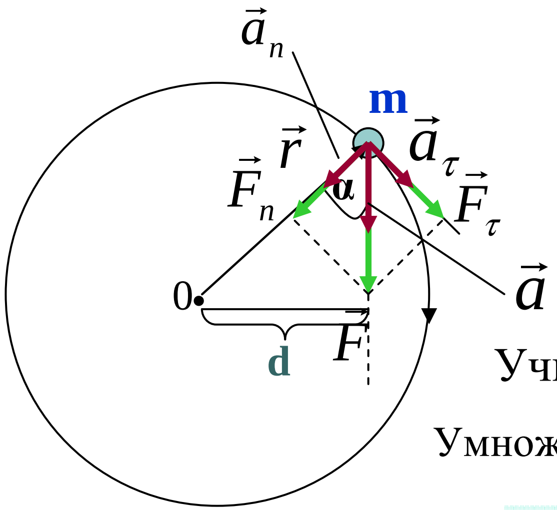
Лекция 5

1. **Динамика вращательного движения материальной точки**
2. **Динамика вращательного движения абсолютно твердого тела**
3. **Алгоритм определения моментов инерции твердых тел (примеры)**

1. Динамика вращательного движения материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки по окружности под действием некоторой силы **F**

α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{r}$



Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$

Из геометрии видно, что $\boldsymbol{F_\tau = F\cdot \sin\alpha}$

По второму закону Ньютона можно записать

$$F_\tau = ma_\tau = F\cdot\sin\alpha$$

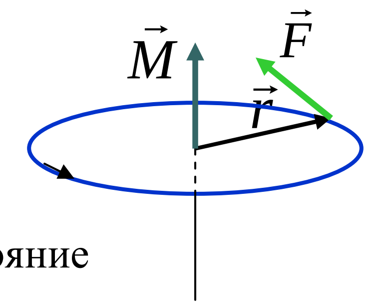
Учитывая, что $\boldsymbol{a_\tau = \varepsilon\cdot r}$, получим $\quad m\cdot\varepsilon\cdot r = F\cdot\sin\alpha \quad (5.1)$

Умножим обе части уравнения (5.1) на $\boldsymbol{r}$ $\quad mr^2\cdot\varepsilon = F\cdot r\cdot\sin\alpha \quad (5.2)$

Выражение $\boxed{F\cdot r\cdot\sin\alpha = M}$ (5.3) называют **моментом силы *F*** или **вращательным моментом**

Момент силы – это **величина векторная** $\quad \vec{M} = \left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right] \quad (5.4)$

Вектор **момента силы** равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора силы $\vec{F}$



Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу правого винта

Произведение $\boldsymbol{r\cdot\sin\alpha = d}$ – это **плечо силы** – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения

Момент инерции

Момент инерции материальной точки – это произведение массы на квадрат расстояния от материальной точки до оси вращения

$$m \cdot r^2 = I \quad (5.5)$$

Момент инерции – величина скалярная

С учетом введенных величин: **момента силы** и **момента инерции** уравнение (5.2) запишется в виде

$$I \cdot \varepsilon = M \quad (5.6)$$ или в векторной форме $$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) называют **основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки**

Если на материальную точку действует несколько сил, то уравнение (5.7) будет иметь вид

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i \quad (5.8)$$

По своей форме уравнение динамики вращательного движения сходно с **уравнением 2го закона Ньютона**

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (5.9)$$

Из сопоставления уравнений (5.8) и (5.9) следует, что

роль силы во вращательном движении **играет момент силы**, **роль массы** – **момент инерции**, **роль ускорения** – **угловое ускорение**

• Движение абсолютно твердого тела

Абсолютно твердое тело (модель твердого тела) – это такое тело, которое не деформируется при действии на него других тел (не изменяет форму и размеры при своём движении).

При воздействии на реальное тело всегда возникают деформации, однако часто ими можно пренебречь.

