Лекции по дискретной математике: комбинаторика

Ф.Г. Кораблев, В.В. Кораблева

Оглавление

1. Основные операции со множествами

Определение. *Пусть X, Y — два множества. Положим*

(1) $X \cup Y = \{x | x \in X$ *или* $x \in Y\}$;
(2) $X \cap Y = \{x | x \in X$ *и* $x \in Y\}$;
(3) $X \setminus Y = \{x | x \in X$ *и* $x \notin Y\}$.

Тогда $X \cup Y$ называется объединением *множеств X и Y, $X \cap Y$ называется* пересечением *множеств X и Y, $X \setminus Y$ называется* разностью *множеств X и Y. Если $Y \subseteq X$, то $\overline{Y} = X \setminus Y$ называется* дополнением *множества Y в множестве X.*

Определение. *Пусть X – множество, $Y \subseteq X$.* Характеристической функцией *подмножества Y называется функция $\chi_Y : X \to \{0, 1\}$, заданная правилом:*

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in Y \\ 0, \text{если } x \notin Y \end{cases}.$$

Теорема 1.1 (Об основных операциях над множествами).
Операции $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ обладают следующими свойствами:

(1) $X \cup Y = Y \cup X$ *и* $X \cap Y = Y \cap X$;
(2) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ *и* $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
(3) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ *и* $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;
(4) $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *и* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$;
(5) $X \cup X = X$ *и* $X \cap X = X$;
(6) $\overline{\overline{X}} = X$.

Доказательство. Докажем третье свойство

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

Для доказательства равенства двух множеств надо показать, что множество из левой части равенства содержится в множестве из правой части равенства, и наоборот, множество из правой части равенства содержится в множестве из левой части равенства.

1. Пусть $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Тогда $x \in X \cup Y$ и $x \in Z$. Так как $x \in X \cup Y$, то либо $x \in X$, либо $x \in Y$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

1.1. Пусть $x \in X$. Тогда, так как $x \in Z$, то $x \in X \cap Z$. Следовательно $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Таким образом в этом случае, если $x \in (X \cup Y) \cap Z$, то $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Это означает, что $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

1.2. Пусть $x \in Y$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, так как $x \in Z$, то $x \in Y \cap Z$. Следовательно $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Снова получаем, что $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

2. Пусть теперь $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Это означает, что либо $x \in X \cap Z$, либо $x \in Y \cap Z$. Снова рассмотрим каждый из этих случаев по-отдельности.

2.1. Пусть $x \in X \cap Z$. Тогда $x \in X$ и $x \in Z$. Так как $x \in X$, то $x \in X \cup Y$. Следовательно $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Получаем, что $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$.

2.2. Пусть $x \in Y \cap Z$. Тогда $x \in Y$ и $x \in Z$. Снова, так как $x \in Y$, то $x \in X \cup Y$. Следовательно $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Получаем, что $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$.

Таким образом мы получили, что с одной стороны $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, а с другой стороны $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$. Следовательно $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Доказательство оставшихся свойств из формулировки теоремы оставляется в качестве упражнения. $\square$

Определение. *Пусть X — множество. Множество всех подмножеств множества X называется* булеаном *и обозначается* 2^X.

Определение. Мощностью *множества X называется число элементов в множестве X и обозначается* $|X|$.

Теорема 1.2 (Свойства характеристической функции).
Пусть A, B — подмножества множества X. Тогда справедливы следующий равенства:

(1) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(2) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$;
(3) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(4) $\sum\limits_{x \in X} \chi_A(x) = |A|$.

Доказательство. Докажем третье равенство

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Пусть $x \in X$. Возможны четыре случая: $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in A \cap B$ и $x \in X \setminus (A \cup B)$. Покажем, что равенство справедливо во всех четырех случаях.

1. Пусть $x \in A \setminus B$. Тогда $x \in A \cup B$, $x \in A$ и $x \notin B$. Следовательно $\chi_{A \cup B}(x) = 1$, $\chi_A(x) = 1$ и $\chi_B(x) = 0$. Тогда $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

2. Аналогичным образом равенство справедливо в случае, когда $x \in B \setminus A$.

3. Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Следовательно $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Отсюда следует, что $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

4. Пусть, наконец, $x \in X \setminus (A \cup B)$. Тогда $x \notin A$ и $x \notin B$. Следовательно $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$. Отсюда следует, что $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

Доказательство оставшихся трех равенств из формулировки теоремы оставляется в качестве упражнения. $\square$

Определение. *Пусть для каждого $i \in I$ множество X_i является подмножеством множества X. Если $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, то совокупность $\{X_i | i \in I\}$ подмножеств множества X называется* покрытием *множества X.*

Определение. *Покрытие $\{X_i | i \in I\}$ называется* разбиением *множества X, если*

(1) $X_i \cap X_j = \emptyset$, *при* $i \neq j$;
(2) $|X_i| > 0$ *для любого* $i \in I$.

