ЛЕКЦИЯ 10. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Общее уравнение плоскости. Частные случаи.

2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

3. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющими векторами.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.

5. Уравнение плоскости в отрезках.

6. Нормальное уравнение плоскости.

7. Расстояние от точки до плоскости.

8. Взаимное расположение двух плоскостей.

9. Угол между плоскостями.

При рассмотрении способов задания плоскости в пространстве придерживаются аналогичного подхода, как и при рассмотрении способов задания прямой. Введем несколько общих определений.

Определение 1. ***Уравнением поверхности*** в пространстве называется уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты (x; y; z) каждой точки этой поверхности и только они! Переменные x, y, z называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

Поверхность называется алгебраической, если $F(x, y, z)$ – полином (многочлен).

$$F(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{s_i} y^{t_i} z^{u_i} .$$

Степенью полинома называется максимальная степень его одночленов.

Степень одночлена есть сумма степеней его переменных.

Например, $3x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz + y = 0$ уравнение алгебраической поверхности. Степень полинома равна 2.

Алгебраическая поверхность первого порядка $a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$ описывается уравнением первой степени с тремя неизвестными.

10.1. Общее уравнение плоскости. Частные случаи

Теорема 1. Поверхность в пространстве, заданная в декартовой прямоугольной системе координат уравнением первой степени вида $Ax+By+Cz+D=0$ есть плоскость, при этом $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

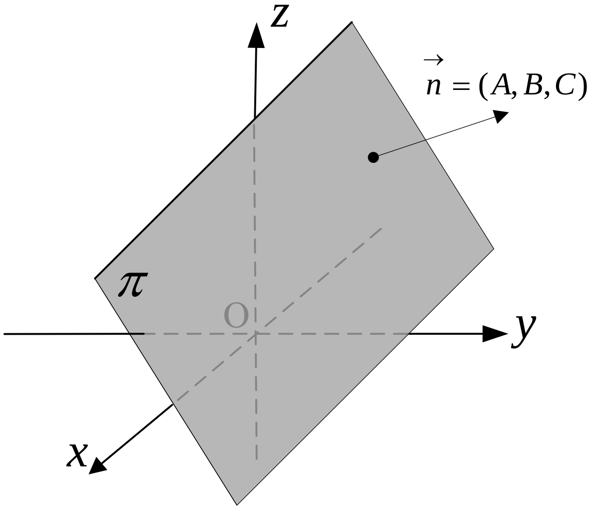
Теорема 2. (обратная теореме 1) Всякая плоскость в пространстве определяется уравнением первой степени относительно текущих координат *x*, *y*, *z*.

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \textbf{(1)}$$

общее уравнение плоскости

Определение 1. ***Нормальным вектором*** плоскости π называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ - нормальный вектор плоскости, заданной уравнением (1).

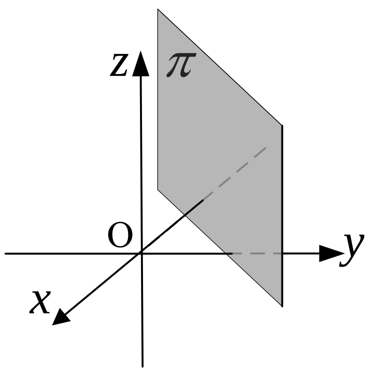


Частные случаи уравнения $Ax+By+Cz+D=0$

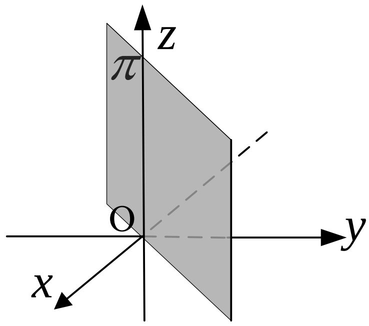
I. Если *D*=0, то уравнение $Ax+By+Cz=0$ задает плоскость, проходящую через начало координат.

