Лекция 10

3.1.5. Поток вектора $\vec{E}$ электростатического поля. Теорема Гаусса – Остроградского для вектора $\vec{E}$

Рассмотрим произвольную поверхность *S*, которая находится в неоднородном электростатическом поле (рис. 3.5,а). Введем понятие **потока *Ф***

$$\Phi_E = \int\limits_s d\Phi_E = \int\limits_s \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_s EdS\cos\alpha, \qquad \alpha = \left(\vec{E}\,\hat{,}\,\vec{n}\right) \qquad (3.12)$$

где $d\vec{S}$ - вектор, величина которого равна площади *dS* элементарной площадки, направленный по нормали $\vec{n}$ к площадке *dS* (рис. 3.5, а).

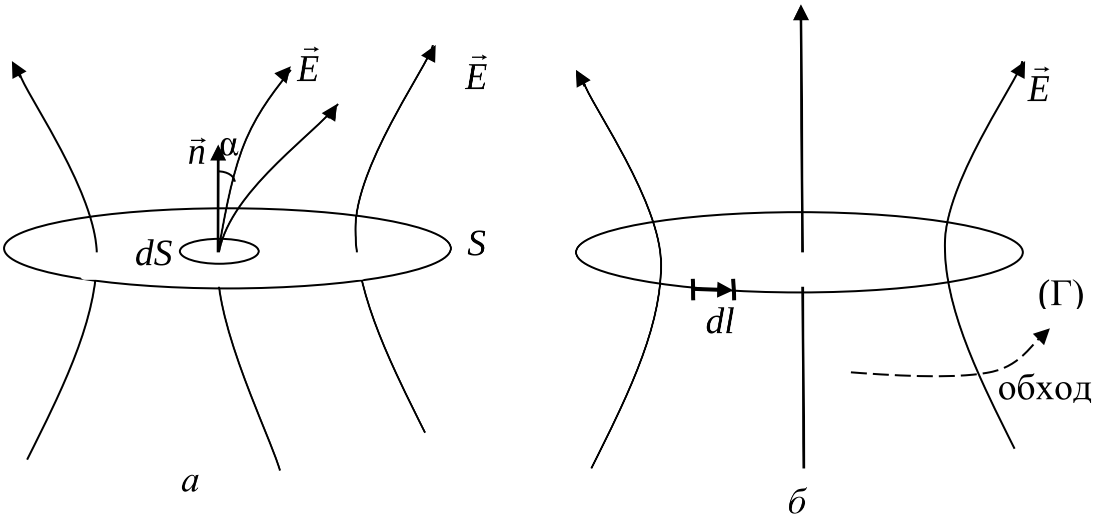


Рис. 3.5.

Поток вектора $\vec{E}$ равен количеству силовых линий электрического поля, пронизывающих поверхность S.

На рис. 3.6 приведены примеры расчета потока Φ_E через различные поверхности *S* (рис. 3.6, а, б, в поверхность *S* - плоская; рис. 3.6, г *S* – замкнутая поверхность). В последнем случае поток Φ_E через замкнутую поверхность равен нулю, так как количество линий $\vec{E}$, входящих (N_+) и выходящих (N_-) из нее, одинаково, но они берутся с противоположными знаками ($\cos\alpha_+ > 0, \cos\alpha_- < 0$) [3].

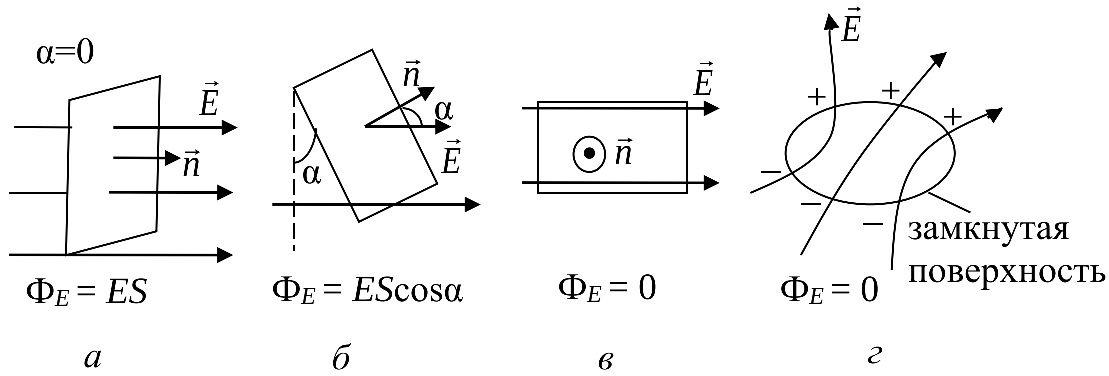


Рис. 3.6

Поток вектора напряженности можно определить с помощью **теоремы Гаусса**: *поток вектора* $\vec{E}$ *через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов* q_Σ*, охватываемых этой поверхностью, и деленной на* $\varepsilon\varepsilon_0$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (3.13)$$

Эта теорема является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции для электростатических полей.

