

РАЗДЕЛ 2 МАКРО- И МИКРОМОДЕЛИРОВАНИЕ

Глава 4 Метод конечных элементов

В настоящее время МКЭ является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении МКЭ относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных свойств, как устойчивость, сходимостъ и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее, метод получил широкое распространение для решения задач механики сплошных сред, благодаря своей универсальности, ясной инженерной формализации и удобству реализации на ЭВМ [5-9].

МКЭ был впервые применен в инженерных приложениях в начале 1950-х годов. В 1956г. группа Тернера из Boeing Aircraft Co описала процедуру, включающую некоторые характерные черты МКЭ. Интересно, что МКЭ был развит независимо в прикладной математике. В 1943г. Курант описал процедуру решения, основанную на принципе минимума потенциальной энергии. Но до 1960-х годов математики и инженеры не предпринимали совместных попыток совершенствования этого метода.

Распространение МКЭ на другие задачи было предпринято в начале 1960-х годов на основе вариационного подхода. Буквально в последние три десятилетия начали применять другие формулировки МКЭ. Наиболее популярные из них - метод Галеркина, метод наименьших квадратов, прямой метод, метод глобального баланса или метод Одена.

В принципе, несмотря на большое разнообразие в формулировках, МКЭ может быть охарактеризован следующими этапами:

1. Физическая область задачи делится на подобласти или конечные элементы (этап дискретизации).
2. Зависимая переменная аппроксимируется функцией специального вида на каждом конечном элементе и, следовательно, по всей области. В этом случае параметры этих аппроксимаций в дальнейшем считаются основными неизвестными задачи (этап аппроксимации).

3. Подстановка аппроксимирующих коэффициентов в определяющие уравнения дает систему линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), решая которые можно найти основные неизвестные и, следовательно, получить приближенное решение задачи (этап алгебраизации).

4.1 Общая вариационная формулировка МКЭ

Пусть поведение искомой функции $\varphi(x,y,z)$ внутри заданной области V с границей S описывается некоторым дифференциальным уравнением $2m$ -го порядка:

$$L^{2m}(\varphi, k, x, y, z) = Q(x, y, z), \quad (4.1)$$

где K – параметр, обобщенно характеризующий свойства сплошной среды; Q – внешнее воздействие; L^{2m} – дифференциальный оператор порядка $2m$.

Уравнение (4.1) дополняется совокупностью m -краевых условий на поверхности S , ограничивающей область V .

При решении задач механики сплошных сред для определения функции $\varphi(x,y,z)$ вместо рассмотрения уравнения (4.1) часто используют вариационный подход. Для рассматриваемого класса задач можно показать, что решение $\varphi(x,y,z)$ уравнения (4.1) совпадает с функцией, минимизирующей некоторый функционал $F(\varphi)$, который содержит производные от $\varphi(x,y,z)$ до m -го порядка. Это облегчает подбор аппроксимирующих функций для $\varphi(x,y,z)$, поскольку для получения значения функционала $F(\varphi)$ требуется обеспечение непрерывности функции $\varphi(x,y,z)$ и ее производных лишь до $(m-1)$ -го порядка включительно.

Такая трактовка обуславливает следующую последовательность проведения расчета по МКЭ:

I. Дискретизация области решения. Разбиение области решения на конечные элементы является первым шагом на пути к решению задачи. Этот шаг не имеет теоретического обоснования. Искусство разбиения области зависит от имеющихся инженерных навыков и опыта моделирования. Следует отметить, что несовершенная дискретная модель будет приводить к

значительным погрешностям расчета, если даже все остальные этапы метода выполнены с достаточной точностью.

Выбор типа, формы элемента и числа его узловых точек зависит от характера рассматриваемой задачи и от той точности решения, которую требуется обеспечить. Рекомендации к обоснованному использованию конечных элементов будут сформулированы в дальнейшем. Здесь же следует отметить, что при замене исходной конструкции его дискретной моделью стараются обеспечить как можно большую идентичность в поведении конструкции и ее модели.

2. Аппроксимация искомой функции. В качестве основных неизвестных в МКЭ принимаются узловые значения искомой функции и ее частные производные до m -го порядка. Например, при решении краевых задач, описываемых квазигармоническим уравнением ($2m=2$), в качестве неизвестных в каждой i -той узловой точке достаточно принять значение определяемой функции φ_i .

Общее число неизвестных определяет число степеней свободы, от которого зависит точность определения искомой функции в объеме каждого конечного элемента, а следовательно, и во всей области решения задачи.

После выбора узловых неизвестных строится аппроксимирующий полином, который выражает закон изменения искомой функции $\varphi(x,y,z)$ по объему конечного элемента через значения его узловых неизвестных. Полученные полиномы должны обеспечить непрерывность функции $\varphi(x,y,z)$ и ее производных до $(m-1)$ -го порядка включительно во всей области решения. В каждом из полиномов должны содержаться члены, обеспечивающие их переход к постоянным значениям при уменьшении размеров конечного элемента.

В дальнейшем вопросы построения аппроксимирующих полиномов для типичных конечных элементов будут рассмотрены подробно. Пока же примем, что значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e -го конечного элемента аппроксимируется полиномом.

$$\varphi^{(e)} = [N]^{(e)} \{\varphi\}^{(e)}, \quad (4.2)$$

где $[N]^{(e)}$ - матрица-строка, элементы которой называются функциями формы конечного элемента; $\{\varphi\}^{(e)}$ - вектор узловых неизвестных e -го конечного элемента. Тогда аппроксимация закона изменения искомой функции $\varphi(x,y,z)$ по всей области решения определяется суммой

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{e=1}^M [N]^{(e)} \{\varphi\}^{(e)} = [N] \{\varphi\}, \quad (4.3)$$

где M - число конечных элементов дискретной модели; $[N] = [[N]^{(1)} [N]^{(2)} \dots [N]^{(M)}]$; $\{\varphi\}$ - вектор узловых неизвестных для всей совокупности конечных элементов.

Система (4.3) является моделью искомой непрерывной функции.

3. Получение основной системы разрешающих уравнений.

В общем случае вектор $\{\varphi\}$ неизвестен. В вариационном МКЭ алгоритм получения основной системы разрешающих уравнений основан на минимизации функционала $F(\varphi)$ и состоит из следующих этапов:

Этап I. Выбор функционала F , который представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам

$$F = \sum_{e=1}^M F^{(e)}, \quad (4.4)$$

где $F^{(e)}$ - элементный вклад в функционал F .

Этап 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (4.2) в уравнение функционала $F(\varphi)$ и получение элементных вкладов в функционал F .

Этап 3. Минимизация по вектору $\{\varphi\}$ функционала F . Для этого составляются уравнения

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \{\varphi\}^e} = 0. \quad (4.5)$$

Если справедливо выражение (4.4), то суммирование выражений (4.5) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$[K]\{\varphi\} = \{R\}, \quad (4.6)$$

где $[K]$ - матрица жесткости системы элементов; $\{R\}$ - вектор нагрузки.

Этап 4. Решение системы (4.6), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений. Для линейных краевых задач система уравнений (4.13) линейна. Для ее решения обычно используются методы Гаусса, Холесского, сопряженных градиентов и иногда, при очень высоком порядке системы, итерационные методы.

Для нелинейных краевых задач система (4.6) нелинейна, поскольку матрица $[K]$ является функцией определяемых неизвестных параметров $\{\varphi\}$. При решении нелинейной системы алгебраических уравнений используются итерационные методы.

Определение выходных параметров краевой задачи. Пусть вектор $\{\varphi\}$ найден. Тогда с помощью зависимости (4.2) можно определить вектор $\{\varphi\}^e$, для каждого конечного элемента. Компоненты напряженно-деформированного состояния, которые нас также могут интересовать при решении краевых задач, определяются либо дифференцированием полученного выражения для $\varphi^{(e)}$ либо непосредственно через узловые значения искомым производных, если последние входят в состав вектора $\{\varphi\}$.

4.2 Вариационная формулировка двумерного МКЭ

Рассмотрим двумерную задачу теплопроводности через брус квадратного сечения (рисунок 4.1).

Требуется найти распределение температуры в брус и в частности температуру в точке А.

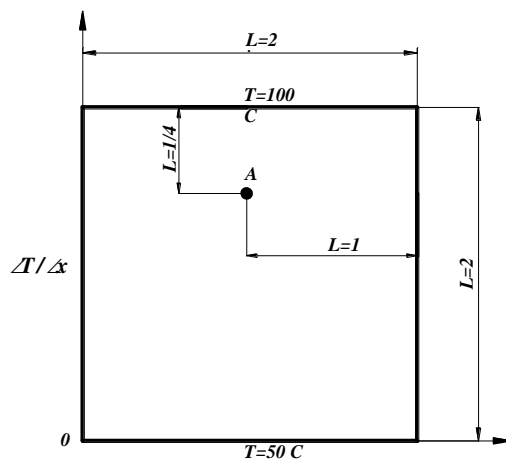


Рисунок 4.1 - Брус квадратного сечения

Вспользуемся вариационной формулировкой МКЭ, в которой применяется глобальная система координат OXU.

В данном случае определяющим уравнением является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (4.7)$$

с граничными условиями Дирихле на части границы

$$\begin{aligned} T = 50^\circ, & \quad y = 0, \\ T = 100^\circ, & \quad y = L. \end{aligned} \quad (4.8)$$

и условиями Неймана на остальной части границы

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, & \quad x = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0, & \quad x = L. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Задача определена на множестве R, состоящем из D и границы S, т.е. R=D+S.

Уравнения (4.7) - (4.9) не будут использоваться, непосредственно вместо них будет построена эквивалентная вариационная формулировка. С помощью вариационного исчисления можно показать [7], что решение

$T(x,y)$, удовлетворяющее уравнениям (4.7) - (4.9), совпадает с функцией, которая минимизирует функционал

$$\chi = \frac{1}{2} \int \int_D [(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \hat{T}}{\partial y})^2] dx dy, \quad (4.10)$$

где $\hat{T}(x, y)$ - функция из доступного множества пробных функций, заданных в области D .

Для этой задачи пробные функции $\hat{T}(x,y)$ являются допустимыми, если они непрерывны и имеют кусочно-непрерывные первые производные. Кроме того, пробные функции должны удовлетворять главным граничным условиям (4.8). Граничные условия Неймана (4.9) будут выполняться автоматически для функции, минимизирующей функционал (4.10) как естественное следствие вариационной формулировки и будут называться естественными граничными условиями.

Следует заметить, что для большинства задач, возникающих в процессе проектирования, вариационная формулировка известна.

Решение задачи состоит из трех этапов.

Этап I. Разобьем область на l конечных элементов. Обычно это разбиение называется триангуляцией области, так как простые элементы часто являются треугольниками. Общее число узлов обозначим n (рисунок 4.2).

