ЛЕКЦИЯ 7. УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА. ОБОБЩЕНИЯ ПЗВИ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (ПЗВИ), состоящую в отыскании экстремума (минимума или максимума) функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

на классе допустимых функций $y(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Необходимые условия экстремума для поставленной задачи были сформулированы в виде уравнения Эйлера в лекции 6.

Введем некоторые новые понятия. Приведем формулировки 2-го необходимого признака экстремума функционала и достаточных условий экстремума, называемых условиями Лежандра.

Поле экстремалей

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых на плоскости, описываемых уравнением $y = y(x, C)$, где C − произвольная постоянная.

Говорят, что семейство кривых образует ***собственное поле*** в некоторой области D плоскости Oxy, если через каждую точку области D проходит и притом только одна кривая этого семейства (см. рис.1). Изображенное семейство − это однопараметрическое семейство парабол $y = x^2 + C$, область D − произвольная область в плоскости Oxy.

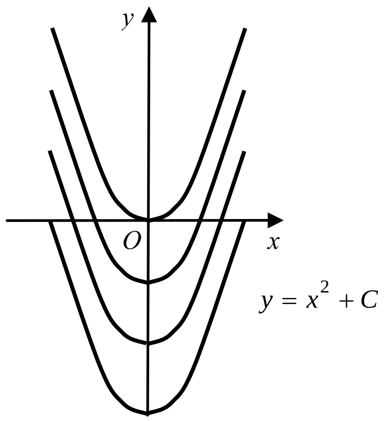

Рис. 1

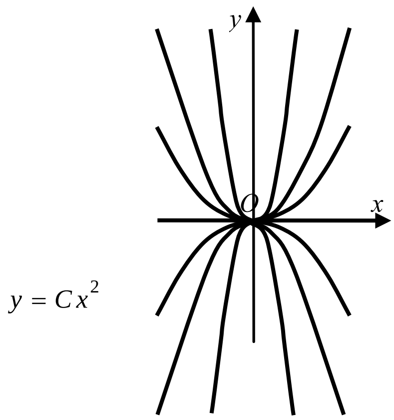

Рис. 2

Семейство $y = y(x, C)$ кривых на плоскости образует ***центральное поле*** в области D, если существует единственная точка $A(x_0, y_0) \in D$, через которую проходят все кривые семейства, а через любую другую точку области D проходит и притом только одна кривая семейства (см. рис. 2). В этом случае семейство кривых представляет собой ***пучок*** линий, при этом точку A называют его ***центром***. На рис. 2 изображен пучок парабол семейства $y = Cx^2$ с центром в начале координат. В любой области, включающей начало координат, это семейство образует центральное поле. В области, не содержащей точки $O(0;\ 0)$, поле − собственное.

На рис. 3 изображено однопараметрическое семейство парабол $y=(x-C)^2$ с вершинами $(C,0)$, расположенными на оси абсцисс. Наглядно видно, что данное семейство не образует ни собственного, ни центрального поля ни в одной из областей верхней или нижней полуплоскости и всей координатной плоскости.

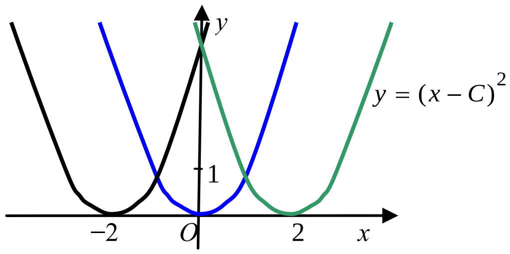

Рис. 3

Однопараметрическое семейство экстремалей образует ***поле экстремалей в области D***, если оно является собственным или центральным полем.

Пусть функция $y=\tilde{y}(x)$ является экстремалью вариационной задачи (1), (2). ***Кривая*** $y=\tilde{y}(x)$ называется ***включенной в поле экстремалей***, если в области D существует поле экстремалей $y=y(x,C)$, которое при некотором значении $C=C_0$ содержит экстремаль $y=\tilde{y}(x)$, и эта экстремаль не лежит на границе поля экстремалей.

