

Министерство образования Российской Федерации

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В.Ломоносова

Кафедра прикладной механики  
и основ конструирования

**Прикладная механика**  
**Кручение**

Учебно – методическое пособие

Москва 2004

Авторы: Г.А. Бонченко, А.А. Горшков, А.Д. Грусков,  
В.А. Ломовской, С.Н. Меркурьева, В.Е Перельман,  
З.И. Фомкина.

Прикладная механика. Кручение: Учебно-методическое пособие / Бонченко Г.А., Горшков А.А., Грусков А.Д., Ломовской В.А., Меркурьева С.Н., Перельман В.Е., Фомкина З.И. – М.: ИПЦ МИТХТ, 2004. 27 с.

Учебно – методическое пособие предназначено для студентов всех направлений и всех специальностей дневной и вечерней форм обучения, изучающих курс “Прикладная механика и основы конструирования”. Оно подготовлено по разделу курса “Кручение бруса круглого сечения”. Теоретический материал снабжен примерами практических расчетов, что позволяет студентам овладевать курсом как самостоятельно, так и с помощью преподавателя. Пособие может быть полезным также при изучении курсов сопротивления материалов и строительной механики.

© МИТХТ им. М.В. Ломоносова, 2004.

Бонченко Геннадий Алексеевич,  
Горшков Александр Анатольевич,  
Грусков Александр Дмитриевич,  
Ломовской Виктор Андреевич,  
Меркурьева Светлана Николаевна,  
Перельман Владимир Евсеевич  
Фомкина Зинаида Ивановна.

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

КРУЧЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать Печ. на ризографе

Формат 60 x 90. Уч.-изд. л. Тираж

Заказ

ИПЦ МИТХТ им. М.В. Ломоносова.

117571, Москва, проспект Вернадского, 86

## Оглавление

1. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого сечения.....	3
1.1. Нагрузки и внутренние усилия при кручении.....	3
1.2. Основные гипотезы и расчетная модель вала круглого сечения .....	7
1.3. Определение напряжений и угла закручивания.....	9
1.4. Особенности работы полых валов .....	14
1.5. Подбор сечений вала по условию прочности.....	15
1.6. Напряжения на различно ориентированных площадках и характер разрушения валов.....	16
1.7. Расчет вала на жесткость.....	17
1.8. Практические расчеты на кручение.....	18
2. Пластические деформации при кручении бруса круглого поперечного сечения.....	24

## 1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

### 1.1. Нагрузки и внутренние усилия при кручении

В чистом виде кручение возникает в том случае, если в плоскости поперечного сечения бруса действует пара сил, создающая момент  $M = P \cdot D$  (рис. 1).

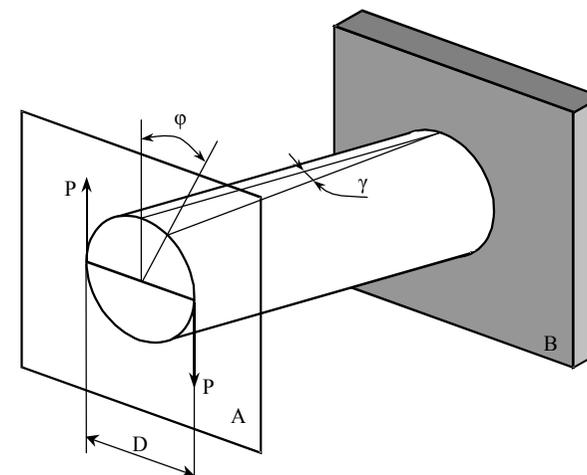


Рис. 1

Если сечение В неподвижно, то под действием момента  $M = P \cdot D$  сечение А повернется относительно В на некоторый угол  $\varphi$ , называемый углом закручивания. Брус деформируется так, что любые два его сечения поворачиваются на некоторый угол по отношению друг к другу. Таким образом, перемещения

сечений бруса при кручении сводятся к повороту на угол  $\varphi$  относительно оси бруса.

Кручение является весьма распространенным видом деформации. На кручение работают валы различных механизмов, несущих на себе шкивы или шестерни, элементы пространственных конструкций.

На рис. 2 показаны примеры условного обозначения моментов, вызывающих кручение вала, жестко заземленного правым концом. Каждый момент изображается или дуговой стрелкой (рис. 2, а) или в виде пары сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси вала (рис. 2, б). Пару сил удобно изображать в соответствии с рис. 2, в: сила, направленная из-за плоскости чертежа (на наблюдателя), отмечается точкой, противоположная сила отмечается крестиком. Величина реактивного момента в заделке ( $M_R$ ) определяется из условия равновесия вала.

