Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическое моделирование взлёта и посадки космической ракеты

Жилин Василий Александрович,
Сызранцев Денис Алексеевич
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Волегов Павел Сергеевич,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

В 1954 году человек начал освоение космоса, что дало мощный толчок для развития многих наук. В космосе можно проводить эксперименты, которые нельзя осуществить на Земле. Однако каждый полёт в космос сопровождаются огромными затратами дорогостоящих материалов и топлива, что создаёт препятствия для более интенсивного изучения космоса. Огромные расходы на запуск космических ракет «закрывают» космос для обычных людей, делают космический туризм практически невозможным. Одним из возможных решением данной проблемы может быть многоразовое использование ракет-носителей, которые доставляют грузы на орбиту. Сейчас стоимость запуска ракеты-носителя Falcon 9 составляет около $60 млн., причем лишь $200 тыс. из этой суммы приходится на топливо, кислород и другие расходующиеся в полете материалы. Несмотря на то, что стоимость запуска увеличится за счет затрат на топливо, на экспедицию по возвращению ступеней к месту старта, на восстановление ступеней, оценку работоспособности, заправку топливом, возможность многократного использования ракеты существенно уменьшит стоимость одного полета.

Космическое пространство (космос) – относительно пустые участки Вселенной, которые лежат вне границ атмосфер небесных тел. Вопреки распространённым представлениям, космос не является абсолютно пустым пространством – в нём существует очень низкая плотность некоторых частиц (преимущественно водорода), а также электромагнитное излучение и межзвездное вещество (https://ru.wikipedia.org/wiki/Космическое_пространство).

Ракета-носитель (рис. 1) – многоступенчатая баллистическая ракета, предназначенная для выведения полезной нагрузки в космическое пространство (https://ru.wikipedia.org/wiki/Ракета-носитель).

Рис.1. Ракета-носитель «Протон-М»

Цель данной работы – разработать и исследовать математическую модель взлёта и посадки ракеты-носителя. Так же задачами исследовательской работы являются:

- нахождение наиболее рационального решения проблемы управляемой посадки ракеты-носителя;
- нахождение точки земного шара, из которой наиболее выгодно запускать ракету;
- определение наиболее подходящего места посадки.

Для достижения цели исследования наиболее подходят методы математического моделирования, так как натурные эксперименты имеют слишком высокую стоимость, например, общая стоимость запуска ракеты-носителя «Протон-М» с разгонным блоком «Бриз-М» в 2013 году составляла порядка 2,84 млрд. рублей (около $80 млн.).

В ходе работы будет исследовано поведение космической ракеты, состоящей из двухступенчатой ракеты-носителя и полезного груза, который необходимо доставить на орбиту. Будем считать ракету абсолютно твёрдым цилиндром с переменной массой.

Математическая модель должна позволять:

- определять положение ракеты и её частей в любой момент времени;
- рассматривать различные экстренные ситуации (отказ аэродинамического руля, утечка топлива);

Для решения данной задачи методами математического моделирования нам понадобятся некоторые входные данные:

- масса ракеты-носителя (32,7 т);
- масса полезного груза (13,15 т);
- начальная масса топлива (517,1 т);
- длина ракеты (68,4 м);
- диаметр ракеты (3,7 м);
- скорость расхода топлива (2,9 т/с).

Характеристики ракеты соответствуют характеристикам ракеты-носителя Falcon 9 v1.1 (R), который выводит на орбиту транспортный космический корабль Dragon.

Глава 1. Концептуальная постановка задачи моделирования

Рис. 2. Ракета-носитель с полезным грузом

Объектом исследования будем считать комплекс из ракеты-носителя и выводимого на орбиту груза (рис. 2).

