bigg|_{u=\frac{y}{x}} = ln|x| + C \qquad .$$

(4)

Замечание 1. В доказательстве теоремы мы предполагаем, что $\varphi(u) - u \neq 0$. Рассмотрим тот случай, когда $\varphi(u) - u = 0$. Здесь имеются две возможности.

а) $\varphi(u) \equiv u$ Тогда $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ и уравнение (3) принимает вид: $y' = \frac{y}{x}$.

Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ $(y = ex)$ и здесь никаких преобразований делать не нужно.

б) уравнение $\varphi(u)-u=0$ удовлетворяется лишь при определенных значениях u: $u_0, u_1, ..., u_k$. В этом случае могут быть потеряны решения $y=u_i x,\ i=\overline{1,k}$. Интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$.

<u>Решение.</u> Уравнение однородное. Полагаем $y=u\cdot x$. $u'x+u=2\sqrt{u}+u$; $u'x=2\sqrt{u}$.

Если $\sqrt{u}\neq 0$, то $\dfrac{du}{2\sqrt{u}}=\dfrac{dx}{x}$. Отсюда $\sqrt{u}=ln|x|+C$; $u=\left(ln|x|+C\right)^2$.

$u=u\cdot x=x\left(ln|x|+C\right)^2$ – общий интеграл.

Может быть потеряно решение $u=0$ или $y=0$.

Действительно, $y=0$ есть решение рассматриваемого уравнения и оно не может быть получено из общего интеграла ни при каком значении *C*, следовательно $y=0$ есть особое решение.

<u>Замечание 2</u>. Формулу (4) запоминать не следует. Надо уметь ее выводить в каждом конкретном случае, как это сделано в примере.

<u>Замечание 3.</u> Для интегрирования уравнения более общего вида, чем (3) $y'=\varphi\left(\dfrac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$. (6)

(обобщенное однородное) сначала делают замену неизвестной функции и независимой переменной по формулам $y=u+\alpha$, $x=t+\beta$; выбирая α и β такими, чтобы исчезли свободные члены в числителе и знаменателе аргумента φ в (6), тогда (6) приводится к однородному уравнению.

§5. Линейные уравнения

<u>Определение</u>. Линейным дифференциальным уравнением I порядка называется дифференциальное уравнение вида: $y' + p(x)y = q(x)$ (1),

где $y(x)$ – неизвестная функция аргумента.

Уравнение (1) линейно относительно y и y'.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (1) примет вид: $y' + p(x)y = 0$ (2), и называется линейным однородным. При этом уравнение (1) называется линейным неоднородным.

Уравнение (2) называется линейным однородным, соответствующим линейному неоднородному уравнению (1).

<u>А. Интегрирование линейного однородного уравнения</u>

Рассмотрим линейное однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$ (2)

Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $y \neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0. \qquad (3)$$

Отсюда общий интеграл $\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = C$ или $ln|y| = C - \int p(x)dx$

$|y| = e^C e^{-\int p(x)dx}$ $-\int p(x)\,dx$ e^C заменяем на $\widetilde{C} > 0$

$y = \pm\widetilde{C}\, e^{-\int p(x)dx}$

Но $\pm\widetilde{C}$ есть любое число, кроме нуля. Положим $\pm\widetilde{C} = \hat{C}$.

$y = \hat{C}\, e^{-\int p(x)dx}$, $\hat{C} \neq 0$, $\hat{C}$ – произвольная постоянная (4). Это общее решение не содержит функции $y = 0$, которая является решением уравнения

(2). Для того чтобы общее решение содержало бы все решения, его надо записать в виде: $y = C\,e^{-\int p(x)dx}$ (5),

где *C* – произвольная постоянная, принимающая любые значения.

<u>Пример.</u> Написать общее решение уравнения $y' + x^2 y = 0$.

<u>Решение.</u> Имеем $p(x) = x^2$. Поэтому $\int p(x)dx = \dfrac{x^3}{3}$ (произвольную постоянную можно считать = 0). И $y = C\,e^{-\int p(x)dx} = C\,e^{-\frac{x^3}{3}}$ – общее решение.

<u>B. Интегрирование линейного неоднородного уравнения</u>

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ (1)

Для его интегрирования применим метод вариации произвольной постоянной. Положим $y' = u(x)e^{-\int p(x)dx}$ (6)

Здесь решение ищется в такой же форме, как для однородного уравнения, но вместо произвольной постоянной стоит функция $u(x)$ – новая неизвестная функция. Для ее определения подставляем *y*, определенное по (6), в (1).

$$\underbrace{u'\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)}_{y'} - p(x)\underbrace{u\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)}_{y} + p(x)\,u\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = q(x)$$

или $u'\exp\left(-\int p(x)dx\right) = q(x)$.

Отсюда $u' = q(x)e^{\int p(x)dx}$; $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$

Следовательно, $y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left\{C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right\}$.

(7)

Это и есть общее решение уравнения (1). Оно содержит все решения. Особых решений нет.

Рассмотрим вопрос об отношении частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$. (8)

Теорема. Решением задачи Коши $y'+p(x)y=q(x),\ \ y\big|_{x=x_0}=y_0$ служит функция:

$$y(x)=y_0\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(u)du}+e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(u)du}\cdot\int\limits_{x_0}^{x}q(\xi)\cdot e^{-\int\limits_{x}^{\xi}p(u)du}d\xi\,. \tag{9}$$

Замечания:

1. Формулу (9) можно записать короче, если $e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(u)du}$ ввести под интеграл:

$$y(x)=y_0\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(u)du}+\int\limits_{x_0}^{x}q(\xi)\cdot e^{\int\limits_{\xi}^{x}p(u)du}d\xi \tag{10}$$

2. Если в формуле (10) y_0 считать произвольной постоянной (при этом значение x_0 безразлично какое), то формула (10) определит общее решение уравнения (1).
3. Запоминать формулу (10) не следует. Надо помнить способ получения формулы (7).

Примеры:

1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0$

<u>Решение.</u> Здесь $p(x) = \frac{1}{x}, \; q(x) = \frac{\cos x}{x}$. Вычислим $\int p(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x|$ (*C* можно положить = 0).

Положим $y = u(x)e^{-\int p(x)dx} = u(x)e^{-ln|x|} = \frac{u(x)}{|x|}$. Так как $x > 0$, то $y = \frac{u(x)}{x}$.

Подставляем в уравнение $-\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{x} = \frac{cos\,x}{x}$.

Отсюда $u' = cos\,x, \; u(\,x\,) = \int cos\,x\,dx = sin\,x + C$.

Следовательно, общее решение будет $y(x) = \frac{1}{x}(sin\,x + C\,)$

2. Найти решение уравнения $y' - 2\,xy = 1$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$.

<u>Решение.</u>

Здесь $p(x) = -2x, \; q(x) = 1$.

$\int p(x)\,dx = -\int 2x\,dx = -x^2, \;\; y(x) = u(x)\,e^{-\int p(x)dx} = u(x)\,e^{x^2}$

$u'e^{x^2} + u \cdot 2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot u \cdot e^{x^2} = 1, \;\; u' = e^{-x^2}$

$u(x) = \int e^{-x^2} dx + C = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt + \tilde{C}$

Общее решение $y(x) = e^{-x^2} \left\{ \int\limits_0^x e^{-t^2} dt + \tilde{C} \right\}$.

Найдем $\tilde{C}$ из начального условия: $0 = e^0 \left\{ \int\limits_0^0 e^{-t^2} dt + \tilde{C} \right\} \Rightarrow \tilde{C} = 0$.

Частным решением, удовлетворяющим условию $y(0)=0$, будет $y(x)=e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Теорема. (о структуре решения линейного неоднородного уравнения)

Общее решение линейного неоднородного уравнения состоит из суммы: какого-либо частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.

§6. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad (1)$$

где *n* – любое число, не обязательно целое.

При $n=0$ уравнение Бернулли превращается в линейное неоднородное уравнение. При $n=1$ оно превращается в линейное однородное уравнение.

Таким образом, уравнение Бернулли служит некоторым обобщением линейных уравнений, в общем случае оно является нелинейным дифференциальным уравнением (при $n\neq 0$ и $n\neq 1$).

Однако во всех случаях его решение тесно связано с решением линейного уравнения.

Теорема. Пусть $n\neq 0$ и $n\neq 1$. Тогда уравнение Бернулли (1) подстановкою $z=y^{1-n}$ сводится к решению линейного уравнения (для функции *z*).

Замечание. Уравнение Бернулли (1) может быть решено другим способом. Введем вместо неизвестной функции $y(x)$ две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$, такие, что $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. (7)

Подставляя это в уравнение (1), получим:

$$\underbrace{u'v+u\,v'}_{y'}+p(x)\underbrace{u\,v}_{y}=q(x)\underbrace{u^n\,v^n}_{y^n} \qquad (8)$$

Из этого одного уравнения определить две функции u и v нельзя.

Для того, чтобы определить конкретные функции $u(x)$ и $v(x)$, необходимо задать еще одну зависимость между $u(x)$ и $v(x)$, причем вообще говоря, произвольную.

Но проще всего положить $v'+p(x)v=0$. (9)

Тогда уравнение (8) примет вид: $u'v=q(x)\cdot u^n\cdot v^n(x)$ или, считая $v(x)\neq 0$ (или, что то же, $y\neq 0$) $u'=q(x)\cdot u^{n-1}(x)\cdot u^n$.

(10)

Так как $v(x)$ есть решение однородного линейного уравнения (9), то его можно считать его известным: $v(x)=e^{-\int p(x)dx}$. (11)

Здесь, при интегрировании уравнения (8), мы положили произвольную постоянную $C=1$. Это можно делать, так как за функцию $v(x)$ мы можем взять любое решение уравнения (9).