Пример.
1. Пусть $X = \mathbb{N}$. Рассмотрим множества:
$X_0 = \{x \in X | x \equiv 0(3)\}$, *т. е.* $X_0 = \{3, 6, 9, \ldots\}$
$X_1 = \{x \in X | x \equiv 1(3)\}$, *т. е.* $X_1 = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$

$X_2 = \{x \in X | x \equiv 2(3)\}$, т. е. $X_2 = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$
Тогда $\{X_0, X_1, X_2\}$ является разбиением множества X.
2. Пусть $X = (0;1) \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим бесконечное семейство подмножеств $X_n = (\frac{1}{n};1) \subset X$, $n \geqslant 2$. Т. е. $X_2 = (\frac{1}{2};1)$, $X_3 = (\frac{1}{3};1)$ и т. д.
Тогда $\{X_2, X_3, X_4, \dots\}$ является бесконечным покрытием множества X.

Теорема 1.3 (Правило суммы).
Если $\{X_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ — разбиением множества X, и для каждого $i = 1, \dots, n$ мощность $|X_i|$ конечна, то

$$|X| = \sum_{j=1}^{n} |X_j|.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу n элементов в разбиении множества X.

База индукции: пусть $n = 1$. Тогда $X = X_1$. Следовательно $|X| = |X_1|$. Пусть теперь $n = 2$. Тогда $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Рассмотрим характеристическую функцию $\chi_X(x)$. С одной стороны

$$\sum_{x \in X} \chi_X(x) = |X|.$$

С другой стороны

$$\sum_{x \in X} \chi_X(x) = \sum_{x \in X} \chi_{X_1 \cup X_2}(x) = \sum_{x \in X} (\chi_{X_1}(x) + \chi_{X_2}(x) - \chi_{X_1 \cap X_2}(x)) =$$
$$= \sum_{x \in X} \chi_{X_1}(x) + \sum_{x \in X} \chi_{X_2}(x) = |X_1| + |X_2|$$

Предположение индукции: пусть при всех $k < n$ утверждение теоремы справедливо.

Шаг индукции: Пусть $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j$. Рассмотрим множество $X' = \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} X_j$. Так как $\{X_1, \dots, X_n\}$ является разбиением множества X, то $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ является разбиением множества X', и тогда по предположению индукции: $|X'| = \sum\limits_{j=1}^{n-1} |X_j|$.

Заметим, что $\{X', X_n\}$ является разбиением множества X. В частности $X' \cap X_n = \emptyset$. Имеем $|X| = |X'| + |X_n| = \sum\limits_{j=1}^{n-1} |X_j| + |X_n| = \sum\limits_{j=1}^{n} |X_j|$. □

Теорема 1.4 (О числе всех подмножеств).
Пусть X — множество. Тогда $|2^X| = 2^{|X|}$.

Доказательство. Докажем индукцией по числу элементов в множестве X.
База индукции: пусть $|X| = 0$. Тогда $X = \emptyset$ и $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Следовательно $|2^{\emptyset}| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$.
Предположение индукции: пусть утверждение теоремы верно при $|X| < n$.

Шаг индукции: пусть $|X| = n > 0$. Зафиксируем элемент $a \in X$ и положим $C_0 = \{Y \in 2^X | a \notin Y\}$ и $C_1 = \{Y \in 2^X | a \in Y\}$. Тогда

$$C_0 \cap C_1 = \emptyset \text{ и } 2^X = C_0 \cup C_1.$$

Следовательно $\{C_0, C_1\}$ является разбиением множества 2^X. Тогда по правилу суммы $\left|2^X\right| = |C_0| + |C_1|$. Но $|C_0| = |C_1| = |\{Y \subseteq X \setminus \{a\}\}|$. Имеем $\left|2^X\right| = 2|C_0| = 2 \cdot \left|2^{X\setminus\{a\}}\right| = 2^{|X|}$. □

Определение. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — множества. Множество*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$$

называется прямым произведением *множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и обозначается $X_1 \times \ldots \times X_n$.*

Теорема 1.5 (Правило произведения).
Для любых конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ справедливо равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|.$$

Доказательство. Докажем индукцией по числу сомножителей n в прямом произведении.

База индукции: пусть $n = 2$. Заметим, что $X_1 \times X_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{|X_1|} \{u_i\} \times X_2$, где $X_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|X_1|}\}$. Более того,

$$(\{u_i\} \times X_2) \cap (\{u_j\} \times X_2) = \emptyset \text{ при } i \neq j, \text{ и } |\{u_i\} \times X_2| = |X_2| \neq 0.$$

Следовательно совокупность $\{\{u_1\} \times X_2, \ldots, \{u_{|X_1|}\} \times X_2\}$ является разбиением множества $X_1 \times X_2$. Тогда по правилу суммы $|X_1 \times X_2| = \sum\limits_{i=1}^{|X_1|} |\{u_i\} \times X_2| = \sum\limits_{i=1}^{|X_1|} |X_2| = |X_1| \cdot |X_2|$.

Предположение индукции: пусть утверждение теоремы справедливо для прямого произведения $k < n$ сомножителей.