Для упрощения разработки математической модели примем несколько гипотез:

1. Ракету-носитель будем считать абсолютно твёрдым телом цилиндрической формы с конусом на конце. Посадочные стойки ракеты будем считать упругими.
2. Масса ракеты изменяется со временем за счет сгорания топлива.
3. Рассмотрим случаи переменного и постоянного расположения центра масс ракеты.
4. Движение ракеты будем описывать законами классической механики Ньютона, так как максимальная скорость ракеты во много раз меньше скорости света.
5. Так же будем учитывать изменение положения посадочной платформы из-за вращения Земли.
6. В ходе нашего исследования будем рассматривать движение ракеты в трёхмерном пространстве, также ракета может вращаться вокруг трёх осей. Поэтому ракета имеет шесть степеней свободы. Положение ракеты будем задавать с помощью трёх осей координат и трёх осей вращения. (рис. 3).

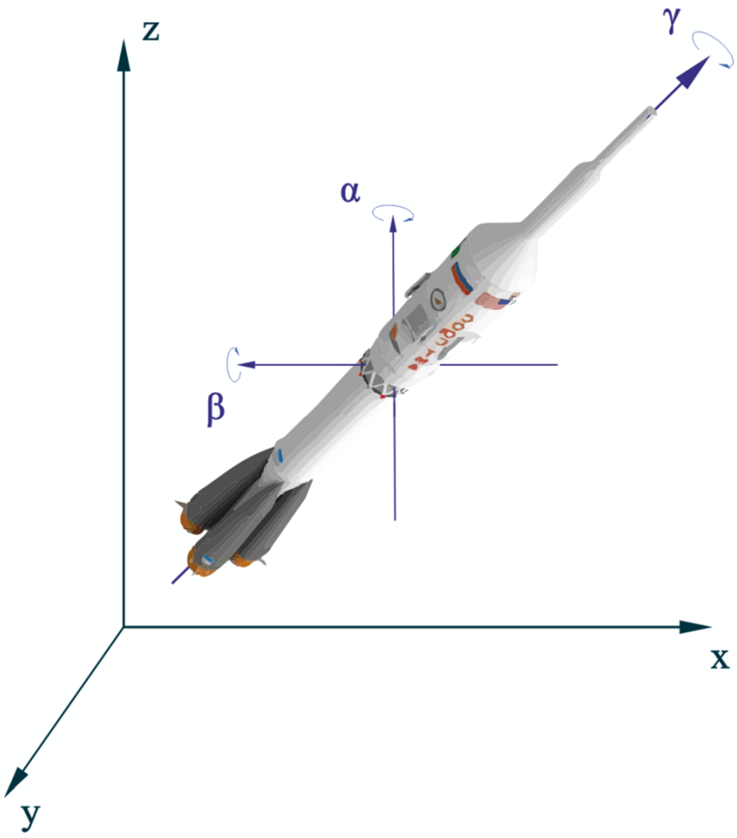

Рис. 3. Степени свободы ракеты

7. На ракету действует ветер и силы сопротивления воздуха, которые в общем случае изменяются вместе с высотой.
8. Тяга развивается за счёт двигателей, находящихся в нижней части ракеты. В носовой части ракеты расположены двигатели, обеспечивающие задание направления полёта ракеты, и аэродинамические рули. В нижней части ракеты расположены посадочные стойки, обеспечивающие мягкую посадку.
9. Место взлёта будем считать плоской и абсолютно твердой поверхностью.
10. Траекторию ракеты будем корректировать при помощи тяги двигателей в хвостовой и носовой части ракеты, а также угла наклона аэродинамических лопастей (рис. 4).

Рис. 4. Способы корректировки траектории ракеты

Глава 2. Математическая постановка задачи

В математической модели будем выделять несколько основных фаз полёта ракеты:

- Взлёт – участок траектории ракеты от запуска основных двигателей до отсоединения второй ступени.
- Манёвр – участок траектории ракеты с момента отсоединения второй ступени и до запуска тормозных двигателей.
- Посадка – участок траектории ракеты с момента запуска тормозных двигателей и до приземления на посадочную платформу.

Взлёт.

Уравнения движения мы будем решать численно при помощи средств программирования и математических пакетов. Для описания траектории движения ракеты воспользуемся классическими законами механики. Так как мы рассматриваем случай переменной массы то промежуток времени ,на котором мы будем описывать траекторию ракеты возьмём стремящимся к нулю. Запишем второй закон Ньютона (1) для ракеты за этот промежуток времени.

