Лекция 10. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ (МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД)

План

1. Метод комплексных амплитуд.
2. Комплексные сопротивление и проводимость.
3. Расчет установившегося синусоидального режима в простейших цепях.
4. Мощности в цепях синусоидального тока.
5. Выводы.

1. Метод комплексных амплитуд

Тригонометрическая форма расчета цепей синусоидального тока применима только для простейших цепей. Для анализа разветвленных цепей необходим аналитический метод, позволяющий упростить расчет и использовать методы, разработанные для цепей постоянного тока. Таким методом является *метод комплексных амплитуд* или символический метод. Он основан на том, что синусоидальная функция известной частоты полностью характеризуется двумя вещественными числами: амплитудой U_m и начальной фазой ψ.

Предположим, что напряжение источника в линейной цепи изменяется по закону

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi).$$

Будем использовать косинусную форму гармонической функции. Это упростит дальнейшие выкладки. Представим $u(t)$ в виде полусуммы двух сопряженных комплексных чисел

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = u'(t) + u''(t) = \frac{1}{2}\left(U_m e^{j(\omega t + \psi)} + U_m e^{-j(\omega t + \psi)}\right).$$

Представление гармонической функции в виде суммы комплексных экспонент удобно потому, что определить реакцию цепи на воздействие в форме экспоненты значительно проще, чем при гармоническом воздействии. Действительно, дифференцирование комплексной экспоненты равносильно умножению ее на $j\omega$, а интегрированию $e^{j\omega t}$ соответствует деление на $j\omega$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\,\omega\, e^{j\omega t}, \quad \int\left(e^{j\omega t}\right)dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}.$$

Поэтому поведение цепи при экспоненциальном воздействии описывается не дифференциальными, а алгебраическими уравнениями.

В соответствии с принципом наложения реакцию цепи представим в виде суммы реакций на действие двух комплексных функций:

$$u'(t)=\frac{1}{2}U_m e^{j\psi}e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad u''(t)=\frac{1}{2}U_m e^{-j\psi}e^{-j\omega t}.$$

Очевидно, что составляющие реакции будут отличаться только знаком аргумента. Поэтому достаточно определить реакцию цепи на действие только одной составляющей,

$$u'(t)=\frac{1}{2}U_m e^{j\psi}e^{j\omega t}.$$

Рассмотрим подробнее комплексную функцию

$$U_m e^{j\psi}e^{j\omega t}=\dot{U}_m e^{j\omega t}. \qquad (10.1)$$

Величину $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$ называют *комплексной амплитудой*. Модуль $\dot{U}_m$ равен амплитуде синусоидальной функции, а аргумент – ее начальной фазе.

Второй множитель в формуле (10.1) – экспонента $e^{j\omega t}$ имеет модуль, равный единице.

Комплексную амплитуду удобно представлять графически, в виде вектора на комплексной плоскости (рис. 10.1). Длина вектора пропорциональна амплитуде U_m, а угол, образованный вектором и положительной вещественной полуосью, равен начальной фазе ψ. Совокупность векторов, изображающих несколько синусоидальных функций одинаковой частоты, называют *векторной диаграммой*. Векторная диаграмма позволяет наглядно судить с соотношениях между амплитудами и начальными фазами гармонических напряжений и токов цепи или ее участка.

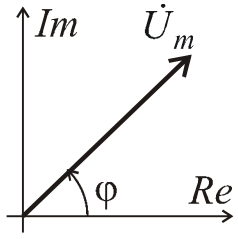


Рис. 10.1

Между синусоидальной функцией и ее символическим изображением в виде комплексной амплитуды существует однозначное соответствие. Если задана гармоническая функция, то с помощью формулы (10.1) находится ее комплексная амплитуда.

Комплексная амплитуда не зависит от времени и является функцией частоты, так как ее модуль и аргумент (амплитуда и начальная фаза синусоидальной функции) зависят от частоты приложенного сигнала. Поэтому комплексную амплитуду гармонической функции можно рассматривать как преобразование временной функции в частотную область.

Наряду с комплексной амплитудой при расчете цепей синусоидального тока широко используют другую комплексную величину – *комплексное действующее значение*:

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = Ue^{j\psi}.$$

Комплексное действующее значение представляет комплексное число, модуль которого равен действующему значению гармонической функции, а аргумент – ее начальной фазе. Величины $\dot{U} = \dot{U}_m / \sqrt{2}$ и $\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2}$ называют *комплексными напряжением и током* цепи.