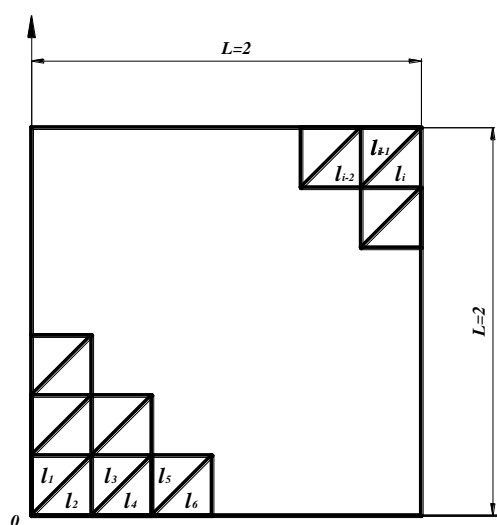


Рисунок 4.2 - Разбиение области на конечные элементы

Разбиение области и условия непрерывности, накладываемые на пробные функции, позволяют записать функционал (4.10) в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^l \chi^{ei}, \quad (4.11)$$

где χ^{ei} – элементарный вклад, определяемый равенством

$$\chi^{ei} = \frac{1}{2} \iint_{ei} \left[\left(\frac{\partial T^{ei}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^{ei}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (4.12)$$

Для определения элементного вклада рассмотрим типичный элемент e_i (рисунок 4.3), который характеризуется координатами узлов с номерами узлов.

Этап 2. Построение пространства пробных функций.

Для произвольного элемента e_i в этом примере пробная функция $T^{ei}(x,y)$ выбирается линейной, т.е.

$$T^{ei}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad x, y \in e_i \quad (4.13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - постоянные, в общем случае различные для разных элементов.

С целью определения этих постоянных запишем последовательно уравнение (4.13) для узлов i, j, m

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ T_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m. \end{aligned} \quad (4.14)$$

где T_i, T_j, T_m – значение T в узлах i, j, m .

Система уравнений (4.14) имеет единственное решение, т.к. определитель ее коэффициентов не равен нулю, т.е.

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \neq 0. \quad (4.15)$$

Этот определитель равен удвоенной площади треугольника, т.к. площадь треугольника никогда не равна нулю, то решение α_1, α_2 и α_3 существует и единично. Решая (4.14), получим для α_1, α_2 и α_3 следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1/2\Delta)(a_i T_i + a_j T_j + a_m T_m), \\ \alpha_2 &= (1/2\Delta)(b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m), \\ \alpha_3 &= (1/2\Delta)(c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{где } a_i = x_{ji} y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j, \quad (4.17)$$

а постоянные $a_j, a_m, b_j, b_m, c_j, c_m$ могут быть получены циклической перестановкой индексов. Подстановка выражений (4.16) - в (4.13) дает следующие представления через базисные функции:

$$T^{ei}(x, y) = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)T_i + (a_j + b_j x + c_j y)T_j + (a_m + b_m x + c_m y)T_m] \quad (4.18)$$

или

$$T^{ei}(x, y) = N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m = [N]^e \{T\}^e, \quad (4.19)$$

где $[N]^e = [N_i N_j N_m]$ - является матрицей базисных функций или функций формы; $\{T\}^e = \{T_i T_j T_m\}$ - вектор узловых значений. Получим производные, входящие в функционал (4.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{ei}}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m), \\ \frac{\partial T^{ei}}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Подстановка (4.19) в выражении для элементного вклада (4.12) дает

$$x^{ei} = \frac{1}{8\Delta^2} \iint_{ei} [(b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m)^2 + (c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m)^2] dx dy. \quad (4.21)$$

Выражение под интегралом не зависит от x и y

$$\iint_{ei} dx dy = \Delta, \quad (4.22)$$

тогда равенство (4.21) переписывается следующим образом:

$$\chi^{ei} = \frac{1}{8\Delta^2} [(b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m)^2 + (c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m)^2]. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) может быть получено для элемента. Подставляя все эти элементные вклады в (4.11), преобразуем функционал, заданный равенством (4.10), в функционал всех узловых значений

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \text{ т.е. } \chi = \chi(T_1, T_2, \dots, T_n). \quad (4.24)$$

Здесь узловые параметры рассматриваются в качестве переменных, значение которых необходимо определить. Условия минимума могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial T_p} \right) = 0, \quad p=1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

Подстановка (4.11) в (4.25) позволяет представить эти уравнения следующим образом:

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_p} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \chi^{ei}}{\partial T_p} = 0, \quad p=1, 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

Очевидно, что при суммировании в (4.26) ненулевой вклад дают только те элементы, которые содержат узел p . Если узлы элемента (i, j и m) имеют номера в глобальной системе p, q и r соответственно, то дифференцирова-

ние (4.12) по T_p приводит к выражению

$$\frac{\partial \chi^{ei}}{\partial T_p} = \frac{1}{4\Delta} [b_p (b_p T_p + b_q T_q + b_r T_r) + c_p (c_p T_p + c_q T_q + c_r T_r)] = \{K_p\}^{ei} \{T\}^{ei}. \quad (4.27)$$

Объединение компонент элементных уравнений, задаваемое равенством (4.26), называется объединением по узлам. Это объединение позволяет получить систему уравнений, решение которой дают нам узловые значения температуры.

Выражение (4.26) определяют сущность 3 этапа МКЭ.

Рассмотрим процедуру поэлементного объединения. Определим вклад e -го элемента в общее системное уравнение

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{T\}^e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial T_i} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial T_j} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial T_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix}^e = [K]^e \{T\}^e, \quad (4.28)$$

где $[K]^e$ - матрица жесткости элемента.

Процедуру объединения в этом случае можно записать как

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^l [K]^e \{T\}^e = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = [K] \{T\} = 0, \quad (4.29)$$

где $[K]$ - матрица жесткости системы элементов, $\{T\}^T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

Уравнение (4.29) может быть решено последовательным исключением либо одним из стандартных методов решения систем ЛАУ, после учета граничных условий (4.8).

Таким образом, вариационная формулировка МКЭ позволяет получить системное уравнение МКЭ (4.29). Матрица жесткости $[K]$ - типичная разреженная матрица ленточной структуры.

Подготовка к решению задачи МКЭ требует следующее:

1) разбить область и на треугольники (в общем случае это может быть любой многоугольник);

2) перенумеровать вершины таким образом, чтобы матрица жесткости имела ленточную структуру. Ширина ленты определяется наибольшим разрывом между номерами соседних вершин.

Для случаев, когда узлу соответствует более чем один параметр, как, например, у эрмитовых элементов полуширина матрицы $[K]$ определяется как $b_s = (\alpha + 1)q - 1$, где α - максимальная разность между самым меньшим и самым большим номерами узла любого элемента системы;

3) вычислить соответствующие интегралы (4.21), что довольно просто, если использовать нормализованные (местные) координаты в пределах каждого треугольника элемента.

Заметим следующее: а) простой элемент является треугольником K ; б) число степеней свободы определяется тремя вершинами треугольника; в) пространством интерполирующих функций (пробных) является пространство полиномов P_1 степени ≤ 1 . Триплет $\{K, \Sigma K, P_1\}$ /5/ называется треугольным конечным элементом.

4.3 Метод конечных элементов в задачах теории упругости

Рассмотрим тело, определенное двумерной областью S и границей C с заданными граничными условиями (рисунок 4.3). При действии внешних сил для данного случая можно воспользоваться основным уравнением теории упругости.

1. Уравнение равновесия (Лавье)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

где \bar{X} и \bar{Y} – объемные силы; $\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\}^T$ - вектор столбец перемещений.

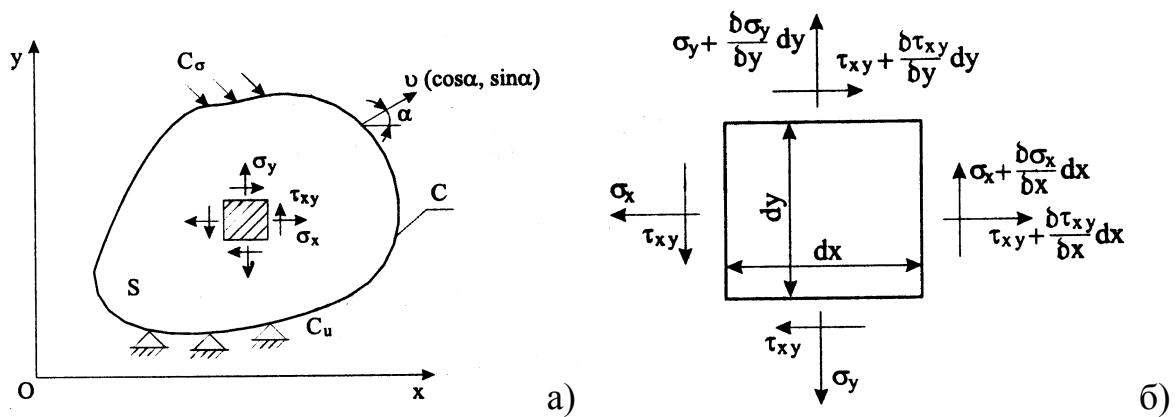
2. Зависимости между деформациями и перемещениями

(уравнение Коши)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

где U и V – соответственно перемещения точки в направлении x и y ;

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ - вектор-столбец деформаций.



а) тело, определенное двумерной областью S и границей C с заданными граничными условиями; б) напряженное состояние элемента $dx dy$

Рисунок 4.3 - Пример плоской задачи теории упругости

3. Уравнение состояния (закон Гука)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_y), \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E'} (\sigma_y - \nu' \sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu}, \end{cases} \quad (4.32)$$

где E' и ν' - соответственно модуль упругости при растяжении и коэффициент Пуассона.

Для плоского напряженного состояния $E' = E$ и $\nu' = \nu$, для плоской деформации $E' = E/(1-\nu^2)$ и $\nu' = \nu/(1-\nu)$.

4. Граничные условия:

- геометрические, на C_u : $U = \bar{U}$, $V = \bar{V}$,

- силовые, на C_σ : $X_\nu = \bar{X}_\nu$, $Y_\nu = \bar{Y}_\nu$,

где C_u и C_σ – границы, на которых заданы условия;

X_ν и Y_ν - поверхностные усилия;

ν - вектор, направленный по нормали к границе C_σ наружу.