Шаг индукции: рассмотрим множество $X' = X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$. Тогда $X_1 \times \ldots \times X_n = X' \times X_n$. Следовательно $|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X' \times X_n| = |X'| \cdot |X_n| = |X_1| \cdot \ldots \cdot X_n|$. □

2. Основные комбинаторные числа и их рекуррентные соотношения

Определение. *Пусть X — множество мощности $n > 0$, и пусть $k \geqslant 0$. Число различных подмножеств мощности k в множестве X называется* числом сочетаний из n по k *и обозначается C_n^k.*

Пример. *Рассмотрим $X = \{1, 2, 3\}$ и $k = 2$. Тогда существует ровно три различных подмножества мощности 2: $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$. Следовательно $C_3^2 = 3$.*

Теорема 2.1 (О рекуррентном соотношении для числа сочетаний).
1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^k = 0$ при $k > n$;
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Доказательство. 1. Справедливость равенств $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$ следует из того, что единственное подмножество мощности 0 — это пустое множество $\emptyset$, а единственное подмножество мощности n — это все множество X.

2. $C_n^k = 0$ при $k > n$ так как не существует подмножеств мощности $k > n$ в множестве из n элементов.

3. Пусть $n, k > 0$ и пусть $C = \{Y \subseteq X \| Y| = k\}$. Отметим, что $|C| = C_n^k$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$ и рассмотрим два множества

$$C_0 = \{Y \subseteq X \| Y| = k \text{ и } a \notin Y\} \text{ и } C_1 = \{Y \subseteq X \| Y| = k \text{ и } a \in Y\}.$$

Так как $C = C_0 \cup C_1$ и $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, то совокупность $\{C_0, C_1\}$ является разбиением множества C. Заметим, что

(1) $|C_0| = C_{n-1}^k$, так как элемент a не принадлежит ни одному множеству из C_0;
(2) $|C_1| = C_{n-1}^{k-1}$, так как любое множество из C_1 получается из некоторого подмножества $Y' \subseteq X \setminus \{a\}$ мощности $k-1$ присоединением элемента a.

Тогда по правилу суммы имеем: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. □

Определение. *Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Число способов образования произведений из $n+1$ упорядоченных сомножителей относительно неассоциативного умножения называется* числом Каталана *и обозначается q_n.*

Пример. *Пусть $n = 2$. Тогда существует ровно два способа образовать произведения элементов a_0, a_1, a_2:*

$$(a_0 \cdot a_1) \cdot a_2 \text{ и } a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2).$$

Следовательно $q_2 = 2$.

Замечание. *Если $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — сомножители, то q_n равно числу способов расставить скобки так, чтобы на каждом шаге вычислялось произведение двух элементов.*

Теорема 2.2 (О рекуррентном соотношении для числа Каталана).
1. $q_0 = 1$;
2. $q_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_i \cdot q_{n-i-1}$.

Доказательство. 1. $q_0 = 1$ следует из определения числа Каталана.

2. Разобьем всевозможные расстановки скобок на n классов в зависимости от положения двух пар внешних скобок. Если первая пара скобок содержит $i+1$ множителей, то после расстановки двух пар внешних скобок, получится произведение $(a_0, a_1, \ldots, a_i) \cdot (a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Внутри первой пары скобок существует ровно q_i способов расставить скобки, в внутри второй пары — ровно q_{n-i-1} способов. Тогда общее число способов расставить скобки в этом случае по правилу произведения равно $q_i \cdot q_{n-i-1}$. Итоговое рекуррентное выражение получается применением правила суммы. □

Определение. *Пусть X — множество мощности n, и пусть $k \geqslant 0$. Число неупорядоченных разбиений множества X на k подмножеств называется* числом Стирлинга второго рода *и обозначается S_n^k. Положим $S_0^0 = 1$.*

Пример. *Рассмотрим $X = \{1, 2, 3\}$ и $k = 2$. Существует ровно три различных разбиения множества X на два подмножества:*

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}.$$

Следовательно $S_3^2 = 3$.

Теорема 2.3 (О рекуррентном соотношении для числа Стирлинга второго рода).

1. $S_0^0 = 1, S_0^1 = 0$;
2. $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + k \cdot S_{n-1}^k$.

Доказательство. 1. Заметим, что $S_n^k = 0$ при $k > n$, так как не существует разбиений множества из n элементов на $k > n$ непустых подмножеств. В частности $S_0^1 = 0$.

2. Пусть X — множество мощности $n > 0$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$. Чтобы получить разбиение множества X на k подмножеств, можно разбить множество $X \setminus \{a\}$ на k подмножеств и поместить элемент $a \in X$ в любой из них $k \cdot S_{n-1}^k$ способами или образовать отдельное одноэлементное подмножество разбиения $\{a\}$ и разбить $X \setminus \{a\}$ на $k-1$ подмножество S_{n-1}^{k-1} способами. Отсюда по правилу суммы $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + k \cdot S_{n-1}^k$. □

Следствие 2.1 (О числах S_n^2).
$S_n^2 = 2^{n-1} - 1$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Отметим, что по рекуррентному соотношению для числа Стирлинга второго рода для $k = 2$ имеем:

$$S_n^2 = S_{n-1}^1 + 2 \cdot S_{n-1}^2.$$

Также отметим, что $S_n^1 = 1$ при $n \geqslant 1$, так как существует только одно разбиение множества из n элементов на одно подмножество.