Внутренние усилия, возникающие при кручении вала, называются крутящими моментами ( $M_K$ ). Они определяются с помощью метода сечений. В любом сечении крутящий момент уравнивает всю нагрузку, приложенную к отсеченной части вала. Таким образом, крутящий момент в поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов от внешней нагрузки (внешних моментов), действующих по одну сторону от сечения, и направлен в противоположную сторону по отношению к их равнодействующему моменту. Условимся

Весь материал бруса охвачен текучестью. Деформации растут без увеличения внешней нагрузки. Соответствующий этому состоянию крутящий момент является предельным, и его величина определяется из выражения:

$$M_{пр} = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^2\tau_r d\rho = \frac{\pi d^3}{12} \tau_r, \quad (19)$$

где подинтегральное выражение представляет собой момент, действующий на выделенное в сечении кольцо радиуса  $\rho$  и шириной  $d\rho$  (рис. 11, в). Величина  $W_{пр} = \frac{\pi d^3}{12}$  называется пластическим моментом сопротивления кручению.

Когда крутящий момент в сечении достигает величины  $M_{пр}$ , дальнейшее закручивание вала из идеально пластичного материала будет происходить без увеличения момента. Говорят, что несущая способность вала исчерпана.

Крутящий момент  $M_T$ , при котором возникают первые пластические деформации, находится по формуле для определения  $\tau_{max}$  при  $\tau_{max} = \tau_T$ :

$$M_T = \frac{\pi d^3}{16} \tau_T. \quad (20)$$

Сравнивая формулы (19) и (20) видим, что отношение  $M_{пр} : M_T = 4 : 3$ .

Отсюда видно, что от начала возникновения пластических деформаций, до потери несущей способности, крутящий момент увеличивается на одну треть.

## 2. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим поведение бруса из идеального упруго-пластического материала. Будем считать, что после упругого прямолинейного участка, когда касательные напряжения достигнут предела текучести  $\tau_T$ , материал продолжает деформироваться при постоянном напряжении. Очевидно, что вначале достигнут предела текучести напряжения в наиболее удаленных точках сечения и явление текучести начнется на поверхности бруса (эпюра  $\tau$  показана штриховой линией на рис. 11, а). При увеличении внешней нагрузки область пластического течения постепенно распространяется внутрь сечения (рис. 11, а), и, когда достигнет центра бруса (рис. 11, б), распределение напряжений станет равномерным.

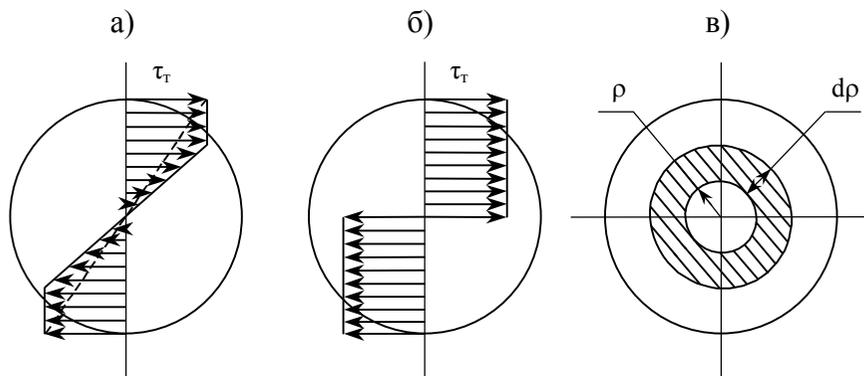


Рис. 11

считать крутящий момент положительным, если при взгляде на сечение снаружи (со стороны внешней нормали сечения) увидим равнодействующий момент направленным по часовой стрелке.

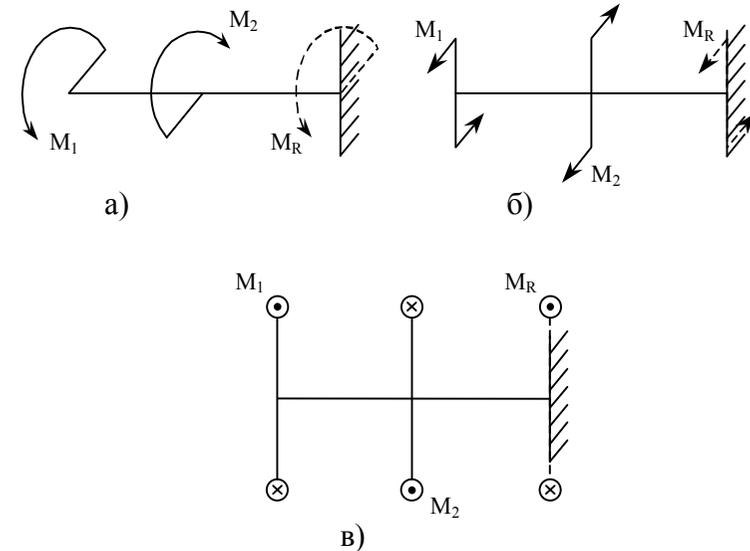


Рис. 2

Можно и не придерживаться строго этого правила, но при решении конкретных задач необходимо приписывать определенный знак внешним моментам одного направления.