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \mathbf{F}_p ; \Delta t \to 0 , \tag{1}$$

$\Delta \mathbf{P}$,–, изменение вектора импульса ракеты, $\mathbf{F_p}$,–, равнодействующая сил, действующих на ракету, Δt ,–, промежуток времени действия сил.

Распишем импульс ракеты до (2) и после (3) выброса топлива.

$$\mathbf{P}_0 = m\mathbf{v} , \tag{2}$$

$$\mathbf{P}_1 = (m - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) , \tag{3}$$

где

$\mathbf{P}_1$,–, импульс ракеты после выброса топлива, m ,–, масса ракеты и топлива, Δm ,–, масса выброшенного топлива, **v** ,–, скорость ракеты до взаимодействия, Δ**v** ,– , изменение вектора скорости ракеты.

Теперь запишем импульс выброшенного топлива двигателями:

$$\mathbf{P}_2 = \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i (\mathbf{v}+\mathbf{u_i}) = \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{u_i} = \Delta m\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{u_i} , \tag{4}$$

где

$\mathbf{P}_2$,–, импульс выброшенного топлива для девяти двигателей ракеты,i ,–, номер двигателя,$\mathbf{u}_i$,–, скорость выброшенного топлива i двигателем ,

Δm_i ,–, масса выброшенного топлива i двигателем по модулю.

Запишем конечный импульс ракеты(5):

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 , \tag{5}$$

$\mathbf{P}_k$,–, конечный импульс системы.

Вначале импульс системы равен $\mathbf{P_0}$ из формулы (2).

Найдём изменение импульса системы (разность между (5) и (4)):

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3 = (m - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta m\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{u_i} - m\mathbf{v} = \\ = m\mathbf{v} - \Delta m\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}m - \Delta m\mathbf{v} + \Delta m\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{u_i} - m\mathbf{v} = \\ = \Delta\mathbf{v}m + \sum_{i=1}^{9} \Delta m_i \mathbf{u_i} \end{aligned} \tag{6}$$

Преобразуем закон Ньютона(1), подставив получившееся выражение из формулы (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p = \mathbf{a}m + \sum_{i=1}^{9} \mu_i \mathbf{u_i} , \\ \mathbf{a}m = \mathbf{F}_p - \sum_{i=1}^{9} \mu_i \mathbf{u_i} . \end{aligned} \tag{7}$$

где

$\mathbf{a}$,–, вектор ускорения ракеты, μ_i ,–, скорость выброса топлива i двигателя.

Для описания массы в каждый момент времени запишем уравнение изменения массы(8):

$$m(t) = m_0 - \Delta t \sum_{i=1}^{9} \mu_i , \tag{8}$$

m_0 ,–, масса до взаимодействия.

Разложим на составляющие равнодействующую силу(1)(добавить):

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{л.б} , \tag{9}$$

$\mathbf{F}_G$,–, сила гравитационного притяжения Земли, $\mathbf{F}_{лб}$,–, сила лобового сопротивления.

Для описания гравитационных сил действующих на ракету со стороны Земли запишем закон гравитационного притяжения(10):

$$F_G = G\frac{M_з m}{(R_з + h)^2} = G\frac{M_з m}{(x^2 + z^2 + y^2)}\ , \tag{10}$$

где

G ,–, гравитационная постоянная, $M_з$,–, масса Земли, (x,y,z) ,–, координаты

центра масс ракеты

Спроецируем силу гравитационного притяжения на оси координат. Для задания тригонометрических функций будем использовать координаты :

$$F_{G,X} = -G\frac{M_з m}{(x^2 + z^2 + y^2)}\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} = -G\frac{M_з m x}{(x^2 + z^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$F_{G,Y} = -G\frac{M_з m}{(x^2 + z^2 + y^2)}\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} = -G\frac{M_з m y}{(x^2 + z^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$F_{G,Z} = -G\frac{M_з m}{(x^2 + z^2 + y^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} = -G\frac{M_з m z}{(x^2 + z^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{11}$$

Для описания сил сопротивления воздуха, действующих на ракету, запишем закон лобового сопротивления для вытянутых тел.:

$$F_{л.с.} = C\frac{q\mathbf{v}^2}{2}V^{\frac{2}{3}}, \tag{12}$$

где
C ,–, коэффициент аэродинамического сопротивления, V ,–, объём ракеты, q ,–, плотность среды.