Итак, $v(x)$ известно. Отсюда следует, что уравнение (10) для определения $u(x)$ будет с разделяющимися переменными (считаем $u(x)\neq 0$). (12)

Отсюда получаем $u(x): v^{1-n}(x)=(1-n)\int q(x)\cdot v^{n-1}(x)\,dx+C$ или

$$u(x)=\left\{(1-n)\int q(x)\cdot v^{n-1}(x)\,dx+C\right\}^{\frac{1}{1-n}} \qquad (13)$$

Формулы (11) и (13) позволяют построить решение уравнения Бернулли

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left\{(1-n)\int q(x)\cdot v^{n-1}(x)\,dx+C\right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

Такой способ решения годится и для и $n=1$. В этом случае только формула (13) будет иметь другой вид, именно: $u(x)=C\,e^{\int q(x)dx}$, где *C* – произвольная постоянная.

<u>**Пример.**</u> $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$ или $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

Это уравнение Бернулли. Здесь $p(x)=-\frac{4}{x}$, $q(x)=x$, $n=\frac{1}{2}$.

Преобразуем уравнение, разделив его на $\sqrt{y}$: $\frac{y'}{\sqrt{y}}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x$.

Положим $z=\sqrt{y}$, тогда $z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$, $\frac{y'}{\sqrt{y}}=2z'$.

Следовательно, $2z'-\frac{4}{x}z=x$ или $z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$.

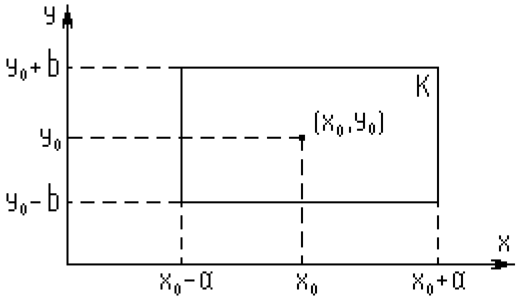
Отсюда $z=C\,e^{\int\frac{2}{x}dx}+e^{\int\frac{2}{x}dx}\int\frac{x}{2}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx$.

$z=C\,x^2+x^2\int\frac{dx}{2x}=C\,x^2+\frac{1}{2}x^2\,ln|x|$ и $y=z^2=\left(C\,x^2+\frac{1}{2}x^2\,ln|x|\right)^2$, $y=0$ – особое решение.

§ 7. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения

<u>Условие Липшица</u>

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную и непрерывную в прямоугольнике К: $|x-x_1|\le a,\ |y-y_1|\le b$



<u>Определение.</u> Если для любого $x_0|x-x_0|\le a$ и любых двух значений y_1 и y_2 переменной y:

$$|y_1-y_0|\le b,\ |y_2-y_0|\le b,$$

существует такое, не зависящее от *x* число $L>0$, что выполнено неравенство: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ (1), то говорят, что функция $f(x,y)$ в области К удовлетворяет условию Липшица с постоянной *L*.

<u>Замечания:</u>

1. Если $f(x,y)$ в области К имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то всегда найдется такое L, что условие (1) будет выполнено. Действительно, тогда по формуле Лагранжа $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=L|\,y_1-y_2|\cdot|f'_y(x,y^*)|$ (2),

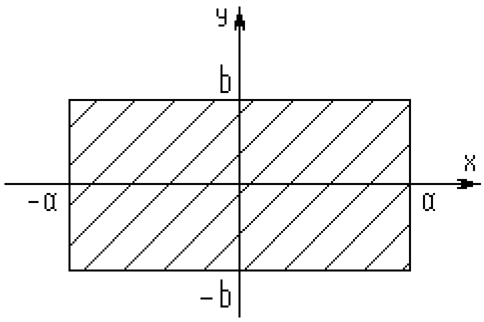
y^*– лежит между y_1 и y_2.

В силу непрерывности f'_y в К и замкнутости области К, f'_y в К ограничена, т.е. $|f'|_y\le L$, где *L* – некоторая константа. В этом случае, в частности, за *L* можно принять $L=\max|f'_y(x,y)|$.

2. Условие Липшица (1) более слабое, чем существование частной производной f'_y, так как оно может быть выполнено и в том случае, когда f'_y существует не всюду в К.

<u>Примеры</u>:

1. Определить, удовлетворяет ли условию Липшица функция $f(x,y)=y^2-x$ заданная в прямоугольнике $|x|\le a$, $|y\le b|$?



Решение.

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| \left(y_1^2 - x\right) - \left(y_2^2 - x\right) \right| = \left| y_1^2 - y_2^2 \right| = \left| y_1 + y_2 \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \le 2b\left| y_1 - y_2 \right|$$

Следовательно, за *L* можно принять $L = 2b$ и условие Липшица выполнено. Тот же результат получим, если используем замечание 1. Действительно, функция $f(x,y) = y^2 - x$ имеет непрерывную $f'_y = 2y$, поэтому за *L* можно принять $L = \max\left| f'_y \right| = \max\left| 2y \right| = 2b$.

Таким образом, заданная функция удовлетворяет условию Липшица в любом конечном прямоугольнике.

2. То же самое для функции $f(x,y) = \sin y$.

$$\left| \sin y_1 - \sin y_2 \right| = \left| 2\cos\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \right| \le 2\left| \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \right| \le 2\frac{\left| y_1 - y_2 \right|}{2} = \left| y_1 - y_2 \right|$$

Это значит, что в прямоугольнике К условие выполнено с $L = 1$.

Здесь константа *L* не зависит от размеров прямоугольника, следовательно, условие Липшица удовлетворяется на всей плоскости.

3. То же для функции $f(x,y) = |y|$

$\left| |y_1| - |y_2| \right| \le |y_1 - y_2|, \; L = 1$

В то же время $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не существует при $y = 0$, т.к.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial |y|}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{y^2} = \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{|y|}.$$

Теорема существования и единственности

Теорема (Коши)

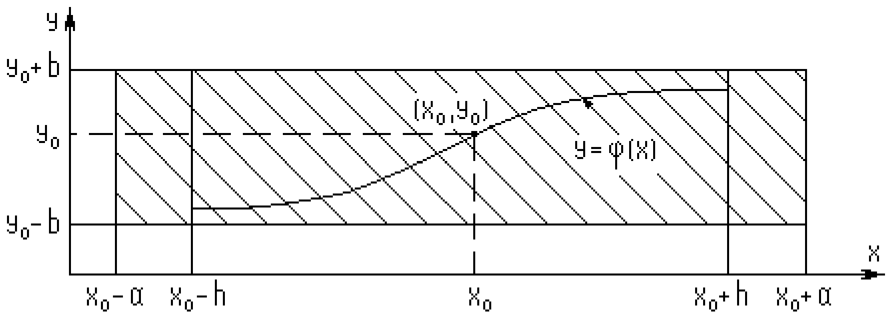
Пусть $f(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна в прямоугольнике К: $|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b$, тогда в К $f(x,y)$ ограничена, то найдется такое $M>0$ $|f(x,y)|\le M,\ (x,y)\in K$ (3)

2) удовлетворяет в К условию Липшица

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\ (x,y_1),(x,y_2)\in K \qquad (4)$$

Тогда в интервале: $x_0-h\le x\le x_0+h,\ h=\min\left[a,\dfrac{b}{M}\right]$



(5)

дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ (6)

обладает единственным решением $y=\varphi(x)$, таким, что $\varphi(x_0)=y_0$.

Замечания:

1. Для существования решения достаточно непрерывности $f(x,y)$ в К.
2. Для единственности решения требуется выполнение условия Липшица (4), которое может быть заменено более жестким условием существования в К непрерывной f'_y.
3. При доказательстве теоремы рассматривается задача Коши: $y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$, (7)

которая заменяется эквивалентным ей интегральным уравнением

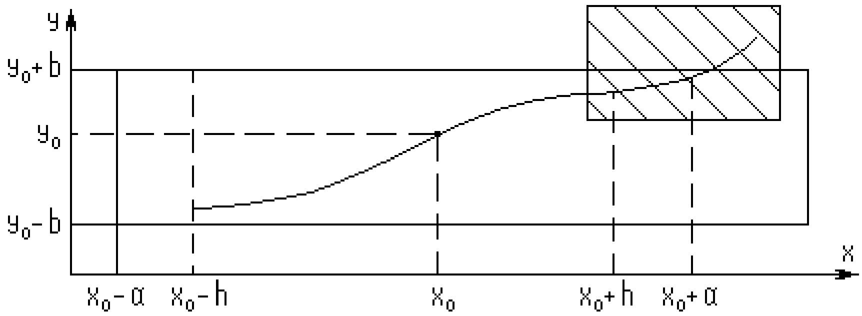
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\,. \tag{8}$$

Затем к уравнению (8) применяется так называемый метод последовательных приближений Пикара. Он состоит в том, что строится последовательность функций $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ сходящаяся к решению уравнения (8). Функции $y_n(x)$ строятся по следующему правилу: за исходное приближение принимается y_0, а следующие вычисляются по формуле:

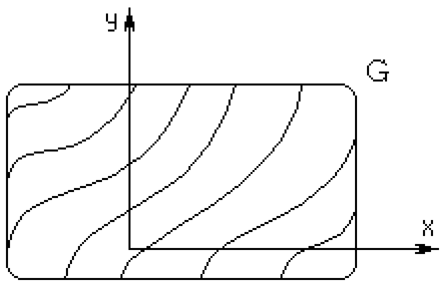
$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \quad (n = 0, 1, 2\ldots). \tag{9}$$

Это есть рабочая формула для построения приближенного решения по методу последовательных приближений.

4. Допустим интегральная кривая построена на интервале $x_0 - h < x \le x_0 + h$. Возьмем конечную точку за центр нового прямоугольника и продолжим решение вправо. Поступая так, каждый раз, можно продолжить решение (интегральную кривую) до самой границы области *G* задания функции $f(x, y)$ (в предположении, что *G* конечна и замкнута).



Мы построили интегральную кривую, проходящую через точку $(x_0, y_0) \in G$. Можно выбрать любую другую точку и опять получим единственную интегральную кривую. Таким образом, область *G* как бы состоит из интегральных кривых.