**Пример 1.** Нагрузка на вал представлена сосредоточенными крутящими моментами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и распределенным по длине моментом с переменной или постоянной интенсивностью кручения  $m$ .  $[m] = \text{Нм/м}$ . Написать выражение для крутящего момента в сечении  $n$ - $n$ .

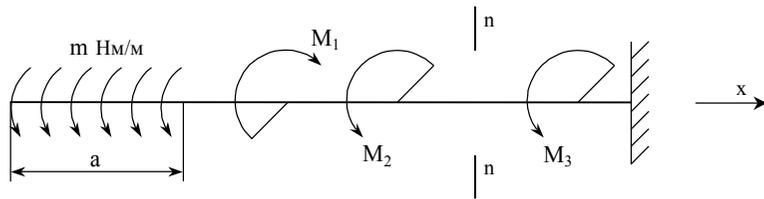


Рис. 3

**Решение.** Составив сумму внешних моментов, расположенных на части вала левее сечения n-n, получим:

$$M_K = -\int_0^a m dx + M_1 - M_2$$

Если задано несколько внешних моментов и определяются величины крутящих моментов в ряде сечений, то удобно построить эпюру крутящих моментов.

**Пример 2.** Построить эпюру крутящих моментов для вала показанного на рис. 4, а.

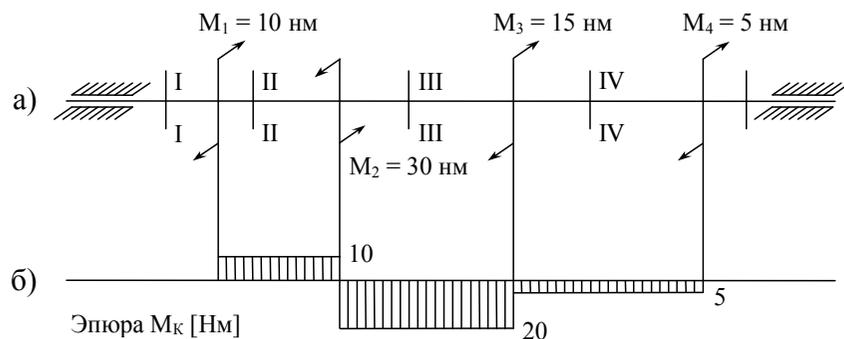


Рис. 4

**Решение.** Рассечем вал на участках между моментами и рассмотрим отсеченные части вала левее каждого сечения.

Для построения эпюры относительных углов закручивания  $\theta$  используем формулу (5):

$$\text{Участок 2-1: } \theta_{2-1} = \frac{79,6}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 50,2 \cdot 10^{-8}} = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м} = 0,115^\circ/\text{м} .$$

$$\text{Участок 1-3: } \theta_{1-3} = \frac{159,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 50,2 \cdot 10^{-8}} = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м} = 0,23^\circ/\text{м} .$$

$$\text{Участок 3-4: } \theta_{3-4} = \frac{39,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 50,2 \cdot 10^{-8}} = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м} = 0,06^\circ/\text{м} .$$

Эпюра  $\theta$  показана на рис. 10, г.

**Абсолютный угол закручивания** вала  $\varphi$  определяется интегрированием функции  $d\varphi = \theta dx$ :

$$\varphi(x) = \int_0^x \theta dx = \int_0^x \frac{M_K}{G I_p} dx .$$

Этот интеграл может быть вычислен как площадь эпюры  $\theta$ . Поскольку на каждом участке вала  $\theta = \text{const}$ , то угол  $\varphi$  изменяется по линейному закону. Считая неподвижным левый конец вала (сечение 2), получаем:

$$\varphi_2 = 0 ;$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 0,115 \cdot 0,3 = 0,0345^\circ = 6,02 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 - 0,23 \cdot 0,2 = 0,0345^\circ - 0,046^\circ = -0,0115^\circ = -2,01 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - 0,06 \cdot 0,3 = -0,0115^\circ - 0,018^\circ = -0,0295^\circ = -5,15 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

На последнем, ненагруженном участке вала угол закручивания остается постоянным (см. рис. 10, д). На рис. 10, е показан закон изменения  $\tau$  по сечению вала, сделанному на участке 1-3, где  $\tau_{\text{max}} = 8,56 \text{ МПа}$ .

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 159,2 \cdot 10^3}{\pi \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 (1 - 0,8^4) \cdot 4}} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5,4 \text{ см}.$$

Из двух полученных значений диаметров выбираем большее:  $D = 5,4$  см. В дальнейшем, если это значение диаметра не является стандартным, его следует увеличить до ближайшего стандартного.