Спроецируем на оси, учтем ,что сила направлена против скорости ракеты. Для задания тригонометрических функций будем использовать скорости :

$$F_{л.с.X} = -C\frac{qv^2}{2}V^{\frac{2}{3}}\frac{v_X}{\sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}} = -C\frac{qvv_X}{2}V^{\frac{2}{3}}$$

$$F_{л.с.Y} = -C\frac{qv^2}{2}V^{\frac{2}{3}} * \frac{v_Y}{\sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}} = -C\frac{qvv_Y}{2}V^{\frac{2}{3}}$$

$$F_{л.с.Z} = -C\frac{qv^2}{2}V^{\frac{2}{3}} * \frac{v_Z}{\sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}} = -C\frac{qvv_Z}{2}V^{\frac{2}{3}} \quad (13)$$

где

v_x, v_y, v_z ,–, проекции скоростей ракеты на оси x, y, z соответственно.

Спроецируем скорость выбрасывания топлива направлена от носа ракеты:

$$u_X = -u\cos\beta\cos\alpha$$
$$u_Y = -u\cos\beta\sin\alpha$$
$$u_Z = -u\sin\beta \quad (14)$$

где

u_x, u_y, u_z ,–, проекции скорости выброса топлива на оси, α ,–, угол между осью x проекцией ракеты, β ,–, угол между плоскостью образованную осями x и y и ракетой.

Спроецируем ускорение на оси взяв проекции сил и скоростей из уравнений ((15):

$$a_X m = F_{G,X} + F_{лс,X} + \sum_{i=1}^{9}\mu_i u_i \cos\beta\cos\alpha\,,$$
$$a_Y m = F_{G,Y} + F_{лс,Y} + \sum_{i=1}^{9}\mu_i u_i \cos\beta\sin\alpha\,,$$
$$a_Z m = F_{G,Z} + F_{лс,Z} + \sum_{i=1}^{9}\mu_i u_i \sin\beta\,, \quad (15)$$

Для ориентация ракеты в пространстве мы используем три угла:

- угол α, который находится в плоскости XY между проекцией ракеты на эту плоскость и OX.
- угол β, который находится в плоскости XZ между проекцией ракеты на плоскость XY и осью ракеты.
- угол γ, который является углом поворота относительно центра цилиндра.

Для задания изменения угла со временем запишем уравнение вращения для ракеты по трём осям.

Ось альфа.

Запишем уравнение основное уравнение динамики вращения на ось альфа(16):

$$\sum \mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}, \tag{16}$$

Момент импульса можно записать как(17):

$$\mathbf{L} = \mathbf{kP} = \boldsymbol{\omega} I, \tag{17}$$

Момент инерции записывается как(18):

$$I = \sum_k r_k^2 m_k, \tag{18}$$

Момент силы записывается как(18):

$$\mathbf{M} = \mathbf{Fk} \tag{19}$$

где

M ,–, момент силы, Δt ,–, промежуток времени, Δ**L** ,–, изменение момента импульса, **P** ,–, импульс вращающегося тела, **k** ,–, плечо вращающегося тела, ω ,–, угловая скорость, I ,–, момент инерции тела.

Плечо для девяти двигателей в предположении ,что один из двигателей в центре и двигатели расположены симметрично , можно записать как (с учётом проекции на плоскость XY):

$$K_i = R\cos(\gamma + (i-1)\frac{\pi}{4}), \tag{20}$$

где

K_i ,–, плечо для i двигателя в проекции на ось вращения альфа, R ,–, радиус расположения двигателей ракеты, γ ,–, угол поворота ракеты относительно оси гамма.