Эти силы можно представить в виде:

$$X_\nu = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha, \quad Y_\nu = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha. \quad (4.33)$$

Для рассматриваемой задачи можно показать, что ее решение совпадает с функцией, минимизирующей функционал:

$$F = \frac{1}{2} \iint_s (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy - \iint_s (\bar{X} \delta U + \bar{Y} \delta V) dx dy - \int_{C_\sigma} (\bar{X}_\nu \delta U + \bar{Y}_\nu \delta V) dC, \quad (4.34)$$

где t – толщина пластины;

dC – элемент длины на границе C .

В качестве основных неизвестных приняты функции перемещения $U(x,y)$ и $V(x,y)$, поэтому данная формализация носит название метода перемещений.

Рассмотрим основные этапы МКЭ для решения плоской задачи теории упругости на примере использования треугольного симплекс-элемента (рисунок 4.4).

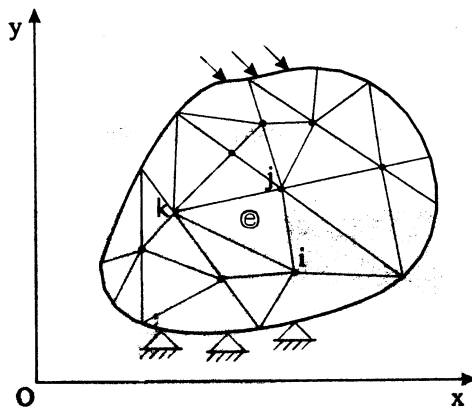


Рисунок 4.4 - Аппроксимация области конечными элементами

Для аппроксимации искомой функции воспользуемся выражением:

$$\{f\}^e = \{UV\}^T = [N]^e \{\delta\}^e, \{\delta\}^e = \{U_i V_i U_j V_j U_k V_k\}^T, \quad (4.35)$$

где $\{\delta\}^e$ - вектор узловых перемещений e -го элемента;

$[N]^e$ - матрица функций формы.

Выбор элементов и функций формы оказывает существенное влияние на точность решения.

Если выражение (4.35) подставить в зависимость (4.31), связывающие перемещения и деформации, и провести соответствующие преобразования, то

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e, \quad (4.36)$$

где $[B]$ - матрица градиентов.

Для упругого тела воспользуемся законом Гука (4.32), который в матричном виде можно представить:

$$\{\sigma\}^e = [D](\{\varepsilon\}^e - \{\varepsilon_0\}^e), \quad (4.37)$$

где $[D]$ - матрица упругости; $\{\varepsilon_0\}^e$ - вектор-столбец начальных деформаций.

Можно показать, что

$$[D] = \frac{E'}{1-\nu'^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu')}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Если зависимости (4.36) и (4.37) подставить в функционал (4.34) и применить процедуру его минимизации, то получим:

$$\{R\}^e = [K]^e \{\delta\}^e + \{R_{\varepsilon_0}\}^e + \{R_p\}^e, \quad (4.39)$$

где

$$[K]^e = \iint_{S^e} [B]^T [D][B] t dx dy, \quad (4.40)$$

$$\{R_{\varepsilon_0}\}^e = -\iint_{S^e} [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} t dx dy, \quad (4.41)$$

$$\{R_p\}^e = -\iint_{S^e} [N]^T \{p\} t dx dy, \quad \{p\} = \{\overline{X}\overline{Y}\}^T, \quad (4.42)$$

где $\{R\}^e$ - вектор эквивалентных узловых сил.

Уравнения равновесия для системы конечных элементов определяются в виде:

$$[K]\{\delta\} = \{R_\sigma\} - \{R_{\varepsilon_0}\} - \{R_p\}, \quad (4.43)$$

где $\{R_\sigma\}$ - вектор внешних нагрузок.

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений при заданных граничных условиях, можно определить перемещения в узлах и, следовательно, по формулам (4.35) - (4.37) перемещения, деформации и напряжения внутри элементов.

Следует отметить, что при решении трехмерных задач структура основных матричных соотношений МКЭ не поменяется и их решение не вызывает принципиальных затруднений.

В данной работе в качестве базовых элементов используются треугольные элементы при решении плоских задач и тетраэдральные элементы для решения трехмерных задач. При решении ряда задач применяются изопараметрические элементы первого и второго порядков (рисунки 4.5, 4.6).

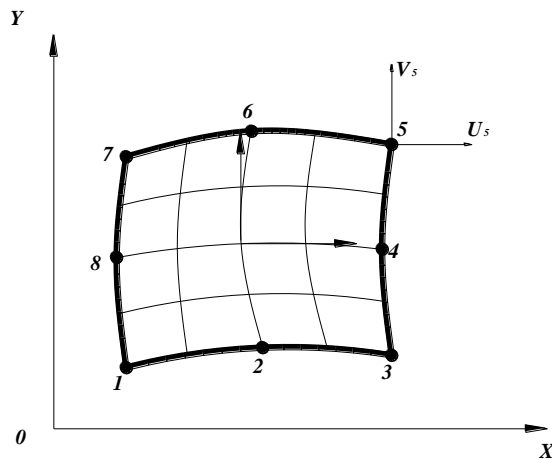


Рисунок 4.5 - Изопараметрический элемент

Для определения перемещений произвольной точки внутри элемента задаются некоторой функцией формы, которая определяет их однозначно в зависимости от известных узловых перемещений. Эту зависимость представим как

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e, \quad (4.44)$$

где $\{f\} = \{uvw\}^T$ - вектор-столбец перемещений некоторой точки внутри элемента; $\{\delta\}^e$ - вектор-столбец узловых перемещений элемента, $\{\delta\}^e = \{\delta_1 \dots \delta_m\}$ - матрица формы; $[N]$ - число степеней свободы элемента.

Каждая компонента матрицы $[N]$ есть функция координат точек внутри элемента и равняется нулю за пределами данного элемента.

Опишем процесс построения интерполирующих полиномов, которыми аппроксимируется искомая функция $\{f\}$ в объеме конечного элемента.

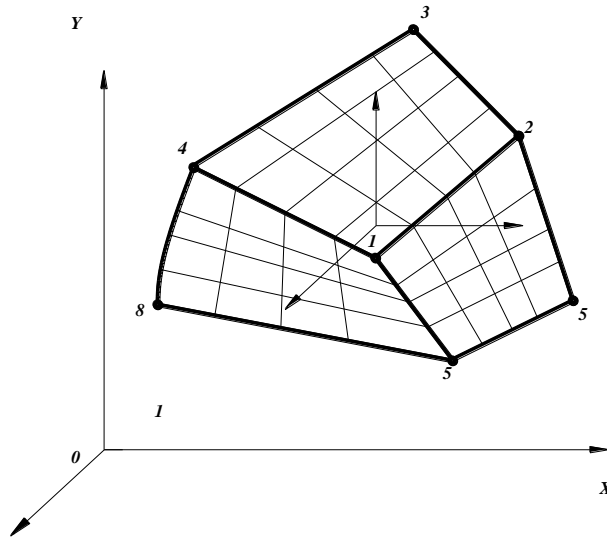


Рисунок 4.6 - Изопараметрический элемент второго порядка

Треугольный симплекс-элемент /5, 7/. Допустим, что перемещения точек внутри элемента выражаются полиномом первого порядка от их координат x и y .

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\}. \quad (4.45)$$

Тогда выражение для перемещений произвольной точки внутри элемента имеет вид

$$\{f\} = [IN'_i IN'_j IN'_k] \{\delta\}^e, \quad (4.46)$$

где I – единичная матрица размерности 2×2 , а

$$N'_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2S} \quad (4.47)$$

и так далее.

Здесь S – площадь элемента, $a_i = x_i y_k - x_k y_j$, $b_i = y_i - y_k$, $c_i = x_k - x_j$.

Выбранная функция перемещений автоматически гарантирует непрерывность перемещений между смежными элементами.

Изопараметрический квадратичный элемент [5,6]. Введем в изопараметрическом четырехугольном элементе (рисунок 4.7) локальную координатную систему ξ, η , которая удовлетворяет условиям $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$

Функциям формы для интерполяции перемещений по их узловым значениям на основе [5,6] имеют вид:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) - \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) - \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2), \\ N_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0), \\ N_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Здесь i – номер узла элемента ($i = 1, 2, \dots, 8$), а $\xi_0 = \xi \xi_i, \eta_0 = \eta \eta_i$, ξ_i, η_i – значения локальных координат в i -м узле.

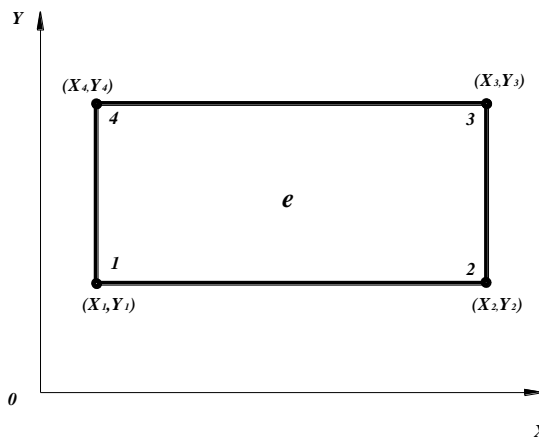


Рисунок 4.7 - Четырехугольный элемент

Тетраэдральный элемент [6]. Перемещения любой точки определяются тремя компонентами u, v, w (рисунок 4.7). Тогда вектор перемещений имеет вид

$$\{f\} = \{u(x, y, z)v(x, y, z)w(x, y, z)\}^T.$$

По аналогии с (4.31) можно записать, например,

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (4.49)$$

Перемещения произвольной точки в объеме элемента можно представить в виде

$$\{f\} = [IN'_i IN'_j IN'_k IN'_m] \{\delta\}^e, \quad (4.50)$$

где I – единичная матрица размерности 3×3 , а

$$N'_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6v} \quad (4.51)$$

и так далее.

Здесь V – объем конечного элемента; а коэффициенты a_i , b_i , c_i и d_i определяются через значения координат узловых точек элемента.

Трехмерный изопараметрический элемент с линейным полем перемещений [5,6]. Удобнее всего выразить функции формы через координаты узлов на границе элемента и использовать локальные координаты. Они показаны на рисунке 1.6 и выбраны так, чтобы стороны конечного элемента совпадали с координатными линиями ± 1 .

Тогда получим следующие функции формы:

$$\{f\} = [IN'_1 IN'_2 \dots IN'_8] \{\delta\}^e, \quad (4.52)$$

где I – единичная матрица размерности 3×3 , а

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0),$$

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i, \quad (4.53)$$

где ξ_i, η_i, ζ_i – значения локальных координат в i – м узле ($i = 1, \dots, 8$).

Отметим, что объемный элемент с 24-мя степенями свободы позволяет существенно увеличить число неизвестных параметров в выражении для компонентов перемещений (4.51) и тем самым обеспечить лучшую аппроксимацию действительного НДС в пределах объема конечного элемента.