Определив величину наружного диаметра  $D = 5,4$  см, вычисляем внутренний диаметр  $d = 0,8 \cdot 5,4 = 4,32$  см и находим момент сопротивления кручению сечения вала

$$W_p = 0,2 D^3 (1 - \alpha^4) = 0,2 \cdot 5,4^3 (1 - 0,8^4) = 18,6 \text{ см}^3$$

и полярный момент инерции сечения

$$I_p = 0,1 D^4 (1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 5,4^4 (1 - 0,8^4) = 50,2 \text{ см}^4.$$

Затем, используя эпюру  $M_K$  и формулу (8), вычисляем наибольшие касательные напряжения на участках вала:

$$\tau_{\max 2-1} = \frac{M_{2-1}}{W_p} = \frac{79,6}{18,6 \cdot 10^{-6}} = 4,28 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,28 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max 1-3} = \frac{M_{1-3}}{W_p} = \frac{159,2}{18,6 \cdot 10^{-6}} = 8,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,56 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max 3-4} = \frac{M_{3-4}}{W_p} = \frac{39,8}{18,6 \cdot 10^{-6}} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,14 \text{ МПа}.$$

Эпюра  $\tau_{\max}$  изображена на рис. 10, в. Небольшие значения касательных напряжений по сравнению с  $[\tau]$  объясняются тем, что исходя из условия жесткости, пришлось выбрать вал значительно большего диаметра, чем это диктуется условием прочности.

Аналогично можно получить эту же эпюру по нагрузкам, приложенным к правой части вала относительно каждого сечения.

## 1.2. Основные гипотезы и расчетная модель вала круглого сечения

Нанесем на цилиндрическую поверхность вала тонкую сетку ортогональных линий, совпадающих с образующими и с направляющими поверхности (см. рис. 5, а). Приложим к концам вала внешние крутящие моменты и рассмотрим картину деформации вала.

Окружности, нанесенные на поверхность вала, не изменят своей формы, а лишь повернутся друг относительно друга на угол, значение которого оказывается пропорциональным нагрузке. Сечения вала остаются плоскими и совершают поворот как абсолютно твердые пластинки.

Продольные прямые закручиваются и превращаются в винтовые линии с постоянным углом наклона по длине вала, зависящим от величины угла взаимного поворота соседних сечений. Наклон продольных линий ведет к изменению прямых углов ячеек первоначальной сетки. Прямоугольники превращаются в параллелограммы, что свидетельствует о деформации сдвига испытываемого материала вала. Следовательно, в поперечных сечениях вала действуют касательные напряжения, а по закону парности в продольных сечениях также должны возникнуть

касательные напряжения  $\tau' = -\tau$  (см. рис. 5, б).

Расстояния  $a$  и  $b$  между параллельными линиями сетки при упругой деформации вала остаются неизменными, что доказывает отсутствие нормальных напряжений в продольных и поперечных сечениях. Об этом же говорит и неизменность диаметра и длины вала при небольших углах закручивания.

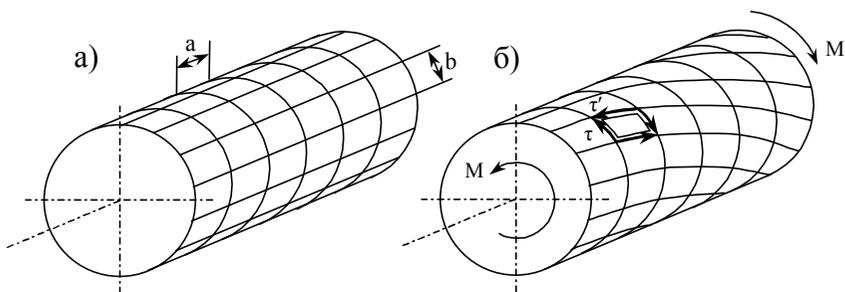


Рис. 5

Итак, при кручении материал вала находится в условиях чистого сдвига, когда связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G \gamma, \quad (1)$$

где  $\gamma$  - угол сдвига при кручении, т.е. угол наклона винтовой образующей цилиндрической поверхности к оси вала.

Описанные наблюдения позволяют ввести гипотезы для вывода аналитических зависимостей между внешней нагрузкой, напряжениями и упругими перемещениями (углами закручивания) сечений вала.