Под действием внешних сил твердое тело может двигаться **поступательно, вращательно** или **находиться в покое**

Поступательное движение

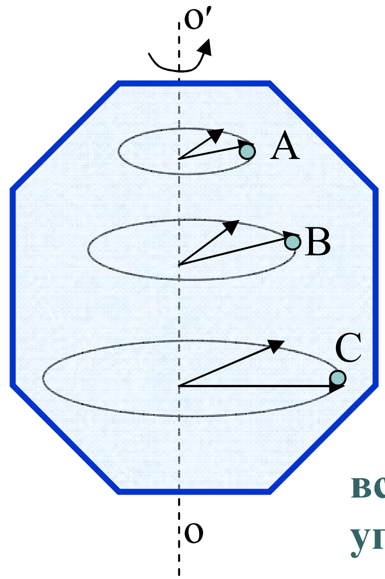
Это такое, при котором все точки тела за равные промежутки времени совершают одинаковое перемещение. Следовательно, **имеют одинаковую линейную скорость и ускорение.**

Твердое тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе твердого тела.

Уравнения движения такие же как для материальной точки.

Вращательное движение

Это такое, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения.

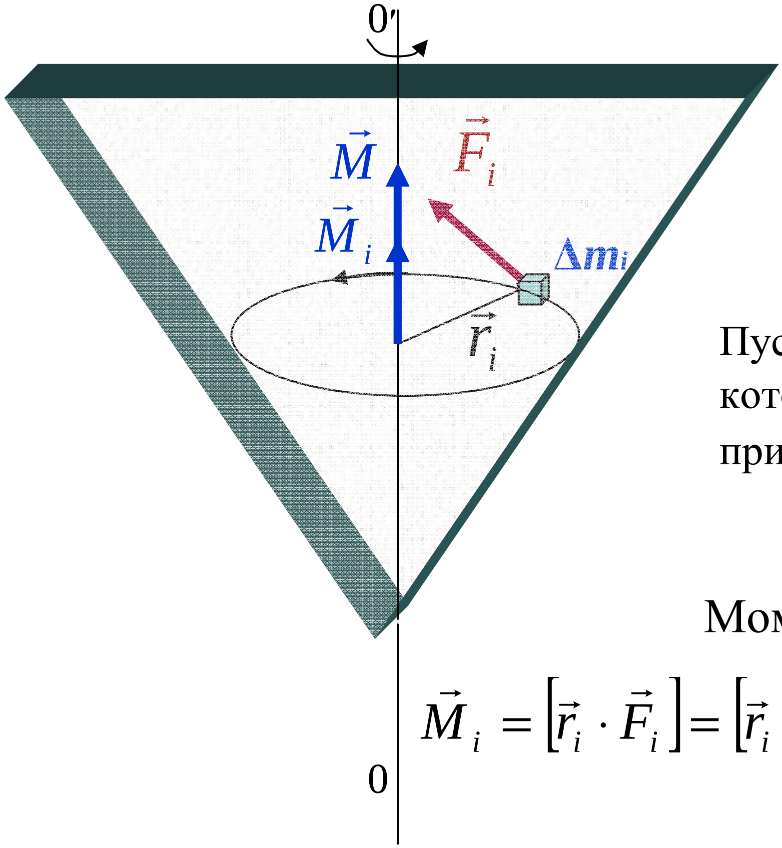


Все точки имеют различные линейные скорости, т.к. за одно и тоже время перемещение для всех точек разное $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Однако все радиусы окружностей за одинаковое время поворачиваются на один и тот же угол, поэтому

все точки тела имеют одинаковую угловую скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

2. Динамика вращательного движения абсолютно твердого тела



Чтобы составить уравнение, описывающее динамику вращательного движения абс. тв. тела, разобьём тело на элементарные массы **Δm_i**, которые мы будем считать материальными точками

Пусть на **Δm_i** в данный момент времени действует сила, которая является **равнодействующей всех сил**, приложенных к этой точке – **внешних** и **внутренних**

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i\,внутр} + \vec{F}_{i\,внешн}$$

Момент сил, действующих на **Δm_i** будет равен

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right] = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{i\,внутр}\right] + \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{i\,внешн}\right] \text{ или } \vec{M}_i = \vec{M}_{i\,внутр} + \vec{M}_{i\,внешн}$$

Момент силы, действующий на твердое тело, будет равен векторной сумме вращательных моментов всех элементарных масс

(по 3ему закону Ньютона)

$$\vec{M} = \cancelto{0}{\sum_i \vec{M}_{i\,внутр}} + \sum_i \vec{M}_{i\,внешн}$$

