



РГСУ

Математика

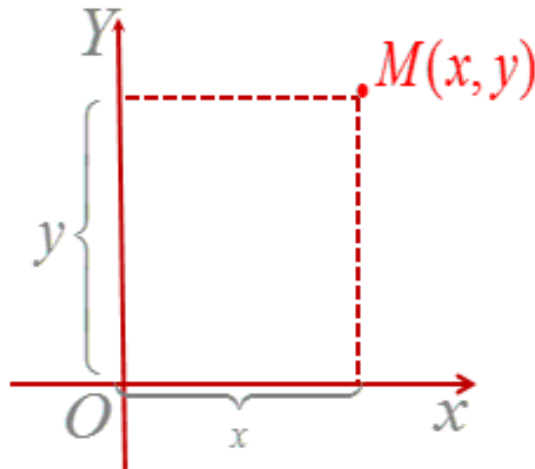
Лекция 2

*Элементы аналитической
геометрии*

Понятие об аналитической геометрии

Аналитическая геометрия — это ветвь математики, изучающая геометрические образы средствами алгебры на основе метода координат.

Прямоугольная (декартова) система координат на плоскости:

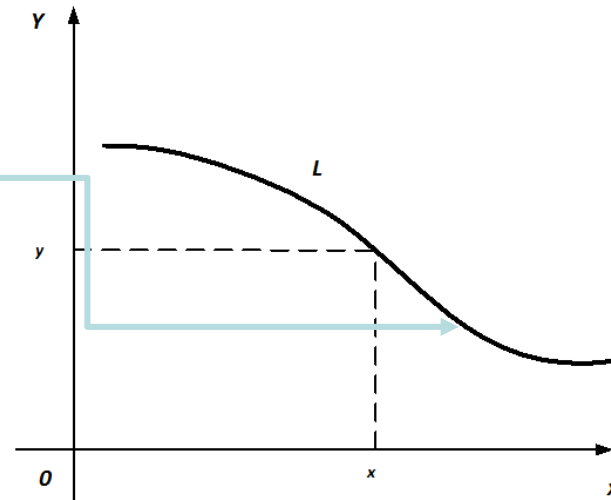


Понятие об аналитической геометрии

Уравнение

$$F(x, y) = 0$$

Определяет на плоскости линию L как совокупность всех точек, удовлетворяющих данному уравнению, называемому уравнением линии L .

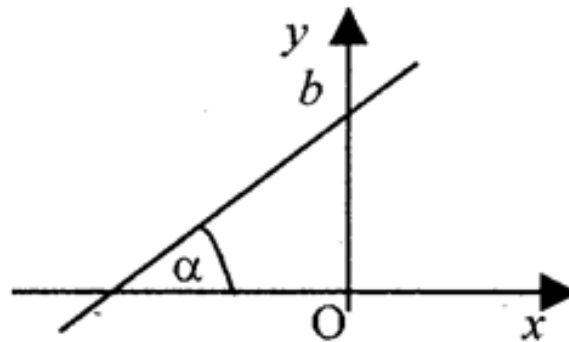


Каждая точка линии L удовлетворяет уравнению.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Уравнения прямой на плоскости

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:



$$y = kx + b,$$

где k -угловой коэффициент прямой: $k = \operatorname{tg} \alpha$,

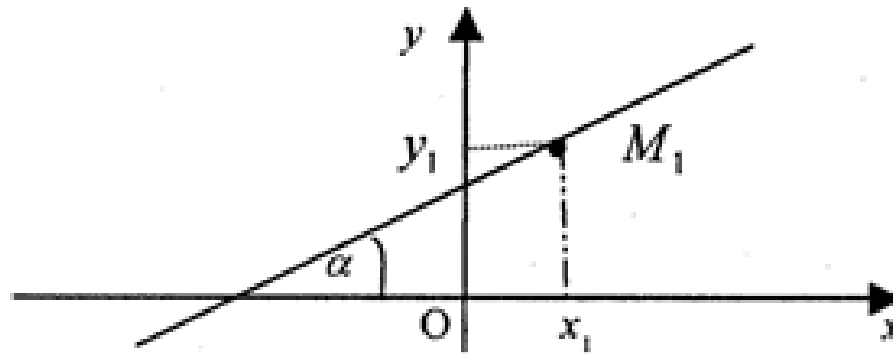
α – угол наклона прямой к оси Ox , где $0 \leq \alpha < \pi$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