Описанные интерполирующие полиномы для каждого конечного элемента обеспечивают непрерывность функции $U(x,y,z)$ и ее производных до $(m-1)$ - го порядка включительно. Здесь $2m$ - порядок определяющего дифференциального уравнения.

Опишем процедуры построения матриц жесткости рассматриваемых.

Треугольный симплекс-элемент. Для того чтобы записать закон Гука для плоской задачи в матричной форме, представим матрицу упругости в виде

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Такая запись подразумевает, что деформации объединены в вектор в следующем порядке: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$.

Матрица $[B]$ получается при помощи дифференцирования соотношений (4.45) и ее можно представить в виде

$$[B] = [B_i, B_j, B_k] \quad (4.55)$$

или

$$[B] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} B_i & 0 & B_j & 0 & B_k & 0 \\ 0 & C_i & 0 & C_j & 0 & C_k \\ C_i & B_i & C_j & B_j & C_k & B_k \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Отметим, что в этом случае матрица $[B]$ не зависит от координат точек внутри элемента и, следовательно, деформации в нем постоянны.

Подставив теперь матрицы $[B]$ и $[D]$ в основное уравнение матрицы жесткости и узловых сил и проинтегрировав по объему конечного элемента, получим формулу для подсчета матрицы жесткости треугольного элемента

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] st, \quad (4.57)$$

где S - площадь элемента; t - толщина элемента, и силы, обусловленной начальной деформацией,

$$\{R\}_\varepsilon^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} st. \quad (4.58)$$

Тетраэдральный симплекс-элемент. Выражение для матрицы упругости в трехмерном случае выглядит как

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

где $\mu = E(1 - \nu)/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $\lambda = \nu/(1 - \nu)$, $\rho = (1 - 2\nu)/(1 - \nu)/2$.

Такая запись подразумевает, что деформации объединены в вектор в следующем порядке $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$.

Выражение для матрицы $[B]$ получается дифференцированием соотношений (4.52) и состоит из четырех блоков

$$[B] = [B_i B_j B_k B_m], \quad (4.60)$$

где

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N'_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N'_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N'_i / \partial z \\ \partial N'_i / \partial y & \partial N'_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N'_i / \partial z & \partial N'_i / \partial y \\ \partial N'_i / \partial z & 0 & \partial N'_i / \partial x \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Выражение для матрицы жесткости, определяемой соотношением, можно проинтегрировать точно, так как компоненты деформаций и напряжений постоянны внутри элемента.

Подматрица матрицы жесткости имеет размерность 3x3 и определяется соотношением

$$[K_{rs}]^e = [B_r]^T [D] [B_s] V_e \quad (4.62)$$

где V_e – объем тетраэдра; ($r = 1, \dots, 4$; $s = 1, \dots, 4$).

Узловые силы, обусловленные начальной деформацией, записываются в виде

$$\{R\}_\varepsilon^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} V_e, \quad (4.63)$$

Трехмерный изопараметрический элемент. Особенностью определения матрицы жесткости данного элемента является разделение геометрических параметров элемента и физических параметров его материала. Формула для вычисления блока матрицы жесткости равна [4, 5]

$$[K_{rs}]^e = \int_V [B_r]^T [D] [B_s] dV, \quad (4.64)$$

где матрица $[B_r]$ определяется соотношением (4.61), а $[D]$ - выражением (4.59); $r = 1, 2, \dots, 8$.

Преобразуем (4.56) к следующему виду:

$$[K_{rs}]^e = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 [D_{nm}] \int_V \frac{\partial N_r}{\partial x_n} \frac{\partial N_s}{\partial x_m} dV. \quad (4.65)$$

Здесь x_n ($n = 1,2,3$) - глобальные координаты; $[D_{nm}]$ - матрицы размерности 3×3 , полученные из матрицы $[D]$ за счет коэффициентов, стоящих на пересечении n -х строк и m -х столбцов. Причем индекс n пробегает последовательно три значения, соответствующие расположению $\partial N_i / \partial x_n$ в каждой строке матрицы $[B_r]^T$, а m пробегает значения, соответствующие расположению $\partial N_i / \partial x_m$ в столбцах матрицы $[B_s]$.

Интеграл вида

$$[K_{rs}]^{mm} = \int_V \frac{\partial N_r}{\partial x_n} \frac{\partial N_s}{\partial x_m} dV, \quad (4.66)$$

вычисляем, переходя к локальным координатам ξ, η, ζ

$$[K_{rs}]^{mm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_r}{\partial x_n} \frac{\partial N_s}{\partial x_m} |I| d\xi d\eta d\zeta, \quad (4.67)$$

где

$$[I] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби}, \quad (4.68)$$

где $a [I] = \det([I])$ – якобиан матрицы.

Изопараметрический квадратичный элемент. При определении выражения для матрицы жесткости используется подход, описаний выше. В этом случае формулу для вычисления блока матрицы жесткости размерности 2×2 можно представить в виде

$$[K_{rs}]^e = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 [D_{nm}] \int_V \frac{\partial N_r}{\partial x_n} \frac{\partial N_s}{\partial x_m} dV. \quad (4.69)$$

Здесь x_n - декартовы координаты; $[D_{nm}]$ - матрицы размерности 2×2 , полученные из матрицы $[D]$.

При вычислении интегралов типа (4.67) в выражении (4.69) используются локальные координаты ξ и η , а матрица Якоби имеет вид

$$[I] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Одно из главных преимуществ формул (4.66) и (4.56) проявляется при решении физически нелинейных задач, когда изменяется только матрица упругости. Интегралы типа (4.67) вычисляются численно с использованием квадратур Гаусса [5]:

- для плоского элемента

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (4.71)$$

- для объемного элемента

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta, \quad (4.72)$$

где G – некоторая функция, выражения для которой зависят от типа элемента, числа точек интегрирования и даны в [5].

Отметим, что, используя формулы (4.66) и (4.69), не представляет труда рассчитать матрицы жесткости и для элементов более высокого порядка.

Имея матрицы жесткости отдельных элементов, можно получить глобальную матрицу жесткости рассматриваемой области $[K_e]$. Для получения используется процедура объединения по элементам [5,7], то есть элементная матрица $[K]^e$ прибавляется к системной матрице $[K_e]$ сразу же после вычисления. Вектор-столбец узловых сил получается аналогичным образом.

$$\{\delta\}_i = \{\delta\}_{i-1} + \{d\delta\}_i$$

Обычное решение $\{\varepsilon\}_i = \{\varepsilon\}_{i-1} + \{d\varepsilon\}_i$, полученное МКЭ, является

$$\{\sigma\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + \{d\sigma\}_i$$

приближением к истинному или точному решению теории упругости.

Сформулируем критерии сходимости, которые непосредственно следуют из сказанного выше, и состоят в следующем:

1. Для того чтобы выполнялось требование сходимости, необходимо, чтобы представления перемещения и любой его производной, появляющейся в функционале, стремились к их точным значениям на каждом элементе по мере стремления к нулю размера элемента.

2. Условие сходимости состоит в том, что по мере стремления к нулю размера элемента члены с производными и функцией в функционале должны стремиться к функции той же гладкости, что и точное решение (предполагается непрерывность точного решения).

Критерии 1 (полноты) и 2 (согласованности) являются достаточными условиями сходимости вариационного метода конечных элементов. При условии выполнения критериев полноты и согласованности путем достаточного уменьшения размера элемента теоретически можно достичь любой требуемой точности решения.

4.4 Другие формулировки МКЭ

Несмотря на то, что приближенная минимизация функционала - самый распространенный способ подхода к МКЭ, это никоим образом не означает, что такой подход является единственно возможным.

Наиболее популярными из других вариантов МКЭ являются методы, позволяющие получить основные соотношения МКЭ непосредственно из дифференциальных уравнений задачи; возможные преимущества таких методов состоят в том, что:

а) исчезает необходимость искать функциональный эквивалент известным ДУЧП;

б) эти методы могут быть распространены на задачи, для которых функционал - либо вообще не существует, либо пока еще не получен.

Рассмотрим задачи приближенного решения системы ДУЧП, которой должна удовлетворять неизвестная функция в области V . Запишем основное уравнение в виде

$$L(\varphi) = 0, \quad (4.73)$$

а граничное условие на границе S как

$$C(\varphi) = 0. \quad (4.74)$$

Если пробная функция, удовлетворяющая граничным условиям, записана в общей форме (4.3)

$$\hat{\varphi} = [N]\{\delta\}, \quad (4.75)$$

где $[N]$ - матрица базисных функций; $\{\delta\}$ - основные неизвестные задачи, то в общем случае

$$L(\hat{\varphi}) = -R \neq 0, \quad (4.76)$$

где $R = L(\varphi) - L(\hat{\varphi})$ - невязка решения.

Наилучшим решением будет то, которое дает во всех точках области V наименьшую невязку R .

Очевидно, что решение можно получить, используя то обстоятельство, что если невязка R тождественно равна нулю всюду в области, то

$$\int_V WR dV = 0, \quad (4.77)$$

где W – любая функция координат. Если число неизвестных параметров $\{\delta\}$ равно n , то, выбрав n линейно независимых функций W_i , запишем соответствующую систему уравнений

$$\int_V WRdV = \int_V W_i L([N]\{\delta\})dV = 0, \quad (4.78)$$

из которой может быть найдена сеточная функция $\{\delta\}$.

Описанный процесс называется методом взвешенных невязок, а W_i - весовой функцией. Выбор различных W_i приводит к различным классическим вариантам МКЭ. Наиболее популярным из них является метод Галеркина. В этом случае $W_i = N_i$, т.е. в качестве весовой функции выбирается функция формы, с помощью которой аппроксимируется решение $\{\delta\}$. Этот метод обычно приводит к наилучшим результатам.

Отметим один недостаток метода взвешенных невязок. В этом методе дифференциальный оператор L , содержит производные более высоких порядков, чем вариационный функционал F . Поэтому необходимо обеспечить выполнение условий непрерывности функций формы более высокого порядка.

4.5 Классификация конечных элементов

Наиболее очевидная классификация элементов делит их:

- на одномерные;
- двумерные;
- трехмерные.

Эти группы могут разделяться в зависимости от того, включают ли узловые переменные только значение функций (лагранжевы элементы) или также и значение производных (эрмитовы элементы).

4.6 Базисные функции конечных элементов и выбор конечного элемента

Произвольная пробная функция, определенная на элементе, записывается в линейной форме

$$\hat{U}^e = [N]^e \{U\}^e, \quad (4.79)$$

где $[N]$ -матрица базисных функций;

$\{U\}^e$ -узловой вектор элемента.

