Лекция 1 Векторная алгебра

1.1 Понятие вектора

Существуют величины, которые характеризуются помимо своей величины ещё и направленностью. Это скорость, ускорение, сила, смещение материальной точки и т.п. Можно абстрагироваться от конкретной физической величины и считать, что вектор - это направленный отрезок. **Определение**: вектор - это направленный отрезок.

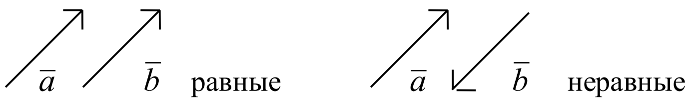
Будем обозначать вектор AB . A - начало вектора, B - конец вектора.

$|AB|$ - означает длина вектора (символ модуля).

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают.

Важное свойство векторов - коллинеарность. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Теперь сформулируем понятие равенства двух векторов: два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление. Два нулевых вектора считаются равными.

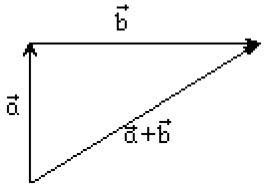


Из определения равенства векторов следует, что мы не различаем двух равных векторов, имеющих разные точки приложения. Иными словами, точка приложения вектора $\overline{a}$ может быть произвольной. В соответствии с этим векторы в геометрии называются свободными.

1.2 Определим линейные операции над векторами

Сложение. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$.

Геометрически это можно изобразить правилом треугольника:



Правило сложения векторов обладает теми же четырьмя свойствами, что и правило сложения вещественных чисел:

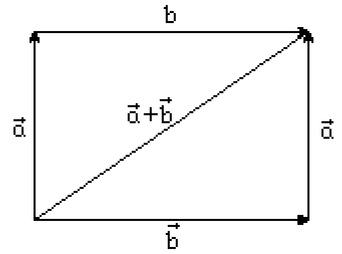
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство).

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство).

3. Существует нулевой вектор, такой, что $\vec{a}+0=\vec{a}$.

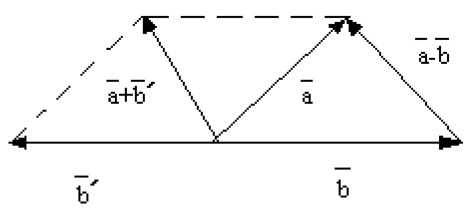
4. Для каждого $\vec{a}$ существует такой $\vec{a}'$ что $\vec{a}+\vec{a}'=0$.

Эти свойства доказываются геометрическими построениями. К примеру свойство 1:



Эти свойства позволяют оперировать с векторами так же как и с вещественными числами.

Определим разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$ как сумму $\vec{a}+\vec{b}'$, где $\vec{b}'$ - противоположный вектор вектору $\vec{b}$.



Определим, наконец, операцию умножения вектора на вещественное число.

Произведением $\alpha\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный $\vec{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ и имеющий направление, совпадающее с $\vec{a}$ если $\alpha>0$ и противоположное, если $\alpha<0$.

Геометрический смысл умножения - вектор $\vec{a}$ растягивается в α раз.

Операция умножения обладает тремя свойствами:

5. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (распределительное свойство относительно суммы векторов).

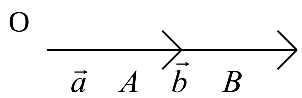
6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (распределительное свойство относительно суммы чисел).

7. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (сочетательное свойство).

Доказываются эти свойства тоже графически.

Рассмотрим **теорему 1**. Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, то существует такое вещественное число λ, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Совместим $\vec{b}$ и $\vec{a}$. В силу коллинеарности они окажутся на одной прямой. Т. е.



отсюда: $OB=\lambda\cdot OA$ (*)

Докажем, что $\lambda\vec{a}=\vec{b}$. Т.е. что длины их равны, направления совпадают, коллинеарны.

Коллинеарность вытекает из определения произведения $\lambda\vec{a}$ и коллинеарности $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равенство длин непосредственно из определения произведения и (*). Наконец, опять из определения произведения следует, что если $\lambda > 0$, направления совпадают, и если $\lambda < 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - противоположно направлены.

Определение 1. Линейной комбинацией n векторов мы называем сумму вида

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n\alpha_n$$

где α_i - вещественные числа.

Определение 2. Векторы $\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots\bar{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что имеет место равенство:

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = 0$$

Если все $\alpha_i = 0$, то такие векторы $\bar{a}_i$ называются линейно независимыми.

Докажем **теорему 2**. Если среди *n* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$ хотя бы один нулевой, то эти векторы являются линейно зависимы. Доказательство: пусть для определённости $\vec{a}_1 = 0$. Тогда выполняется равенство:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n\vec{\alpha}_n = 0$$

где $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_n = 0$.

и по определению линейной зависимости эти векторы линейно зависимы.

Теорема номер три: если среди *n* векторов $\vec{a}_n$ какие либо (*n*-1) линейно зависимы, то и все *n* являются линейно зависимы.

Действительно: линейная зависимость (*n*-1) векторов означает:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots \alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1} = 0$$

Добавим сюда равное 0 слагаемое $0 \cdot \vec{a}_n$ и получим $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots \alpha_n\vec{a}_n = 0$,

где α_i не все равны нулю, т.е. теорема доказана.