интегральные кривые

<u>Теорема.</u> Если $f(x, y)$ определена и непрерывна на всей плоскости и удовлетворяет условию Липшица во всякой конечной области этой плоскости, то всякая интегральная кривая при возрастании или продолжима до $x=+\infty$ или имеет вертикальную асимптоту при конечном значении $x=a$, т.е. интегральная кривая не может окончится где-то внутри области.

__Пример__. $y' = y^2 + 1.$

Здесь $f(x, y) = y^2 + 1$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Решением задачи Коши $y' = y^2 + 1,\ \ y(0) = 0$ будет $y(x) = tg\, x,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$ Решение имеет вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2},\ \ x = \frac{\pi}{2}$.

5. Те точки области *G,* в которых функция $f(x, y)$ неопределена или перестает быть непрерывной или не выполняется условие Липшица, называются особыми точками уравнения $y' = f(x, y)$. Таким образом, особые точки это те точки, в которых нарушаются условия теоремы существования и единственности. Особые точки могут быть изолированными, а могут составлять и целые области.

§ 8. Частные случаи уравнений II порядка

Рассмотрим частные случаи уравнений II порядка, допускающих «понижение» порядка, т.е. случаи, когда уравнение II порядка приводится к интегрированию двух уравнений первого порядка.

1. __Правая часть не содержит y и y'__

$$y'' = f(x) \tag{1}$$

Положим $y' = z$. Тогда $y'' = z'$ и $z' = f(x)$.

Получили уравнение первого порядка.

Отсюда $z = \int f(x)dx + c_1$ или $y' = \int f(x)dx + c_1$.

Имеем опять уравнение первого порядка $y = \int [f(x)dx + c_1]dx + c_2$ или $y = \int \{\int f(x)dx\}dx + c_1x + c_2$

Получили общее решение уравнения (1).

2. <u>Правая часть уравнения не содержит y</u>

$$y'' = f(x, y') \qquad (2)$$

Положим $y' = z$, тогда для *z* имеем уравнение $z' = f(x, z)$.

Пусть его решение будет $z = \varphi(x, c_1)$. Следовательно, $y = \varphi(x, c_1)$.

Отсюда $y = \int \varphi(x, c_1)\, dx + c_2$.

Это общее решение уравнения (2).

<u>Пример</u>. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x^2$.

Положим $z = y'$, тогда $z' = \dfrac{z}{x} + x^2$ и его решение $z = \dfrac{x^3}{2} + 2c_1x$.

Следовательно, $y' = \dfrac{x^3}{2} + 2c_1x$ и $y = \int \left(\dfrac{x^3}{2} + 2c_1x \right) dx + c_2$

или $y = \dfrac{x^4}{8} + c_1x^2 + c_2$ – общее решение уравнения (2)

3. <u>Правая часть не содержит *x*</u>

$$y'' = f(y, y') \qquad (3)$$

Положим $y' = z$ и будем считать *z* функцией *y*.

Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$. Итак, $y'' = z\frac{dz}{dy}$.

Подставляя это в уравнение (3), получим: $z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$, т.е. уравнение первого порядка относительно *z*. Решив его, будем иметь $z = \varphi(y, c_1)$ или $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1)$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Отсюда $\frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = dx$

.

$x + c_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)}$ Это общий интеграл уравнения (3).

<u>Пример.</u> $y'' = -y$.

Положим $z = y'$, тогда $z\frac{dz}{dy} = -y$ или $z\,dz = -y\,dy$. Отсюда $z^2 = c_1 - y^2$; $z = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$

или $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$; $\frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = \pm dx \to \arcsin\frac{y}{c_1} = c_2 \pm x$ или

$y = \sqrt{c_1}\sin(c_2 \pm x)$ - общее решение.

§ 9. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ (1)

и соответствующее ему однородное $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (2) где a_1 и a_2 – постоянные коэффициенты.

Найдем общее решение уравнения (2).

Будем искать решение уравнения (2) в форме $y = e^{\lambda x}$.

Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Подставляя это в уравнение (2), получим: $e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$.

Но так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ (3)

Это уравнение по отношению к уравнению (2), называется характеристическим.

Если функция $y = e^{\lambda x}$ есть решение уравнения (2), то λ должно быть корнем характеристического уравнения (3).

Рассмотрим три возможные случая:

1) корни уравнения (3) вещественны и различны $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2) корни вещественны и равны $\lambda_1 = \lambda_2$
3) корни комплексные сопряженные $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$

<u>1 случай.</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и действительны.

В этом случае функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ будут решениями уравнения (2). Так как их отношение $\dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const$, то эти решения линейно независимы и, следовательно, они составляют фундаментальную систему. А поэтому общее решение уравнения (2) в этом случае будет

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (4)$$

<u>Пример.</u> $y'' - 2y' - 3y = 0$

Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$. Общее решение будет $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

2 случай. Корни равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$.

В этом случае имеем пока только одно решение $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Покажем, что вторым решением будет $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$. Действительно,

$$y_2 = x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2'' = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$$

Подставим это в левую часть уравнения (2), тогда получим

$$2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + a_1(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}) + a_2 x e^{\lambda_1 x} =,$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{\left(\underbrace{\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2}_{=0}\right) + \left(\underbrace{2\lambda_1 + a_1}_{=0}\right) = 0\right.$$

так как λ_1 есть корень уравнения (3), и потому, что $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}$. А это значит, что $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ есть решение (2), что и требовалось доказать.

Итак, мы имеем два решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$. Они линейно независимы, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Поэтому общий интеграл будет $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$.

Пример. $y'' - 4y' + 4 = 0$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Общее решение $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$.

3 случай. Корни комплексные сопряженные $\lambda_1=\alpha+\beta i,\ \lambda_2=\alpha-\beta i$

Следовательно, имеем два комплексных линейно независимых решения $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\ \ y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Общее решение будет $y=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta}+c_2^{-i\beta})$.

Ясно, что иметь вещественное общее решение надо считать c_1 и c_2 комплексными числами. Выразим $e^{\beta i}$ и $e^{-\beta i}$ по формулам Эйлера, тогда $y=e^{\alpha x}\{c_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)\}=$

$=e^{\alpha x}\{\cos\beta x(c_1+c_2)+\sin\beta x(ic_1-ic_2)\}$

Положим здесь $c_1=\dfrac{A-Bi}{2},\ c_2=\dfrac{A+Bi}{2}$. Тогда $c_1+c_2=A,\ i(c_1-c_2)=i(-Bi)=B$.

Поэтому $y=e^{\alpha x}\{A\cos\beta x+B\sin\beta x\}=Ae^{\alpha x}\cos\beta x+Be^{\alpha x}\sin\beta x$.

Таким образом, в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения, уравнение (2) имеет два линейно независимых вещественных решения $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

Пример. $y''-8y'+25y=0$

$\lambda^2-8\lambda+25=0\quad \lambda_1=4+3i,\ \lambda_2=4-3i\ (\alpha=4,\ \beta=3)$

Общее решение $y=e^{4x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$.

§ 10. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{1}$$

где a_1 и a_2 – заданные постоянные коэффициенты.

Нам уже известно, что общее решение такого уравнения складывается из общего решения $y^*(x)$, соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2}$$

и какого-нибудь частного решения $Y(x)$ уравнения (1), т.е.

$$y = Y(x) + y^*(x). \tag{3}$$

Как строить общее решение $y^*(x)$ однородного уравнения (2), мы рассмотрим в предыдущем параграфе. Поэтому теперь вопрос об общем решении уравнения (1) сведен лишь к вопросу о построении хотя бы какого-нибудь частного решения $Y(x)$ уравнения (1). Вообще говоря, $Y(x)$ можно, например, угадать. Но такой способ определения $Y(x)$ очень ненадежен. Мы укажем сейчас точные способы, которые всегда приводят к цели.

А. Правая часть уравнения (1) имеет специальный вид

Рассмотрим функцию: $e^{mx}\left(P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx\right)$, (4)

где $P_1(x), P_2(x)$ – полиномы, а числа *m* и *n* – вещественные любые.

По виду этой функции составим «контрольное число» $kr = m + in$.

Пусть корни характеристического уравнения будут λ_1 и λ_2.

Определим число k следующим образом:

1) $k = 0$, если контрольное число не совпадает ни с одним из корней λ_1, λ_2;

2) $k=1$, если $k\,r$ совпадает с одним из корней λ_1, λ_2;

3) $k=2$, если $\lambda_1=\lambda_2=k\,r$.

Правило. Если правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$f(x)=e^{mx}\left(P_1(x)\cos nx+P_2(x)\sin nx\right) \qquad (5),$$

то частное решение следует искать в форме

$$Y(x)=x^k\cdot e^{mx}\left(R_1(x)\cos nx+R_2(x)\sin nx\right) \qquad (6),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ – полиномы степени, равной наивысшей из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Схема нахождения $Y(x)$:

1) знаная вид $f(x)$, записывают $Y(x)$ в форме (3), причем полиномы и $R_1(x)$ и $R_2(x)$ записываются с неопределенными коэффициентами;

2) подставляют $Y(x)$ в уравнение (1) вместо *y*, и приравнивают коэффициенты при одинаковых функциях справа и слева. Получают систему уравнений для коэффициентов многочленов $R_1(x)$, $R_2(x)$. Решая эту систему, находят неизвестные коэффициенты.

3) Найденные коэффициенты подставляют в формулу (3) и находят $Y(x)$.

Замечания:

1. Если функция имеет вид: $f(x)=e^{mx}P_1(x)\cos nx$ или $f(x)=e^{mx}P_2(x)\sin nx$, то частное решение $Y(x)$ все равно ищется в виде (6)

$$Y(x)=x^k\cdot e^{mx}\left(R_1(x)\cos nx+R_2(x)\sin nx\right).$$

2. Если $n = 0$, то $f(x) = e^{mx} P_1(x) \cos n x$. В этом случае частное решение ищется в форме: $Y(x) = x^k R_1(x) e^{mx}$. При этом степень $R_1(x)$ равна степени $P_1(x)$ и $k r = m$.