Запишем момент импульса на плоскость альфа. Плечо для скорости ракеты равно нулю так как скорость направлена из центра:

$$L_0 = mvK\cos\beta = 0, \tag{21}$$

$$L_k = (m-\Delta m)(v+\Delta v)\cos\beta K + \Delta m v\cos\beta K - \sum_{i=1}^{8}\Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_a I =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1}\Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_a I \ , \tag{22}$$

$$\Delta L = -\sum_{i=1}^{n-1}\Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_a I = \Delta t \sum M \ , \tag{23}$$

$$\omega_a = \frac{\Delta t \sum M + \sum_{i=1}^{8}\Delta m_i u_i \cos\beta K_i}{I}, \tag{24}$$

ω_α ,–, угловая скорость относительно оси альфа, К ,–, плечо для импульса ракеты.

Найдём сумму моменты сил действующих на ракету.

$$\sum M = \mathbf{M}_{Fg} + \mathbf{M}_{Fлл} \tag{25}$$

Так как силы направлены из центра масс, то плечи сил равны нулю.

$$\sum M = 0, \tag{26}$$

Ось бета.

Запишем уравнение основное уравнение динамики вращения на ось бета(27):

$$\sum \mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}, \tag{27}$$

Момент импульса можно записать как(17):

$$\mathbf{L} = \mathbf{kP} = \boldsymbol{\omega} I, \tag{28}$$

Момент инерции записывается как(18):

$$I = \sum_k r_k^2 m_k, \tag{29}$$

Момент силы записывается как(18):

$$\mathbf{M} = \mathbf{Fk} \tag{30}$$

где

M ,–, момент силы, Δt ,–, промежуток времени, Δ**L** ,–, изменение момента импульса, **P** ,–, импульс вращающегося тела, k ,–, плечо вращающегося тела, ω ,–, угловая скорость, I ,–, момент инерции тела.

Плечо для nчисла двигателей, в предположении ,что один из двигателей в центре и двигатели расположены симметрично, можно записать как (с учётом проекции на плоскость ZX).

$$K_i = R\sin(\gamma + (i-1)\frac{\pi}{4}), \tag{31}$$

где

K_i ,–, плечо для i двигателя в проекции на ось вращения бета, R ,–, радиус расположения двигателей ракеты, γ ,–, угол поворота ракеты относительно оси гамма.

Запишем момент импульса на плоскость альфа. Плечо для скорости ракеты равно нулю так как скорость направлена из центра:

$$L_0 = mvK\cos\alpha = 0 \tag{32}$$

$$L_k = (m - \Delta m)(v + \Delta v)\cos\alpha K + \Delta m v \cos\alpha K - \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I, \tag{33}$$

$$\Delta L = -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I = \Delta t \sum M \ , \qquad (34)$$

$$\omega_\beta = \frac{\Delta t \sum M + \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i}{I}, \qquad (35)$$

где

ωb ,–, угловая скорость относительно оси бета.

Найдём сумму моменты сил действующих на ракету.

$$\sum M = \mathbf{M}_{Fg} + \mathbf{M}_{F\text{лл}}, \qquad (36)$$

Так как силы направлены из центра масс, то плечи сил равны нулю.

$$\sum M = 0, \qquad (37)$$

Ось гамма.

На оси вращения гамма не действуют силы при взлёте и не имеет ни каких моментов импульса.

Маневр.

При маневре у нас будут задействованы боковые двигатели расположенные в носовой части ракеты. Однако они не окажут влияния на скорость ракеты так, как перпендикулярны скорости ракеты. Значит для описания движения ракеты мы можем использовать уравнение движения при взлёте(15).Изменится лишь закон изменения массы(8)(38):

$$m(t) = m_0 - \Delta t \sum_{i=1}^{9} \mu_i - \Delta m_{b1} - \Delta m_{b2} \qquad (38)$$

Δm_{b1}, Δm_{b2} ,–, массы топлива выброшенного боковыми двигателями.

В уравнении вращения тела осей альфа и бета (24), (35) добавится ещё два момента импульса выброшенного топлива их направление противоположно будет зависеть от ориентации ракеты по оси гамма.