Докажем исходное утверждение индукцией по числу элементов n в множестве.
База индукции: пусть $n = 2$. Тогда $S_2^2 = S_1^1 + 2 \cdot S_1^2 = 1 = 2^{2-1} - 1$.
Предположение индукции: пусть утверждение верно при любом $k < n$.
Шаг индукции: $S_n^2 = S_{n-1}^1 + 2 \cdot S_{n-1}^2 = 1 + 2 \cdot (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1$. □

Определение. *Пусть $n \geqslant 0$. Число всех неупорядоченных разбиений множества мощности n называется* числом Белла *и обозначается B_n. Т.о. $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S_n^k$ и $B_0 = 1$.*

Теорема 2.4 (О рекуррентном соотношении для числа Белла).
Пусть $n \geqslant 1$. Тогда $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot B_{n-k-1}$.

Доказательство. Пусть X — множество мощности $n \geqslant 1$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$. Пусть Y — элемент разбиения множества X, содержащий элемент a, и пусть $|Y \setminus \{a\}| = k$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Множество $X \setminus Y$ можно разбить B_{n-k-1} способами. При этом число способов выбрать подмножество Y в множестве X равно C_{n-1}^k, так как один элемент a заведомо лежит в множестве Y. Следовательно число способов разбить множество X так, чтобы элемент a принадлежал подмножеству мощности $k+1$ равно $C_{n-1}^k \cdot B_{n-k-1}$. Теперь утверждение теоремы следует из правила суммы. $\square$

3. Свойства комбинаторных чисел

Определение. *Число упорядоченных подмножеств мощности k в множестве из n элементов называется* числом размещений из n по k *и обозначается A_n^k.*

Теорема 3.1 (О числе размещений).

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Доказательство. Справедливость леммы следует из правила произведения. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — упорядоченная последовательность. Её построение осуществляется за k шагов: 1-ым шагом выбираем элемент x_1 различными n способами. Второй элемент x_2 выбираем $n-1$ способами, и так далее. Последний элемент x_k можно выбрать $n-k+1$ различными способами. $\square$

Теорема 3.2 (О числе биекций).
Пусть X — множество мощности n. Тогда число различных биекций $f\colon X \to X$ равно $n!$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — элементы множества X. Каждая биекция $f\colon X \to X$ задается соответствием:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{array},$$

в котором все элементы $f(x_1), \dots, f(x_n)$ различны. Тогда каждая биекция однозначно определяется упорядоченной последовательностью

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

Всего таких различных последовательностей ровно $A_n^n = n!$ штук. $\square$

Замечание. *Задание биекции на множестве X мощности n эквивалентно упорядочиванию элементов множества X. Тогда число всевозможных упорядоченных множеств мощности n равно $n!$.*

Теорема 3.3 (О числе сочетаний).

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Доказательство. По определению C_n^k равно числу подмножеств мощности k в множестве из n элементов. Каждому из этих подмножеств соответствует $k!$ упорядоченных подмножеств. Следовательно , по правилу произведения число упорядоченных подмножеств мощности k в множестве из n элементов равно $C_n^k \cdot k!$. С другой стороны эта величина равна $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Отсюда получаем, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

□

Теорема 3.4 (Биномиальная формула).

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot t^k.$$

Доказательство. Докажем индукцией по числу n.
База индукции: пусть $n = 1$. Тогда $(1+t)^1 = C_1^0 + t \cdot C_1^1$.
Предположений индукции: пусть утверждение теоремы верно для любого $k < n$.
Шаг индукции:

$$\begin{aligned}(1+t)^n &= (1+t)^{n-1} \cdot (1+t) = (1 + C_{n-1}^1 t + C_{n-1}^2 t^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^{n-1}) \cdot (1+t) = \\ &= (1 + C_{n-1}^1 t + C_{n-1}^2 t^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^{n-1}) + \\ &+ (t + C_{n-1}^1 t^2 + C_{n-1}^2 t^2 3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^n) = \\ &= 1 + t(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) + t^2(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1) + \ldots + t^n C_{n-1}^{n-1}\end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение для числа сочетаний

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

и равенство

$$C_{n-1}^{n-1} = 1 = C_n^n,$$

получаем требуемое в условии теоремы соотношение. □

Теорема 3.5 (Свойства числа сочетаний).
Имеют место следующие соотношения:

(1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

(4) *(свёртка Вандермонда)* $C_{m+n}^k = \sum\limits_{s=0}^{k} C_m^s C_n^{k-s}$, $m \geqslant k$, $n \geqslant k$.

Доказательство. 1. Справедливость этого равенства следует из явной формулы для значения числа сочетаний C_n^k.

2. Справедливость этого равенства следует из биномиальной формулы. В самом деле: $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k$.