Для лагранжева элемента в узле имеется только одна степень свободы- значение функции, и, следовательно, уравнение (4.79) может быть записано в виде

$$\hat{U} = [N_1 N_2 \dots N_k \dots N_s] \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_s \end{array} \right\}, \quad (4.80)$$

где $1, \dots, K, \dots, S$ -номера узлов, а S -общее количество узлов элемента.

Для эрмитова элемента каждая из компонент U_k должна записываться как столбец, включающий и производные указанной функции, которые в этом случае также являются узловыми переменными. Если каждый из S узлов элемента e имеет q степеней свободы, то каждая компонента U_k в уравнении (4.80) представляет собой столбец

$$\{U_k\} = \left\{ \begin{array}{c} U_{k1} \\ U_{k2} \\ \vdots \\ U_{kq} \end{array} \right\}, \quad (4.81)$$

где $k=1,2,\dots,S$ и аналогичные базисные функции $[N_k]$ должны записываться как строки

$$[N_k] = [N_{k1} N_{k2} \dots N_{kq}], \quad (4.82)$$

Таким образом, уравнение (4.80) при соответствующем выборе переменных является общим для случаев лагранжевых эрмитовых элементов.

Ранее мы с вами установили, что базисные функции являются функциями независимых переменных (X,Y) и узловых координат. Для получения базисных функций любого отдельного элемента применимы два подхода:

-в одном из них используются обобщенные координаты;

-в другом интерполяционные формулы.

4.6.1 Получение базисных функций в обобщенных координатах

Этот подход особенно удобен для простых элементов, использующих полные полиномы низкого порядка. В случае более сложных элементов указанный подход становится неэффективным, и вместо него обычно применяют метод интерполяции.

Рассмотренный подход ранее был проиллюстрирован на примере треугольного-симплекс-элемента. Применим его для прямоугольного элемента со сторонами параллельными осям глобальной системы координат ОХУ (рисунок 4.7).

Простейшая пробная функция для элемента содержит только четыре неизвестных параметра L_i , соответствующих четырем узлам элемента.

Пробная функция \hat{U} может быть получена отбрасыванием двух членов из полного полинома 2-го порядка, который содержит шесть членов. Отбрасывание симметричной пары x^2, y^2 с целью сохранения геометрической изотропии дает простую пробную функцию

$$\hat{U} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \quad (4.83)$$

которая линейно меняется вдоль границы элемента. Здесь α_1 - α_4 являются обобщенными координатами элемента. Поочередно используя (4.83) для четырех узлов, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1 \\ U_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2 \\ U_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3 y_3 \\ U_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 x_4 y_4 \end{aligned} \right\}. \quad (4.84)$$

В матричном обозначении система (4.84) может быть записана как

$$\{U\}^e = [A]\{\alpha\}, \quad (4.85)$$

где $\{U\}^e = \{U_1 U_2 U_3 U_4\}^T$ - узловой вектор элемента

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\}^T.$$

Равенство (4.83) позволяет записать

$$\hat{U} = \{x\}\{\alpha\}, \quad (4.87)$$

где $\{x\} = \{1 \quad x \quad y \quad xy\}$.

Матрица $[A]$ может быть обращена, если ее определитель отличен от нуля. Можно показать, что

$$\det[A] = -\Delta^2, \quad (4.88)$$

где Δ - площадь прямоугольника. Следовательно, $\det A$ не равен нулю, если матрица $[A]$ не вырождена. Обращая $[A]$, получим

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{U\}^e. \quad (4.89)$$

Подставляя (4.89) в (4.87), получим равенство

$$\hat{U} = \{x\}[A]^{-1}\{U\}^e, \quad (4.90)$$

которое переписано в виде

$$\hat{U} = [N]\{U\}^e, \quad (4.91)$$

где матрица формы $[N]$ есть

$$[N] = \{x\}[A]^{-1}. \quad (4.92)$$

Описанная процедура может быть записана и в терминах локальной системы - координат $0 \xi\eta$, где например 0 совпадает с узлом - I, а оси ξ и η параллельны осям X и Y (рисунок 4.8). Последующие действия упрощаются благодаря обозначениям

$$\begin{aligned} a &= x_2 - x_1 = x_3 - x_4, \\ b &= y_4 - y_1 = y_3 - y_2. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Для лагранжевых элементов с известной в явном виде формой аппроксимирующего полинома базисные функции в принципе всегда могут быть вычислены согласно описанной процедуре. В случае больших алгебраических выражений можно прибегнуть к численному расчету базисных функций. Для эрмитовых элементов приведенный подход требует модификаций.

4.6.2 Получение базисных функций интерполяцией

Рассмотрим тот же элемент, но представим, что пробная функция, заданная равенством (4.83), неизвестна. Однако связь базисной функции с пробной \hat{U} всегда известна

$$\hat{U} = [N]\{U\}^e = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^e. \quad (4.94)$$

Базисная функция должна иметь значение I в узле K и нулевое значение во всех других узлах; при этом \hat{U} сводится к U_k , когда уравнение (4.94) рассматривается в узле K. Как показано будет ниже, применение этих свойств позволяет использовать интерполяционные формулы для получения базисной функции.

4.6.3 Лагранжевые элементы

Рассмотрим аппроксимацию функции $U(x)$ полином n -го порядка, где значение $U(x)$ заданы как U_1, \dots, U_{R+1} в $(R+1)$ точках X_1, \dots, X_{R+1} .

Из численного анализа известно, что функция $U(X)$ может быть записана как полином n -го порядка

$$U(x) = \sum_{i=1}^{R+1} L_i(x) U_i, \quad (4.95)$$

где $L_i(X)$ полином Лагранжа, определяемый равенством

$$L_i(x) = \prod_{i=1, j \neq i}^{R+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (4.96)$$

Следует отметить, что так называемые базовые точки X_1, \dots, X_{R+1} не обязательно расположены равномерно, хотя это часто бывает удобным.

Использование равенств (4.95) и (4.96) по стороне 1-2 прямоугольника e позволяет определить \hat{U} на этой стороне

$$\hat{U}|_{1-2} = L_1(x)U_1 + L_2(x)U_2, \quad (4.97)$$

где

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.98)$$

Аналогично для строки 4-3 получим

$$\hat{U}|_{4-3} = L_1(x)U_3 + L_2(x)U_4, \quad (4.99)$$

где $L_1(x)$ и $L_2(x)$ - определены равенством (4.98).

Представление типа (4.97) и (4.99) используется при постоянных ($y=y_1$ и $y=y_4$). Снова может быть применена интерполяционная формула Лагранжа, на этот раз в направлении оси y

$$\hat{U} = L_1(y)\hat{U}|_{1-2} + L_2(y)\hat{U}|_{4-3}, \quad (4.100)$$

$$L_1 = \frac{y - y_4}{y_1 - y_4}, \quad L_2 = \frac{y - y_1}{y_4 - y_1}. \quad (4.101)$$

Подстановка равенств (4.97) и (4.99) в (4.100) позволяет окончательно записать пробную функцию \hat{U} элемента e в виде:

$$\hat{U} = L_1(x)L_1(y)U_1 + L_2(x)L_1(y)U_2 + L_1(x)L_2(y)U_3 + L_2(x)L_2(y)U_4. \quad (4.102)$$

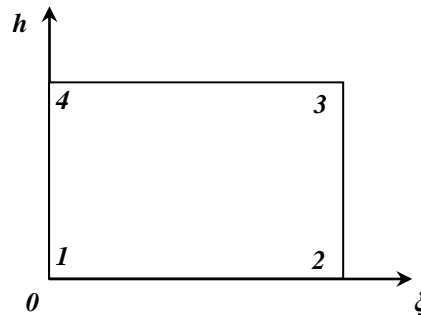


Рисунок 4.8 - Четырехугольный элемент

Сравнивая выражение (4.102) и (4.94), получим базисные функции в виде

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(x)L_1(y), & N_2 &= L_2(x)L_1(y), \\ N_3 &= L_1(x)L_2(y), & N_4 &= L_2(x)L_2(y). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Можно показать, что базисные функции, полученные подстановкой равенств (4.98) и (4.101) в (4.103), идентичны базисным функциям, следующим из (4.91), что свидетельствует об эквивалентности обоих подходов. Проверка этого факта предоставляется вам в качестве упражнения.

4.6.4 Эрмитовые элементы

Базисные функции для эрмитовых элементов могут быть получены аналогичным образом, но с использованием эрмитовых полиномов вместо полиномов Лагранжа. При этом узловой вектор будет включать не только узловые значения функции, но и ее производные.

Для иллюстрации рассмотрим одномерный элемент e с s узлами, причем узлы не обязательно расположены равномерно. Пусть у каждого узла имеются две степени свободы - функция U и ее производная $-\partial U/\partial x$. Следовательно, пробная функция для элемента e может быть записана в виде

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^s \left[N_{0i}(x)U_i + N_{1i}(x) \frac{\partial U_i}{\partial x} \right]. \quad (4.111)$$

У базисной функции в равенстве (4.111) первый индекс обозначает порядок дифференцирования соответствующей узловой переменной, а второй - номер узла.

Для того, чтобы (4.111) в узле k : U давало U_k и $\frac{\partial U}{\partial x}$, функции $N_{0i}(x)$ и $N_{1i}(x)$ должны ($i \neq j$) удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} N_{0i}(x_i) &= I, & N_{1i}(x_i) &= 0, \\ N_{0i}(x_i) &= 0, & N_{1i}(x_i) &= I, \\ N_{0i}(x_j) &= 0, & N_{1i}(x_j) &= 0, \\ N_{0i}(x_j) &= 0, & N_{1i}(x_j) &= 0. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Равенствам (4.112) удовлетворяют эрмитовы полиномы

$$N_{0i} = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{(x - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} \left[1 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^s \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right], \quad (4.113)$$

$$N_{ii} = \prod_{j=1, j \neq i}^S \frac{(x - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2} (x - x_i), \quad (4.114)$$

Рассмотрим случай $S=2$. Равенство (4.111) при этом примет вид

$$\hat{U} = N_{01}(x)U_1 + N_{11}(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} + N_{02}(x)U_2 + N_{12}(x) \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad (4.115)$$

где базисные функции

$$\begin{aligned} N_{01}(x) &= \frac{(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[1 + 2 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right], \\ N_{02}(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[1 + 2 \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) \right], \\ N_{11}(x) &= \frac{(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^2} (x - x_1), \\ N_{12}(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} (x - x_2), \end{aligned} \quad (4.116)$$

полученные из (4.113), (4.114) и (4.115). В случае использования локальных координат $\xi = (x - x_1)/L$, где $L = x_2 - x_1$, равенство (4.115) и (4.116) принимают вид

$$\hat{U} = N_{01}(\xi)U + N_{11}(\xi) \frac{\partial U_1}{\partial x} + N_{02}(\xi)U + N_{12}(\xi) \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad (4.117)$$

где

$$\begin{aligned} N_{01}(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; & N_{02}(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3; \\ N_{11}(\xi) &= L\xi(1 - \xi)^2; & N_{12}(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Узловые производные $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial x}$ могут быть заменены $\frac{\partial U_1}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial \xi}$ ра-

венствами

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (4.119)$$

Описанная процедура обобщена включением дополнительно к функциям и ее первым производным также производных от U более высокого порядка. Для двумерных элементов интерполяция применяется дважды: первая - в направлении оси X и вторая - в направлении оси Y , что дает базисные функции в виде произведения одномерных базисных функций.