Гипотеза 1. При кручении круглого вала его сечения, пло-

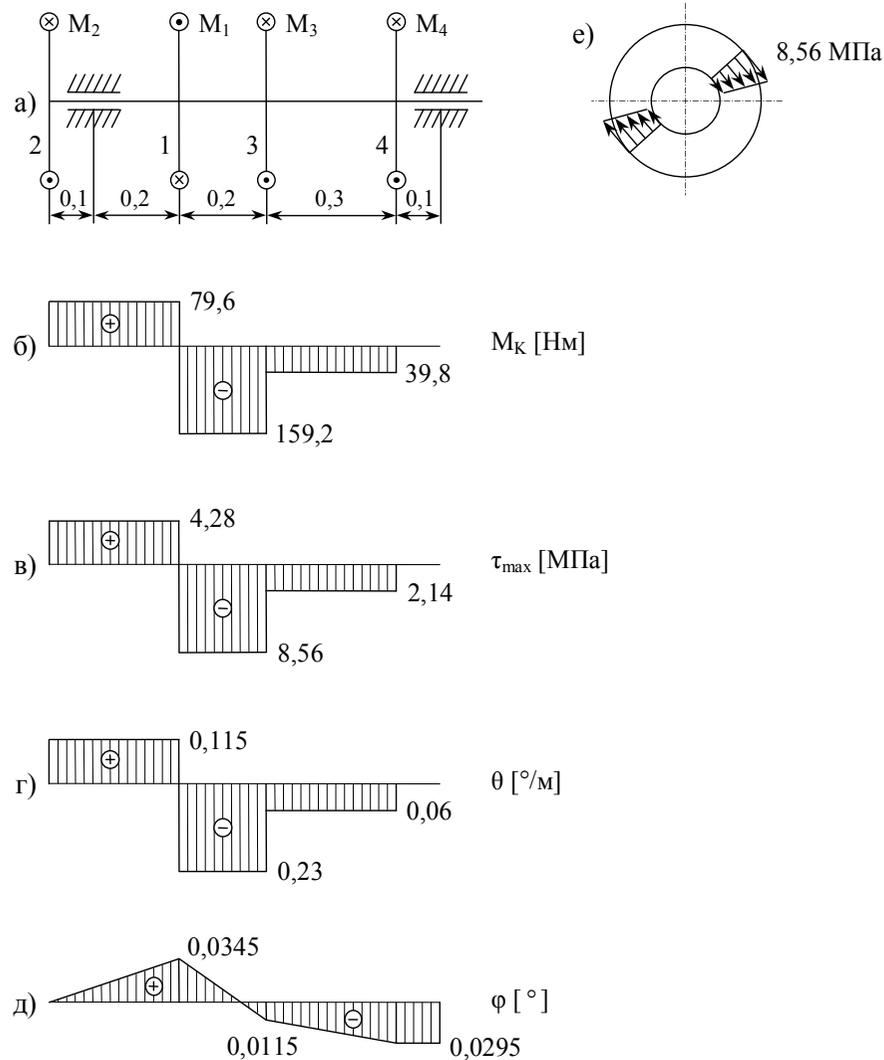


Рис. 10

$$[\theta] = 0,25 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м};$$

ям прочности и жесткости, приняв  $[\tau] = 60$  МПа,  $[\theta] = 0,25^\circ$  на 1 метр длины. Построить эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, относительных и абсолютных углов закручивания (рис. 10), считая модуль упругости при сдвиге материала равным:  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Решение. По формуле (17) вычисляем величины внешних крутящих моментов, передаваемых на вал:

$$M_1 = 9550 \frac{30}{1200} = 238,8 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 9550 \frac{10}{1200} = 79,6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 9550 \frac{15}{1200} = 119,4 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_4 = 9550 \frac{5}{1200} = 39,8 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Моменты  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  направлены противоположно моменту  $M_1$  и уравновешивают его. Эпюра крутящих моментов показана на рис. 10, б. Наибольший по абсолютной величине момент  $M_{\text{Кmax}} = 159,2$  действует на участке между зубчатым колесом 1 и шестерней 3. Определим требуемый диаметр вала из условия прочности опасного участка, используя формулу (14):

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 159,2}{\pi(1 - 0,8^4) \cdot 60 \cdot 10^6}} = 2,84 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,84 \text{ см}.$$

Далее для этого же участка найдем требуемую величину диаметра вала по условию жесткости (15), предварительно переведа градусы в радианы:

ские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Гипотеза 2. Радиусы в поперечных сечениях, прямые до деформации, остаются прямыми и после деформации, поворачиваясь на один и тот же угол, равный углу закручивания сечения.

Гипотеза 3. Нормальные напряжения в продольных и поперечных сечениях вала не возникают. Материал вала при кручении испытывает чистый сдвиг.

Введенные гипотезы позволяют построить упрощенную модель вала, состоящую из абсолютно жестких дисков (гипотезы 1 и 2), соединенных между собой тонкими прослойками, работающими только на сдвиг (гипотеза 3).

### 1.3. Определение напряжений и угла закручивания

Рассмотрим элемент длиной  $dx$ , вырезанный из вала и нагруженный по торцам крутящими моментами  $M_K$ . Внутри этого элемента выделим цилиндр произвольного радиуса  $\rho$ , на рисунке 6 показанный сплошными линиями.

При закручивании торцы элемента повернутся на угол  $d\phi$ .

Прямоугольник  $pnprq$  на поверхности цилиндрического элемента превратится в параллелограмм  $p'm'rq$  под действием касательных напряжений  $\tau$  и  $\tau' = -\tau$ . Точки  $n$  и  $m$  переместятся по окружности на одинаковые дуги  $nn' = mm' = \rho d\phi$ .