3. Справедливость этого равенства также следует из биномиальной формулы аналогично предыдущему случаю. В самом деле: $0 = (1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k$.

4. Для доказательства этого равенства вычислим значение $(1+t)^{n+m}$ двумя разными способами. С одной стороны, по биномиальной формуле

$$(1+t)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k t^k.$$

С другой стороны:

$$(1+t)^{n+m} = (1+t)^n \cdot (1+t)^m = \sum_{l=0}^{n} C_n^l t^l \cdot \sum_{s=0}^{m} C_m^s t^s =$$
$$= (1 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \ldots + C_n^n t^n) \cdot (1 + C_m^1 t + C_m^2 t^2 + \ldots + C_m^m t^m)$$

Коэффициент при слагаемом t^k после раскрытия скобок равен сумме таких произведений вида $C_n^i \cdot C_m^j$, что $i + j = k$. Следовательно коэффициент при t^k равен $\sum\limits_{s=0}^{k} C_n^s \cdot C_m^{k-s}$. Сравнивая полученную величину с коэффициентом при t^k в биномиальной формуле, получаем требуемое равенство. □

Определение. *Пусть X — множество мощности n. Пусть $\nu\colon X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\sum\limits_{x\in X} \nu(x) = k$. Пара (X,ν) называется* мультимножеством мощности k *над множеством X. Значение $\nu(x)$ называется* кратностью *вхождения элемента x в мультимножество (X,ν).*

Пример. *Пусть $X = \{a_1, a_2, a_3\}$. Мультимножеством мощности 3 является, например, набор элементов $\{a_1, a_1, a_1\}$, при этом $\nu(a_1) = 3$, $\nu(a_2) = 0$ и $\nu(a_3) = 0$.*

Примером мультимножества мощности 6 служит набор элементов

$$\{a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3\},$$

при этом $\nu(a_1) = 1$, $\nu(a_2) = 2$ и $\nu(a_3) = 3$.

Замечание. *Можно рассматривать упорядоченные мультимножества, которые характеризуются не только кратностью вхождения элементов множества X, но и порядком, в котором эти элементы образуют множество. Примерами различных упорядоченных мультимножеств мощности 5 над множеством $\{0,1\}$ являются наборы*

$$\{0,0,1,1,1\} \text{ и } \{0,1,0,1,1\}.$$

Эти наборы совпадают, как мультимножества, но различаются, как упорядоченные мультимножества.

Определение. *Пусть X — множество мощности n. Через $\overline{C_n^k}$ будем обозначать число различных мультимножеств мощности k над множеством X.*

Теорема 3.6 (О числе мультимножеств).

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Набор из таких n чисел

$$k_1 = \nu(x_1), k_2 = \nu(x_2), \ldots, k_n = \nu(x_n),$$

что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$, однозначно задаёт мультимножество мощности k. Следовательно число $\overline{C_n^k}$ равно числу различных неотрицательных решений уравнения

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k.$$

Рассмотрим прямое произведение множеств $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, а именно

$$\mathbb{Z}_2^{n+k-1} = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n+k-1 \text{ раз}}.$$

Сопоставим каждому решению $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$ элемент из множества $\mathbb{Z}_2^{n+k-1}$ следующим образом:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \longleftrightarrow (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_2}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_n}).$$

Тогда число решений уравнения совпадает с числом наборов длины $n + k - 1$, содержащих ровно k единиц (и ровно $n - 1$ ноль). Каждый такой набор можно построить, выбрав, на какие из $n + k - 1$ мест надо поставить k единиц, а остальные места заполнить нулями. Следовательно число таких наборов равно C_{n+k-1}^{k}. □

Замечание. *Число $\overline{C_n^k}$ совпадает с числом способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. В самом деле, каждое разложение шаров по ящикам задается такой последовательностью из n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$. Число k_i показывает, сколько шаров лежит в i-ом ящике. Из доказательства теоремы следует, что число таких последовательностей в точности равно $\overline{C_n^k}$.*

Определение. *Пусть X — множество мощности n. Число упорядоченных разбиений множества X на m подмножеств мощностей $k_1, \ldots, k_m$ называется* полиномиальным коэффициентом *и обозначается $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$.*

Пример. *1. Пусть $m = n$, и пусть $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$. Тогда упорядоченное разбиение множества X мощности n на столько же подмножеств мощности 1 — это упорядочивание множества X. Следовательно $C_n^{1,\ldots,1} = n!$.*

2. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, и пусть $m = 2$. Тогда любое упорядоченное разбиение множества X на два подмножества однозначно определяется выбором первого подмножества разбиение. Второе подмножество разбиения сдержит все оставшиеся элементы множества X. Следовательно $C_n^{k_1,k_2} = C_n^{k_1,n-k_1} = C_n^{k_1}$.

Замечание. *Полиномиальный коэффициент $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$ совпадает с числом способов разложить n различных шаров (элементов множества X) по m различным ящикам (упорядоченым подмножествам разбиения) так, чтобы в i-ом ящике лежало ровно k_i шаров.*

Теорема 3.7 (О числе упорядоченных мультимножеств).
Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество мощности n, и пусть (X, ν) — такое мультимножество мощности k над множеством X, что $\nu(x_i) = k_i$. Тогда число таких упорядоченных мультимножеств равно $C_k^{k_1,\ldots,k_n}$.