1.3 Линейные комбинации двух векторов

_**Теорема 4**. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Доказательство необходимости: предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Т.е.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$$

положим, что $\beta \neq 0$. Тогда $\vec{b} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\vec{a}$ или $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. По определению произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Достаточность: предположим, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a}$ или $\vec{b}$ равно нулю, то они линейно зависимы в силу теоремы 2. Если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$ то в силу теоремы 1 имеем:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}\text{, или } (-1)\vec{b} + \lambda\vec{a} = 0.$$

Т. к. здесь заведомо (-1) не равно 0, то равенство доказывает линейную зависимость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Следствие 1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то они линейно независимы.

Следствие 2. Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевых. (Иначе они были бы линейно зависимы).

1.4 Линейные комбинации трёх векторов

Определение: векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Теорема 5. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трёх векторов является их компланарность.

Необходимость: пусть три вектора линейно зависимы:

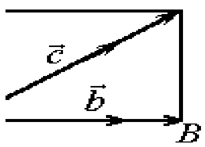
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0, \gamma \neq 0.$$

Тогда $\vec{c} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \dfrac{\beta}{\gamma}\vec{b}$, или $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Это равенство означает сложение двух векторов, т.е. все три вектора лежат в одной плоскости.

Достаточность: пусть $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ компланарны. Исключим случай, когда пара векторов коллинеарна и когда какой-либо вектор равен 0. Эти случаи тривиальны. Рассмотрим случай, когда все неколлинеарны.

Перенесём все векторы в одну плоскость. Поскольку они неколлинеарны, то существует их общая точка пересечения:



В силу теоремы 1, найдутся такие λ и μ, что $\lambda\vec{a} = \vec{OA}$ $\mu\vec{b} = \vec{OB}$

$c = \vec{OA} + \vec{OB} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ или $(-1)\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0$. Теорема доказана.

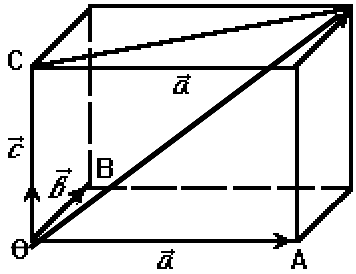
Следствие: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то для любого $\vec{c}$, лежащего в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдутся такие λ и μ, что выполнится равенство:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Наконец, линейная зависимость трёх векторов.

Теорема 6. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Доказательство. Исключим тривиальные случаи, когда один из векторов ноль или когда какие-либо три компланарны. По предыдущим теоремам будут линейно зависимы все четыре вектора. Т.е. все векторы некомпланарны. Сведём их в одну точку и построим параллелепипед:



По теореме 1 найдутся такие числа, что:

$O\vec{C} = \nu\vec{c}$

$O\vec{A} = \lambda\vec{a}$

$O\vec{B} = \mu\vec{b}$

Но вектор $\vec{d}$ равен $\vec{d} = O\vec{C} + O\vec{A} + O\vec{B}$ или $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ или $(-1)\vec{d} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,\nu\vec{c} = 0$

.

Теорема доказана.

Попутно мы доказали, что если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, какие-либо некомпланарные, т.е. линейно независимые векторы, то для любого вектора $\vec{d}$ можно найти такие числа λ, μ, ν, что

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}.$$

1.5 Понятие базиса

Говорят, что три линейно независимых вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют в пространстве базис, если любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \qquad (**)$$

Принято называть (**) разложением вектора d по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а числа λ, μ, ν - координатами вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Причём можно доказать, что разложение $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ может быть единственным образом осуществлено.

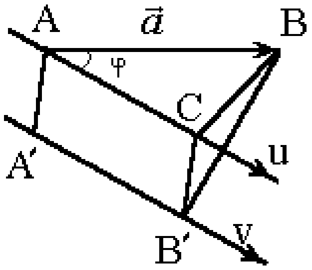
Определим так называемые <u>афинные координаты</u>. Афинные координаты в пространстве определяются заданием базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и некоторой точки O, называемой началом координат.

Частным случаем афинных координат являются, очевидно, прямоугольные декартовы координаты, Здесь введём три взаимно перпендикулярных (ортогональных) единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Для каждого вектора $\vec{d}$ найдётся и при том единственная тройка чисел X, Y, Z, такая, что

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Числа X,Y,Z называют декартовы прямоугольные координаты.

Введём определение проекции вектора на ось **v**. Дан вектор $\vec{a} = A\vec{B}$. Опустим перпендикуляры из точек A и B на ось **v**. Основания перпендикуляров обозначим A' и B' .



Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось **v** назовём величину направленного отрезка $\vec{A'}\vec{B'}$ оси **v.**

Углом наклона вектора $\vec{a}$ к оси **v** назовём угол φ между направлением вектора $\vec{a}$ и направлением оси **v**. Из рассмотрения треугольника ABC следует, что $\bullet \mathrm{p}_v \vec{a} = |\vec{a}|.\cos\varphi$.

Можно доказать, что декартовы координаты X,Y,Z вектора $\vec{d}$ являются проекции вектора $\vec{d}$ на оси соответственно ортам:

$\vec{i}$ -ось Ox, $\vec{j}$ -ось Oy , $\vec{k}$ - ось Oz.

Или можно записать:

$$x = |\vec{d}|\cos\alpha \qquad y = |\vec{d}|\cos\beta \qquad z = |\vec{d}|\cos\gamma \qquad (***)$$

Три числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{d}$.

Длина диагонали параллелепипеда равна $|d| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Тогда можно записать:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Возведём в квадрат и складывая, получим равенство:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$