3. Если $m = 0$, то $f(x) = P_1(x) \cos n x + P_2(x) \sin n x$, а $Y(x)$ имеет вид $Y(x) = x^k \left(R_1(x) \cos n x + R_2(x) \sin n x\right)$, $k r = i n$.

Пример. $y'' + y = 4x \sin x$

Здесь: $m = 0, \ P(x) = 4x, \ n = 1, \ k r = m + i n = i$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0, \ \lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$. Следовательно, $k = 1$.

Поэтому $Y(x)$ следует искать в виде: $Y(x) = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$

Отсюда

$$Y(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x + x\left(A\cos x - (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\right)$$

$$Y'(x) = \left(-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)\right)\cos x + \left(-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B)\right)\sin x$$

Подставляя в уравнение $Y(x)$ и $Y''(x)$, находим:

$$[2Cx + (A + D)]\cos x + [-2Ax + (C - B)]\sin x \equiv 2x \sin x$$

Отсюда $2C = 0, \ A + D = 0, \ -2A = 2, \ C - B = 0$ или

$A = -1, \ B = 0, \ = 0, \ D = 1.$

Следовательно, $Y(x) = x(-x\cos x + \sin x)$.

B. Метод вариации произвольных постоянных

В пункте А был изложен метод построения $Y(x)$ для специального вида $f(x)$. Метод вариации произвольных постоянных применим для функции $f(x)$ любого вида.

Итак, рассмотрим уравнение (1): $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $f(x)$– любая функция (непрерывная).

Пусть нам известно общее решение однородного уравнения (2)

$$\begin{aligned} & y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \\ & y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2 \end{aligned} \tag{7}$$

где c_1, c_2– произвольные постоянные, а y_1 и y_2– частные решения уравнения (2).

Будем искать частное решение уравнения (1) в виде
$$Y(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2, \tag{8}$$

т.е. в таком же виде, как общее решение (7), но только вместо произвольных постоянных подставим пока неизвестные функции. Найдем их. Поскольку $Y(x)$ должно быть решением уравнения (1), то функции c_1 и c_2 связаны только одной зависимостью. Для того чтобы их найти, этого недостаточно. Поэтому мы вправе наложить на них еще одно условие по произволу.

Найдем производную $Y'(x)$. $Y'(x) = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$ (9)

Потребуем, чтобы $Y'(x)$ имело бы такой же вид, как если бы c_1 и c_2 были бы постоянными. Отсюда следует, что должно быть

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \tag{10}$$

Тогда $Y'(x) = c_1 y_1' + c_2 y'$. (11)

Найдем $Y''(x)$. $Y''(x) = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$ (12)

Подставляя Y, Y'и Y'' определенные формулами (9), (11) и (12), в уравнение (1), тогда получим:

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2' + a_1 (c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

или $c_1 \left(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{=0} \right) + c_2 \left(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{=0} \right) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$.

Но y_1 и y_2 суть решения однородного уравнения (2), поэтому имеем

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \tag{13}$$

Таким образом, c_1' и c_2' определяются из (10) и (13), т.е. из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Эта неоднородная система линейных алгебраических уравнений относительно c_1' и c_2' с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Это определитель Вронского, по доказанному ранее $\Delta \neq 0$, поэтому система (14) имеет единственное решение. Определение из (14) c_1' и c_2' интегрируя их, найдем $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем и $Y(x)$.

Замечание. Если при интегрировании c_1' и c_2' ввести произвольные постоянные, то сразу получим общий интеграл неоднородного уравнения (1).

Пример. $y'' + y = tg\, x$

Соответствующее однородное $y'' + y = 0$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$.

Общее решение однородного уравнения

$y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$

Частное решение заданного уравнения ищем в виде $Y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$, где $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$ определяются из системы:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x &= 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x &= tg\, x \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $c_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, $c_2'(x) = \sin x$

$$c_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c_1$$

$$c_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + c_2$$

Общее решение будет

$$y = \left\{\sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c_1\right\}\cos x + (-\cos x + c_2)\sin x$$

или $y = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{y^*} \underbrace{- \cos x \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}_{Y(x)}$.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1 : Числовой ряд. Необходимый признак сходимости

1.1. Числовой ряд и его сумма

Определение 1. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Образуем выражение

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ; \ (a_n \in R), \tag{1}$$

которое называется числовым рядом. Числа $a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ называются членами ряда, а выражение $a_n = f(n)$ – общим членом ряда.

Пример 1. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$.

При $n = 1$ $a_1 = \frac{1}{2}$,

при $n = 2$ $a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$,

при $n = 3$ $a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$.

Нетрудно заметить, что общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Поэтому искомый ряд можно записать следующим образом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Построим из членов ряда (1) последовательность таким образом:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n.$$

Каждый член этой последовательности представляет собой сумму соответствующего числа первых членов числового ряда.

Определение 2. Сумма первых n членов ряда (1) называется n-ой частичной суммой числового ряда.

Определение 3. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где число S называется суммой ряда, и пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если предел частичных сумм бесконечен или не существует, то ряд называется расходящимся.

Пример 2. Проверить на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Для того, чтобы вычислить n-ю частичную сумму S_n представим общий член $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ в виде суммы простейших дробей

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \Rightarrow A(n+1)+Bn = 1$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B

$$\begin{cases} n \ : A + B = 0; \\ n^0 : A = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $A = 1$, а $B = -1$.

Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Тогда частичную сумму S_n можно представить в виде

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, она примет вид

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вычислим сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Так как предел равен конечному числу, то данный ряд сходится**.**

Пример 2. Проверить на сходимость ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ – бесконечную геометрическую прогрессию.

Как известно, сумма первых n членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ равна $S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$.

Тогда имеем следующие случаи**:**

1. Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$.

2. Если $|q| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

3. Если $q = 1$, то ряд имеет вид $a + a + a + \ldots + a + \ldots$ и тогда $S_n = na \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4. Если $q = -1$, то ряд имеет вид $a - a + a - \ldots + a - \ldots$ и тогда $S_n = 0$, если частичная сумма имеет четное число членов и $S_n = a$, если нечётное число, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, следовательно, ряд расходится.

Определение 4. Разность между суммой ряда S и частичной суммой S_n называется остатком ряда и обозначается $r_n = S_n - S$, т.е. $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Так как для сходящихся рядов $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S) = 0$, т.е. r_n будет б.м.в. при $n \to \infty$. Таким образом, значение S_n является приближенным значением суммы ряда.

Из определения суммы ряда следуют свойства сходящихся рядов:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, т.е. имеют соответственно суммы S и Q, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Aa_n + Bb_n$, где $A, B - const$, а его сумма равна $AS + BQ$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием или добавлением конечного числа членов. Верно и обратное.

1.2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд

<u>Теорема</u>. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, имеем

$$S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} = a_n,$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, что и требовалось доказать.

<u>Следствие.</u> Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Обратное, вообще говоря, неверно, что будет показано ниже.

<u>Определение 5.</u> Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ называется <u>гармоническим</u>.

Для этого ряда выполняется необходимый признак, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
В то же время он является расходящимся. Покажем это

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty.$$

Таким образом, гармонический ряд расходится.

<u>§ 2: Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами</u>

2.1. Признаки сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{1}$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{2}$$

Признак сравнения. Если для всех членов рядов (1) и (2), начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \le b_n$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Аналогично, если $a_n \ge b_n$ и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

Пусть S_n и Q_n соответственно частичные суммы рядов (1-2), а Q – сумма ряда (2). Тогда для достаточно больших n имеем

$$S_n < Q_n \quad \Rightarrow \quad S_n < Q_n < Q.$$

Так как $S_n \uparrow$ и ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд (1) сходится.

Аналогично доказывается и вторая часть признака.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{2\cdot 3^2} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \ldots + \frac{2}{n\cdot 3^n} + \ldots .$$

Сравним с членами ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$.

Начиная с $n \ge 3$, имеем $\frac{2}{n\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$, то данный ряд также сходится.

На практике часто более удобно пользоваться так называемым предельным признаком сравнения, который вытекает из предыдущего.

Предельный признак сравнения. Если для двух рядов (1-2) с положительными членами выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = const \ (\ne \infty \ ; \ne \ 0)$, то из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2), т.е. ряды ведут себя одинаково.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

В качестве ряда для сравнения возьмем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который является расходящимся.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(\text{замена}: \ \frac{1}{n} = x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а, следовательно, наш ряд расходится.

Замечание. Часто для сравнения удобно использовать так называемый обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который, как будет показано ниже, сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

2.2. Признак Даламбера

Теорема 1. Пусть для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, тогда:

1. Если $l<1$ – ряд сходится;

2. Если $l>1$ – ряд расходится;

3. Если $l=1$ – ответа на вопрос о сходимости теорема не даёт. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Вначале докажем пункт 1. Из определения предела следует: $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N$: $n\ge N$ выполняется $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$ или $l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$. Если $l<1$, то можно указать такое ε, для которого выполняется $l+\varepsilon=q<1$ и тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$. Таким образом, $\forall n\ge N$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned}
&a_{N+1}<qa_N\,;\\
&a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N\,;\\
&a_{N+3}<qa_{N+2}<q^3a_N\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\tag{1}$$

Из формул (1) следует, что ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<a_N\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ сходится $(q<1)$. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Аналогично доказывается и случай 2. Здесь имеем $\exists N : n \geq N$, и выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. нарушается необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится.

<u>Пример 1.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

<u>Пример 2.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^n n!}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} 2^n n!}{2^{n+1} n^n (n+1)!} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

т.е. ряд расходится.

2.3. Радикальный признак Коши

Аналогично можно доказать следующую теорему.

<u>Теорема 2.</u> Пусть для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, тогда**:**

1. Если $l < 1$ – ряд сходится;

2. Если $l > 1$ – ряд расходится;

3. Если $l = 1$ – ответа на вопрос о сходимости теорема не даёт. В этом случае требуются дополнительные исследования.