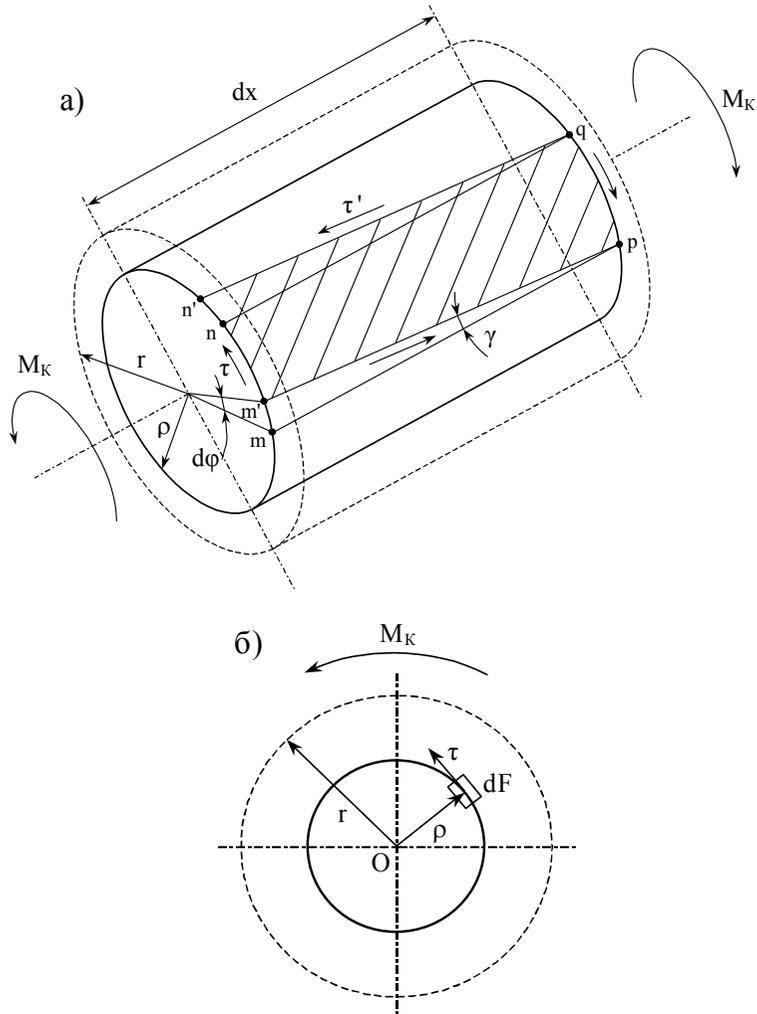


Рис. 6

Это перемещение есть результат упругой деформации элемента и может быть выражено из треугольника  $nn'q$  или  $mm'p$ :

$$nn' = mm' = \gamma dx ,$$

$$\text{т.е. } \rho d\varphi = \gamma dx \text{ или } \frac{d\varphi}{dx} = \gamma \frac{1}{\rho} . \quad (2)$$

Определив действующие на вал внешние крутящие моменты, строим эпюры крутящих моментов и касательных напряжений по длине вала и находим опасные с точки зрения прочности сечения. Для них ведем проверочный или проективный расчет на прочность, используя условие прочности (13). Построив эпюру относительных углов закручивания, находим максимальное значение  $\theta$  и, применяя условие жесткости (15), проводим проверочный расчет на жесткость.

Еще раз подчеркнем, что расчеты на прочность и жесткость устанавливают лишь нижний предел диаметра. При конструировании выбирается больший стандартный размер, удовлетворяющий условиям сопряжения деталей, устанавливаемых на вал, например, диаметру внутреннего кольца подшипника, посаженного на вал.

При построении эпюры абсолютных углов закручивания одно из сечений вала принимается условно неподвижным, и углы закручивания других сечений определяются относительно этого сечения. Чаще всего неподвижным считают один из концов вала.

Пример 3. На полый вал с коэффициентом полости  $\alpha = 0,8$ , вращающийся с постоянной частотой  $n = 1200$  об/мин, через зубчатое колесо 1 передается мощность  $N_1 = 30$  кВт. Эта мощность снимается с вала при помощи шестерен 2, 3, 4. Снимаемые мощности соответственно равны:  $N_2 = 10$  кВт,  $N_3 = 15$  кВт и  $N_4 = 5$  кВт. Подобрать внешний диаметр вала по услови-

строить эпюру относительных углов закручивания  $\theta$ , предварительно разбив вал на участки с постоянными жесткостью и крутящим моментом. Соответственно, условие жесткости составляется для сечения с наибольшим относительным углом закручивания  $\theta$ . Просуммировав значения  $\theta$ , умноженные на соответствующие длины участков, можно оценить общую деформацию вала, характеризующуюся величиной его абсолютного угла закручивания  $\varphi$ . Если построить эпюру  $\varphi$ , то она даст представление о том, как именно накапливалась эта деформация по длине вала.