Рассмотрим доказательство теоремы в случае поля точечного заряда. В качестве замкнутой поверхности возьмем сферу радиусом *R*. Точечный положительный заряд *q* поместим в центр этой сферы (рис. 3.7, а).

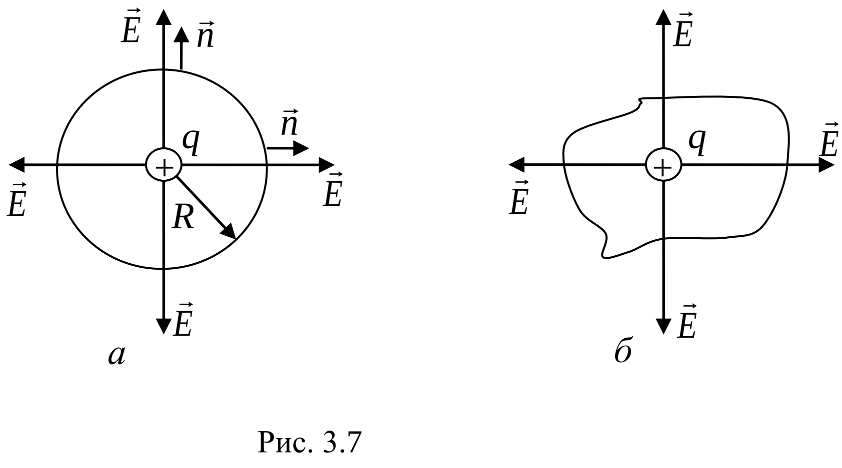


Рис. 3.7

Таким образом, поток вектора напряженности через выбранную сферическую поверхность равен

$$\oint_s EdS\cos\alpha = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dS\cos 0^0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\oint_s dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}4\pi R^2 = q/\varepsilon_0.$$

Поскольку поток вектора $\vec{E}$ электрического поля совпадает с количеством силовых линий, пронизывающих поверхность, то, вместо сферы можно взять произвольную замкнутую поверхность (рис. 3.7, б). При этом полученный результат не изменится, так как число таких линий $\vec{E}$ в случаях (а) и (б) одинаково.

3.1.6. Применение теоремы Гаусса – Остроградского к расчету электростатических полей

Теорему Гаусса применяют для нахождения выражения модуля вектора напряженности в случае электростатических полей, обладающих какой-либо симметрией.

Алгоритм применения теоремы Гаусса:

1) из симметрии распределения зарядов определить направление вектора $\vec{E}$ в каждой точке поля;
2) выбрать произвольную замкнутую поверхность, содержащую внутри себя заряд (часть заряда), создающего поле, и отражающую симметрию поля. Для удобства, как правило, выбираются поверхности, элементы которых параллельны или перпендикулярны силовым линиям;
3) рассчитать поток вектора $\vec{E}$ через выбранную в п.2 поверхность.;
4) вычислить заряд, находящийся внутри данной поверхности;
5) с помощью теоремы Гаусса, рассчитать модуль вектора напряженности.

Рассмотрим конкретные примеры применения теоремы Гаусса.

Пример 1. Электрическое поле равномерно заряженной по поверхности бесконечно протяженной плоскости. Поле плоского конденсатора.

1 этап. Введем поверхностную плотность заряда σ, как заряд, приходящийся на единицу площади поверхности

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad (3.14)$$

где dq – заряд находящийся на элементарной поверхности dS.

Если заряд q равномерно распределен по поверхности S, то поверхностная плотность заряда во всех ее точках будет одинаковой и равной

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Поле бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскости является однородным (во всех точках поля модуль $\vec{E}$ одинаков), линии $\vec{E}$ перпендикулярны к плоскости (рис. 3.8, а).