II. Если *C*=0, то уравнение $Ax+By+D=0$ задает плоскость параллельную оси *Oz* (см. рисунок).

Аналогично, если *B* = 0, то уравнение $Ax+Cz+D=0$ задает плоскость параллельную оси *Oy*. Если *A*=0, то уравнение $By+Cz+D=0$ задает плоскость параллельную оси *Ox*.

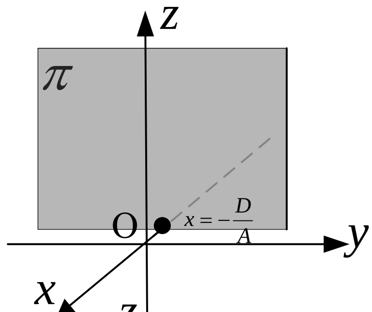


III. Если C=0, D=0, то уравнение $Ax+By=0$ задает плоскость проходящая через ось Oz (см. рисунок).

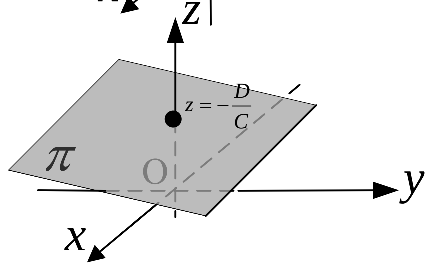


Аналогично, если B = 0, D=0, то уравнение $Ax+Cz=0$ задает плоскость, проходящая через ось Oy. Если A=0, D=0 то уравнение $By+Cz=0$ задает плоскость, проходящая через осью Ox.

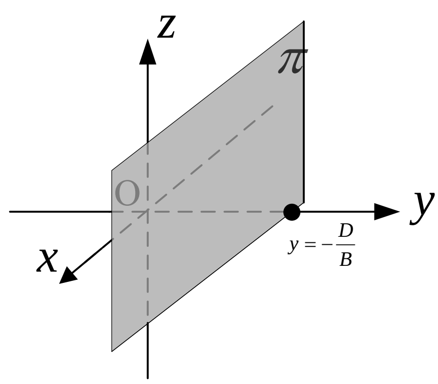
IV. Если C=0, B=0, то уравнение $Ax+D=0 \Rightarrow x=-\dfrac{D}{A}$ задает плоскость параллельную плоскости Oyz (см. рисунок).



Аналогично, если B = 0, A=0, то уравнение $Cz+D=0 \Rightarrow z=-\dfrac{D}{C}$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxy.



Если A=0, C=0 то уравнение $By+D=0 \Rightarrow y=-\dfrac{D}{B}$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxz.

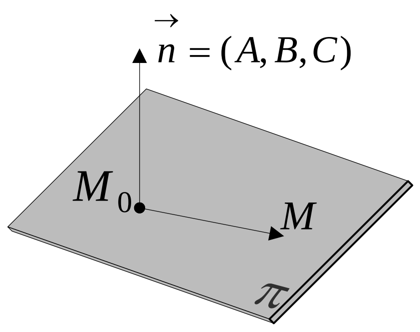


IV. Если B=0, C=0, D=0 то уравнение $Ax=0$ задает плоскость, совпадающую с плоскостью Oyz.

Если A=0, C=0, D=0 то уравнение $By=0$ задает плоскость, совпадающую с плоскостью Oxz.

Если A=0, B=0, D=0 то уравнение $Cz=0$ задает плоскость, совпадающую с плоскостью Oxy.

10.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору



Пусть необходимо задать плоскость π, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$, перпендикулярно некоторому вектору $\vec{n}=(A,B,C)$.

Пусть $M(x,y,z)\in\pi$ - будет произвольной, текущей точкой задаваемой плоскости тогда векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ будут перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{n},\overrightarrow{M_0M})$ = 0. Запишем его в координатной форме: $(\vec{n},\overrightarrow{M_0M})=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,1,0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(6,-7,8)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (2): $A=6, B=-7, C=8$.