Второе необходимое условие экстремума. Если на экстремали $y=\tilde{y}(x)$ функционал (1) достигает экстремума, то её можно включить в поле экстремалей.

Заметим, что для ПЗВИ поле должно быть центральным.

В ряде случаев проверку этого условия можно выполнить путем анализа однопараметрического семейства экстремалей, удовлетворяющих одному из граничных условий. В общем случае используют условие Якоби, являющееся необходимым условием экстремума функционала (см. учебники по ВИ).

Пример 1. Проверить условие включения экстремали функционала

$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}(4y^2-y'^2+8y+\operatorname{tg}x)\,dx,\quad y(0)=-1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ в поле экстремалей.

□ 1. Найдем экстремали как решения уравнения Эйлера $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$. Вычислим компоненты уравнения: $F_y=8y+8,\ F_{y'}=-2y',\ \dfrac{d}{dx}F_{y'}=-2y''.$

Уравнение Эйлера: $8y+8+2y''=0\Leftrightarrow y''+4y=-4$. Его общее решение имеет вид $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-1$ и является ***экстремалью*** поставленной вариационной задачи.

С учетом граничных условий последовательно получим:

$$y(0)=-1\Leftrightarrow C_1\cos 0+C_2\sin 0-1=-1\Rightarrow C_1=0.$$

Тогда $y=C_2\sin 2x-1.$

Так как $y(\pi/4)=0$, то $0=C_2\sin(2\cdot\pi/4)-1\Rightarrow C_2=1.$

Отсюда следует, что функция $\tilde{y}=\sin 2x-1$ является ***допустимой экстремалью***.

2. Выясним, включена ли она в поле экстремалей. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство экстремалей $y=C_2\sin 2x-1$. Все кривые семейства проходят через точку $(0;-1)$ и на отрезке $[0;\ \pi/4]$ образуют пучок синусоид. Допустимая экстремаль окружена полем экстремалей. ■

Достаточные условия экстремума для ПЗВИ

Для решения простейшей задачи вариационного исчисления об экстремуме функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx\,, \quad y(a) = A,\; y(b) = B.$$

можно применять следующий ***алгоритм решения ПЗВИ***, на последнем шаге которого используются достаточные условия экстремума − условия Лежандра.

Условия слабого экстремума

1. Кривая $\tilde{y}$ является допустимой экстремалью.

2. Допустимая экстремаль $\tilde{y}$ может быть включена в поле экстремалей.

3. Достаточное ***условие Лежандра***: если на экстремали $\tilde{y}$ выполнено условие $F_{y'y'} > 0$, то на ней достигается слабый минимум; а при $F_{y'y'} < 0$ − слабый максимум.

Условия сильного экстремума

1. Кривая $\tilde{y}$ является допустимой экстремалью.

2. Допустимая экстремаль $\tilde{y}$ может быть включена в поле экстремалей.

3. Достаточное ***условие Лежандра***: если в точках (x, y), близких к точкам экстремали $\tilde{y}$ при произвольных значениях y' выполнено условие $F_{y'y'} \geq 0$, то на ней достигается сильный минимум; а при $F_{y'y'} \leq 0$ − сильный максимум.

Приведенные условия сведены в табл. 1.

Таблица 1

<table>
<tr><td colspan="3">НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА
$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \to extr, \quad y(a) = A,\; y(b) = B.$</td></tr>
<tr><td>№</td><td>Слабый экстремум</td><td>Сильный экстремум</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Необходимые условия экстремума
Уравнение Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$
имеет решение $y = \tilde{y}(x),$ удовлетворящее граничным условиям $y(a) = A,\; y(b) = B.$</td><td>Необходимые условия экстремума
Уравнение Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$
имеет решение $y = \tilde{y}(x),$ удовлетворяющее граничным условиям $y(a) = A,\; y(b) = B.$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Второе необходимое условие
Существует поле экстремалей, включающее данную экстремаль $\tilde{y}(x)$.</td><td>Второе необходимое условие
Существует поле экстремалей, включающее данную экстремаль $\tilde{y}(x)$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Условие Лежандра
Если на исследуемой экстремали $\tilde{y}$ выполнено условие $F_{y'y'} > 0$, то на ней достигается слабый минимум;
если $F_{y'y'} < 0,$ то слабый максимум.</td><td>Условие Лежандра
Если выполнено условие $F_{y'y'} \geq 0$ для точек $(x, y),$ близких к точкам на исследуемой экстремали $\tilde{y}$, и для произвольных y', то на $\tilde{y}$ достигается сильный минимум;
если $F_{y'y'} \leq 0,$ то сильный максимум.</td></tr>
</table>

Пример 2. Найти экстремальные значения функционала $l[y]=\int\limits_0^1\sqrt{1+y'^2}dx,$ $y(0)=-1,\ y(1)=0$.