Использование комплексных амплитуд значительно упрощает расчет цепей синусоидального тока. Это объясняется тем, что дифференцированию гармонической функции соответствует умножение комплексной амплитуды на $j\omega$, а интегрированию – деление на $j\omega$. Поэтому при переходе к комплексным амплитудам мы получаем систему алгебраических уравнений. Уравнения имеют такую же форму, как и для резистивных цепей, только все токи и напряжения оказываются комплексными. Это позволяет применять для анализа цепей синусоидального тока все методы расчета цепей постоянного тока.

Расчет цепи синусоидального тока символическим методом проводится в следующем порядке. На первом этапе гармонические токи и напряжения заменяют комплексными амплитудами и определяют комплексные сопротивления ветвей цепи. Затем составляют систему уравнений для комплексных амплитуд в соответствии с любым методом анализа резистивных цепей. Решая полученные уравнения, находят комплексы искомых токов и напряжений.

Итак, при анализе цепей синусоидального тока операции над гармоническими функциями можно заменить операциями над комплексными амплитудами, которые являются символическими изображениями этих функций. Соответствующий метод получил название *метода комплексных амплитуд* или *символического метода*. Метод комплексных амплитуд был разработан американскими электротехниками А. Кеннели и Ч. Штейнметцем.

2. Комплексные сопротивление и проводимость. Закон Ома в комплексной форме

Рассмотрим участок цепи, напряжение и ток которого изменяются по гармоническому закону:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_U),\ i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_I).$$

Соответствующие комплексные амплитуды:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi U}, \quad \dot{I}_m = I_m e^{j\psi I}.$$

Отношение

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} \qquad (10.2)$$

называют *комплексным сопротивлением* участка цепи. Формула (10.2) выражает закон Ома в комплексной форме.

Представим комплексное сопротивление в показательной форме:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = Z\, e^{j\varphi} \quad .$$

Модуль комплексного сопротивления равен отношению амплитуд (действующих значений) напряжения и тока:

$$Z = \frac{U_m}{I_m}.$$

Его называют *полным сопротивлением*.

Аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \psi_U - \psi_I$ равен углу сдвига фаз между напряжением и током. Он положителен при отстающем токе (индуктивная нагрузка) и отрицателен при опережающем токе (емкостная нагрузка).

Запишем комплексное сопротивление в алгебраической форме:

$$\underline{Z} = R + jX .$$

Вещественную часть комплексного сопротивления $R = Z\cos\varphi$ называют *активным сопротивлением*. Мнимую часть комплексного сопротивления $X = Z\sin\varphi$ называют *реактивным сопротивлением*.

Полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Величину, обратную комплексному сопротивлению называют *комплексной проводимостью:*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = Ye^{-j\varphi} \quad .$$

Модуль комплексной проводимости $Y = \dfrac{I_m}{U_m}$ – *полная проводимость.*

В алгебраической форме комплексная проводимость $\underline{Y} = G - jB$.

Вещественную часть комплексной проводимости $G = Y\cos\varphi$ называют *активной проводимостью*. Мнимую часть комплексной проводимости $B = Y\sin\varphi$ называют *реактивной проводимостью*.

Нетрудно установить связь между активными и реактивными составляющими комплексных сопротивления и проводимости:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Таким образом, активная и реактивная проводимости равны соответственно:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Аналогично

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \qquad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}.$$

В заключение определим комплексные сопротивления двухполюсных элементов. Соотношения между комплексами напряжения и тока на зажимах резистивного, индуктивного и емкостного элементов следующие:

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \; \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}, \; \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}.$$

Соответственно комплексные сопротивления

$$\underline{Z}_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R, \; \underline{Z}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L = jX_L,$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\dot{U}_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j1}{\omega C} = -jX_C.$$

Комплексные сопротивления при последовательном или параллельном соединениях элементов находят так же, как и в случае резистивных цепей постоянного тока. Если известно комплексное сопротивление участка цепи, то по заданной амплитуде тока можно найти комплексную амплитуду напряжения.

3. Расчет установившегося синусоидального режима в простейших цепях

Используем символический метод для расчета установившегося синусоидального режима в простейших цепях. Расчет будем вести в комплексной форме, без составления уравнений для мгновенных значений напряжений и токов. В соответствии с общепринятой практикой расчет будем вести для действующих значений напряжений и токов.

В самом начале расчета определяются комплексные действующие значения напряжений и токов источников, а также комплексные сопротивления ветвей.