4.6.5 Естественные координаты

Когда используется произвольная глобальная система координат, значения узловых координат ограничены только границами области. Было бы полезным упрощением, если бы экстремальные значения этих координат принимали значение - 1,0 или 1. Этого можно достичь выбором локальной системы координат, привязанной к элементу так, чтобы координаты менялись линейно между нормированными узловыми координатами. Система координат такого типа называется системой естественных координат.

Преимущество естественных координат состоит в том, что интегрирование по элементу для МКЭ зачастую проводится в стандартном аналитическом виде.

В качестве примера рассмотрим естественные координаты в одномерном случае (рисунок 4.9). Вводя локальную систему координат \bar{O}_{ξ_1} , с началом в X_1 и с осью ξ_1 , направленной вдоль оси X , получим систему естественных координат.

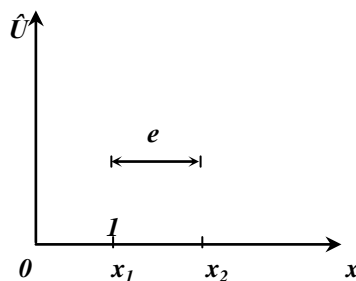


Рисунок 4.9 - Одномерный элемент

Преимущество естественных координат состоит в том, что интегрирование по элементу для МКЭ зачастую проводится в стандартном аналитическом виде.

В качестве примера рассмотрим естественные координаты в одномерном случае (рисунок 4.9). Вводя локальную систему координат \bar{O}_{ξ_1} , с началом в X_1 и с осью ξ_1 , направленной, вдоль оси X , получим

$$\xi_1 = x - x_1. \quad (4.120)$$

или, разделив на длину элемента $(x_2 - x_1)$,

$$\bar{\xi}_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.121)$$

Черта сверху используется для нормированной координаты. Если выбрана локальная система \bar{O}_{ξ_2} с началом в x_2 , то получим

$$\bar{\xi}_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}. \quad (4.122)$$

Из равенства (4.121) можно заметить, что $\bar{\xi}_1 = 0$ при $x = x_1$ и $\bar{\xi}_1 = 1$ при $x = x_2$. Аналогично из (4.122) следует, что $\bar{\xi}_2 = 1$ при $x = x_1$ и $\bar{\xi}_2 = 0$ при $x = x_2$. Легко удостовериться, что $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ совпадают с $L_2(X)$ и $L_1(X)$ - полиномами Лагранжа, ранее определенными. Отметим, что обе координаты изменяются линейно и независимой является одна из координат

$$\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = L_2(x) + L_1(x) = 1, \quad (4.123)$$

которая легко доказывается.

Таким образом, естественные координаты $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ или L_2 и L_1 , являются функциями независимой переменной x узловых координат x_1 и x_2 принимают значения 1 в одном узле и 0 - в другом. Поэтому аппроксимацией для \hat{U} на элементе e будет

$$\hat{U} = \bar{\xi}_2 \bar{U}_1 + \bar{\xi}_1 \bar{U}_2 \quad (4.124)$$

или

$$\hat{U} = L_1(x) \bar{U}_1 + L_2(x) \bar{U}_2. \quad (4.125)$$

Сравнение показывает, что пробная функция

$$N_1 = L_1(x), \quad N_2 = L_2(x). \quad (4.126)$$

Для рассмотрения элемента можно показать, что пробная функция

$$\hat{U} = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (4.127)$$

дает те же базисные функции, что и в уравнении (4.126); хотя оба метода довольно просты, интерполяционный метод обычно более выгоднее для элементов более сложного вида.

Обычно элементные вклады в функционал могут быть выражены интегралами вида

$$\int_e L_1^a(x) L_2^b(x) dx = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} h^e, \quad (4.128)$$

где h^e - длина элемента, a и b - целочисленные показатели. Естественные координаты имеют место в дву- и трехмерных случаях.

4.6.6 Семейства конечных элементов

Одномерные элементы. Можно ограничиться элементами, рассмотренными нами ранее, - линейными и квадратичными (рисунок 4.10).

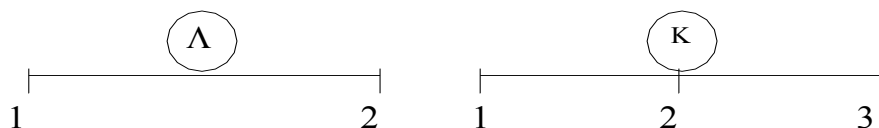


Рисунок 4.10 - Одномерные элементы

Двумерные элементы. Наиболее простыми являются треугольные элементы. Следующий возможный тип, который широко распространен,- это прямоугольные или в общем случае, четырехугольные элементы.

Лагранжевые семейства треугольных элементов. Эти элементы могут быть сформулированы просто выбором достаточного числа узлов, обеспечивающих единственное решение для коэффициентов выбранной полиномиальной пробной функции. Полный полином порядка n содержит $S = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ коэффициентов: S -узловой лагранжевый элемент, основанный на этом полиноме, должен содержать такое же число узлов.

$$S = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad (4.129)$$

Все эти элементы характеризуются непрерывностью пробных функций при переходе через границу между элементами, и, следовательно, по всей области, где решается задача.

В таблице 4.1 приведены основные типы треугольных конечных элементов.

Эрмитовые семейства треугольных элементов приведены в таблице 4.2. Термин “связанный” в таблице 4.2 означает следующее: связанный полином - это полный полином, коэффициенты которого подчиняются одному или нескольким уравнениям связи.

Таблица 4.1 - Основные типы треугольных конечных элементов.

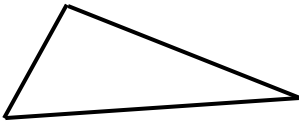
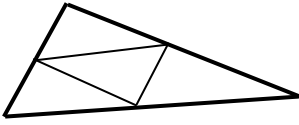
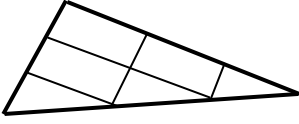
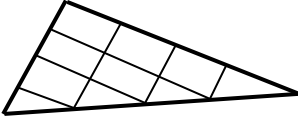
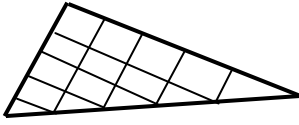
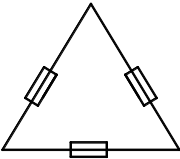
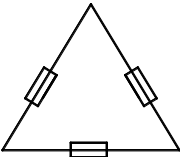
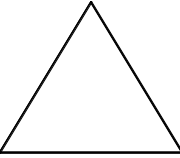
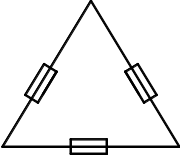
Элементы	Тип	Порядок полинома	Число членов пробной функций
	Линейный	1	3
	Квадратичный	2	6
	Кубичный	3	10
	Четвертой степени	4	15
	Пятой степени	5	21

Таблица 4.2 - Эрмитовые семейства треугольных элементов

Элементы	Полином	Количество степеней свободы	Узловой параметр	Узловой вектор	Непрерывные
	Квадратичный	6	U	$\frac{\partial U}{\partial n}$	U
	Кубический	12	U $\frac{\partial U}{\partial x}$ $\frac{\partial U}{\partial y}$	$\frac{\partial U}{\partial n}$	U $\frac{\partial U}{\partial n}$ U несогласованное
	Связанный Кубический	9	U $\frac{\partial U}{\partial x}$ $\frac{\partial U}{\partial y}$		U $\frac{\partial U}{\partial x}$ U согласованное
	Четвертой Степени	15	U $\frac{\partial U}{\partial x}$ $\frac{\partial U}{\partial y}$	U $\frac{\partial U}{\partial n}$	U

Четырехугольные и прямоугольные элементы. Прямоугольные элементы сами по себе не очень удобны в применении к нерегулярным границам, но очень часто используются совместно с широко распространенными треугольными элементами.

Они подразделяются на Лагранжевые прямоугольные элементы

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{ij} \bar{U}_{ij}, \quad (4.130)$$

где $N_{ij} = L_j^m(x)L_i^n(y)$

Первый элемент- билинейный КЭ - наиболее популярный (таблица 4.3).

Таблица 4.3 - Сирендиповы элементы

Элементы	Тип	Число узлов
	Линейный	4
	Квадратичный	8
	Кубический	12

Для определения базисных функций используются следующие неполные полиномиальные функции:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta, \\ \hat{U} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2, \\ \hat{U} &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \\ &+ \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3. \end{aligned} \quad (4.131)$$

В этих уравнениях из полного полинома для сохранения геометрической изотропии опущены симметричные пары членов.

Эрмитовы элементы. Параметрами в этих элементах являются значения

$$U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y, \partial^2 U / \partial x \partial y.$$

На рисунке 4.8 представлен эрмитов прямоугольный элемент первого порядка. Пробная функция является неполным полиномом шестого порядка.

Трехмерные элементы. Трехмерные задачи обуславливают большое число степеней свободы. Даже с умеренным числом элементов система может иметь несколько тысяч неизвестных. Поэтому неудивительно, что трехмерные конструкции, даже типа оболочек, которые используются в летательных аппаратах, автомобилях и кораблях, могут содержать десятки тысяч неизвестных.

Далее выгоднее выбирать элементы с узловыми параметрами в вершинах.

Лагранжевы элементы (рисунок 4.11).

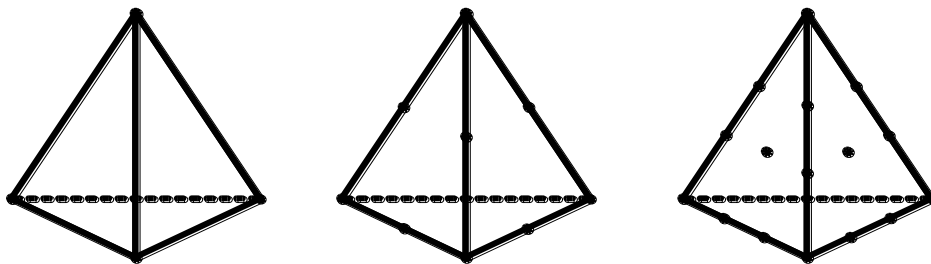
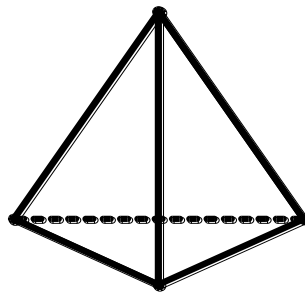


Рисунок 4.11 - Лагранжевы элементы

Эрмитовые элементы (рисунок 4.12).