Изменения в уравнении моментов для оси бета:

$$L_k = (m - \Delta m)(v + \Delta v)\cos\alpha K + \Delta m v \cos\alpha K - \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I +$$
$$\Delta m_{b1} u_{b1} \cos\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \cos\gamma\, k_b \cos\beta =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I + \Delta m_{b1} u_{b1} \cos\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \cos\gamma\, k_b \cos\beta\ , \qquad ,(39)$$

$$\Delta L = -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i + \omega_\beta I + \Delta m_{b1} u_{b1} \cos\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \cos\gamma\, k_b \cos\beta =$$
$$= \Delta t \sum M \qquad ,(40)$$

$$\omega_\beta = \frac{\Delta t \sum M - \Delta m_{b1} u_{b1} \cos\gamma k_b \cos\beta + \Delta m_{b2} u_{b2} \cos\gamma\, k_b \cos\beta + \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\alpha K_i}{I}, \quad (41)$$

где

ω_β ,–, угловая скорость относительно оси альфа, К,--, плечо для импульса ракеты, u_{b1}, u_{b2} ,–, скорость топлива выброшенного боковыми двигателями, K_b ,–, расстояние от центра масс до боковых двигателей.

Изменения в уравнении моментов для оси альфа:

$$L_k = (m - \Delta m)(v + \Delta v)\cos\beta K + \Delta m v \cos\beta K - \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_\beta I +$$

$$\Delta m_{b1} u_{b1} \sin\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \sin\gamma\, k_b \cos\beta =$$

$$= -\sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_\beta I + \Delta m_{b1} u_{b1} \sin\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \sin\gamma\, k_b \cos\beta, \quad (42)$$

$$\Delta L = -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta m_i u_i \cos\beta K_i + \omega_\beta I + \Delta m_{b1} u_{b1} \sin\gamma k_b \cos\beta - \Delta m_{b2} u_{b2} \sin\gamma\, k_b \cos\beta = \quad ,(40)$$

$$= \Delta t \sum M$$

$$\omega_\beta = \frac{\Delta t \sum M - \Delta m_{b1} u_{b1} \sin\gamma k_b \cos\beta + \Delta m_{b2} u_{b2} \sin\gamma\, k_b \cos\beta + \sum_{i=1}^{8} \Delta m_i u_i \cos\beta K_i}{I}, \quad (44)$$

Посадка.

Во время посадки для регулировки положения ракеты используются аэродинамические рули. Они будут создавать силы сопротивления воздуха, которые будут изменять положение ракеты. Зададим их при помощи уравнения(определить). В равнодействующую силу добавится ещё одна сила которая будет являться равнодействующей сил сопротивления воздуха действующих на аэродинамические рули.

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{л.б} + \mathbf{F}_{р.а.р}, \quad (45)$$

$F_{р.а.р}$,-,равнодействующая сил сопротивления создаваемых аэродинамическими рулями.

(Пока здесь нет описания Fрар)

Изменим уравнение движения для взлёта(15) в соответствии с предыдущими утверждениями. Добавим проекции сил сопротивления аэродинамических рулей.

$$a_X m = F_{G,X} + F_{лс,X} + F_{рар,X} + \sum_{i=1}^{9} \mu_i u_i \cos\beta \cos\alpha,$$

$$a_Y m = F_{G,Y} + F_{лс,Y} + F_{рар,Y} + \sum_{i=1}^{9} \mu_i u_i \cos\beta \sin\alpha,$$

$$a_Z m = F_{G,Z} + F_{лс,Z} + F_{рар,Z} + \sum_{i=1}^{9} \mu_i u_i \sin\beta\,, \tag{46}$$

Так же изменится основное уравнение моментов для всех трёх осей.

Глава 3. Анализ результатов численного эксперимента

В ходе численного эксперимента рассматривалась математическая модель движения ракеты в трехмерном пространстве.

Модель позволяет рассмотреть три этапа полета ракеты:

- взлёт
- выход на орбиту
- посадка

Список литературы.

- Мякишев Г.Я. Физика. Механика. 10 класс. Профильный уровень. Дрофа 2010.
- Википедия. https://ru.wikipedia.org