□ 1. Для заданного функционала $l[y]=\int\limits_0^1\sqrt{1+y'^2}dx$ с граничными условиями $y(0)=-1,\ y(1)=0$ найдены экстремали $y=\tilde{C}_1x+C_2$ и допустимая экстремаль $\tilde{y}=x-1$ (см. пример 2 лекции 6).

2. Используем второе необходимое условие экстремума. Выясним, можно ли включить $\tilde{y}$ в поле экстремалей. Экстремали $y=\tilde{C}_1x+C_2$ образуют двухпараметрическое семейство прямых. Учтем граничное условие $y(0)=-1$. Этому условию удовлетворяют прямые однопараметрического семейства $y=\tilde{C}_1x-1,$ образующие пучок прямых, проходящих через точку $(0;-1).$ Допустимая экстремаль $\tilde{y}=x-1$, очевидно, является внутренней линией этого семейства в любой области *D*, содержащей точку $(0;-1).$ Значит, её можно включить в поле экстремалей.

3. Применим условие Лежандра:

$$F_{y'y'}=\left(\sqrt{1+y'^2}\right)_{y'y'}=\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_{y'}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}>0\,.$$

Это неравенство выполнено при любых значениях $x,y,\ y'.$ Значит, на допустимой экстремали достигается сильный минимум: $l_{\min}[y]=\int\limits_0^1\sqrt{1+(x-1)'^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+1}dx=\sqrt{2}.$ Как и следовало ожидать, кратчайшее расстояние между двумя точками равно длине отрезка, соединяющего эти точки. ■

Пример 3. Решить задачу о брахистохроне.

□ Задача о брахистохроне состоит в отыскании минимума функционала

$$t[y]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,\ y(0)=0,\ \ y(x_1)=y_1.$$

Применим алгоритм исследования функционала на экстремум.

1. При помощи необходимых условий экстремума в примере 4 лекции 6 найдены экстремали, образующие двухпараметрическое семейство кривых на плоскости

$$x=\frac{\tilde{C}_1}{2}(\tau-\sin\tau)+C_2,\ \ y=\frac{\tilde{C}_1}{2}(1-\cos\tau),\ \tau=2t,$$

и экстремали $x=a(\tau-\sin\tau),\ y=a(1-\cos\tau),\ a=\dfrac{\tilde{C}_1}{2},$ образующие однопараметрическое семейство и проходящие через начало координат.

Экстремали являются циклоидами, заданными параметрическими уравнениями. При выполнении условия $x_1<2\pi a$ допустимая экстремаль γ существует, но найти значение параметр *a* можно только численными методами.

2. Допустимая экстремаль γ включена в поле экстремалей, так как однопараметрическое семейство циклоид образует пучок, внутри которого расположена допустимая экстремаль (см. рис. 4).

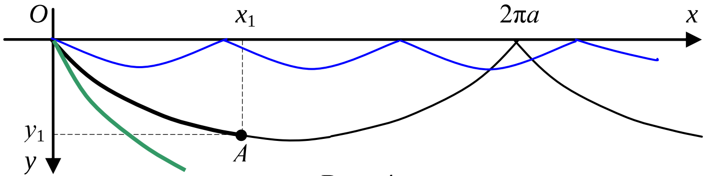

Рис. 4

3. Завершим исследование, применив признак Лежандра. Найдем $F_{y'y'}$ и оценим знак:

$$F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}};$$

$$F_{y'y'}=\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}>0$$

при любых $y>0$ и любых значениях y'. Согласно условию Лежандра на допустимой экстремали γ достигается сильный минимум. ■

ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим обобщения простейшей задачи вариационного исчисления на функционалы, зависящие:

1) от производных высших порядков;
2) от нескольких функций одной переменной;
3) от одной функции нескольких переменных.