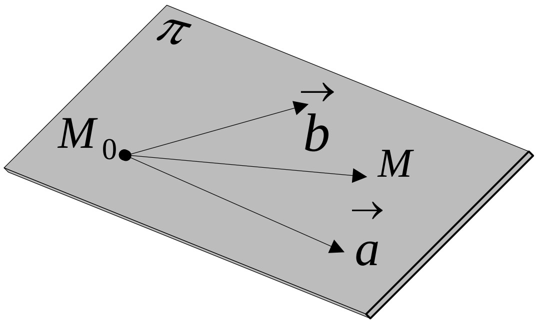
$6(x+2)-7(y-1)+8(z-0)=0$.

$6x-7y+8z+19=0$.

Ответ. $\pi: 6x-7y+8z+19=0$.

10. 3. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющими векторами

Пусть необходимо задать плоскость π, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, параллельно векторам $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.



Отложим в плоскости π векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки M_0 (см. рисунок).

Пусть $M(x, y, z) \in \pi$ - будет произвольной, текущей точкой задаваемой плоскости, тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ будут компланарны. Тогда смешанное произведение этих векторов ($\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$) = 0:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

уравнение плоскости,

заданной точкой и двумя неколлинеарными векторами

Замечание. Рассмотрим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащих в плоскости π. Как известно, $[\vec{a}, \vec{b}]$ есть вектор перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а значит и плоскости π. То есть этот вектор может быть выбран в качестве вектора нормали к задаваемой плоскости.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)}_{A}\vec{i} - \underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)}_{-B}\vec{j} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{C}\vec{k} = \vec{n}.$$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $S(-2,1,0)$, параллельно векторам $\vec{a} = (3,0,-1)$ и $\vec{b} = (2,-5,1)$.

Решение.

I способ. Воспользуемся формулой (1):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Разложим определитель по первой строке

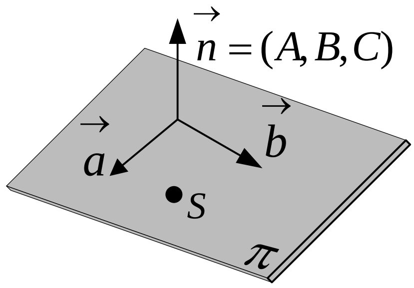
$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (x+2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5(x+2)-5(y-1)-15z=0$$

Преобразуем уравнение $-5(x+2)-5(y-1)-15z=0$, поделив обе части на (-5) и раскроем скобки: $x+y+3z+1=0$.

II способ.

Рассмотрим

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 15\vec{k} = \vec{n} .$$



$\vec{n} = (-5,-5,-15)$ - нормальный вектор плоскости.

Составим уравнение плоскости, воспользовавшись формулой (2).

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = -5(x+2)-5(y-1)-15(z-0)=0$, преобразовывая, получаем уравнение $x+y+3z+1=0$.

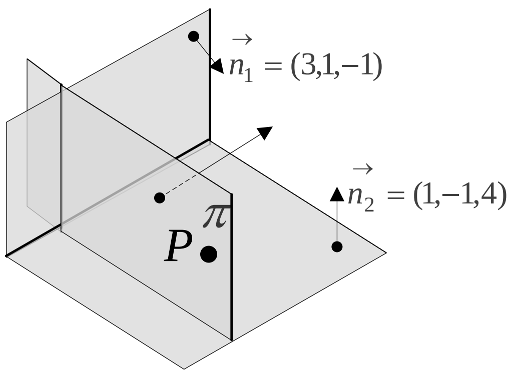
Ответ. $\pi: x+y+3z+1=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2,-3,1)$, перпендикулярно линии пересечения плоскостей π_1: $3x+y-z+2=0$ и π_2: $x-y+4z-1=0$.

Решение.

Так как искомая плоскость π перпендикулярна к данным плоскостям, то она параллельна нормальным векторам этих плоскостей.