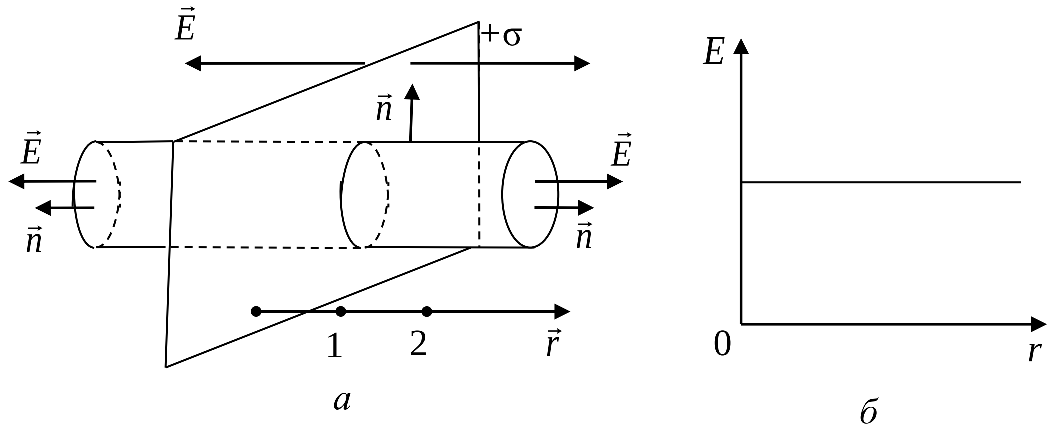


Рис. 3.8

2 этап. Замкнутую поверхность, через которую будем рассчитывать поток вектора $\vec{E}$, выберем в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к плоскости (рис. 3.8, а).

3 этап. Поток Φ_E через боковую поверхность выбранного цилиндра будет равен нулю (α=90^0, линии $\vec{E}$ не пересекают боковой поверхности) и, поэтому остается только поток через основания цилиндра ($S_1 = S_2 = S$)

$$\Phi_e = \oint\limits_s EdS\cos\alpha = \int\limits_{S_1} EdS\cos\alpha + \int\limits_{s_2} EdS\cos\alpha = 2ES$$

4 этап. Рассчитаем заряд плоскости, попадающий внутрь выбранного цилиндра

$$q_\Sigma = \int\limits_s dq = \int\limits_s \sigma dS = \sigma S$$

5 этап. Для расчета напряженности поля плоскости применяем теорему Гаусса (3.13):

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (3.15)$$

где введением $|\sigma|$, учтен случай отрицательно заряженной плоскости [3].

На рис. 3.8, б приведен график зависимости $E(r)$ – напряженности поля плоскости от расстояния *r* от нее.

С помощью формулы (3.15) и принципа суперпозиции (3.8) можно расчитать поле плоского конденсатора, как поле двух параллельных плоскостей с равными по модулю и противоположными по знаку поверхностными плотностями зарядов (рис. 3.9, а).

Применив принцип суперпозиции, видим, что поле конденсатора существует только между его пластинами (рис. 3.9, б), а модуль вектора напряженности этого поля равен

$$E = E_+ + E_- = \frac{|\sigma|}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{|q|}{S\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (3.16)$$

где $|q|$ – модуль заряда одной из пластин конденсатора площади S.

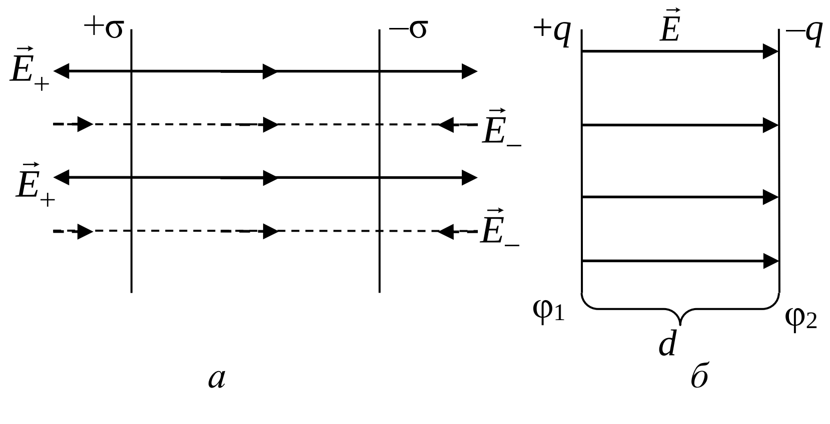


Рис. 3.9

Пример 2. **Поле равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нити**.

1 этап. Введем линейную плотность τ заряда, как заряд, приходящийся на единицу длины нити

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \qquad (3.17)$$

где dq – заряд, находящейся на элементе dl длины нити.

Если нить заряжена равномерно, то линейная плотность заряда во всех ее точках одинакова и вычисляется как

$$\tau = \frac{q}{l},$$

где q - заряд всей нити длиной l.