В этой теме ограничимся формулировкой необходимых условий экстремума − аналогов уравнения Эйлера для ПЗВИ.

Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим задачу об отыскании экстремумов (минимума или максимума) функционала

$$I[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx \qquad (1)$$

на классе допустимых функций $y(x)\in C^n[x_0,x_1]$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$y^{(k)}(x_0)=y_{k0},\quad y^{(k)}(x_1)=y_{k1},\ k=0,1,2,\ldots,(n-1). \qquad (2)$$

Необходимые условия экстремума

Если на кривой $y=y(x)$ функционал $I[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx$ принимает экстремальное значение, то функция $y=y(x)$ является решением ***уравнения Эйлера-Пуассона***

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \qquad (3)$$

Уравнение Эйлера−Пуассона (3) является дифференциальным уравнением порядка $2n$. Решения этого уравнения называют ***экстремалями***. Решения краевой задачи для уравнения Эйлера−Пуассона с граничными условиями (2) называют ***допустимыми экстремалями***.

Пример 4. Найти допустимые экстремали функционала $I[y]=\int\limits_0^1 (y''^2-48y+96x)dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=4.$

□ Применим необходимое условие (3). В нашем случае уравнение Эйлера−Пуассона имеет вид:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0.$$

Его компоненты: $F_y=(y''^2-48y+96x)_y=-48,\ F_{y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\ F_{y''}=2y'',\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=2y^{(4)},$ подставим в уравнение и получим дифференциальное уравнение:

$$-48+2y^{(4)}=0, \text{ или } y^{(4)}=24.$$

Выполнив четырехкратное интегрирование правой части, получим общее решение этого уравнения, называемое экстремалью, в виде

$$y=x^4+C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3.$$

Подсчитаем первую производную:

$$y'=4x^3+C_2+2C_3x+3C_4x^2.$$

Чтобы найти допустимую экстремаль, подставим общее решение в граничные условия.

$y(0)=0\Leftrightarrow C_1=0.$

$y'(0)=0\Leftrightarrow C_2=0.$

$y(1)=1\Leftrightarrow 1+C_1+C_2+C_3+C_4=1,$ или $C_3+C_4=0.$

$y'(1)=4\Leftrightarrow 4+C_2+2C_3+3C_4=4,$ или $2C_3+3C_4=0.$

Очевидно, что решением алгебраической системы является следующий тривиальный набор:

$$C_1=C_2=C_3=C_4=0.$$

Подставим в общее решение и получим выражение для допустимой экстремали:

$$y=x^4. \blacksquare$$

Пример 5. Найти допустимые экстремали функционала $I[y]=\int\limits_0^{\pi/4} (y''^2-16y^2+\text{tg}x)dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y(\pi/4)=0,\ y'(\pi/4)=-2.$

□ Используем необходимое условие (3). Найдем компоненты уравнения Эйлера−Пуассона: $F_y=(y''^2-16y^2+\text{tg}x)_y=-32y,\ F_{y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\ F_{y''}=2y'',\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=2y^{(4)}.$ Тогда уравнение Эйлера−Пуассона $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$ примет вид: $-32y+2y^{(4)}=0$, или

$$y^{(4)}-16y=0.$$

Получено линейное однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения используем подстановку Эйлера $y=e^{\lambda x}$, где λ − корень характеристического уравнения $\lambda^4-16=0.$ Корнями являются числа $\lambda_{1,2}=\pm 2,\ \lambda_{3,4}=\pm 2i.$ Общее решение этого уравнения является экстремалью и равно

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Дальше понадобятся значения первой производной:

$$y' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} - 2C_3\sin 2x + 2C_4\cos 2x.$$

Чтобы найти допустимую экстремаль, подставим общее решение в граничные условия.