### 1.8. Практические расчеты на кручение

Чаще всего эксплуатационником задаются частота вращения вала и мощность, передаваемая на вал в местах, где на него посажены шкивы или зубчатые колёса. Поэтому обычно расчёт начинается с определения внешних крутящих моментов по заданным мощностям и частоте вращения вала.

Если мощность  $N$  задана в киловаттах, а частота вращения  $n$  – в оборотах в минуту, то крутящий момент в ньютонах, умноженных на метр, определится по формуле:

$$M = 9550 \frac{N}{n} \text{ Н}\cdot\text{м} ; \quad (17)$$

если же мощность выражена в лошадиных силах, то

$$M = 716 \frac{N}{n} \text{ кгс}\cdot\text{м} . \quad (18)$$

Воспользовавшись законом Гука (1), получим связь между углом закручивания и касательными напряжениями:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau}{G \rho} .$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dx}$  аналогична относительному удлинению  $\frac{\Delta l}{l}$

при растяжении. Обозначим ее  $\theta$  и назовем относительным углом закручивания. Касательные напряжения выражаются через относительный угол закручивания следующим образом:

$$\tau = \rho G \frac{d\varphi}{dx} = \rho G \theta . \quad (3)$$

Совокупность касательных напряжений при кручении должна быть эквивалентна внешней нагрузке, т.е. крутящему моменту. Сумма моментов элементарных сил  $\tau dF$  по всему сечению (рис. 6, б) должна равняться

$$M_K = \int_F \tau \rho dF . \quad (4)$$

Используя (3), имеем:

$$M_K = \int_F G \rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dF .$$

Вынесем величину  $G \frac{d\varphi}{dx}$  за знак интеграла, т.к. она постоянная для всех точек поперечного сечения:

$$M_K = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dx} I_p ,$$

где  $I_p = \int_F \rho^2 dF$  – полярный момент инерции площади круга.

Тогда:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GI_p} . \quad (5)$$

Если на участке длиной  $l$  величина  $\theta = \frac{M_K}{GI_p} = \text{const}$ , то

$$\varphi = \theta l = \frac{M_K l}{GI_p} . \quad (6)$$

Касательные напряжения из равенства (3) можно будет выразить так:

$$\tau = \frac{M_K}{I_p} \rho . \quad (7)$$

Так определяются  $\tau$  в любой точке сечения вала. Они изменяются вдоль любого радиуса по линейному закону ( $0 \leq \rho \leq r$ ). В центре вала  $\tau = 0$ . Наибольшие касательные напряжения действуют вблизи поверхности при  $\rho = r$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{I_p} r = \frac{M_K}{W_p} , \quad (8)$$

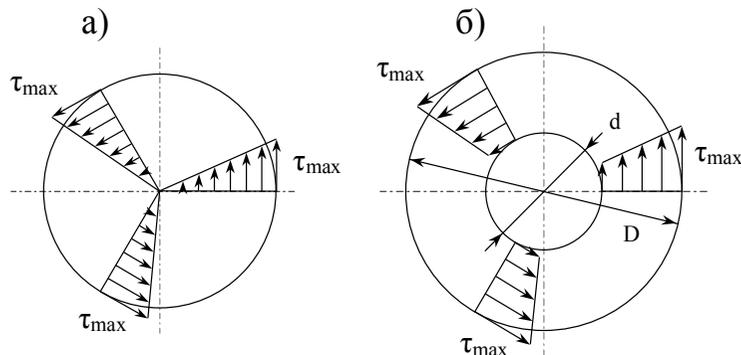


Рис. 7

рять устойчивость от сжатия, что сопровождается искривлением стенки вала и образованием волн, гребни и впадины которых направлены перпендикулярно  $\sigma_{\min}$ , т.е. вдоль растягивающих напряжений.

### 1.7. Расчет вала на жесткость

Жесткость вала при кручении определяется произведением  $GI_p$ , как видно из формулы (5). Учитывая условия эксплуатации вала, часто приходится ограничивать значение относительного угла закручивания  $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ :

$$\theta = \frac{M_K}{GI_p} \leq [\theta] , \quad (15)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания, задаваемый в угловых градусах (минутах), деленных на единицу длины или в радианах, деленных на единицу длины.

Условие жесткости (15) позволяет определить требуемый диаметр вала:

$$\frac{M_K}{G \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4)} \leq [\theta] ; \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K}{\pi G (1 - \alpha^4) [\theta]}} . \quad (16)$$

Сравнивая между собой диаметры, полученные из условия прочности (13) и из условия жесткости (15), выбираем большую величину, округлив ее до ближайшего большего стандартного размера.