Вращательный момент твердого тела равен векторной сумме моментов внешних сил

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_{i\,внешн} \qquad (5.10)$$

Момент инерции элементарной массы **Δ*mi*** будет равен $I_i = \Delta m_i \cdot r_i^2$

А так как момент инерции величина аддитивная, то есть

момент инерции системы равен сумме моментов инерции её частей

получим формулу для **момента инерции твердого тела** $I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$ (5.11)

Из формулы (5.11) видно, что **момент инерции зависит от массы тела и от того как распределена масса относительно оси вращения**

При одной и той же массе тела, момент инерции может быть разным.

- **Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела**

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i \quad (5.12)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов внешних сил относительно той же оси

Для **непрерывного распределения** массы **момент инерции это предел, к которому стремится** $\sum \Delta m_i \cdot r_i^2$ **при** $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm \qquad (5.13)$$

Формула момента инерции твердого тела

Непрерывное распределение массы в пределах тела характеризуется с помощью величины, которая называется **плотностью массы**

- **линейная плотность** (τ) – ***масса распределена только по длине тела l***

для однородного распределения $\tau = \frac{m}{l} = const$ (5.14)

из (5.14) видно, что $dm = \tau \cdot dl$ Следовательно, $I = \tau \int_l r^2 dl$

- **поверхностная плотность** (σ) – ***масса распределена только по поверхности S***

для однородного распределения $\sigma = \frac{m}{S} = const$

$$I = \sigma \int_S r^2 dS$$

- **объёмная плотность** (ρ) – ***масса распределена в объеме тела***

для однородного распределения $\rho = \frac{m}{V} = const$

$$I = \rho \int_V r^2 dV$$

3. Алгоритм определения момента инерции твердых тел

1. **Выбрать систему отсчета**

2. **Разбить тело на бесконечно малые участки массой dm**

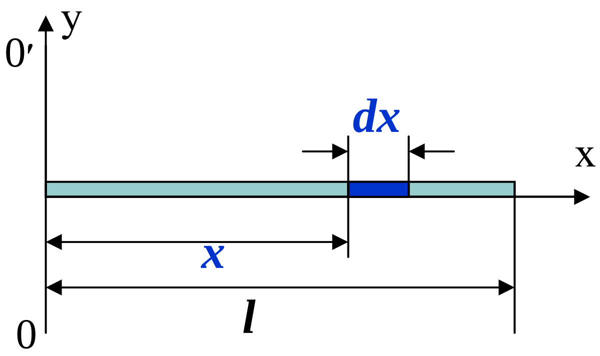
3. **Записать выражение для момента инерции массы dm по формуле $dI = r^2 dm$, где r – расстояние от оси вращения до массы dm**

4. **Просуммировать моменты инерции всех бесконечно малых масс, то есть проинтегрировать выражение dI**

$$I = \int r^2 dm$$

ПРИМЕРЫ

• **Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через его конец**



***l* – длина стержня, *m* – масса стержня,**
τ* = *m* / *l* = *const

I - ?

1. Ось **x** направим вдоль стержня, ось **y** совпадает с осью вращения оо′ , начало отсчета – с концом стержня

2. Выделим на стержне бесконечно малый отрезок ***dx***, масса которого ***dm***, ***x*** – расстояние от ***dx*** до оси вращения