$y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1e^0 + C_2e^0 + C_3\cos 0 + C_4\sin 0 = 1,$ или $C_1 + C_2 + C_3 = 1.$

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_1e^0 - 2C_2e^0 - 2C_3\sin 0 + 2C_4\cos 0 = 0,$ или $C_1 - C_2 + C_4 = 0.$

$y(\pi/4) = 0 \Leftrightarrow C_1e^{\pi/2} + C_2e^{-\pi/2} + C_3\cos\pi/2 + C_4\sin\pi/2 = 0,$ или $C_1e^{\pi/2} + C_2e^{-\pi/2} + C_4 = 0.$

$y'(\pi/4) = -2 \Leftrightarrow 2C_1e^{\pi/2} - 2C_2e^{-\pi/2} - 2C_3\sin\pi/2 + 2C_4\cos\pi/2 = -2,$ или $C_1e^{\pi/2} - C_2e^{-\pi/2} - C_3 = -1.$

Произвольные постоянные определим из системы линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 - C_2 + C_4 = 0, \\ C_1e^{\pi/2} + C_2e^{-\pi/2} + C_4 = 0, \\ C_1e^{\pi/2} - C_2e^{-\pi/2} - C_3 = -1. \end{cases}$$

Ее решением являются следующие числа: $C_1 = C_2 = C_4 = 0,\ C_3 = 1.$

Подставим их в общее решение и получим выражение для допустимой экстремали:

$$y = \cos 2x. \blacksquare$$

Пример 6. Найти допустимые экстремали функционала

$$I[y] = \int_1^2 (xy''^2 + e^x y' + (e^x - 144x)y + 1)dx, \text{ где } y(1) = 1,\ y'(1) = 4,\ y(2) = 16,\ y'(2) = 32.$$

□ Используем необходимое условие (3). Найдем компоненты уравнения Эйлера−Пуассона:

$$F = xy''^2 + e^x y' + (e^x - 144x)y + 1,\ F_y = (xy''^2 + e^x y' + (e^x - 144x)y + 1) = e^x - 144x;$$

$$F_{y'} = \frac{d}{dx}F_{y'} = e^x,\ F_{y''} = 2xy'',\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = (2xy'')''.$$

Тогда уравнение Эйлера−Пуассона $F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} + \dfrac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$ примет вид

$$e^x - 144x - e^x + (2xy'')'' = 0, \text{ или } (xy'')'' = 72x.$$

Получено линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами. Оптимальный способ решения состоит в последовательном двукратном интегрировании уравнения:

$$(xy'')' = \int 72x dx + C_1 = 36x^2 + C_1,\ xy'' = \int (36x^2 + C_1)dx = 12x^3 + C_1x + C_2.$$

В полученном уравнении 2-го порядка $xy'' = 12x^3 + C_1x + C_2$ обе части следует разделить на x и снова двукратно проинтегрировать:

$$y'' = 12x^2 + C_1 + \frac{C_2}{x} \Rightarrow y' = 4x^3 + C_1x + C_2\ln|x| + C_3;\quad y = x^4 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2(x-1)\ln|x| + C_3x + C_4.$$

Получено общее решение уравнения Эйлера-Пуассона, являющееся экстремалью функционала. Чтобы найти допустимую экстремаль, подставим решение в граничные условия.

$y(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + C_1\cdot\dfrac{1}{2} + C_2\cdot 0 + C_3 + C_4 = 1,$ или $0{,}5C_1 + C_3 + C_4 = 0.$

$y'(1) = 4 \Leftrightarrow 4 + C_1 - C_2\cdot 0 + C_3 = 4,$ или $C_1 + C_3 = 0.$

$y(2) = 16 \Leftrightarrow 16 + 2C_1 + C_2\ln 2 + 2C_3 + C_4 = 16,$ или $2C_1 + C_2\ln 2 + 2C_3 + C_4 = 0.$

$y'(2) = 32 \Leftrightarrow 32 + 2C_1 + C_2\ln 2 + C_3 = 32,$ или $2C_1 + C_2\ln 2 + C_3 = 0.$