Поле равномерно заряженной нити обладает осевой симметрией – линии $\vec{E}$ представляют собой прямые, выходящие из нити и лежащие в плоскостях, перпендикулярных к ней (рис. 3.10, а). Причем на одинаковых расстояниях от нити, т.е. на цилиндрических поверхностях, модуль $\vec{E}$ будет одинаковым [3].

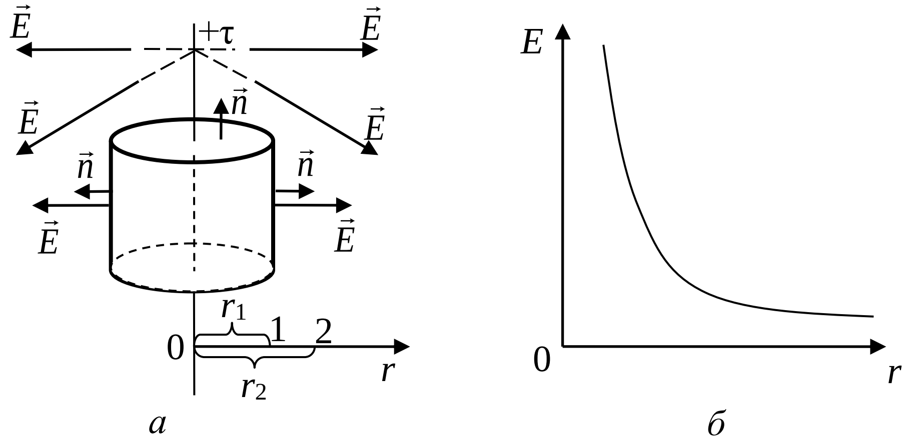


Рис. 3.10

2 этап. Замкнутую поверхность, через которую будем рассчитывать поток вектора $\vec{E}$, выберем в виде цилиндра высотой H и радиусом r, ось которого совпадает с нитью.

3 этап. Так как линии напряженности параллельны основаниям и пересекают только боковую поверхность цилиндра, то поток Φ_E через основания цилиндра равен нулю. Поэтому поток вектора $\vec{E}$ сквозь выбранный цилиндр равен потоку только через его боковую поверхность

$$\Phi_E = \oint\limits_s EdS\cos\alpha = \int\limits_{S_{бок}} EdS\cos\alpha = ES_{бок} = E2\pi rH .$$

4 этап. Внутрь цилиндра попадает заряд, находящийся на отрезке нити длиной H

$$q_\Sigma = \int dq = \int \tau \cdot dl = \tau \cdot H .$$

5 этап. Чтобы рассчитать напряженность поля нити, используем теорему Гаусса (3.13):

$$E2\pi rH = \frac{\tau \cdot H}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} . \qquad (3.18)$$

На рис. 3.10, б приведен график зависимости $E(r)$ – напряженности поля нити от расстоянии r от нее.

Пример 3. Поле равномерно заряженной (зарядом *q*) по поверхности сферы радиусом *R*.

1 этап. Поле такой сферы обладает сферической симметрией – линии $\vec{E}$ представляют собой прямые, выходящие из центра положительно заряженной сферы заряда q (рис. 3.11, а). Причем на одинаковом расстоянии от центра сферы, т.е. на сферических поверхностях, модуль $\vec{E}$ будет одинаковым [3].

2 этап. В качестве замкнутой поверхности, через которую будем рассчитывать поток вектора $\vec{E}$, выберем сферическую поверхность радиусом $r > R$.

3 этап. Поток вектора напряженности через выбранную сферическую поверхность радиуса r равен

$$r > R: \quad \Phi_e = \oint\limits_s EdS\cos\alpha = E\oint\limits_s dS = E4\pi r^2 .$$