При рассмотрении ступенчатых валов целесообразно по-

При деформации чистого сдвига на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к направлению сдвига, возникают главные нормальные напряжения, равные по величине касательному напряжению в поперечном сечении. При этом одно из них будет растягивающим  $\sigma_{\max} = \tau$ , а другое – сжимающим  $\sigma_{\min} = -\tau$  (рис. 9, а). Это объясняет причину разрушения образцов, изготовленных из хрупких материалов, по наклонным поверхностям, так как хрупкие материалы слабее сопротивляются отрыву частиц, чем их сдвигу (рис. 9, б).

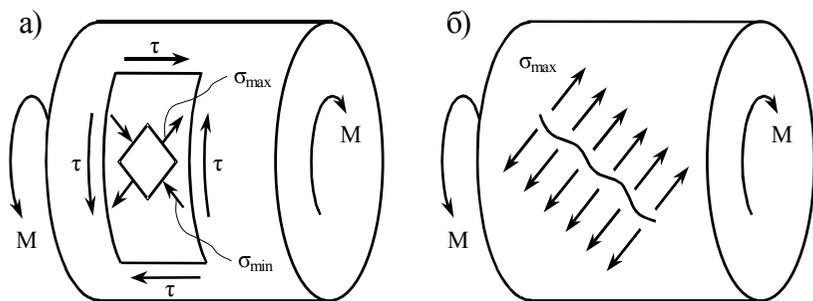


Рис. 9

Пластичные материалы, наоборот, обладают меньшим сопротивлением сдвигу, чем отрыву. Поэтому изготовленные из пластичных материалов валы разрушаются по плоскости поперечного сечения, где действуют наибольшие касательные напряжения. Разрушению предшествуют большие пластические деформации, приводящие к большим углам закручивания.

Наибольшие сжимающие напряжения  $\sigma_{\min} = -\tau$  опасны только для валов с очень тонкой стенкой, которая может поте-

где  $W_p = \frac{I_p}{r}$  – полярный момент сопротивления кручению, т.е. частное от деления полярного момента инерции на расстояние до наиболее удаленной от центра точки сечения.

Закон изменения  $\tau$  вдоль радиуса проиллюстрирован на рис. 7, а.

Для вычисления полярного момента инерции и полярного момента сопротивления кручению сечения круглого вала возьмем элемент площади  $dF$  на расстоянии  $\rho$  от центра сечения (см. рис. 8).

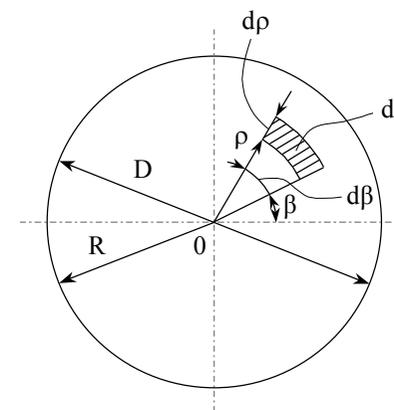


Рис. 8

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\rho d\beta ,$$

$$I_p = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\beta = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho ,$$

$$I_p = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1 D^4 . \quad (9)$$

Момент сопротивления кручению сплошного кругового сечения

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3 . \quad (10)$$

#### 1.4. Особенности работы полых валов

Для полого вала с коэффициентом полости  $\alpha = d/D$  распределение  $\tau$  вдоль радиуса остается линейным (см. рис. 7, б). Эпюра имеет смысл только при  $\frac{d}{2} \leq \rho \leq \frac{D}{2}$ . Формулы (6), (7) и (8) остаются справедливыми и для полого вала, но полярный момент инерции вычисляется как разность полярных моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4) . \quad (11)$$

Полярный момент сопротивления кручению для полого вала:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) / \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2 D^3 (1 - \alpha^4) . \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) при  $\alpha = 0$  переходят в формулы (9) и (10) для сплошного вала. Сравнение эпюр касательных напряжений (рис. 7) указывает на преимущества полых валов, так как в таких валах выбран материал в области действия малых напряжений. В результате распределение напряжений по сечению

становится более равномерным, а сам вал более легким, чем равнопрочный ему вал сплошного сечения, несмотря на некоторое увеличение наружного диаметра.

#### 1.5. Подбор сечений вала по условию прочности

Опасные точки вала располагаются у поверхности. Сравнение максимальных касательных напряжений с допускаемыми напряжениями материала дает условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau] , \quad (13)$$

которое составляется для опасной точки опасного сечения. Из условия прочности можно определить требуемый диаметр вала:

$$\frac{M_k \cdot 16}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\tau] ; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}} . \quad (14)$$

Полученное значение округляется до ближайшего большего стандартного размера.

При действии на вал нескольких моментов для определения опасного сечения с максимальным крутящим моментом необходимо построить эпюру крутящих моментов. У валов с переменным поперечным сечением для выявления опасного сечения целесообразно построить эпюру касательных напряжений по длине вала и записать условие прочности для сечения с  $\tau_{\max}$ .

#### 1.6. Напряжения на различно ориентированных площадках и характер разрушения валов