Доказательство. Рассмотрим n различных ящиков, помеченных элементами множества X. Тогда каждое упорядоченное мультимножество мощности k над множеством X задает раскладывание k различных шаров (помеченных числами $1, 2, \ldots, k$) по этим ящикам. При этом если элемент x_i множества X стоит на j-ом месте в упорядоченном мультимножестве, то шар с номером j лежит в ящике x_i. Наоборот, каждому разложению шаров по ящикам можно сопоставить упорядоченное мультимножество. Следовательно, число таких упорядоченных мультимножеств совпадает с числом способов разложить k различных шаров по n ящикам, то есть с величиной $C_k^{k_1,\ldots,k_n}$. □

Теорема 3.8 (О полиномиальных коэффициентах).

$$C_n^{k_1,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Доказательство. Построение упорядоченного разбиения множества мощности n на m подмножеств $A_1, \ldots, A_m$ мощностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно осуществляется за m шагов:

1-ый шаг: множество A_1 мощности k_1 можно выбрать $C_n^{k_1}$ различными способами;

2-ой шаг: множество A_2 мощности k_2 можно выбрать из оставшихся элементов множества $X \setminus A_1$ различными $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами;

$\vdots$

m-ый шаг: последнее множество A_m мощности k_m можно выбрать $C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = C_{k_m}^{k_m} = 1$ способом.

По правилу произведения получаем, что

$$C_n^{k_1,\ldots,k_m} = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!0!} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}$$

□

Следствие 3.1 (О числе неупорядоченных разбиений).

Число неупорядоченных разбиений множества мощности n на m подмножеств мощностей $k_1, \ldots, k_m$ равно

$$\frac{1}{m!} \cdot C_n^{k_1,\ldots,k_m}.$$

Доказательство. В самом деле, каждое неупорядоченное разбиение на m подмножеств задает $m!$ упорядоченных разбиений. □

Следствие 3.2 (О числах Стирлинга второго рода).

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} C_n^{n_1,\ldots n_k},$$

где суммирование ведется по всем натуральным $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Справедливость формулы следует из определения чисел Стирлинга 2-го рода: число S_n^k равно числу неупорядоченных разбиений множества мощности n на k подмножеств таких мощностей $n_1, \ldots, n_k$, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. □

Следствие 3.3 (О сумме полиномиальных коэффициентов).

$$\sum_{k_1+\ldots+k_m=n} C_n^{k_1,\ldots,k_m} = m^n,$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. В самом деле, величина $C_n^{k_1,\dots,k_m}$ совпадает с числом способов разложить n различных шаров по m различным ящикам так, чтобы в них лежало $k_1, \dots, k_m$ шаров соответственно. С другой стороны, по правилу произведения, число m^n совпадает с общим числом способов разложить n различных шаров по m различным ящикам. Теперь искомая формула следует из правила суммы. □

Теорема 3.9 (Полиномиальная формула).

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} C_n^{k_1,\dots,k_m} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m},$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным целым $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Коэффициент при $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ в разложении $(x_1 + \ldots + x_m)^n$ равен числу способов выбрать слагаемое x_1 ровно k_1 раз, слагаемое x_2 ровно k_2 раз и так далее. Таким образом этот коэффициент равен числу упорядоченных разбиений множества из n множителей на m подмножеств, то есть числу $C_n^{k_1,\dots,k_m}$. □

4. Принцип включения-исключения

Теорема 4.1 (Формула включения-исключения).
Пусть $X_1, \dots, X_n$ *— подмножества множества* X*. Тогда*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}\right|,$$

где суммирование берется по всем $k = 1, 2, \dots, n$ *и всем возможным непустым подмножествам мощности* k *множества* $\{1, \dots, n\}$.

Замечание. *В развернутом виде формула включения-исключения имеет вид:* $|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} |X_i| - \sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |X_i \cap X_j| + \sum\limits_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n|$.

Доказательство. Заметим, что:

1. $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - a_i) = (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) = 1 + \sum\limits_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^k a_{i_1} \ldots a_{i_k}$.

2. Если $Y = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$, то $\chi_Y(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \chi_{X_i}(x)$ по теореме 1.2 (пункт 1) о свойствах характеристической функции.

3. $\sum\limits_{x \in X} \chi_X(x) = |X|$ по теореме 1.2 (пункт 4) о свойствах характеристической функции.

4. Так как $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}}$.