Последовательная RL-цепь. Рассмотрим RL-цепь, показанную на рис. 10.2. Поскольку элементы соединены последовательно, комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L .$$

Полное сопротивление RL-двухполюсника равно модулю $\underline{Z}_{RL}$, т. е. равно

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} .$$

Аргумент $\underline{Z}_{RL}$

$$\varphi = arctg(\omega L / R).$$

Поэтому в показательной форме записи

$$\underline{Z}_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, e^{jarctg(\omega L/R)} .$$

Комплекс тока в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega L} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\psi_U - arctg(\omega L/R))} .$$

Отсюда действующее значение и начальная фаза тока

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \psi_I = \psi_U - arctg(\omega L / R).$$

Мгновенное значение тока в цепи

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_I).$$

Полученное решение показывает, что амплитуда тока и его начальная фаза зависят от амплитуды приложенного напряжения, величины R и L, а также от частоты ω. Ток отстает от напряжения, приложенного к цепи, на угол $\varphi = arctg(\omega L/R)$. Этого и следовало ожидать, поскольку сопротивление цепи имеет индуктивный характер.

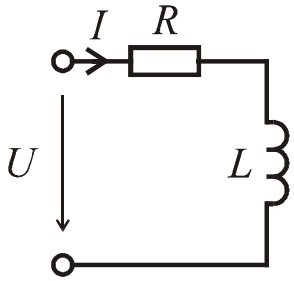


Рис. 10.2

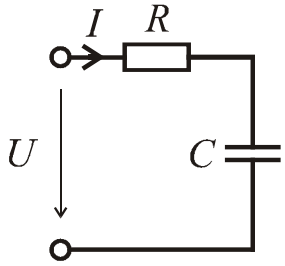


Рис. 10.3

Последовательная RC-цепь. Рассмотрим RC-цепь, показанную на рис. 10.3. Комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{RC} = R - j\frac{1}{\omega C}.$$

Полное сопротивление последовательной RC-цепи равно

$$Z_{RC} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Аргумент $\underline{Z}_{RC}$

$$\varphi = arctg(-1/\omega CR) = -arctg(1/\omega CR).$$

В показательной форме записи комплексное сопротивление RC-цепи

$$\underline{Z}_{RC} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\, e^{-jarctg(1/\omega CR)}.$$

Комплекс тока в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\psi_U + arctg(1/\omega CR))}.$$

Отсюда действующее значение и начальная фаза тока

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \psi_I = \psi_U + arctg(1/\omega CR).$$

Поскольку комплексное сопротивление цепи имеет емкостный характер, ток опережает приложенное напряжение. Как и в случае RL-цепи, амплитуда тока и его начальная фаза зависят от частоты ω.

4. Мощности в цепях синусоидального тока

Рассмотрим двухполюсную цепь, ток и напряжение которой изменяются синусоидально:

$$u(t) = U_m \sin \omega t; \qquad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений напряжения и тока

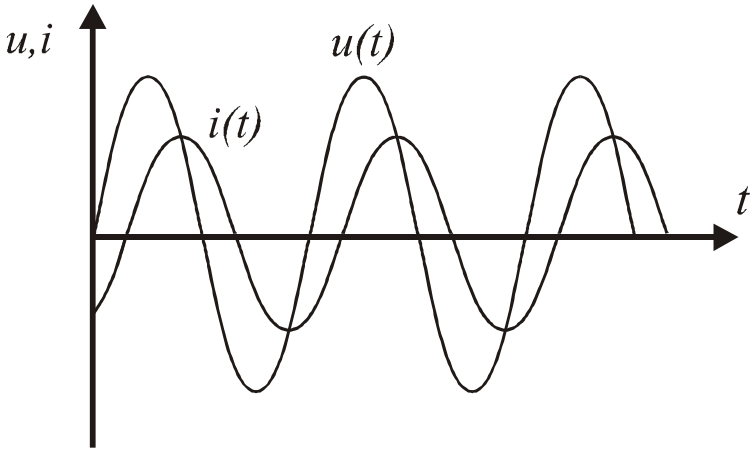
$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right]. \qquad (10.3)$$

Согласно (10.3) мгновенная мощность, потребляемая двухполюсником, колеблется с удвоенной угловой частотой 2ω. Формула (10.3) содержит две составляющих: постоянную и переменную, изменяющуюся по гармоническому закону с частотой 2ω. Графики напряжения, тока и мгновенной мощности для случая $\cos\varphi = 0.6$ показаны на рис. 10.4, *а, б*.