<u>Пример 3.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{3n+2}\right)^n$ **.**

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \text{ряд сходится}.$$

<u>Пример 4.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{-1}<1 \Rightarrow \text{ряд сходится}.$$

2.4. Интегральный признак Коши

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Заменим в общем члене ряда $a_n=f(n)$ натуральную переменную *n* вещественной переменной *x*. Получим функцию $f(x)$, для которой $f(1)=a_1;\ f(2)=a_2;...;\ f(n)=a_n;\dots$. Исходя из геометрического смысла определённого интеграла, можно доказать следующую теорему.

<u>Теорема 3.</u> Если функция $f(x)$ непрерывная и невозрастающая на $[a;\infty)$, тогда:

1. Если интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, т.е. $\int_1^{\infty}f(x)dx<\infty$, то ряд сходится;

2. Если интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ расходится, то ряд расходится.

<u>Пример 5.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Для нее имеем

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^\infty, \text{ если } p \neq 1; \\ \ln x\big|_1^\infty, \text{ если } p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1; \\ \infty, \text{ если } p < 1; \\ \infty, \text{ если } p = 1. \end{cases}$$

Таким образом, обобщённый гармонический ряд сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p \leq 1$. Легко убедиться, что признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости этого ряда.

§ 3 : Знакопеременные ряды

3.1. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Определение 1. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеется бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Определение 2. Знакопеременный ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, называется знакочередующимся рядом.

Такой ряд имеет вид $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, где все $a_n > 0$.

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде члены ряда удовлетворяют условиям:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена.

Рассмотрим чётные частичные суммы такого ряда

$$S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Все члены в скобках положительные, следовательно, $S_{2m} > 0$ и $S_{2m} \uparrow$ с ростом m.

Теперь запишем эту сумму так $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - a_{2m}$.

Тогда $S_{2m} < a_1$, т.е. сумма ограничена сверху и при этом $S_{2m}\uparrow$. Тогда по свойству предела она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < a_1$.

Покажем теперь, что и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$. Так как $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, то переходя к пределу в этом равенстве получим

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S \text{, ч.т.д.}$$

<u>Замечание 1.</u> Ошибка, совершаемая при замене S на S_n не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т.е. $\delta_n < a_{n+1}$, так как отброшенные члены также образуют знакочередующийся ряд.

<u>Пример 6.</u> Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ сходится, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. При этом приближённое вычисление его суммы будет вычисляться с точностью $\delta_n < \dfrac{1}{n+1}$.

<u>Пример 7.</u> Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \cdots$.

Замечаем, что $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ и тогда по теореме Лейбница

1. $\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{10} > \frac{1}{17} > \dots$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, т.е. ряд сходится.

3.2. Абсолютная и условная сходимость

<u>Теорема.</u> Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд. Обратное, вообще говоря, неверно.

Обозначим суммы положительных и отрицательных членов частичной суммы соответственно $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$. Тогда частичная сумма данного ряда

$$S_n = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}, \tag{2}$$

а частичная сумма ряда, образованного из абсолютных величин членов ряда будет равна

$$Q_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} . \qquad (3)$$

По условию теоремы существует предел (3), следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)}$.

Отсюда следует, что будет существовать и предел (2), ч.т.д.

Замечание 2. Обратное не всегда имеет место. Так, в примере 6 ряд сходится, однако ряд, составленный из положительных величин членов ряда, является расходящимся как гармонический. В примере 7 ряд сходится, сходится и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда, в чём легко убедится, сравнив его с обобщенным гармоническим $(p = 2 > 1)$.

Определение 3. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

Таким образом, в примере 6 ряд является условно сходящимся, а в примере 7 – ряд абсолютно сходящийся.

Замечание 3. Следует отметить, что разделение рядов на абсолютно и условно сходящиеся является существенным, что видно из следующих свойств:

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма не зависит от порядка его членов.

2. Если ряд сходится условно, то какое бы не было число A, в том числе и бесконечность, можно переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась равной A.

3. Если два ряда сходятся абсолютно, то их произведение – также абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна произведению сумм этих рядов.

Для условно сходящихся рядов свойство 3 не выполняется.

Лекция №1

Перестановки, размещения, сочетания.

При решении задач по теории вероятности используется раздел дискретная математика, а именно раздел комбинаторика.

Определение 1. Перестановками из nэлементов называются соединения, содержащие все nэлементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n

P_n = n! = n· (n-1) ·…·2·1

0! = 1

Определение 2. Размещениями из nэлементов по mв каждом называют такие соединения, в каждое из которых входит m элементов, взятых из заданных nэлементов и отличающихся одно от другого либо порядком их расположения либо самими элементами.

Число размещений из n элементов по mобозначают A_n^m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{n}-\mathrm{m}+1)$$

Определение 3. Сочетаниями из nэлементов по mназываются соединения, в каждое из которых входит mэлементов из заданных nэлементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из nэлементов по mобозначают C_n^m

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Основные понятия теории вероятностей. Классическое определение вероятности.

Определение 1. Классической вероятностью P(A) события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих событию A, к общему числу случаев, т.е.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}$$

где P(A) - вероятность события A,

m - число случаев, благоприятствующих событию А,

n- общее число случаев.

Свойства вероятности события

Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е. $0 \le P(A) \le 1$

Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(A) = 1$

Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(A) = 0$

Теорема сложения и умножения вероятностей.

Определение 1. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Если A и B – совместные события, то их сумма $A + B$ или $A \cup B$ обозначает наступление или события А, или события В, или обоих событий вместе.

Если A и B – несовместные события, то их сумма $A + B$ означает наступление или события A, или события B.

Определение 2. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$P(AB) = P(A)P(B/A)$ или $P(AB) = P(B)P(A/B)$.

Если событие А не зависит от события В, то событие В не зависит от события А. При этом вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей:

$P(AB) = P(A)P(B)$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ - для двух событий;

$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ - для n событий.

Условная вероятность.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что произошло событие A, называется условной вероятностью события B и обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило, т.е.

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ или $P(AB) = P(B)\ P_B(A)$

Теорема 2. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

Лекция 2

Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события Авычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n).$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$. Событие А может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть гипотезами. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

Если событие А произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A \mid B_1) = P(A)P(B \mid A),$$

откуда

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)},\ i = 1, \ldots, n.$$

Полученная формула называется формулой Байеса (формулой Бейеса). Вероятности гипотез $P(B_i \mid A)$ называются апостериорными вероятностями, тогда как $P(B_i)$ - априорными вероятностями.

Пример 1. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через *B* событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$P(A_1) = 0,2 \quad P(B|A_1) = 0,1$

$P(A_2) = 0,3 \quad P(B|A_2) = 0,05$

$P(A_3) = 0,5 \quad P(B|A_3) = 0,2$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$

Пример 2. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$

В результате опыта наблюдалось событие В - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$P(B \mid A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$

$P(B \mid A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$

$P(B \mid A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1|B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Пример 3. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, $k = 1, 2, 3$.

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$P(A|H_1) = 0,02,\ P(A|H_2) = 0,07,\ P(A|H_3) = 0,1.$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$P(H_1) = 3P(H_2),\ P(H_3) = 0,5P(H_2)$.

А так как гипотезы образуют полную группу, то $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Решив полученную систему уравнений, найдем: $P(H_1) = 6/9,\ P(H_2) = 2/9,\ P(H_3) = 1/9$.

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A) = \sum P(A|H_i)P(H_i) = \frac{6}{9}0,02 + \frac{2}{9}0,07 + \frac{1}{9}0,1 = 0,04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{6/9 \cdot 0,02}{0,04} = 0,33,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{2/9 \cdot 0,07}{0,04} = 0,39,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1/9 \cdot 0,1}{0,04} = 0,28.$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

Лекция №3

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A равна p, то вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно M раз определяется по формуле Бернулли: $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$.

Закон распределения случайной величины X, которая принимает натуральное значение i_0, описываемый формулой Бернулли называется биномиальным: $1 = (p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$.

Число m_0 наступление события A, для которого вероятность $P_{m_0,n}$ имеет наибольшее значение, называется наивероятнейшим числом наступления события A при n независимых испытаниях и это число заключается в пределах $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянно и отличается от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится во всех этих испытаниях при большом их числе $(n \to \infty)$ равно m раз определяется по формуле:

$$P_{m,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

при этом x считают, а $\varphi(x)$ находят по таблице.

$\varphi(x)$ приведено во всех книгах по т(еор.вероятности.

Однако, эта формула непригодна, если $p \leq 0{,}1$, а n – велико. В этом случае используют асимптотическую формулу Пуассона:

$$P_{m,n} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{где } a = np$$

Для дискретной случайной величины X распределенной по биномиальному закону (Бернулли):

$$M(X) = np, D(X) = npq,$$

если по закону Пуассона, то $M(X) = D(X) = np$.

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется корень из: $\delta = \sqrt{D(X)}$

Интегральная теорема Лапласа. Нормальное распределение.

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна $p(0 \leq p \leq 1)$, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее a раз и не более b раз примерно вычисляется по формуле:

$p = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$- называется формулой Лапласа.

При этом $\alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, \alpha\beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$

Заметим, что функция Лапласа нечетная.

В таблицах значения только для положительных аргументов.

При этом, если x>5, то $\Phi(x) = 1/2$.

Справедливы и следующие формулы:

Вероятность того, что $P(|m - np| \leq \tilde{\varepsilon} = 2\,\Phi\left(\tilde{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{npq}}\right)$ или $P(|m-np| < \varepsilon) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, где $m -$ частота наступления события A, а $\varepsilon -$ некоторое малое положительное число.

Распределение случайной величины X называется нормальным, если плотность распределения вероятностей имеет вид:
$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}\right)$, где $a = M(X) -$ мат. ожидание X или среднее значение, а $\delta = \sqrt{D(X)}$, т.е. среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания случайной величины X,распределенной по нормальному закону, в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле:

$$P = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\propto - \alpha}{\delta}\right)$$

Справедливы также и следующие формулы:

$$P(|X-a|<\varepsilon = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)$$

С помощью подобных формул можно вычислить вероятность попадания X подчиненную нормальному закону в интервале $(\mathrm{a}-\varepsilon; \mathrm{a}+\varepsilon)$.