Пусть $\widehat{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$. Вычислим функцию $\chi_{\widehat{X}}(x)$:

$$\chi_{\widehat{X}}(x) = \chi_{\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}}}(x) = 1 - \chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \chi_{\overline{X_i}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \chi_{X_i}(x)) =$$
$$= \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot \chi_{X_{i_1}}(x) \cdot \ldots \cdot \chi_{X_{i_k}}(x) =$$
$$= \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot \chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x).$$

Тогда

$$|\widehat{X}| = \sum_{x\in X} \chi_{\widehat{X}}(x) = \sum_{x\in X} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot \chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x) =$$
$$= \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \sum_{x\in X} \chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x) = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j} \right|.$$

□

Определение. *Перестановка $\sigma \in S_n$ называется* беспорядком*, если для $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется $\sigma(i) \neq i$.*

Пример. *Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ является беспорядком, а перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ — нет.*

Теорема 4.2 (О числе беспорядков).

Число беспорядков d_n в S_n равно $n! \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Доказательство. Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $X_i = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i\} \subseteq S_n$. Тогда

$$d_n = |S_n| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = n! - \left(\sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j} \right| \right).$$

Заметим, что $\bigcap\limits_{j=1}^{k} X_{i_j} = \{\sigma \in S_n | \sigma(i_j) = i_j, \forall j = 1, \dots, k\}$. Следовательно

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j} \right| = (n-k)!$$

Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot C_n^k \cdot (n-k)!$$

Следовательно

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot C_n^k \cdot (n-k)! = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! =$$
$$= n!(1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

Теорема 4.3 (О числе сюръекций).
Пусть X, Y — множества, $|X| = n, |Y| = m$. Тогда число различных сюръективных отображений $X \to Y$ равно

$$D_n^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot (m-k)^n \cdot C_m^k.$$

Замечание. *Число D_n^m называется* числом Стирлинга первого рода*.*

Доказательство. Число сюръекций совпадает с числом разложений n различных шаров по m различным ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. Обозначим F — множество всех разложений n различных шаров по m ящикам, и F_i — множество всех разложений, при которых i-ый ящик пуст. Тогда искомое число сюръекций равно

$$|F| - \left| \bigcup_{i=1}^{m} F_i \right|.$$

По формуле включения-исключения

$$\left| \bigcup_{i=1}^{m} F_i \right| = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \right|.$$

Множество $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_{i_j}$ состоит из таких разложений шаров, при которых ящики с номерами $i_1, \dots, i_k$ пусты, а остальные разложены произвольным образом. Получаем

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \right| = (m-k)!$$

Тогда

$$|F| - \left| \bigcup_{i=1}^{m} F_i \right| = m^n - \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot (m-k)^n =$$
$$= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \cdot C_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot (m-k)^n \cdot C_m^k.$$

□

Следствие 4.1 (О числах Стирлинга второго рода).

$$S_n^k = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot (k-i)^n \cdot C_k^i.$$

Доказательство. Число сюръекций из множества мощности n в множество мощности k совпадает с числом способов разложить n различных шаров по k различным ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. По определению число Стирлинга второго рода S_n^k равно числу разбиений множества мощности n на k непустых подмножеств, то есть числу разложений n различных шаров по k одинаковым ящикам. Искомая формула следует и того, что $S_n^k \cdot k! = D_n^k$. □

5. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Определение. *Пусть* $f\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{R}$. *Соотношение вида*

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + \ldots + a_k \cdot f(n),$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, *называется* линейным рекуррентным соотношением степени k с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$.

Определение. *Бесконечная последовательность* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ *называется* решением *рекуррентного соотношения* $f(n+k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot f(n+k-i)$, *если при подстановке* $f(n) = x_n$ *для каждого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *это соотношение становится тождественным.*

Пример. *Рассмотрим рекуррентное соотношение*

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

Последовательность

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

является его решением. В самом деле, подставим $f(n) = 2^n$ *и* $f(n+1) = 2^{n+1}$, *получим:*

$$3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}(3-1) = 2^{n+2} = f(n+2).$$

Лемма 5.1 (О линейности решений рекуррентных соотношений).
Пусть $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ — *линейное рекуррентное соотношение порядка 2. Пусть две последовательности*

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \text{ и } \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$$

являются его решениями. Тогда для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *последовательность*

$$\{\alpha x_0 + \beta y_0, \alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n, \ldots\}$$

также является решением исходного рекуррентного соотношения.

Доказательство. Подставим $f(n) = \alpha x_n + \beta y_n$ и $f(n+1) = \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}$. Получим:

$$a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = a_1(\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}) + a_2(\alpha x_n + \beta y_n) = \\ = \alpha(a_1 x_{n+1} + a_2 x_n) + \beta(a_1 y_{n+1} + a_2 y_n) = \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} = f(n+2).$$

□

Замечание. *Лемма о линейности решений рекуррентных соотношений справедлива и для линейных рекуррентных соотношений порядка, большего двух.*

Определение. *Пусть* $f(n+k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot f(n+k-i)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка* k. Характеристическим многочленом *этого рекуррентного соотношения называется многочлен*

$$\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \ldots - a_{k-1}\lambda - a_k.$$

Лемма 5.2 (О корнях характеристического многочлена).
Пусть $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка 2,* $\mathcal{F}(\lambda)$ *— его характеристический многочлен,* ρ *— его корень. Тогда последовательность*

$$\{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^n, \ldots\}$$

является решением исходного рекуррентного соотношения.

