Лекция

Монотонность функции. Выпуклость. Вогнутость. Исследование функций с помощью производных.

План

1. Исследование функций на возрастание и убывание.
2. Исследование функций на экстремум.
3. Исследование функций на выпуклость и вогнутость, нахождение точек перегиба.
4. Общий план исследования функции и построения графика функции.
5. Теоремы о дифференцируемых функциях.

1. *Исследование функций на возрастание и убывание.*

Определение. Функция $f(x)$, определенная на числовом множестве X, называется неубывающей (невозрастающей) на X, если
$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ \ (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Неубывающие и невозрастающие на множестве X функции называются <u>монотонными</u> на этом множестве.

Если в предыдущем определении неравенства строгие, то соответствующие функции называются строго возрастающими (строго убывающими). Строго возрастающие (строго убывающие) функции называются <u>строго монотонными функциями</u>.

Признак монотонности. Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, ее производная была во всех его точках неотрицательна (неположительна).

Если производная функции во всех точках $(a;b)$ положительная (отрицательная), то функция строго возрастает (строго убывает). Последнее условие является достаточным, но не необходимым условием строгого возрастания. Пример: $f(x) = x^3$ - строго возрастает на R, однако $f'(x) = 3x^2$ не всюду больше 0: $f'(0) = 0$.

2. *Исследование функций на экстремум.*

Определение. Пусть функция f задана на некотором множестве $X \subset R$ и $x_0 \in X$. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума (минимума) функции называются ее точками экстремума, значения функции в этих точках - ее экстремальными значениями (экстремумы функции).

Определение. Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке производная функции равна 0 или не существует, то точка x_0 называется критической точкой этой функции.

Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Если x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, то $f'(x_0)$=0 или $f'(x_0)$ не существует.

Первый достаточный признак экстремума. Пусть функция f (x) дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки $x_0 \in (a;b)$, в которой она является, однако, непрерывной. Если $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–" (с "-" на "+") при переходе через x_0, то x_0 - точка максимума (минимума).

3. ***Исследование функций на выпуклость и вогнутость, нахождение точек перегиба.***

Определение. График функции имеет на $(a;b)$ выпуклость (вогнутость), если на $(a;b)$ график лежит не выше (не ниже) любой касательной.

Достаточное условие выпуклости. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$. Тогда, если $f''(x)<0\bigl(f''(x>0)\bigr)$ $\forall x\in(a;b)$, то график функции выпуклый (вогнутый) на $(a;b)$.

Второй достаточный признак экстремума. Если в точке $x=x_0$ функция $y=f(x)$ имеет $f''(x)$ $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), то функция имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум).

Определение. Точка $M(c;\,f(c))$ графика функции $y=f(x)$ называется точкой перегиба, если существует в этой точке касательная и существует такая окрестность точки ***c***, что направления выпуклости слева и справа от этой точки различны.

Необходимое условие точки перегиба. Если в точке перегиба функции существует вторая производная, то она равна 0.

Первое достаточное условие точки перегиба. Если функция *f(x)* дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то x_0 является точкой перегиба функции f.

Второе достаточное условие точки перегиба. Если в некоторой точке вторая производная функции равна 0, а третья производная не равна 0, то эта точка является точкой перегиба.

4. ***Схема полного исследования функции.***

1) Область определения функции *D(f)*. Множество значений *E(f)*.
2) Точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства.
3) Четность.
4) Периодичность.
5) Точки разрыва, область непрерывности.
6) Асимптоты.
7) Интервалы монотонности, экстремумы
8) Интервалы выпуклости, точки перегиба.
9) Дополнительные вычисления. Таблица.
10) Построение графика функции.