Нормальные векторы плоскостей $\vec{n}_1 = (3,1,-1)$ и $\vec{n}_2 = (1,-1,4)$.



Их векторное произведение $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ есть вектор $\vec{n}$, перпендикулярный этим векторам, а значит, перпендикулярный искомой плоскости π.

$$\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 13\vec{j} - 4\vec{k}.$$

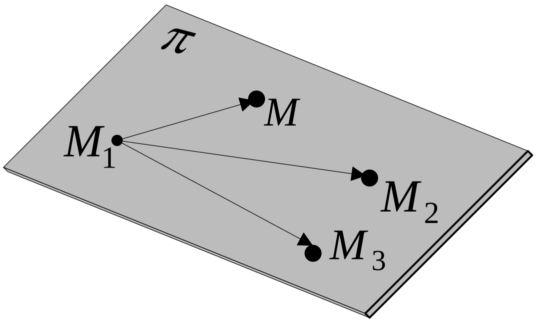
Составим уравнение плоскости π, используя формулу (2).

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=3(x-2)-13(y+3)-4(z-1)=3x-13y-4z-41=0.$$

Ответ. $\pi: 3x-13y-4z-41=0$.

10. 4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Зададим плоскость π, проходящую через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.



Пусть $M(x, y, z) \in \pi$ - будет произвольной, текущей точкой задаваемой плоскости.

Отложим в плоскости π векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ они компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю: $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$. Запишем его в координатной форме.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

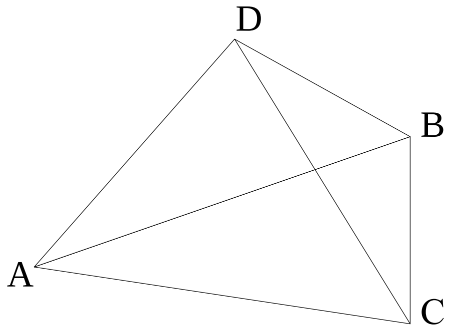
уравнение плоскости,

проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Задача 4. Составить уравнение грани *ABC*, пирамиды *ABCD*, заданной координатами своих вершин $A(1;1;0)$, $B(3;-2;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(0;3;-5)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (3)



$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & -2-1 & 1-0 \\ 2-1 & 1-1 & -1-0 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3(x-1)+3(y-1)+3z=0$$

Преобразуем уравнение $3(x-1)+3(y-1)+3z=0$, поделив обе части на 3 и раскроем скобки: $x+y+z-2=0$.

Ответ. $\pi: x+y+z-2=0$.

10.5. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде $Ax+By+Cz+D=0$. Если при этом коэффициент $D\neq 0$, то плоскость отсекает на осях координат некоторые отрезки и можно преобразовать уравнение к специальному виду.

Перенесем коэффициент *D* вправо и поделим обе части на -*D*.

<u>В правой части должна остаться единица</u>!

$Ax+By+Cz=-D$.

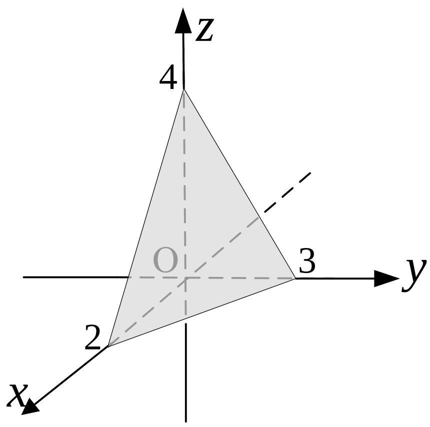
$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1.$$

$$\frac{1}{-D/A}x+\frac{1}{-D/B}y+\frac{1}{-D/C}z=1.$$

Числа $\left|-D/A\right|$, $\left|-D/B\right|$, $\left|-D/C\right|$ есть длины отрезков отсекаемых плоскостью π от координатных осей. Т.е. плоскость пересекает ось *Ox* в точке $(-D/A,0,0)$, ось *Oy* в точке $(0,-D/B,0)$, ось *Oz* в точке $(0,0,-D/C)$.