Замечание. Прямая не может быть вертикальной

Уравнения прямой на плоскости

2) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k :



$$y_1 = kx_1 + b \quad \longrightarrow \quad y - y_1 = k(x - x_1)$$

Пример. Пусть $M(-2;3)$ и $k=2$. Построить уравнение прямой.

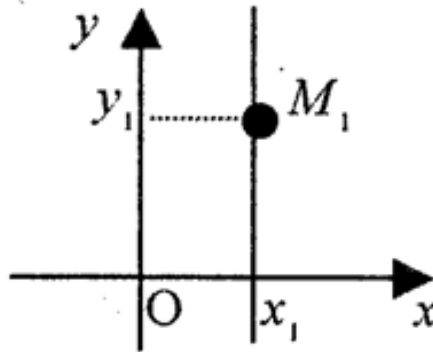
Решение:

$$y - 3 = 2(x - (-2)), \quad y - 3 = 2(x + 2),$$

$$y = 2x + 7.$$

Уравнения прямой на плоскости

3) Уравнение вертикальной прямой, проходящей через заданную точку $M(x_1; y_1)$:



$$x = x_1$$

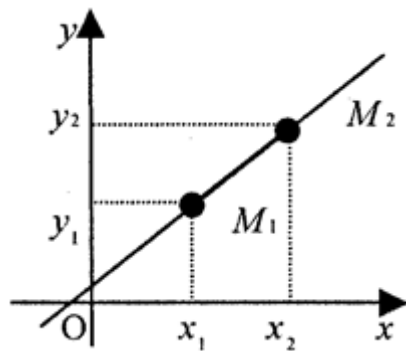
Пример. Уравнение вертикальной прямой, проходящей через точку $M(2;3)$:

$$x = 2$$

Уравнения прямой на плоскости

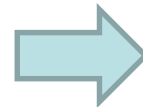
4) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

- а) если точки не лежат на одной вертикальной или горизонтальной прямой ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$)



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Пример. Пусть $M_1(2; -3)$ и $M_2(-1; 2)$. Построить уравнение прямой.

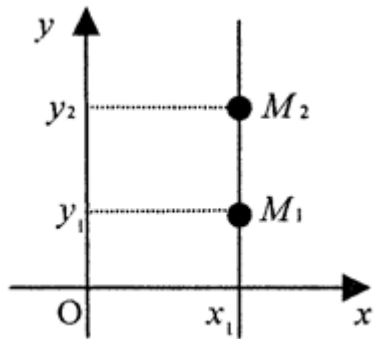
Решение: $\frac{y - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{x - 2}{-1 - 2}; \quad \frac{y + 3}{5} = \frac{x - 2}{-3};$

$$-3(y + 3) = 5(x - 2); \quad 5x + 3y - 1 = 0; \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

Уравнения прямой на плоскости

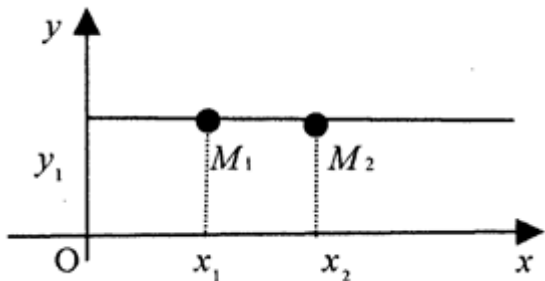
2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

- б) если точки лежат на одной вертикальной прямой ($x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$)



$$x = x_1$$

- в) если точки лежат на одной горизонтальной прямой $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$



Горизонтальная прямая – частный случай наклонной прямой при $\alpha=0$.

$$y = y_1$$

Уравнения прямой на плоскости

Следствие:

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ если } x_1 \neq x_2.$$

Пример. Пусть $M_1(2; -3)$ и $M_2(-1; 2)$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через эти точки:

$$k = \frac{2 - (-3)}{-1 - 2} = -\frac{5}{3}$$

Уравнения прямой на плоскости

5) Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

причем коэффициенты A и B не обращаются одновременно в ноль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Частные случаи:

если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ - уравнение наклонной;

если $A = 0$ и $B \neq 0$, то $y = -\frac{C}{B}$ - уравнение горизонтальной прямой;

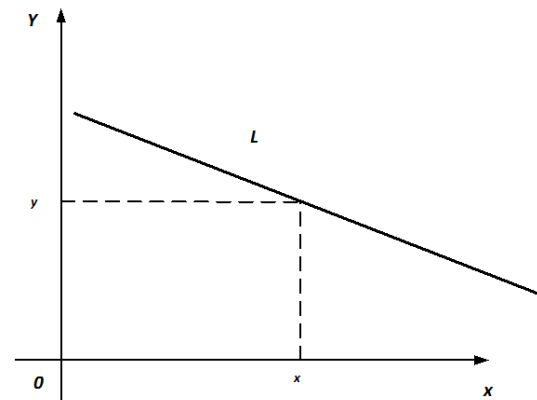
если $A \neq 0$ и $B = 0$, то $x = -\frac{C}{A}$ - уравнение вертикальной прямой.

Уравнения прямой на плоскости

Уравнением первой степени двух переменных называется алгебраическое уравнение, в каждое слагаемое которых входят как множители координаты, причем суммарная степень координат не больше 1.

$$Ax + By + C = 0$$

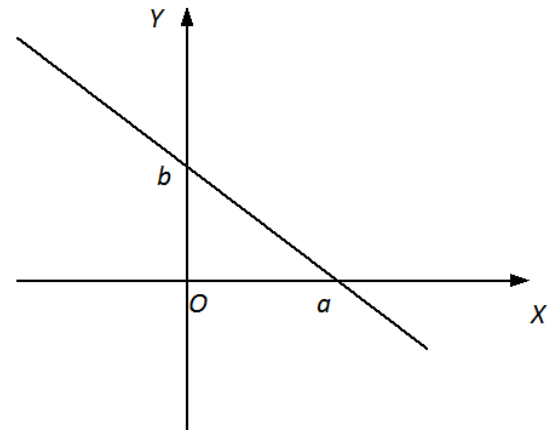
— уравнение 1 степени
двух переменных
на плоскости



Уравнения прямой на плоскости

- 6) Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a, b \neq 0$$



Пример. Уравнение $3x + 5y = 8$

можно представить в виде

$$\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{\frac{8}{5}} = 1$$

$$a = \frac{8}{3}, \quad b = \frac{8}{5}$$

Приложения

- **1) Необходимое и достаточное условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 :**

$$k_1 \overline{k_2} = -1$$

- **2) Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 :**

Пример. Даны три вершины треугольника $A(-2;3)$, $B(0;1)$ и $C(-4;6)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C .

Решение. Составим уравнение прямой AB .

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x+2}{2}, \quad \frac{y-3}{-2} = \frac{x+2}{2},$$

$$-y+3 = x+2, \quad x+y-1=0,$$

$$y = -x+1, \quad k_1 = -1$$

Угловой коэффициент высоты $k_2 = -\frac{1}{-1} = 1$

Уравнение прямой, проходящей через вершину

$C(-4;6)$ с угловым коэффициентом $k_2 = 1$:

$$y-6 = 1 \cdot (x+4), \quad y = x+10.$$

Приложения

- **3) Острый угол φ между прямыми, заданными уравнениями :**

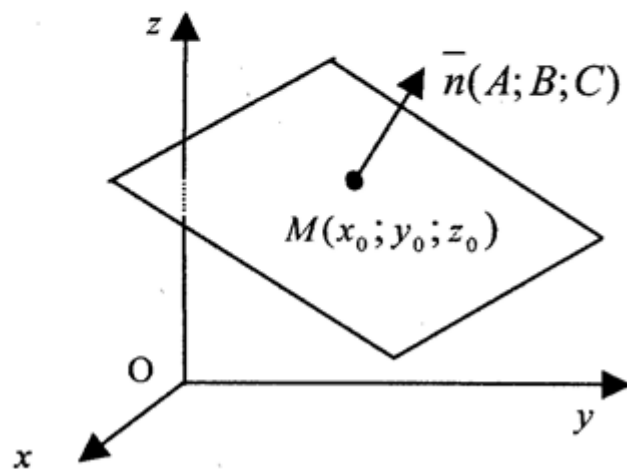
$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2 :$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

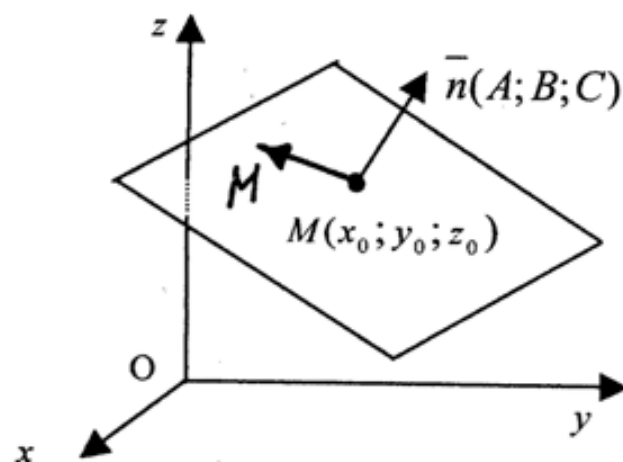
Элементы аналитической геометрии в пространстве

Уравнения плоскости

- а) *Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$:*



Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости.



Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{n} перпендикулярны. Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю. Это значит, что

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ - *нормаль к плоскости*.

Уравнения плоскости

б) Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости – уравнение 1 порядка в пространстве

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;4)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; -1; 2)$.

Решение.

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 3) + 2 \cdot (z - 4) = 0,$$

$$x - y + 2z - 7 = 0.$$

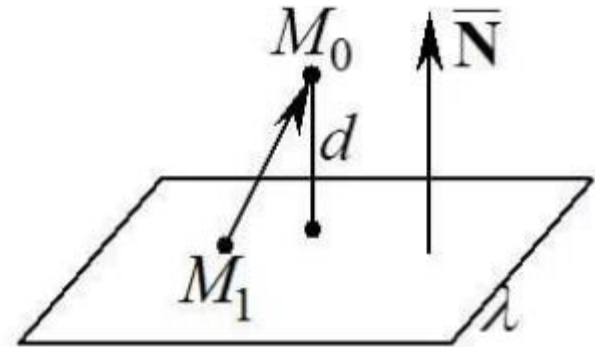
Расстояние от точки до плоскости

Найти расстояние d от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Решение:

$$\begin{aligned} d &= \left| \text{Пр}_{\vec{N}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} = \\ &= \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



Пример. Расстояние от точки $M(-3; 1; 2)$ до прямой $3x + 4y - 12z + 2 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{|-27|}{\sqrt{169}} = \frac{27}{13}$$

Расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

с нормальями $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\vec{n}_1 // \vec{n}_2 .$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 ,$$

ИЛИ

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

с нормальями $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

*Острый угол, образованный двумя плоскостями,
заданными уравнениями*

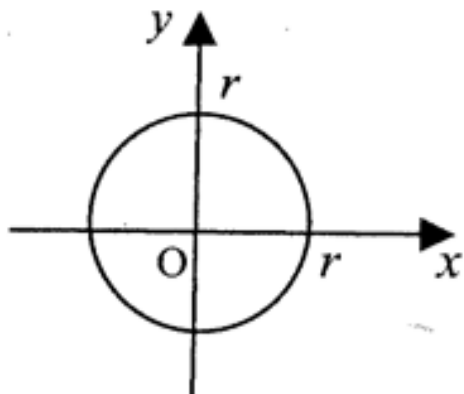
$$\cos \varphi = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$$