Предельные теоремы теории вероятности

Неравенство Чебышева: $P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее мат.ожидания M(X) по абсолютной величине меньше положительного числа ε но не меньше $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема Чебышева:

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно независимые случайные величины имеющие конечные мат.ожидания, причем дисперсия любой из них не превосходит постоянного числа $C(D(X_i)<C)$, то каким бы малым не было постоянное число $\varepsilon>0$ вероятность неравенства:

$\frac{X_1+X_2 \dots +X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}<\varepsilon$ будет как угодно близка к 1, если число этих величин будет сколь угодно велико.

Это можно записать так: $P(\left|\bar{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon \leq 1-\frac{C\varepsilon^2}{n\varepsilon^2}$.

$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}$ – среднее арифметическое.

Теорема Бернулли:

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то сколь угодно близка к 1 вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ появления события A от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико $\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{m}{n}-\mathrm{p}\right|<\varepsilon)=1$.

Практически используется такая формула:

$P\left(\left|\frac{m}{n} - \mathrm{p}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2}$, где q=1-p.

Теорема Ляпуного

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ взаимно независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с мат.ожиданиемa и дисперсией $D = \delta^2$, то при неограниченном возрастании их числа n закон распределения их суммы: $X_1 + X_2 \dots + X_n$ стремится к нормальному закону.

Лекция №4

Задана величина X с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 1 \\ A, \text{при } 1 < x < 5 \\ 0, \text{при } x > 5 \end{cases}$$

Требуется
найти:
1)A; 2)$F(x)$; 3)построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 4)$M(x)$ и $D(x)$; 5) $X(\alpha;\beta)$, где $\alpha =$ 2; $\beta = 5$

1) $1=\int_{-\infty}^{1} dx + \int_1^5 Axdx + \int_5^{+\infty} 0dx$;

   $1=0 + A\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 + 0$;

   $A=\frac{1}{12}$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 1 \\ \frac{x}{12}, \text{при } 1 < x < 5 \\ 0, \text{при } x > 5 \end{cases}$$

2) По определению функции распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1$$

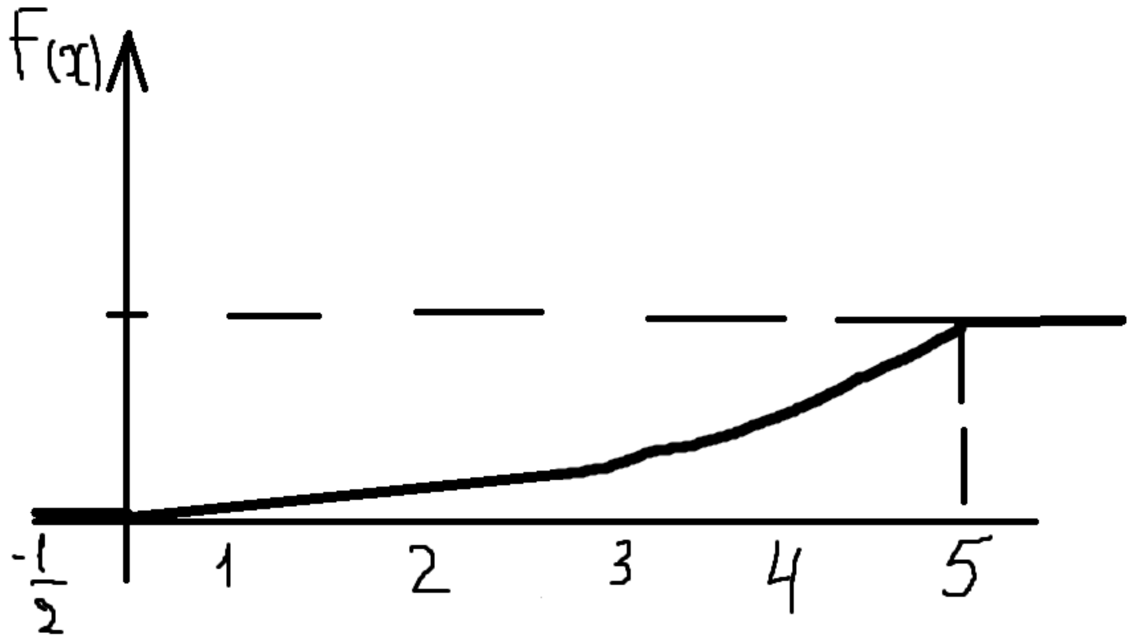
$$x < 1, F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

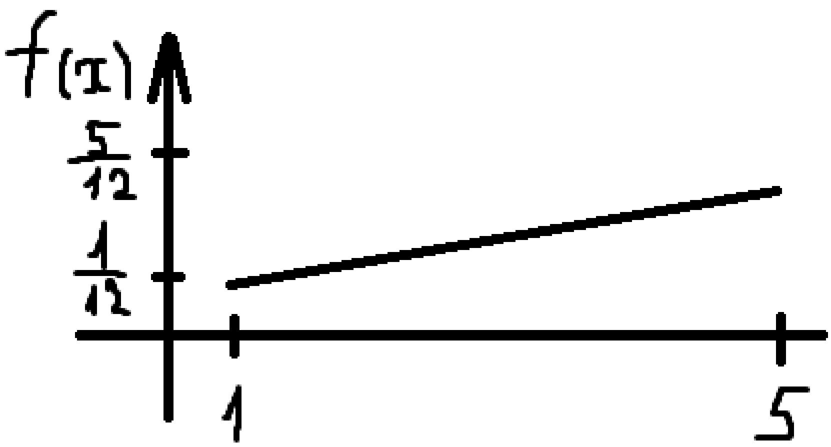
$$1 \leq x \leq 5\ , F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^x \frac{x}{12}dx = \frac{x^2-1}{24}$$

$$x > 1, F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^5 \frac{x}{12}dx + \int_1^5 0dx = \frac{25-1}{24} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 1 \\ \frac{x^2}{12}, \text{при } 1 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{при } x > 5 \end{cases}$$

3)





4)$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} xdx + \int_{1}^{5} x * \frac{x}{12} dx + \int_{5}^{+\infty} xdx = \frac{31}{9}$

$$D(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = 13$$

5)$P(2 < X < 3) = \int_{2}^{3} f(x)dx = \int_{2}^{3} \frac{x}{12} dx = \frac{5}{24}$

Задана величина X с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ Ax^2, \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Требуется найти:
1)$F(x)$; 2)A; 3)построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 4)$M(x)$ и $D(x)$; 5) $X(\alpha; \beta)$, где $\alpha = 2$; $\beta = 3$

1)

$$f(x) = F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 2Ax, \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{при } x > 4 \end{cases}$$

2) $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} 2Axdx \int_{4}^{+\infty} 0dx = 1$$