Задача 5. Задана плоскость $\pi: 6x+4y+3z-12=0$. Вычислить объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатных осей.

Решение.



Перепишем уравнение плоскости в виде
$6x+4y+3z=12$.
Поделим обе части равенства на 12.
$\frac{6}{12}x+\frac{4}{12}y+\frac{3}{12}z=1$.
$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.
$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ - площадь основания, h - высота пирамиды.
$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$, $h=4$ $V=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4=4$.

Ответ. 4.

10.6. Нормальное уравнение плоскости

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде $Ax+By+Cz+D=0$. Если при этом коэффициент $D\neq 0$, то можно преобразовать уравнение к специальному виду.

Вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ - нормальный вектор плоскости.

$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Общее уравнение плоскости можно преобразовать путем умножения на нормирующий множитель $\mu=\frac{-\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ в нормальное уравнение, имеющее вид

$$\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-\rho=0,$$

$\cos\alpha=\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta=\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma=\frac{-\operatorname{sgn} D\cdot C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - косинусы углов, которые нормальный вектор образует с осями координат.

Вектор с координатами $\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ есть единичный вектор, сонаправленный с вектором нормали, т.е. это орт вектора нормали.

Напомним, что $\operatorname{sgn} D = \begin{cases} 1, D > 0 \\ 0, D = 0 \\ -1, D < 0 \end{cases}$

ρ - расстояние от начала координат до данной плоскости.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - \rho = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

нормальное уравнение плоскости

Задача 6. Привести общее уравнение плоскости $2x - y + 2z - 12 = 0$ к нормальному виду. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение.

Найдем нормирующий множитель $\mu = \dfrac{-\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

D = -12, значит $\operatorname{sgn}(-12) = -1$, т.к. -12<0.

$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

$\mu = \dfrac{-(-1)}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$(2x - y + 2z - 12) \cdot \mu = 0 \cdot \mu \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 4 = 0$ – нормальное уравнение плоскости.

$\rho = 4$ – расстояние от начала координат до плоскости.

Ответ. $\rho = 4$.

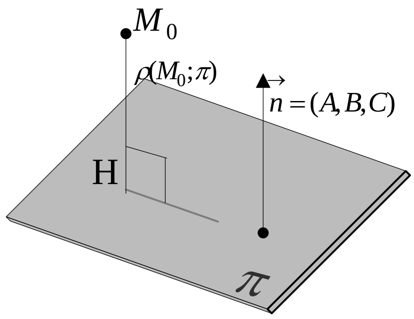
10.7. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – произвольная точка пространства. Если $M_0 \in \pi$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости, обращая его в верное тождество: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не принадлежит плоскости π.

Определение 3. ***Расстоянием от точки*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***до плоскости*** π называется длина перпендикуляра M_0H, опущенного из точки M_0 на плоскость π.

Теорема 3. Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, до плоскости π, заданной в декартовой прямоугольной системе координат общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$\rho(M_0;\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \qquad \textbf{(5)}$$



Доказательство. Пусть $H(x_H;y_H;z_H)$ - основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость π .

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{HM_0}=(x_0-x_H;y_0-y_H;z_0-z_H)$, $\rho(M_0;\pi)=\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$.

Векторы и $\overrightarrow{HM_0}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(A;B;C)$ будут коллинеарны, значит $\cos\angle(\vec{n},\overrightarrow{HM_0})=\pm1$.