Получена система линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_k, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{cases} 0{,}5C_1 + C_3 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_3 = 0, \\ 2C_1 + C_2 \ln 2 + 2C_3 + C_4 = 0, \\ 2C_1 + C_2 \ln 2 + C_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Следовательно, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ − единственное решение системы. Подставим коэффициенты в общее решение и получим выражение для допустимой экстремали:

$$y = x^4.$$

Замечание. Если в данной вариационной задаче записать уравнение Эйлера−Пуассона, подсчитав полную вторую производную $\dfrac{d^2}{dx^2} F_{y''}$, то получится линейное неоднородное уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами относительно функции *y*. Процедура отыскания решения будет существенно более сложной. ■

Функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной

Рассмотрим задачу об отыскании экстремумов функционала

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx, \qquad (4)$$

на классе допустимых функций $y_k(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \quad y_k(x_1) = y_{k1}, \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Необходимые условия экстремума

Если на совокупности функций $y_k = y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, функционал

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$$

принимает экстремальное значение, то этот набор функций являются решением ***системы уравнений Эйлера:***

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0, \; k = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Система (6) уравнений Эйлера содержит n дифференциальных уравнений 2-го порядка. Общее решение системы содержит $2n$ произвольных постоянных. Упорядоченный набор n функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, являющихся решением системы, называют ***экстремалью***. Решение краевой задачи для системы уравнений Эйлера с учетом условий (5) называют ***допустимой экстремалью***.

Если число искомых функций невелико, то им присваивают разные названия, например, $y(x)$, $z(x)$ или $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$.

Пример 7. Найти допустимые экстремали функционала

$$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}(y'^2+z'^2+8yz+x^2\sin x)dx,\ y(0)=z(0)=0,\ \ y(\pi/4)=1,\ z(\pi/4)=-1.$$

□ Используем необходимое условие экстремума (6). Запишем общий вид системы Эйлера применительно к поставленной задаче:

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0,\\ F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0. \end{cases}$$

Найдем компоненты системы:

$$F_y=(y'^2+z'^2+8yz+x^2\sin x)_y=8z,\ F_{y'}=2y',\frac{d}{dx}F_{y'}=2y'',$$

$$F_z=8y,\ F_{z'}=2z',\ \frac{d}{dx}F_{z'}=2z''.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} 8z-2y''=0,\\ 8y-2z''=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y''=4z,\\ z''=4y. \end{cases}$$

Заметим, что $y^{(4)}=4z''=16y,$ или $y^{(4)}=16y\Leftrightarrow y^{(4)}-16y=0.$
Последнее уравнение решено в предыдущем примере:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Тогда с учетом уравнения $y''=4z$ получаем $z=\dfrac{1}{4}y''$ или

$$z=\frac{1}{4}\left(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)''=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-C_3\cos 2x-C_4\sin 2x.$$

Экстремали найдены:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x,$$

$$z=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-C_3\cos 2x-C_4\sin 2x.$$

Найдем допустимые экстремали, удовлетворяющие граничным условиям.

$y(0)=0\Rightarrow C_1+C_2+C_3=0,$

$z(0)=0\Rightarrow C_1+C_2-C_3=0,$

$y(\pi/4)=1\Rightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_3\cos\pi/2+C_4\sin\pi/2=1\Leftrightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_4=1,$

$z(\pi/4)=-1\Rightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}-C_3\cos\pi/2-C_4\sin\pi/2=-1\Leftrightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}-C_4=-1.$

Произвольные постоянные являются решением системы

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=0,\\ C_1+C_2-C_3=0,\\ C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_4=1,\\ C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}-C_4=-1, \end{cases} \Rightarrow C_3=0, C_4=1, C_1=C_2=0.$$

Подставим найденные коэффициенты в общее решение и получим решение краевой задачи, т.е. допустимые экстремали вариационной задачи:

$$y=\sin 2x,\ z=-\sin 2x.\ ■$$

Функционалы, зависящие от одной функции нескольких переменных

Рассмотрим задачу об отыскании экстремумов функционала (двойного интеграла)

$$I[z(x,\ y)] = \iint\limits_D F(x, y,\ z, z_x, z_y)dxdy \tag{7}$$

на классе допустимых функций $z = z(x,y) \in C^1(D),\ D \subset R^2,$ удовлетворяющих на границе Γ области D условию:

$$z\big|_\Gamma = \varphi(M),\ \ M(x,y) \in \Gamma. \tag{8}$$

Необходимые условия экстремума

Если на функции $z = z(x,y)$ функционал

$$I[z(x,\ y)] = \iint\limits_D F(x, y,\ z, z_x, z_y)dxdy$$

принимает экстремальное значение, то эта функция являются решением ***уравнения Эйлера-Остроградского:***