4 этап. Внутрь выбранной поверхности попадает весь заряд сферы радиуса R

$$q_\Sigma = q .$$

5 этап. По теореме Гаусса рассчитаем напряженность поля сферы

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} .$$

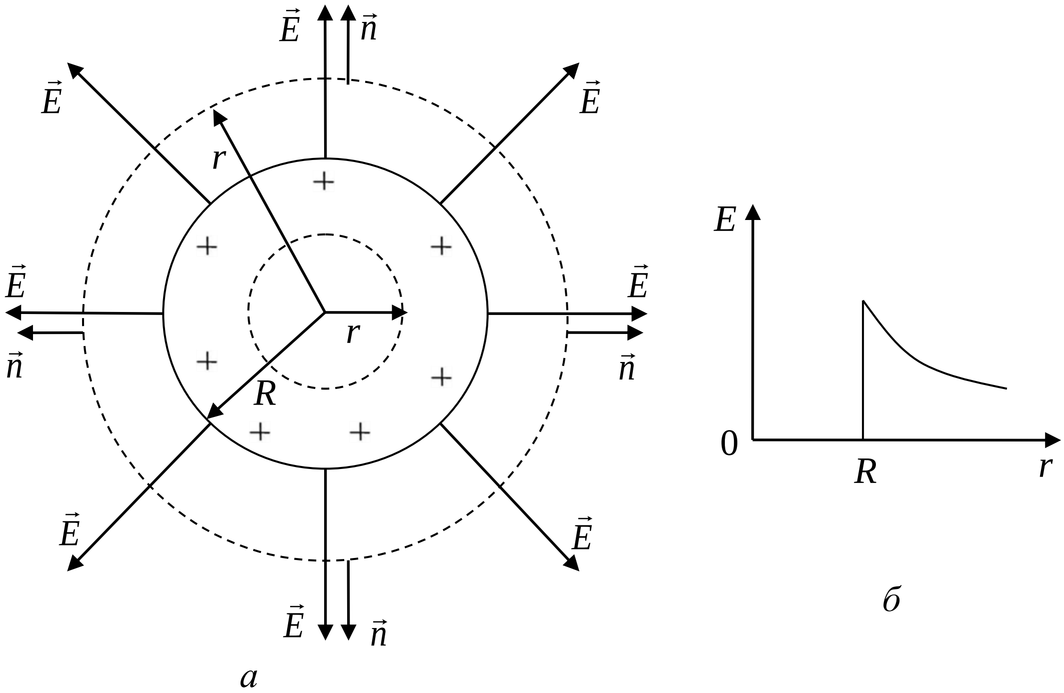


Рис. 3.11

Аналогичный расчет для расстояний $r<R$ приводит к тому, что внутри сферы электрического поля нет, т.к. в этом случае внутрь вспомогательной поверхности, имеющей радиус r, заряд q сферы не попадает ($q_\Sigma = 0$, $E = 0$) [3].

Из записанных выше формул для вектора $\vec{E}$ следует, что внутри сферы поле отсутствует, а за ее пределами оно совпадает с полем точечного заряда q, помещенного в центр сферы [3]:

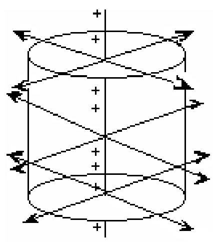
$$r < R: \quad E = 0, \qquad r \geq R: \quad E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \quad (3.19)$$

где введена поверхностная плотность заряда $\sigma = \dfrac{q}{S} = \dfrac{q}{4\pi R^2}$.

На рис. 3.11, б приведен график зависимости $E(r)$ – напряженности поля равномерно заряженной по поверхности сферы от расстояния r от ее центра.

Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 10

1. Поток вектора напряжённости Φ_E, создаваемого бесконечно протяженной заряженной нитью, через боковую поверхность S цилиндра равен



1) $\Phi_E = 0$ 2) $\Phi_E = ES\cos 90°$

3) $\Phi_E = ES\cos 0^0$ 4) $\Phi_E = ES\cos 180^0$

2. Точечный заряд $-6q$ находится внутри замкнутой полой поверхности. Если внутри этой поверхности добавить заряд $-q$, а снаружи $+q$, то поток вектора напряженности электростатического поля через данную замкнутую поверхность

   1) уменьшится 2) увеличится 3) не изменится

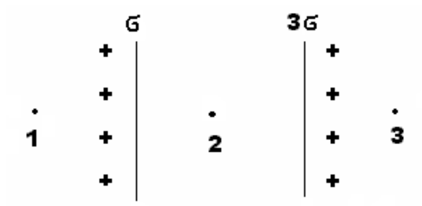
3. Точечный заряд $+q$ находится в центре сферической поверхности. Если увеличить радиус сферической поверхности, то поток вектора напряженности электрического поля через поверхность сферы

   1) уменьшится 2) увеличится 3) не изменится

4. Полая металлическая сфера радиусом *R* заряжена положительным зарядом *q*. Величина напряженности электрического поля *E* на расстоянии *R/*3 от центра сферы равна

1) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$ 2) $E = \dfrac{9q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$ 3) $E = 0$ 4) $E = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$

5. Верные соотношения для величины напряженности поля, созданного заряженными плоскостями, в точках 1, 2, 3:



1) $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ 2) $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

3) $E_3 = \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ 4) $E_1 = E_3 = \dfrac{2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$