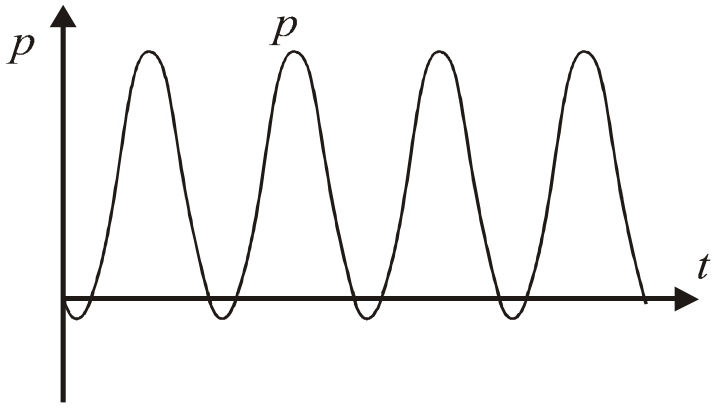
Если фазовый сдвиг между напряжением и током $\varphi \neq 0$, то мгновенная мощность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Когда мгновенная мощность положительна, энергия поглощается двухполюсником. В промежутки времени, когда мгновенная мощность отрицательна, энергия частично возвращается во внешнюю цепь.

Как уже отмечалось, среднее значение мгновенной мощности за период называют активной или средней мощностью. Поскольку второе слагаемое в (10.3) является гармонической функцией, его среднее значение равно нулю. Поэтому активная мощность рассматриваемой цепи

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = UI\cos\varphi \quad . \qquad (10.4)$$



а



б

Рис. 10.4

Множитель $\cos\varphi$ называют *коэффициентом мощности*. Повышение коэффициента мощности представляет важную технико-экономическую задачу. Чем ближе $\cos\varphi$ к единице, тем большая активная мощность передается приемнику при заданных значениях напряжения и тока. Промышленные электротехнические установки обладают не только активной, но и реактивной мощностью, которая обусловлена наличием большого числа электродвигателей. Одним из способов компенсации реактивной мощности и повышения за счет этого $\cos\varphi$ является включение конденсаторных батарей в узлах электрической системы.

Величину, равную произведению действующих значений напряжения и тока, называют *полной мощностью*:

$$S = UI\,. \qquad (10.5)$$

Полная мощность равна амплитуде пульсаций мгновенной мощности. Единицей измерения полной мощности является вольт-ампер (ВА). В соответствии с (10.4) и (10.5) коэффициент мощности равен отношению активной мощности к полной: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

Активная мощность равна полной только при $\cos\varphi = 1$, т. е. при совпадении фаз напряжения и тока.

Полную мощность можно рассматривать как модуль комплексной величины, называемой *комплексной мощностью*:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^{*} = Se^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ\,. \qquad (10.6)$$

В соответствии с (10.6) вещественной частью комплексной мощности является активная мощность. Мнимую часть комплексной мощности называют *реактивной мощностью*:

$$Q = UI\sin\varphi\,.$$

Единицей измерения реактивной мощности является вольт-ампер реактивный (вар). Реактивная мощность характеризует процессы запасания энергии в цепи. Она численно равна максимальной скорости обмена энергией между двухполюсником и внешней цепью. Реактивная мощность положительна при отстающем токе (т. е. при индуктивной нагрузке, когда $\varphi > 0$) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка, когда $\varphi < 0$).

Из формулы (10.6) и определения полной мощности следует, что

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

С помощью теоремы Телледжена можно показать, что для любой электрической цепи выполняется баланс комплексных мощностей: сумма комплексных мощностей, отдаваемых источниками, равна сумме комплексных мощностей, потребляемых приемниками. Отсюда следует, что равны нулю алгебраические суммы активных и реактивных мощностей цепи.

5. Выводы

1. Величину $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$ называют комплексной амплитудой. Модуль $\dot{U}_m$ равен амплитуде синусоидальной функции, а аргумент – ее начальной фазе.

2. Комплексная амплитуда не зависит от времени и является функцией частоты, так как ее модуль и аргумент (амплитуда и начальная фаза синусоидальной функции) зависят от частоты приложенного сигнала. Поэтому комплексную амплитуду гармонической функции можно рассматривать как преобразование временной функции в частотную область.

3. Использование комплексных амплитуд значительно упрощает расчет цепей синусоидального тока. Это объясняется тем, что при переходе к комплексным амплитудам мы получаем систему алгебраических уравнений. Уравнения имеют такую же форму, как и для резистивных цепей, только все токи и напряжения оказываются комплексными. Это позволяет применять для анализа цепей синусоидального тока все методы расчета цепей постоянного тока.

4. Отношение комплексных амплитуд напряжения и тока $\underline{Z} = \dot{U}_m / \dot{I}_m$ называют комплексным сопротивлением участка цепи.

5. Модуль комплексного сопротивления равен отношению амплитуд напряжения и тока. Его называют полным сопротивлением.