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2$. Тогда, так как ρ — корень характеристического многочлена $\mathcal{F}(\lambda)$, то

$$\rho^2 = a_1\rho + a_2.$$

Подставим в рекуррентное соотношение $f(n) = \rho^n$, $f(n+1) = \rho^{n+1}$ и $f(n+2) = \rho^{n+2}$, получим:

$$a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = a_1\rho^{n+1} + a_2\rho^n = \rho^{n+2} = f(n+2).$$

□

Замечание. *Лемма о корнях характеристического многочлена справедлива и для линейных рекуррентных соотношений порядка, большего двух.*

Теорема 5.1 (Об общем виде решения рекуррентного соотношения).
Пусть $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка 2, причем коэффициенты* a_1, a_2 *не равны нулю одновременно. Пусть* $\mathcal{F}(\lambda)$ *— характеристический многочлен этого рекуррентного соотношения, и пусть* ρ_1, ρ_2 *— его корни. Тогда*

(1) *Если* $\rho_1 \neq \rho_2$, *то любое решение рекуррентного соотношения имеет вид* $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, *где* $x_n = \alpha\rho_1^n + \beta\rho_2^n$;
(2) *Если* $\rho_1 = \rho_2$, *то любое решение рекуррентного соотношения имеет вид* $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, *где* $x_n = (\alpha n + \beta)\rho_1^n$;

Доказательство. 1. Из леммы о линейности решений и леммы о корнях характеристического многочлена следует, что последовательность $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, где $x_n = \alpha\rho_1^n + \beta\rho_2^n$ является решением исходного рекуррентного соотношения. Покажем, что любое решение имеет такой вид.

Заметим, что любое решение однозначно определяется первыми двумя элементами последовательности x_0, x_1. Поэтому решение рекуррентного соотношения представимо в нужном виде тогда и только тогда, когда для любых чисел x_0, x_1 система уравнений

$$\begin{cases} \alpha\rho_1^0 + \beta\rho_2^0 = x_0 \\ \alpha\rho_1^1 + \beta\rho_2^1 = x_1 \end{cases}$$

имеет решение относительно неизвестных α, β.

Непосредственно вычисляется, что решением этой системы являются

$$\alpha = \frac{x_0\rho_2 - x_1}{\rho_2 - \rho_1},\ \beta = \frac{x_1 - \rho_1 x_0}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Так как $\rho_1 \neq \rho_2$, то решение всегда существует.

2. Покажем, что если ρ — корень кратности 2 характеристического многочлена, то последовательность $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, где $x_n = n \cdot \rho^n$, является решением исходного рекуррентного соотношения.

Так как характеристический многочлен $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет корень ρ кратности 2, то

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = (\lambda - \rho)^2.$$

Отсюда находим, что

$$a_1 = 2\rho \text{ и } a_2 = -\rho^2$$

Подставим $f(n) = n \cdot \rho^n$ в рекуррентное соотношение, получим:

$$\begin{aligned} a_1 f(n+1) + a_2 f(n) &= a_1(n+1)\rho^{n+1} + a_2 n\rho^n = \\ &= 2(n+1)\rho^{n+2} - n\rho^{n+2} = (n+2)\rho^{n+2} = f(n+2). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что любое решение исходного рекуррентного соотношения представимо в нужном виде. Для этого, как и ранее, достаточно проверить, что при любых x_0, x_1 система

$$\begin{cases} (\alpha \cdot 0 + \beta)\rho^0 = x_0 \\ (\alpha \cdot 1 + \beta)\rho^1 = x_1 \end{cases}$$

имеет решение.

Непосредственно вычисляется, что решением являются

$$\alpha = \frac{x_1 - \rho x_0}{\rho},\ \beta = x_0.$$

Из условия теоремы следует, что $\rho \neq 0$, следовательно решение системы всегда существует. □

Замечание. *В общем случае, если ρ является корнем кратности s характеристического многочлена $\mathcal{F}(\lambda)$, то в общем виде решения рекуррентного соотношения $f(n+k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i f(n+k-i)$ ему соответствует слагаемое*

$$(C_1 \cdot n^{s-1} + C_2 \cdot n^{s-2} + \ldots + C_s) \cdot \rho^n.$$

Пример. *Найдем решение рекуррентного соотношения*

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n),$$

задающего последовательность чисел Фибоначчи

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$$

Характеристический многочлен рекуррентного соотношения $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Находим, что

$$\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

являются его корнями.

Тогда общее решение рекуррентного соотношения представляется в следующем виде:

$$x_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Неизвестные коэффициенты α, β найдем из условия: $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$. Для этого запишем систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

и получим, что тогда

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \ , \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Окончательно находим, что

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right).$$

Литература

[1] Мещеряков М.В. Избранные лекции по дискретной математике. Часть 1: кобинаторика и графы // Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2003.
[2] Холл М. Комбинаторика // Москва: Мир, 1970.
[3] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика // Москва: МЦНМО, 2006.
[4] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику // Москва: Наука, 1986.