По определению скалярное произведение этих векторов

$$(\vec{n},\overrightarrow{HM_0})=\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HM_0}\right|\cdot\underbrace{\cos\angle(\vec{n},\overrightarrow{HM_0})}_{\pm1}=\pm\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HM_0}\right|.$$

Скалярное произведение этих векторов в координатной форме

$$(\vec{n},\overrightarrow{HM_0})=A(x_0-x_H)+B(y_0-y_H)+C(z_0-z_H).$$

Приравняем правые части равенств

$$\pm\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HM_0}\right|=A(x_0-x_H)+B(y_0-y_H)+C(z_0-z_H).$$

$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\left|\overrightarrow{HM_0}\right|=Ax_0+By_0+Cz_0-\underbrace{(Ax_H+By_H+Cz_H)}_{-D}.$$

Так как $H\in\pi$, то $Ax_H+By_H+Cz_H+D=0\Rightarrow Ax_H+By_H+Cz_H=-D$.

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\left|\overrightarrow{HM_0}\right|=Ax_0+By_0+Cz_0+D\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{HM_0}\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\rho(M_0;\pi)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Найти расстояние от точки $S(1;5;-1)$ до плоскости $4x-3y-2z-1=0$

Решение.

Воспользуемся формулой (5) $\rho(S;\pi)=\left|\dfrac{4\cdot1-3\cdot5-2\cdot(-1)-1}{\sqrt{4^2+3^2+2^2}}\right|=\left|\dfrac{-10}{\sqrt{29}}\right|=\dfrac{10}{\sqrt{29}}$

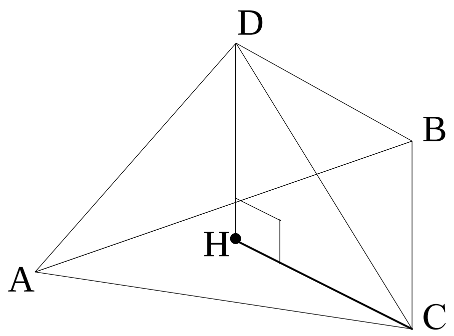
Ответ. $\dfrac{10}{\sqrt{29}}$

Задача 8. Найти высоту пирамиды $ABCD$, заданной координатами своих вершин $A(1;1;0)$, $B(3;-2;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(0;3;-5)$, опущенную на грань ABC.

Решение.

Уравнение грани (ABC) было найдено в задаче 3:

$\pi: x+y+z-2=0$



Высота DH есть расстояние от точки D до плоскости (ABC).

Воспользуемся формулой (5)

$$\rho(D;ABC)=\left|\frac{1\cdot0+1\cdot3+1\cdot(-5)-2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{3}}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ответ. $DH=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

10.8. Угол между двумя плоскостями

Под ***углом между двумя плоскостями*** в пространстве понимают любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями

$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Угол φ между ними равен углу между векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ этих плоскостей. Как известно, угол между векторами можно найти из формулы $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n_1}, \vec{n_2})}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ **(6)**

10. 9. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть плоскости заданы общими уравнениями

$\pi_1 :\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. (7)

$\pi_2 :\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. (8)

Условие совпадения плоскостей: Для того чтобы уравнения (7) и (8) определяли одну и ту же плоскость необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этих уравнений были пропорциональны: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Условие параллельности плоскостей: Для того чтобы уравнения (7) и (8) определяли параллельные плоскости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

Действительно, в случае параллельности двух плоскостей их нормальные векторы $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ коллинеарны, т.е. справедливо равенство $\vec{n_1} = \lambda \vec{n_2}$ или $(A_1; B_1; C_1) = \lambda(A_2; B_2; C_2) \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda$.

Условие пересечения плоскостей: Плоскости π_1 и π_2 пересекаются, если выполняется хотя бы одно из условий: $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: Для того чтобы плоскости π_1 и π_2 были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

Действительно, в случае перпендикулярности двух плоскостей их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно 0: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ или $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Пусть параллельные плоскости заданы общими уравнениями

$\pi_1:\ Ax + By + Cz + D_1 = 0$.

$\pi_2:\ Ax + By + Cz + D_2 = 0$.

В этом случае расстояние между плоскостями может быть найдено по формуле

$$\rho(\pi_1; \pi_2) = \left| \frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad \textbf{(7)}$$