$U, \partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z$ – 16 степеней свободы

Рисунок 4.12 - Эрмитовые элементы

Шестигранные элементы (рисунок 4.13)

Их часто называют "кирпичиками". Большая часть их принадлежит к Лагранжеву и Сирендипову семейству.

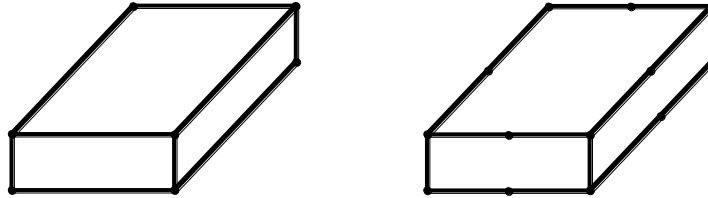


Рисунок 4.13 - Шестигранные элементы

Изопараметрические элементы. При расчете областей, имеющих криволинейные границы, для удовлетворительного геометрического представления этих границ необходимо использовать большое количество граничных элементов с прямыми гранями. Если используются криволинейные элементы то число необходимых элементов может быть заметно сокращено и в результате уменьшится общее число переменных в системе. Особенно это может быть полезным для трехмерных задач.

Широко используемый на практике метод основывается на отображении регулярных (прямоугольных) элементов. Если известны базисные функции для регулярного порождающего элемента в локальной системе координат, то можно определить и порожденный криволинейный элемент. Как было показано Айронсом и Зенкевичем, отображение из локальной системы координат $\xi\eta\zeta$ в декартову XYZ осуществляется посредством соотношений

$$\begin{aligned}x &= [N_m]\{x\}, \\y &= [N_m]\{y\}, \\z &= [N_m]\{z\}.\end{aligned}\tag{4.132}$$

Элементы в уравнениях (4.132), которые входят в матрицу базисных функций $[T]$, являются функциями от ξ, η, ζ , а столбцы $\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$ образуют список значений узловых (естественных) координат по отношению к

глобальной системе. В локальной системе координат пробная функция может быть записана в виде

$$\hat{U} = [N]\{U\}, \quad (4.133)$$

где элементы $[N]$ зависят от ξ, η, ζ .

Для любой точки с координатами ξ, η, ζ , по уравнению могут быть получены соответствующие точки в X, Y, Z (рисунок 4.16).

Значение пробной функции в точке (X, Y, Z) совпадает со значением функции в соответствующей точке (ξ, η, ζ) и его можно вычислить с помощью уравнения (4.133).

Удобно выбирать матрицы базисных функций $[N_m]$ и $[N]$ одинакового вида. В этом случае порожденный элемент называется изопараметрическим. Если $[N_m]$ имеет меньший порядок, чем $[N]$, то полученный элемент называется субпараметрическим. Если наоборот, то суперпараметрическим.

Если в уравнениях (4.132) и (4.133) используют базисные функции, то двумерный прямоугольный отображается на произвольный четырехугольник, а трехмерные кирпичики станут шестигранниками с плоскими, но не параллельными гранями. Для получения криволинейных элементов можно использовать отображения более высокого порядка, такие как квадратичные или кубические.

Преобразования из локальных координат в глобальные осуществляется с использованием матриц преобразования между $[T]$. Например, элементная матрица $[K]^e$ в системе глобальных координат записывается как

$$\begin{aligned} [K]^e &= [T]^T [K]_L^e [T], \\ \{U\}_L &= [T]\{U\}, \end{aligned} \quad (4.134)$$

где $[K]_L^e$ — элементная матрица в местной системе координат.

4.6.7 Выбор конечных элементов

Сформулируем несколько рекомендаций, помогающих выбору элемента.

1) Для пробной функции должны существовать все производные, появляющиеся в функционале. Поэтому желательно применять элементы, основанные на полном полиноме.

2) Для задач с регулярными границами обычно выбирают элементы простой геометрии, тогда как для криволинейных границ выбор более сложен (изопараметрический элемент).

3) Следует в первую очередь выбирать элементы, у которых узловые параметры концентрируются в вершинах. Элементы с производными представляют интерес тогда, когда решение включает производные, поскольку в этом случае нет необходимости вычислять их последующей интерполяцией.

4.7 МКЭ в задачах теории пластичности

Охватить все термопластические свойства, проявляющиеся при сварке, в рамках единой теории - задача трудно осуществимая [10,11]. Поэтому для ее решения при определении сварочных напряжений и деформаций использовались, как теория малых упругопластических деформаций [10], так и теория пластического течения [11]. Уравнения теории малых упругопластических деформаций устанавливают связь между напряжениями и деформациями, уравнения теории течения - между бесконечно малыми приращениями этих величин. Как известно, в случае простого нагружения обе теории дают одинаковый результат. Однако при сварке процесс нагружения изделия имеет сложный характер [10,11]. Поэтому дифференциальная форма уравнений теории течения позволяет более полно отразить историю нагружения тела.

Теория неизотермического пластического течения базируется на следующих основных положениях [11].

1. Приращения полной деформации представляются в виде суммы

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_e\} + \{d\varepsilon_p\} + \{d\varepsilon_0\}, \quad (4.135)$$

где $\{d\varepsilon_e\}$ - приращения упругой деформации, $\{d\varepsilon_0\}$ - приращения термической деформацией.

2. Накопленная пластическая деформация $\{\varepsilon_p\}$ при активном нагружении для любых напряженных состояний и постоянной температуры определяется одной и той же функцией текучести

$$f(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, T, \chi) = 0. \quad (4.136)$$

Здесь под $\{\sigma\}$ подразумевается текущий вектор напряжений, χ - параметр упрочнения.

Функция текучести характеризует переход материала из упругого состояния в пластическое. В частности, при $f < 0$ материал деформируется по упругому закону, при $f = 0$ наступает состояние текучести. Принято, что состояние $f > 0$ не может быть реализовано.

При использовании критерия Губера-Мизеса функция текучести имеет вид

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_T(T) = 0, \quad (4.137)$$

где $\bar{\sigma}$ - интенсивность напряжений, $\sigma_T(T)$ - мгновенный предел текучести, заданный в виде билинейной функции.

В случае плоского напряженного состояния интенсивность напряжений вычисляется как

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}, \quad (4.138)$$

а в случае объемного напряженного состояния

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 \right] / 2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (4.139)$$

3. В ассоциированном законе течения приращение вектора пластических деформаций $\{d\varepsilon_p\}$ пропорционально вектору производных функций текучести по напряжениям:

$$\{d\varepsilon_p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \lambda \{a\}, \quad (4.140)$$

где λ - некоторый неотрицательный скалярный множитель.

Соотношение (4.140) означает, что пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести.

Перейдем к выводу физического уравнения связи между приращением напряжений и приращениями деформаций в неизотермической теории течения. Используя формулу (4.140), можно переписать соотношение (4.135) в виде

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} + \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial T} \{\sigma\} dT + \{d\varepsilon_0\} + \lambda \{a\}. \quad (4.142)$$

Умножим обе части этого равенства на величину $\{a\}^T [D]$. В результате получим

$$\begin{aligned} \{a\}^T [D] \{d\varepsilon\} &= \{a\}^T \{d\sigma\} + \{a\}^T [D] \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial T} \{\sigma\} dT + \\ &+ \{a\}^T [D] \{d\varepsilon_0\} + \{a\}^T [D] \lambda \{a\}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Для того чтобы найти величину $\{a\}^T \{d\sigma\}$, продифференцируем условие текучести (4.137). Если при этом не учитывается деформационная анизотропия, считая $\partial f / \partial \varepsilon_p = 0$, то получим

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0. \quad (4.144)$$

Отсюда

$$\{a\}^T \{d\sigma\} = -\frac{\partial f}{\partial T} dT + A \lambda,$$

где

$$A = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi.$$

Можно показать, что при изотропном упрочнении величина A есть наклон кривой деформирования материала для текущего состояния, то есть $A = E_T$, где E_T - тангенс угла наклона кривой деформирования в билинейном законе упрочнения.

Тогда равенство (4.137) с учетом этого выражения запишется в виде

$$\begin{aligned} \{a\}^T [D] \{d\varepsilon\} = & -\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} dT + \{a\}^T [D] \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial T} \{\sigma\} dT + A\lambda + \\ & + \{a\}^T [D] \{d\varepsilon_0\} + \{a\}^T [D] \lambda \{a\}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Отсюда находим выражение для определения λ :

$$\lambda = \frac{\{a\}^T [D] \{d\varepsilon\} - \{a\}^T [D] \{d\varepsilon_0\} - \{a\}^T [D] \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial T} dT \{\sigma\} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} dT}{\{a\}^T [D] \{a\} + A}. \quad (4.146)$$

Когда элемент находится в пластической зоне, нагружение или разгрузка его контролируется знаком множителя λ . При соблюдении условия (4.143) возможны следующие случаи:

- а) $\lambda \geq 0$ - элемент находится в пластической зоне;
- б) $\lambda < 0$ - элемент разгружается, находясь в пластическом состоянии.

Подставляя значение λ в уравнение (4.142) и решая его относительно $\{d\sigma\}$, имеем

$$\{d\sigma\} = ([D] - [D_p]) (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_0\}) - \{dC\}$$

или

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_0\}) - \{dC\}. \quad (4.147)$$

Матрица $[D_{ep}]$ занимает место матрицы упругости, связывая приращение напряжений и деформаций в упругопластической области. Она симметрична и имеет смысл независимо от того, равен ли нулю наклон кривой

деформирования (случай идеального упругопластического тела). Впервые эта матрица была введена в работе [6]:

$$[D_{ep}] = [D] - [D]\{a\}\{a\}^T [D] / (\{a\}^T [D]\{a\} + A). \quad (4.148)$$

Вектор-столбец $\{dC\}$ учитывает суммарное влияние изменения температуры и параметров упругости и выглядит в виде

$$\{dC\} = \left([D_{ep}] \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial T} \{\sigma\} + [D]\{a\} \frac{\partial f}{\partial T} / \{a\}^T [D]\{a\} \right) dT. \quad (4.149)$$

Таким образом, уравнение (4.141) выражает связь между приращениями напряжений и деформаций в неізотермической теории течения для идеального упругопластического материала с учетом зависимости от температуры модуля упругости и предела текучести.