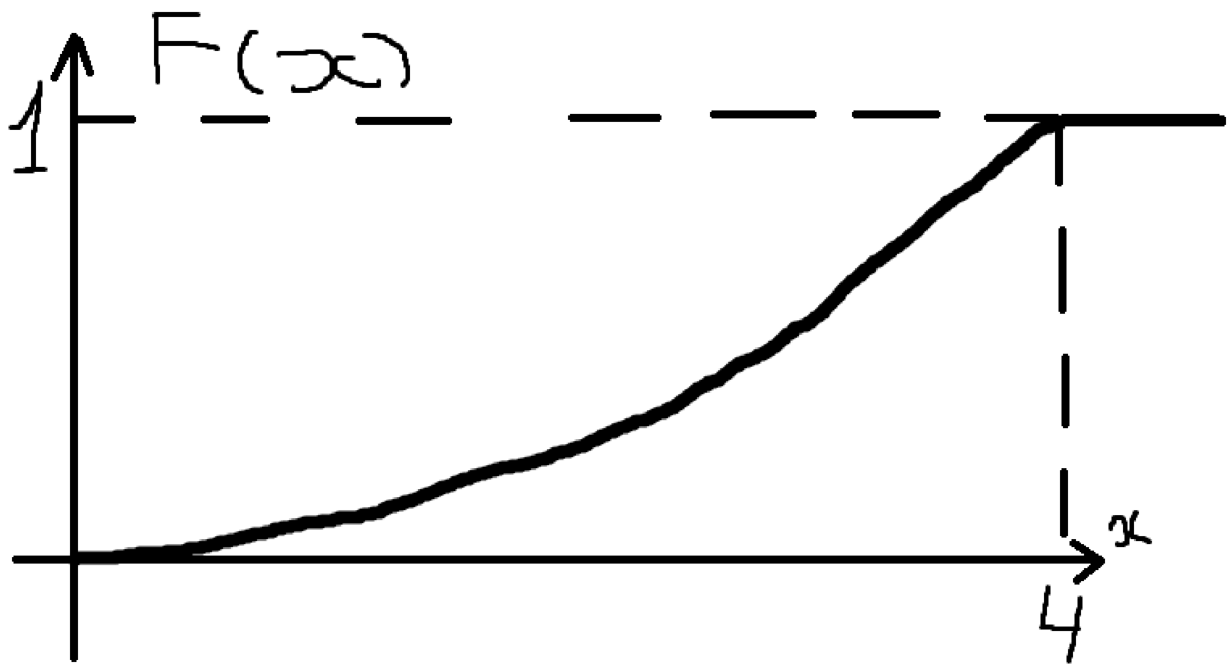
$$0 + 2A * \frac{x^2}{2} + 0 = 1$$

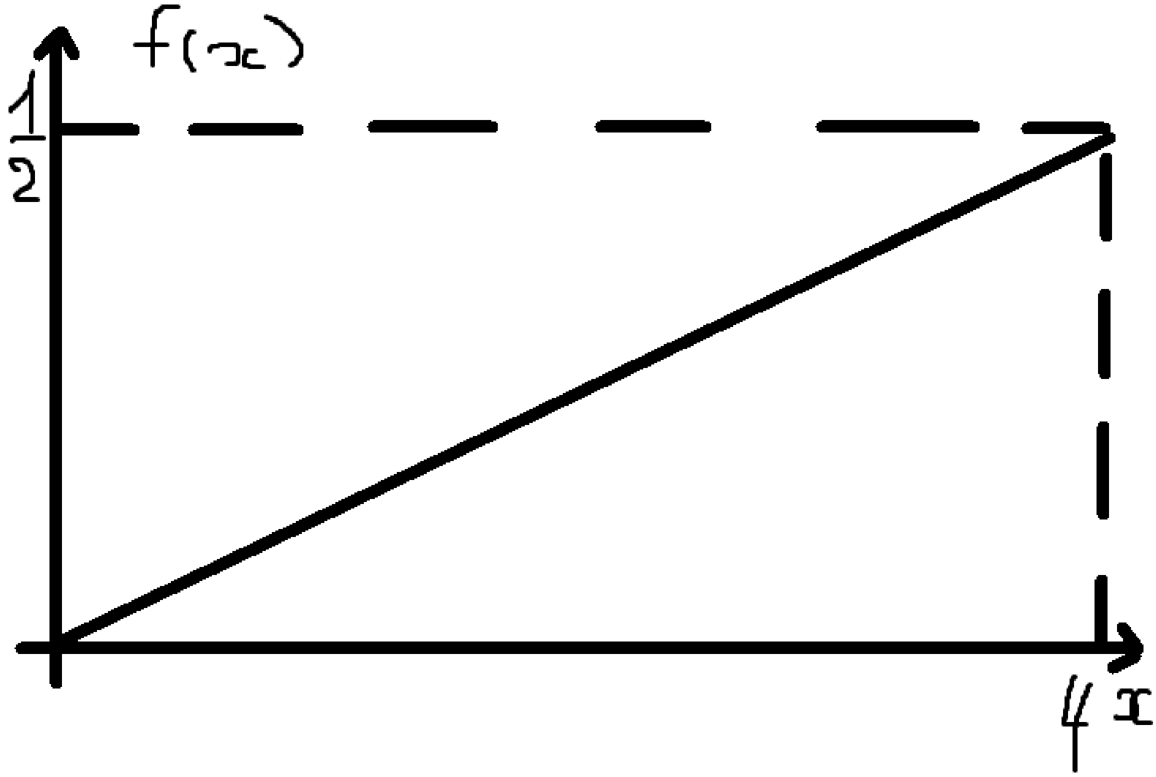
$$A = \frac{1}{16}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{при } x > 4 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{8}x, \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{при } x > 4 \end{cases}$$

3)





4)$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{4} x * \frac{x}{8} xdx + \int_{4}^{+\infty} xdx = \frac{8}{3}$

$$D(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \frac{8}{9}$$

5)$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{16} * 3^2 - \frac{1}{16} * 2^2 = \frac{5}{16}$

Лекция №5

Математическая статистика изучает методы сбора, обработки и интерпретации результатов опытов (экспериментов).
Генеральной совокупностью называют множество однородных объектов с характерными для них признаками.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют подмножество объектов генеральной совокупности, извлеченных из нее случайным образом.

Случайная величина X – наблюдаемые (полученные экспериментально) значения некоторого признака, характерного для всех объектов совокупности.

Статистические ряды

Различают дискретные и интервальные статистические ряды.

Рассмотрим выборку $CB X$ x_1, x_2, ..., x_n объема n.

1. ***Дискретный вариационный ряд*** распределения случайной величины X имеет вид:

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_k
m_i	m_1	m_2	m_3	m_4	...	m_k
ω_i	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\frac{m_3}{n}$	$\frac{m_4}{n}$	...	$\frac{m_k}{n}$

Чтобы построить дискретный вариационный ряд, необходимо:

1) расположить значения признака X (варианты) в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k$;

2) найти частоты m_i вариант (количество значений вариант x_i);

3) найти относительные частоты $\omega_i = \frac{m_i}{n}$ вариант.

2. ***Интервальный вариационный ряд*** распределения случайной величины X имеет вид:

Таблица 2

$x_i - x_{i+1}$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_k
ω_i	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\frac{m_3}{n}$	...	$\frac{m_k}{n}$

Чтобы построить интервальный вариационный ряд, необходимо:

1) найти размах вариации: $R = x_{max} - x_{min}$, где $x_1 = x_{min}$, $x_k = x_{max}$;

2) определить количество интервалов: k;

3) найти длину интервала: $h = \frac{R}{k}$;

4) найти частоты вариант на интервалах: m_i;

5) найти относительные частоты вариант на интервалах: $\omega_i = \frac{m_i}{n}$.

Функция распределения выборки

Эмпирической функцией распределения выборки, представленной в таблице 1, называют функцию вида:

$$F_n(x) = \sum_{i: x_i' < x} \frac{m_i}{n} = \begin{cases} 0, \ x \le x_1; \\ \omega_1, \ x_1 < x \le x_2; \\ \omega_1 + \omega_2, \ x_2 < x \le x_3; \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{k-1} \omega_1, \ x_{k-1} < x \le x_k; \\ 1, \ x > x_k. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Графическое представление выборки

1. *Полигоном частот* выборки (таблица 1) называют ломаную линию, соединяющую на координатной плоскости точки вида $(x_i; m_i)$, $i = \overline{1, k}$,

а *полигоном относительных частот* – ломаную линию, соединяющую на координатной плоскости точки вида $(x_i; \omega_i)$, $i = \overline{1, k}$.

2. *Гистограммой частот* выборки (таблица 2) называют столбчатую диаграмму, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются длины интервалов, которые содержат значения вариант, высотами – частоты данных интервалов,

а *гистограммой относительных частот* – диаграмму, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются длины интервалов, которые содержат значения вариант, высотами – относительные частоты данных интервалов.

1. Сумма частот всегда равна объему выборки n, а сумма относительных частот всегда равна единице: $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$; $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

2. *Полигон* частот и относительных частот строят для дискретного вариационного ряда.

3. *Гистограмму* частот и относительных частот строят для интервального вариационного ряда.

Лекция №6

КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. РЕШЕНИЕ ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечной струны. Если представить себе очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникшие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния. Так, если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны.

Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до концов веревки и, отразившись, пойдут обратно. Следовательно, не учитывая влияния концов струны, мы, тем самым, не будем учитывать влияния отраженных волн.

Таким образом, мы приходим к задаче о свободных колебаниях неограниченной струны, которая формулируется так: решить однородное линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (5.18)$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad (5.19)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси. Никакие другие условия на искомую функцию $u(x,t)$ не накладываются. Такая задача называется задачей с начальными условиями, или задачей Коши. Метод ее решения называется методом Даламбера или методом бегущих волн.

Уравнение характеристик $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ распадается на два:

$dx - adt = 0$ $dx + adt = 0$

Характеристиками являются прямые:

$x - at = c_1\ x + at = c_2$

Введя новые переменные $\xi = x + at, \quad \eta = x - at$ получим канонический вид уравнения колебаний:

$u_{\xi\eta} = 0$

Интегрируя это уравнение по ξ получим:

$u_\eta = f^*(\eta)$

Интегрируя последнее уравнение по η (при фиксированном значении ξ) будем иметь:

$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

Полученный общий интеграл запишем, подставив ξ и η

$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$ (5.20)

Учитывая начальные условия (5.19), получим:

$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$ (5.21)

$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$ (5.22)

Интегрируя уравнение (5.22), получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C$$ (5.23)

Решая уравнение (5.23) совместно с уравнением (5.21) будем иметь:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + \frac{c}{2}$$ (5.24)

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz - \frac{c}{2}$$ (5.25)

Учитывая, что функции f_1 и f_2 определены для любого аргумента, заменяем x в уравнении (5.24) на $x + ax$ и в уравнении (5.25) на $x - ax$.

Подставляя полученные выражения в уравнение (5.20), получим:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+a\cdot t)+\varphi(x-a\cdot t)}{2}+\frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz-\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz\right]$$

Или

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+a\cdot t)+\varphi(x-a\cdot t)}{2}+\frac{1}{2\cdot a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (5.26)$$

Выражение (5.26) называется формулой Даламбера или решением Даламбера задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны. Она показывает также существование и единственность решения данной задачи.

Выясним физический смысл полученного решения. Рассмотрим два частных случая.

Пусть начальные скорости точек струны равны нулю, и струна колеблется в результате начального отклонения. В этом случае в формуле (5.26) надо положить $\psi(x)\equiv 0$. Тогда

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} \qquad (5.27)$$

Колебание $u(x,t)$ можно рассматривать как наложение (суперпозицию) колебаний двух волн:

· первая волна $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ распространяется со скоростью a вправо (прямая волна);

· вторая волна $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ распространяется с той же скоростью влево (обратная волна).

В начальный момент времени t = 0 профили обеих волн совпадают и повторяют начальное отклонение струны с половинной амплитудой.

Пусть теперь начальное смещение $\varphi(x) \equiv 0$ а $\psi(x)$ отлично от нуля в промежутке $(-l, l)$, а вне этого промежутка $\psi(x) = 0$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс (волна импульса). Тогда в соответствии с (5.26) решение имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \qquad (5.28)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{0}^{x} \psi(z) dz \qquad (5.29)$$

Используя выражение (5.29), запишем уравнение (5.28) в виде:

$$u(x,t) = \Psi(x+at) - \Psi(x-at) \qquad (5.30)$$

То есть, по струне распространяются две волны импульса: прямая $-\Psi(x-at)$ и обратная $\Psi(x+at)$, а результирующая волна $u(x,t)$ является суммой (суперпозицией) этих волн.

Вывод: действие импульса заключается в том, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, определяемый интегралом (5.28) и остаются в этом положении. Волна как бы оставляет след после своего прохождения.