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y} = 0. \tag{9}$$

Уравнение Эйлера-Остроградского (9) является уравнением в частных производных 2-го порядка. Общее решение уравнения (9) называют ***экстремалью*** функционала. Частное решение краевой задачи для уравнения Эйлера-Остроградского с условием (8) называют ***допустимой экстремалью***.

Отметим, что записи $\dfrac{\partial}{\partial x}F_{z_x}$ соответствует полная частная производная по переменной x от частной производной F_{z_x}. Подобным образом надо понимать и выражение $\dfrac{\partial}{\partial y}F_{z_y}$.

Пример 8. Найти экстремали функционала $I[z(x,y)] = \iint\limits_D \left(z_x^2 - z_y^2\right)dxdy.$

□ Найдем производные интегранта $F = {z_x}^2 - {z_y}^2,$ входящие в уравнение (9):

$$F_z = \left(z_x^2 - z_y^2\right)'_z = 0;$$

$$F_{z_x} = \left(z_x^2 - z_y^2\right)'_{z_x} = 2z_x,\ \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} = \frac{\partial}{\partial x}(2z_x) = 2z_{xx};$$

$$F_{z_y} = \left(z_x^2 - z_y^2\right)'_{z_y} = -2z_y,\ \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y} = \frac{\partial}{\partial y}(-2z_y) = -2z_{yy}.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского имеет вид: $0 - 2z_{xx} + 2z_{yy} = 0$ или $z_{xx} = z_{yy}$.

Получено волновое уравнение, общее решение которого описывается формулой

$$z(x,y) = \varphi(x-y) + \psi(x+y).$$

Функция $z(x,y)$ является экстремалью заданного функционала. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ − произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. ■

Пример 9. Найти экстремали функционала

$$I[z(x,y)] = \iint\limits_D \left(4xz - z_x z_y\right) dxdy.$$

□ Повторим процедуру, выполненную в предыдущей задаче. Найдем производные интегранта $F = 4xz - z_x z_y$, входящие в уравнение (9):

$$F_z = \left(4xz - z_x z_y\right)'_z = 4x;$$

$$F_{z_x} = \left(4xz - z_x z_y\right)'_{z_x} = -z_y, \ \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} = \frac{\partial}{\partial x}(z_y) = -z_{yx};$$

$$F_{z_y} = \left(4xz - z_x z_y\right)'_{z_y} = -z_x, \ \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = \frac{\partial}{\partial y}(z_x) = -z_{xy}.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского для заданного функционала примет вид:

$$4x + z_{xy} + z_{yx} = 0 \Leftrightarrow \ 4x + 2z_{xy} = 0 \Leftrightarrow z_{xy} = -2x.$$

Получено уравнение в частных производных 2-го порядка гиперболического типа. Его общее решение найдем путем двукратного интегрирования уравнения сначала по x, а затем по y. Последовательно находим:

$$z_{xy} = -2x \Rightarrow \int z_{xy} dx = -\int 2x dx \Leftrightarrow z_y = -x^2 + C_1(y);$$

$$z_y = -x^2 + C_1(y) \Rightarrow \int z_y dy = \int\left(-x^2 + C_1(y)\right)dy \Leftrightarrow z = -x^2 y + \underbrace{\int C_1(y)dy}_{\varphi(y)} + \underbrace{C_2(x)}_{\psi(x)}.$$

Найденное общее решение уравнения Эйлера-Остроградского

$$z = -x^2 y + \varphi(y) + \psi(x)$$

является искомой экстремалью. Функции $\varphi(y)$, $\psi(x)-$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. ■

Замечание. Наряду с функционалами, зависящими от функций двух переменных, можно рассматривать функционалы, зависящие от функций произвольного числа переменных. В этом случае функционал является n-кратным интегралом, распространенным на область $D \subset R^n$.