Кривые второго порядка

- При изучении линий на плоскости их классифицируют по сложности уравнений:
- уравнения 1 степени \longleftrightarrow прямые
- уравнения 2 степени \longleftrightarrow кривые второго порядка:
 - окружность, эллипс, гипербола и парабола.
-

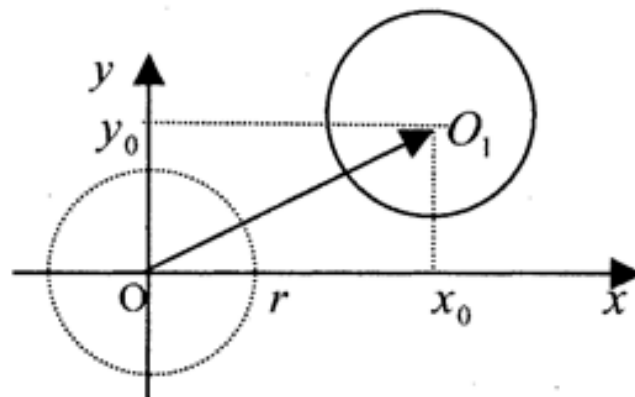
Окружность

- **Окружность** – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром
- *Каноническое уравнение окружности*



$$x^2 + y^2 = r^2$$

r – радиус окружности



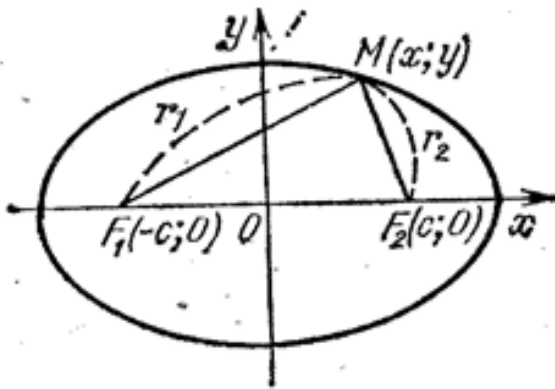
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$O_1(x_0; y_0)$ – центр окружности

Эллипс

Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

- Каноническое уравнение эллипса



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Фокусы эллипса: $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$

Расстояние между фокусами: $F_1F_2 = 2c$.

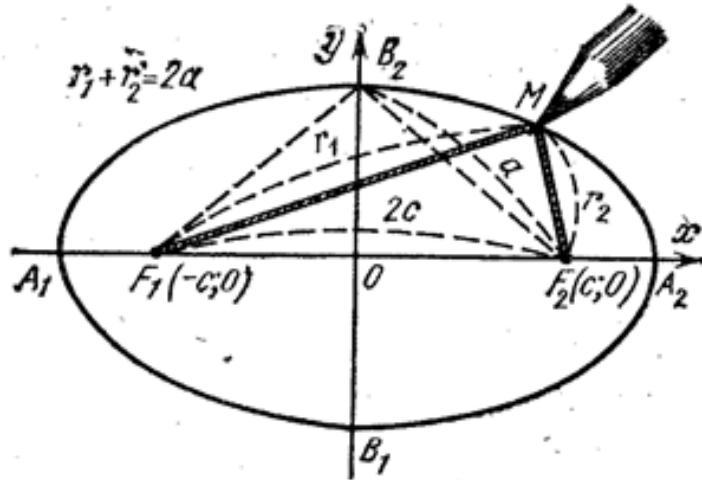
Для любой точки $M(x;y)$ эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

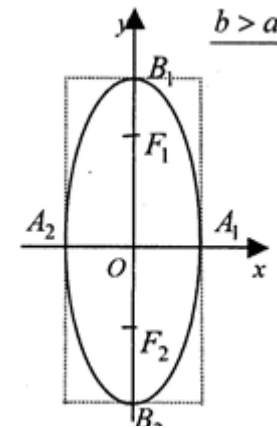
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Центр эллипса - $O(0;0)$

Эллипс



Если $b > a$:



Точки пересечения с осями – вершины эллипса

Если центр эллипса перенести в точку $O_1(x_0; y_0)$,

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ то уравнение эллипса примет вид:

Оси эллипса, если $a > b$:

большая ось $A_1A_2 = 2a$, малая ось $B_1B_2 = 2b$.

a , b – полуоси.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

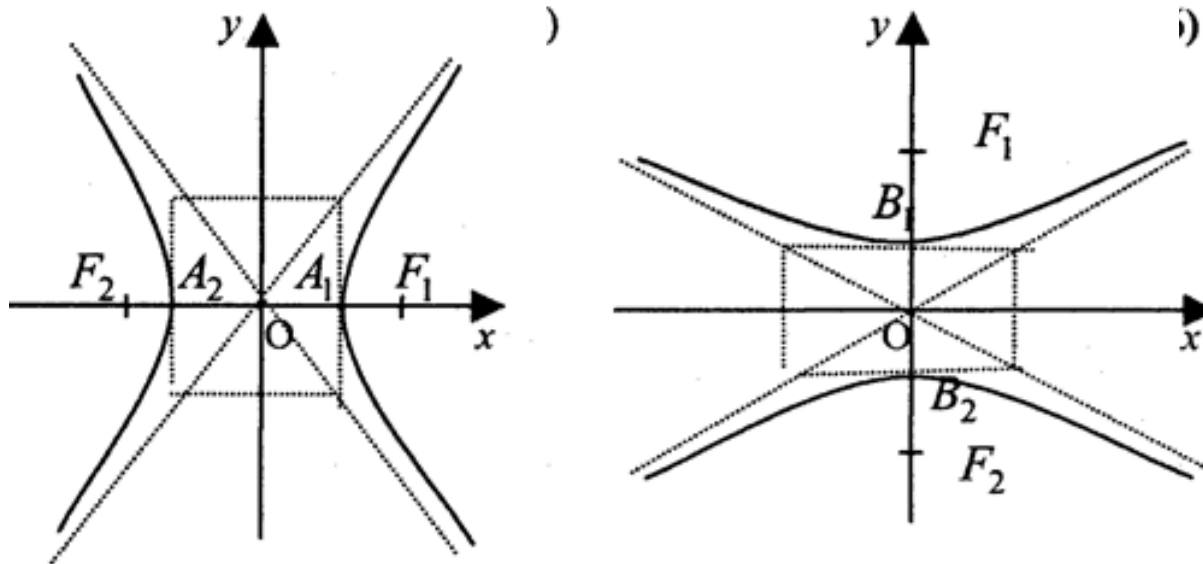
Эксцентриситет (мера сжатия) эллипса: $e = \frac{c}{a} < 1$

Планеты и кометы Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов – Солнце.

Гипербола

Гипербола – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

- *Каноническое уравнение гиперболы*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ — асимптоты гиперболы}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Гипербола

Если центр гиперболы перенести в точку $O_1(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

a, b – полуоси.

Эксцентриситет гиперболы: $e = \frac{c}{a} > 1$

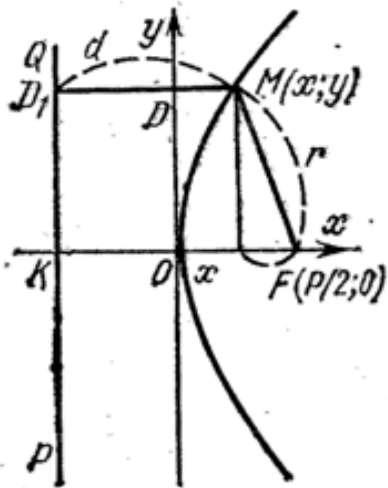
Парабола

Парабола – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой

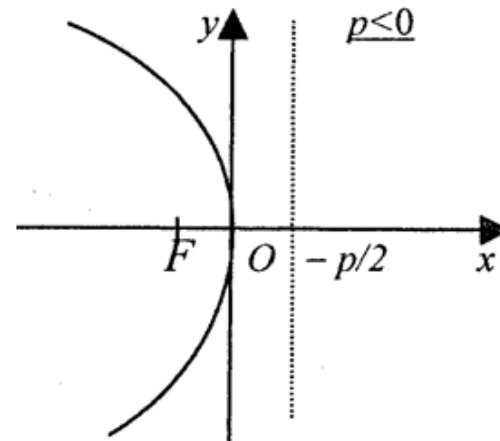
Каноническое уравнение параболы

Пусть директриса параллельна оси Oy и ее уравнение $x = -\frac{p}{2}$,
 $p > 0$, а фокус - точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$