$$dm = \tau \cdot dx = \frac{m}{l} dx$$

3. Запишем выражение для ***dI***

$$dI = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx$$

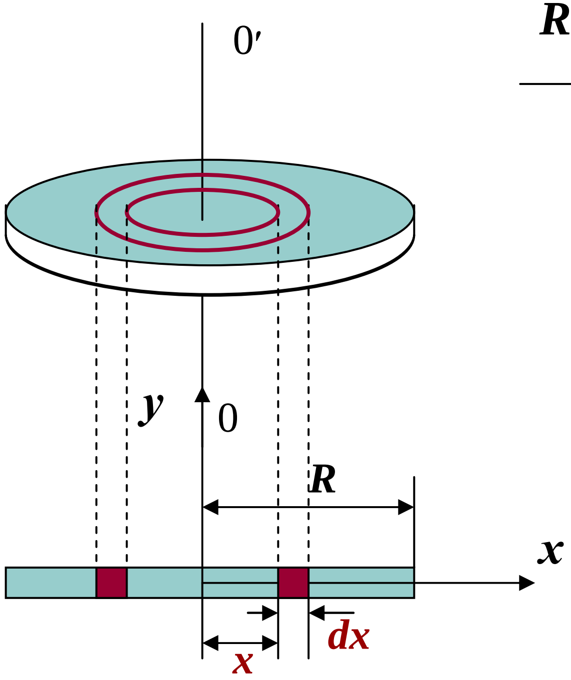
4. Проинтегрируем выражение ***dI***

$$I = \int dI = \frac{m}{l} \int_o^l x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^l = \frac{ml^2}{3}$$

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

- Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через его конец

• Момент инерции тонкого однородного диска относительно оси симметрии



R – радиус диска, m – масса диска, σ = m / S = const

I = ?

1. Направим ось ***x*** по радиусу, ось ***y*** по оси симметрии

   (для удобства изобразим вид сверху)

2. Выделим кольцо малой толщины ***dx*** радиуса ***x***

   Масса выделенного кольца:

$$dm = \sigma \cdot dS = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2m}{R^2} x dx$$

3. Запишем выражение для момента инерции этого кольца относительно оси вращения

$$dI = x^2 dm = \frac{2m}{R^2} x^3 dx$$

4. Проинтегрируем выражение ***dI***

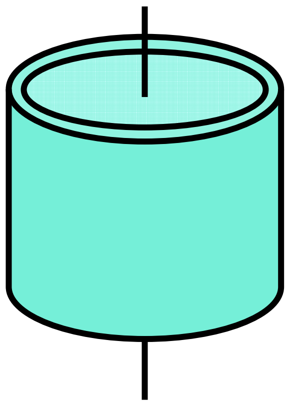
$$I = \int dI = \frac{2m}{R^2} \int_0^R x^3 dx = \frac{2m}{R^2} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2}}$$

- Момент инерции тонкого однородного диска относительно оси симметрии

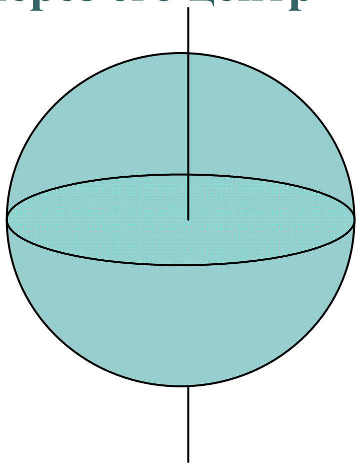
Примеры моментов инерции без вывода

• момент инерции тонкостенного однородного полого цилиндра, тонкого кольца, обруча относительно оси симметрии



$$I = mR^2$$

• Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр



$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Теорема Штейнера

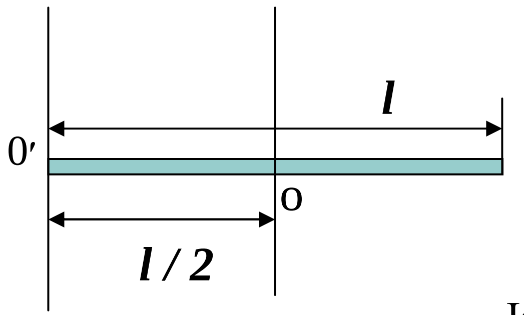
Если известен для тела момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, то момент инерции относительно оси параллельной ей определяется по формуле

$$I = I_0 + ma^2$$

I_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести

a – расстояние между осями

Пример: определить момент инерции тонкого однородного стержня ***массой m***, ***длиной l*** относительно оси, проходящей через середину стержня, если известен момент инерции этого стержня относительно оси, проходящей через конец стержня ($I = ml^2/3$)



$I_{0'} = ml^2/3$ - момент инерции относительно оси о′

Найти I_0 – момент инерции относительно оси о

По теореме Штейнера $I'_{0'} = I_0 + ma^2$, где $a = l/2$

Из уравнения следует $I_0 = \dfrac{ml^2}{3} - \dfrac{ml^2}{4} = \dfrac{ml^2}{12}$

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

- Момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тонкого однородного стержня