Полученные результаты для колебаний бесконечной струны не могут быть применены к реальному колебанию физической струны. Действительно, при их выводе не были учтены многие факторы. В частности, опыт учит нас, что струна какой угодно длины, выведенная из положения равновесия или ударенная, колеблется. Законы колебания бесконечной струны (5.27) и (5.28) этого не показывают, потому что колебания конечной струны происходят вследствие отражения отклонений от закрепленных концов струны, а при рассмотрении бесконечной струны мы не учитываем влияния концов. Поэтому практически решения уравнений (5.27) и (5.28) применимы только для таких моментов t, для которых отклонения точек струны не успели дойти до ее концов. Кроме того, начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть такими, чтобы в течение всего процесса $u_x(x, t)$ было малой величиной, которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

Лекция 7

Теория корреляции

Теория корреляции изучает связь между несколькими признаками и выявляет направление и тесноту этой связи, а так же позволяет строить модели исследуемых процессов и составлять прогнозы протекания этих процессов.

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от случайной величины X.

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. В этом случае статистическую зависимость называют корреляционной.

Корреляционная зависимость может быть двух типов: линейной и криволинейной.

Рассмотрим более подробно линейную корреляционную зависимость.

Линейная корреляционная зависимость (корреляция) между признаками Х и У выражается уравнением вида:

$$y = ax + b$$

Такое уравнение называется уравнением регрессии У на Х, а соответствующая прямая – выборочной линией регрессии.

Неизвестные параметры a, b находят из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Уравнение корреляционной зависимости можно получить из уравнения вида

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x})$$

где $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$, $\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i^2}{n}$, $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$, $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}$

Коэффициент корреляции ($r_в$) показывает тесноту связи и направления между признаками X и Y .

Свойства коэффициента корреляции:

1. $-1 \le r_в \le 1$

2. Если $r_в$ = 1, то зависимость между признаками Х и У является функциональной

3. Если $r_в$ = 0, то признаки Х и У не связаны линейной корреляционной зависимостью, но зависимость может иметь криволинейный характер.

С увеличением $|r_i|$ связь между признаками Х и У становится теснее.

При $|r_i| < 0{,}3$ - зависимость между признаками слабая, при $0{,}3 \le |r_i| \le 0{,}7$ - средняя, при $|r_i| \ge 0{,}7$ - сильная.

Если $|r_i|$ положителен, то связь между признаками прямая, если $|r_i|$ отрицателен – обратная.

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r_в = \frac{\sum x_i \cdot y_i - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Простейшим визуальным способом выявить наличие взаимосвязи между количественными переменными является построение диаграммы рассеяния. Это график, на котором по горизонтальной оси (X) откладывается одна переменная, по вертикальной (Y) другая. Каждому объекту на диаграмме соответствует точка, координаты которой равняются значениям пары выбранных для анализа переменных.

Выборочной линией регрессии Y на X называется график функции $y = ax + b$.

ПримерЕсли при $x_1=2$ величина Y приняла значения $y_1=5,\ y_2=6,\ y_3=10$, то условное среднее $y_x=(5+6+10)/3$.

Выборочным уравнением регрессии Y на X называют уравнение вида

$$y_x=f(x).$$

Пусть в результате n независимых опытов получены n пар чисел $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots, (x_n,y_n)$. Так как различные значения признака x и соответствующие им значения признака y наблюдались по одному разу, то нет надобности группировать данные и использовать понятие условной средней.

Представим одну из величин как функцию другой. Для простоты ограничимся приближенным представлением величины Y как линейной функции величины X.

Будем искать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида:

$$y=\rho_{yx}x+b.$$

Угловой коэффициент ρ_{yx} прямой линии регрессии Y на X называют выборочным коэффициентом регрессии.

$$\rho_{yx}=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2},$$

$$b=\frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum xy}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}.$$

Параметры ρ_{xy} и b подбираются так, чтобы точки $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots, (x_n,y_n)$, построенные по данным наблюдений, на плоскости xOy лежали как можно ближе к прямой .

То есть сумма квадратов отклонений $(Y_i - y_i)$ должна быть минимальной. Здесь Y_i - вычисленная по уравнению ордината, соответствующая x_i, а y_i – наблюдаемая ордината, соответствующая x_i. В этом состоит сущность метода наименьших квадрато

Лекция № 8

В результате 7 независимых измерений некоторой величины x, выполненных с од.точностью, получены опытные данные, приведённые в таблице. Предполагая, что результаты подчинены нормальному закону распределения вероятностей оценить истинное значение величины X при помощи доверит.интеграла, γ=0,95.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
7,6	7,3	8,1	7,7	7,5	7,8	8

1. Находим выборочную дисперсию:

$$x_{\text{в}} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{1}{7}(7{,}6 + 7{,}3 + 8{,}1 + 7{,}7 + 7{,}5 + 7{,}8 + 8) = 7{,}71$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{7}\sum x_i^2 = 0{,}0771$$

2. Найдём исправленную выборочную дисперсию:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = 0{,}09$$

3. Найдём исправленное выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$S = \sqrt{S_x^2} = 0{,}3$$

4. При n=7 и γ=0,95 находим по таблице:

$$t_{\gamma} = t(0{,}95 - 7) = 2{,}45$$

5. Искомый интервал для истинного значения математического ожидания a физ. вел-ны X находим по формуле:

$$x_{\text{в}} - t_{\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}} = 7{,}71 - 0{,}28 = 7{,}43$$

$$x_{\text{в}} + t_{\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}} = 7{,}71 + 0{,}28 = 7{,}99$$

7,34 <a< 7,99

Пример.

Отдел технического контроля проверил n партий однотипных изделий и установил, что число X нестандартных изделий в одной партии имеет эмпирическое распределение, приведённое в таблице. В одной строке x_i – количество нестандартных изделий в одной партии, а в другой строке количество n_iпартий, содержащих x_i нестандартных изделий. Требуется при уровне значимости **α** = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X (число нестандартных изделий в одной партии) распределена по закону Пуассона

1. Находим выборочнуюсреднюю:

$$x_{в} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n} = \frac{1}{200}(0{,}116 + 1 * 56 + 2 * 22 + 3 * 4 + 4 * 2) = 0{,}6$$

2. Следовательно, закон Пуассона

$$P_n(i) = P_{i,n} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

$$P_{200}(i) = P_{i,200} = \frac{0{,}6^i e^{-0{,}6}}{i!}$$

$$P_0 = P_{200}(0) = \frac{0{,}6^0 e^{-0{,}6}}{0{,}1} = e^{-0{,}6} = 0{,}9488$$

$$P_1 = P_{200}(1) = \frac{0{,}6^1 e^{-0{,}6}}{1!} = 0{,}32928$$

$$P_2 = P_{200}(2) = \frac{0{,}6^2 e^{-0{,}6}}{2!} = 0{,}0987$$

$$P_3 = P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 e^{-0{,}6}}{3!} = 0{,}0025635$$

5. Составим расчётную таблицу с учётом объединения малочисленных частот.

Результаты запишем

i	n_i	i_i	$n_i - n_{i\_}$	$(n_i - n_{i\_})^2$	$\frac{(n_i - n_{i\_})^2}{n_i}$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	-9,86	97,2156	1,4762
2	22	19,76	2,24	51,0176	0,2519
3	6	4,56	4,44	2,0736	0,4557

$$X_{набл}^2 = 2{,}54$$

$$X_{набл}^2 < X^2$$

Нет оснований отвергнуть гипотезу по закону Пуассона

Лекция №9

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по закону Пирсона

Пример.

Используя принцип Пирсона при уравнении значимости α=0,05, проверить согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением. Выборка объема n=200.

X_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Найдем:

I. Выборочное среднее $\bar{x}_В=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{9} x_i n_i$ = 12,63

Выборочная дисперсия $Д_В=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 n_i = \bar{x}_В^2$=22,043

Среднее квадратичное отклонение$\sigma_В = \sqrt{Д_В}$ = 4,695

II. Вычислим теоретические частоты, шаг h=2, n=200

Используя формулу $p_i' = \frac{nh}{\sigma_В}$ ϕ (U_i)

$U_i = \frac{x_i - \bar{x}_В}{\sigma_В}$, ϕ (n) = $\frac{1}{2\pi} e^{\left(-\phi 2/2\right)}$ - значения функции приведены в таблице во всех учебниках по т/м.

$n_i' = \frac{200*2}{4.695}\ \varphi$ (Ui) = 85, 2 φ (Ui)

Составим расчетную таблицу

i	n_i	x_i	$U_i = \frac{x_i - \bar{x}_В}{\sigma_В}$	φ (Ui)	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{n_i - n_i'^2}{n_i'}$
1	15	5	-1,62	0,1074	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	7	-1,20	0,1942	16,5	9,5	95,25	5,5
3	25	9	-0,77	0,2966	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	11	-0,35	0,3752	32,0	-2,0	4,00	0,1
5	26	13	0,08	0,3972	33,9	-7,9	62,41	1,8
6	21	15	0,51	0,3503	29,8	-8,8	78,44	2,6
7	24	17	0,93	0,2589	22,0	2,0	4,00	2,0
8	20	19	1,36	0,1582	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	21	1,78	0,0818	7,0	6,0	36,00	5,1

	$\sum=200$							$\chi^2_{набл}=22{,}2$

Наименьшее наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{набл}$ = 22,2

По теореме критических точек распределенияχ^2 (приложение) по уравнению значений α=0,05 и числу степеней свободыk= s-1-r, где r–число параметров, оцениваемых по выборке

Нормальное распределение определяется 2 параметрами:

1. Мат. Ожидаем a
2. Средним квадратичным отклонениемσ

Таким образом, r = 2 (выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение), s = 9 (число гр. выборки).

K=9-1-2=6

И находим критическую точку правосторонней критической области$\chi^2_{крит}$ (0,05; 6) = 12,6

Сравним с наблюдаемой критической точкой. Так как$\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотеза о нормальном распределении ген. совокупности отвергается. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значительно.