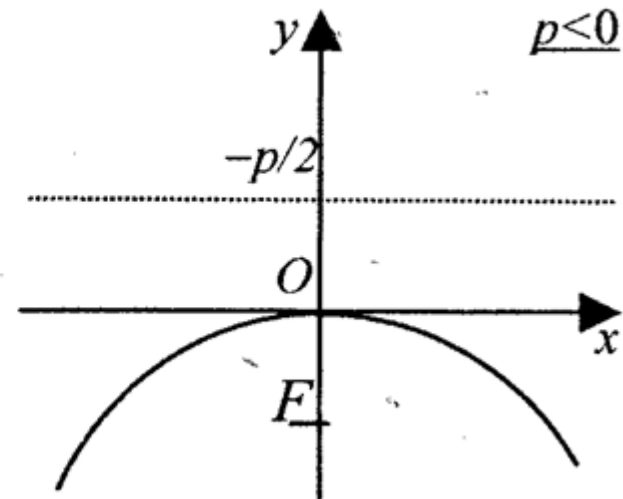
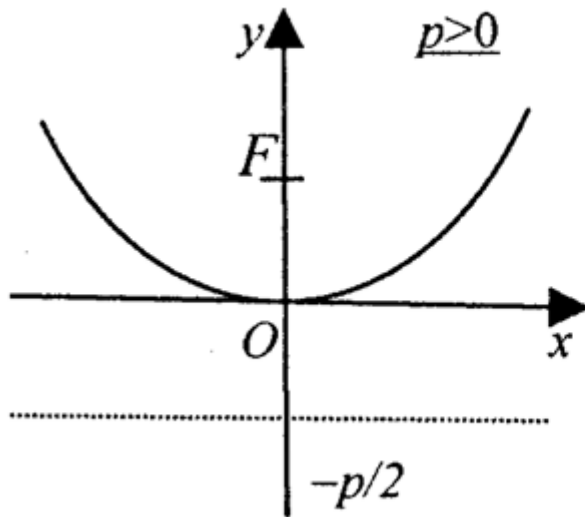
Если $p < 0$, то



Парабола

Если директриса параллельна оси Ox :

$$x^2 = 2py$$



Если вершину параболы перенести в точку $O_1(x_0; y_0)$, то уравнение параболы примет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Общий вид уравнения кривой второго порядка

Уравнение второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть $B = 0$.

Если $A = C$, то – окружность,

если $A \neq C$ и $A \cdot C > 0$, то – эллипс,

если $A \neq C$ и $A \cdot C < 0$, то – гипербола,

если $A \cdot C = 0$, то – парабола.

Приведение уравнения кривой к каноническому виду

- Основной прием – выделение полных квадратов.

Пример 1.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0,$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) - 3 = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 3 = 0,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \text{ – окружность с центром } O(-2; 3) \text{ и } r = 4.$$

Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Пример 2.

$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0,$$

$$9(x^2 - 10x) + 16(y^2 + 2y) + 97 = 0,$$

$$9((x^2 - 10x + 25) - 25) + 16((y^2 + 2y + 1) - 1) + 97 = 0,$$

$$9((x - 5)^2 - 25) + 16((y + 1)^2 - 1) + 97 = 0,$$

$$9(x - 5)^2 - 225 + 16(y + 1)^2 - 16 + 97 = 0,$$

$$9(x - 5)^2 + 16(y + 1)^2 = 144 \quad | :144,$$

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1 - \text{эллипс.}$$