Аналогичное выражение для случая объемного напряженного состояния выглядит следующим образом:

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}]\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_0\} + \frac{dE}{E}\{\sigma\} - \left(\frac{dE}{E} - \frac{d\sigma_T}{\sigma_T} \right) \{S\}, \quad (4.150)$$

где $\{d\sigma\} = \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{zx}\}^T$;
 $\{S\} = \{\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$;

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{E}{(1+\nu)Q} \begin{bmatrix} \sigma_x'^2 & \sigma_x' \sigma_y' & \sigma_x' \sigma_z' & \sigma_x' \tau_{xy} & \sigma_x' \tau_{yz} & \sigma_x' \tau_{zx} \\ & \sigma_y'^2 & \sigma_y' \sigma_z' & \sigma_y' \tau_{xy} & \sigma_y' \tau_{yz} & \sigma_y' \tau_{zx} \\ & & \sigma_z'^2 & \sigma_z' \tau_{xy} & \sigma_z' \tau_{yz} & \sigma_z' \tau_{zx} \\ & & & \tau_{xy}^2 & \tau_{xy} \tau_{yz} & \tau_{xy} \tau_{zx} \\ сим. & & & & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz} \tau_{zx} \\ & & & & & \tau_{zx}^2 \end{bmatrix}; \quad (4.151)$$

$$Q = \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + A; \quad (4.152)$$

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3; \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_0; \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_0; \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_0. \quad (4.153)$$

При разгрузке элементов, находящихся в пластической области, величина λ в уравнении (4.149) принимает отрицательное значение, то есть $\lambda < 0$. Тогда связь между приращениями напряжений и деформаций будет определяться не соотношением (4.150), а уравнением неизотермической теории упругости

$$\{d\sigma\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_0\}) + \frac{dE}{E}\{\sigma\}.$$

Отметим, что уравнение связи для трехмерной задачи (4.150) и для плоско-напряженного случая одинаково по структуре. Сравнивая выражения для матриц упругости и упруго-пластичности, можно отметить, что диагональные элементы $[D_{ep}]$ меньше соответствующих диагональных элементов $[D]$. Это снижает жесткость или усилия сдвига, вызывающие текучесть. Следует особо отметить, что матрица $[D_{ep}]$ учитывает сжимаемость материала в упругой области и несжимаемость в пластической области.

Соотношения, полученные выше, между приращениями напряжений и приращениями деформаций справедливы только для бесконечно малых изменений этих величин.

Рассмотрим напряженное состояние точки тела после того, как тело получило приращение вектора перемещений $\{\Delta\delta\}_i$ вследствие термической нагрузки (рисунок 4.14). Пусть до приращения точка находилась в положении 1, имела накопленные значения интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_{i-1}$ и интенсивности деформаций $\bar{\varepsilon}_{i-1}$ и находилась в упругом состоянии, а после приращения нагрузки перешла в пластическую область. Значение функции текучести в начале шага меньше нуля:

$$f_{i-1} = f(\{\sigma\}_{i-1}) < 0.$$

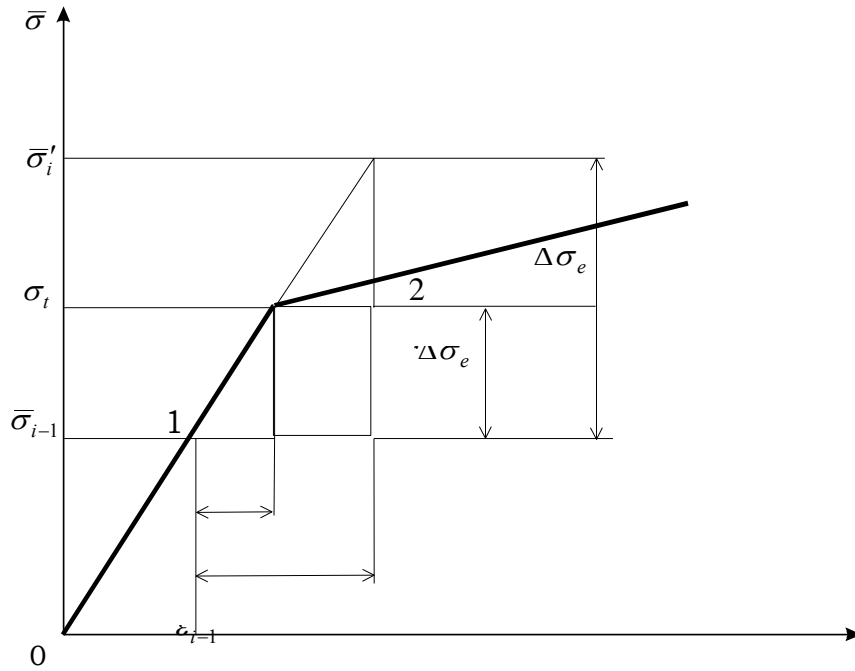


Рисунок 4.14 - Перемещение 1-2 точки тела в процессе упругопластического деформирования при конечных шагах изменения нагрузки

Считая шаг упругим, подсчитываем напряжения в конце шага

$$\begin{aligned} \{\sigma'\}_i &= \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta\sigma_e\}, \\ \{\Delta\sigma_e\} &= [D](\{\Delta\varepsilon\}_i - \{\Delta\varepsilon\}_0) - \{\Delta C\}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Естественно, в этом случае $f'_i = f(\{\sigma'\}_i) > 0$, что является недопустимым состоянием. Определим коэффициент r , указывающий, какая часть приращения деформаций упругая. Зенкевичем О. [6] предложена итерационная схема для определения коэффициента r . В работе [11] предложен способ односторонней коррекции к поверхности текучести. Все эти способы требуют от одной до нескольких итераций, что увеличивает расход машинного времени.

В данной работе предложена процедура определения коэффициента r без применения итерационных схем, который основан на критерии текучести Мизеса

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_T(T). \quad (4.155)$$

Подобный подход описан в работе [10]. Однако он реализован при применении метода касательной жесткости.

Правильно подобранный коэффициент должен удовлетворять условию

$$f(\{\sigma_c\})=0, \quad (4.156)$$

где
$$\{\sigma_c\} = \{\sigma\}_{i-1} + r\{\Delta\sigma_e\}.$$

Подстановка значения вектора напряжений $\{\sigma_c\}$, выраженного через коэффициент r , в соотношение (4.170) позволяет получить квадратное уравнение относительно r

$$Ar^2 + Br + C = 0. \quad (4.157)$$

Решая уравнение (4.171) и отбрасывая отрицательный корень, получаем точное значение коэффициента r без итераций.

При решении трехмерных задач параметры уравнения (4.155) определяются выражениями (4.156) (таблица 4.4), а для случая плоско-напряженного состояния соотношениями (4.157) (таблица 4.4).

Для вычисления полных напряжений используются соотношения (4.147) и (4.149), которые можно представить в виде

$$\{\sigma\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + r\{\Delta\sigma_e\} + \int_{r\{\Delta\sigma_e\}}^{\{\Delta\varepsilon\}} [D_{ep}] \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_0\} - \{dC\}. \quad (4.158)$$

Чтобы обеспечить точность подсчета напряжений по уравнению (4.164) независимой от приращения нагрузки, применяем численное интегрирование этого выражения совместно с коррекцией напряжений в конце каждого шага интегрирования [6]. Для этого следует интервал упругопластического деформирования разбить на некоторое число шагов

$$m = f'_i / \Delta f \quad (4.159)$$

на каждом из которых производится коррекция. При вычислении

округление делается в большую сторону, а Δf имеет величину порядка $(0,05-0,10)\sigma_T$.

Таблица 4.4 - Формулы для определения коэффициентов в выражении (4.157)

I	A	$\frac{1}{2}[(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y)^2 + (\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_z)^2 + (\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_x)^2 + 6(\Delta\tau_{xy}^2 + \Delta\tau_{yz}^2 + \Delta\tau_{zx}^2)]$	(4.162)
	B	$(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y)(\sigma_x - \sigma_y) + (\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_z)(\sigma_y - \sigma_z) + (\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_x)(\sigma_z - \sigma_x) + 6(\tau_{xy}\Delta\tau_{xy} + \tau_{yz}\Delta\tau_{yz} + \tau_{zx}\Delta\tau_{zx})$	
	C	$\sigma_{i-1}^{-2} - \sigma_T^2(T)$	
II	A	$\Delta\sigma_x^2 - \Delta\sigma_x\Delta\sigma_y + \Delta\sigma_y^2 + 3\Delta\tau_{xy}^2$	(4.163)
	B	$\Delta\sigma_x(2\sigma_x - \sigma_y) + \Delta\sigma_y(2\sigma_y - \sigma_x) + 6\tau_{xy}\Delta\tau_{xy}$	
	C	$\sigma_{i-1}^{-2} - \sigma_T^2(T)$	

Примечания: I - объемное напряженное состояние; II - плоское напряженное состояние; эти формулы определяются напряженным состоянием $\{\sigma\}_{i-1}$ и приращением напряжений $\{\Delta\sigma_e\}$.

Значения напряжений в конце каждого шага определяем как

$$\{\sigma\}_1^k = \{\sigma\}_i^{k-1} + [D_{ep}]^{k-1}(\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon_0\})(1-r)/m - \{\Delta C\}(1-r)/m, \quad (4.160)$$

где k - номер шага интегрирования; $[D_{ep}]^{k-1}$ - означает, что матрица $[D_{ep}]$ рассчитывается на основе значений вектора напряжений $\{\sigma\}_i^{k-1}$.

Значение напряжений в конце каждого шага интегрирования обозначено через $\{\sigma\}_1^k$, поскольку это первое приближение, полученное по формуле справедливой для бесконечно малых изменений. Вследствие этого функция текучести $f_1 = f(\{\sigma\}_1^k) \neq 0$. В данной работе предложена коррекция напряжений $\{\sigma\}_1^k$ методом радиального возврата (radial return), основы которого для численного решения упруго-пластических задач изложены в статье [12]. В работе [6] для расчета остаточных напряжений при реализа-

ции МНН был применен метод радиального возврата. Существенным преимуществом этого метода при определении напряженного состояния является то, что отпадает необходимость формирования матрицы $[D_{ep}]$. Однако расчетное исследование, проведенное нами, показало низкую точность метода при вычислении остаточных деформаций. Поэтому этот метод использован нами только для коррекции напряжений в конце каждого шага интегрирования в виде

$$\{\sigma\}_i^k = \{\sigma\}_i^k \sigma_T(T) / [\sigma_T(T) + f_1]. \quad (4.161)$$

Применение выражения (4.161) для коррекции напряжений, в отличие от традиционных схем, дает экономию машинного времени и удовлетворяет точности решения поставленных задач.