Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная, Н. Н. Короткова

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Волгоград
2004

МИНИСТЕРСТВО

ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ

ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ФИЛИАЛ)

Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная, Н. Н.Короткова

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

РПК “Политехник”
Волгоград
2004

УДК 53

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук *Лосева Н.В.*

канд. физ.-мат. наук *Меркулова Н.И.*

Т.А. Матвеева, Светличная В.Б., Н.Н. Короткова.
Числовые ряды. Учеб. пособие / ВолгГТУ. – Волгоград, 2004. – 45 с.

ISBN 5 – 230 –

Рассматриваются вопросы, касающиеся решения задач по числовым рядам.

Приводятся основные теоретические положения и методические указания для решения задач.

Учебное пособие снабжено вопросами для самопроверки и вариантами заданий для самостоятельного решения.

Рассчитано на студентов дневной и вечерней форм обучения высших технических заведений.

Табл. 1 Библиогр.: 5 названий

Печатается по решению редакционно – издательского совета Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5 – 230 –

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие посвящено числовым рядам. Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразное практическое применение.

Правила действий над рядами не всегда совпадают с правилами действий над конечными суммами. В частности, в конечных суммах можно произвольно менять порядок слагаемых, как угодно группировать члены, сумма от этого не изменится. Слагаемые конечной суммы можно складывать в обратном порядке, для ряда такой возможности нет, ибо у него не существует последнего члена.

Основные разделы пособия:

1. Основные понятия числового ряда.
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
3. Сходимость знакопеременных рядов.
4. Сходимость рядов с комплексными членами.

Пособие включает в себя задачи по теории рядов с подробными решениями.

В каждом разделе даны основные теоретические положения и краткие пояснения решения типовых задач.

Вопросы для самопроверки даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала.

Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи. В конце пособия предложены контрольные задания для самостоятельного решения. При решении задач студент должен дать пояснения со ссылками на используемые теоремы, свойства, признаки и т.д.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Если $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – числовая последовательность, то сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются членами ряда, а число a_n – общим членом ряда.

Сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1.2}$$

называется его частичной суммой.

Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда (1.1) имеет конечный предел S, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то ряд (1.1) называется сходящимся, а число S – его суммой; в противном случае, т.е. когда этот предел не существует или равен бесконечности, ряд (1.1) называется расходящимся.

Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$, полученный из ряда (1.1) отбрасыванием n первых его членов, называется остатком ряда (1.1).

Свойства рядов

Свойство 1. Если ряд (1.1) сходится и его сумма равна S_1, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\,a_n = k\,a_1 + k\,a_2 + \ldots + k\,a_n + \ldots$, где k – произвольное число, также сходится и его сумма равна $k\,S_1$. Если же ряд (1.1) расходится и $k \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\,a_n$ расходится.

Свойство 2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (1.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1.1) сходятся или расходятся одновременно.

Необходимый признак сходимости числового ряда (1.1) (но недостаточный) состоит в следующем:

если числовой ряд (1.1) *сходится, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. (1.3)

Из этого признака следует

достаточный признак расходимости ряда (1.1):

если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *– расходится.*

Основная задача теории числовых рядов – установление сходимости или расходимости – иногда может быть решена непосредственным нахождением суммы ряда, т.е. вычислением предела частичных сумм: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Пример 1.1. Используя определение (вычислением $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$), исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{9k^2+12k-5}$.

Решение. Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие:

$$\frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+5}.$$

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения: $A = \dfrac{1}{6}$ и $B = -\dfrac{1}{6}$.

Следовательно, общий член ряда запишется в виде:

$$\frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+5}\right).$$

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n+2}\right) + \left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{7}{10}-\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right].$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{60}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то искомый ряд сходится. ■

Пример 1.2. Используя определение (вычислением $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$), исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3-k}{k(k+3)(k+1)}$.

Решение. Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения: $A=1$, $B=-2$ и $C=1$. Следовательно, общий член ряда запишется в виде:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+3}.$$

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+3}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+3}.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то искомый ряд сходится. ■

При исследовании сходимости рядов непосредственно нахождение предела частичных сумм часто связано с большими трудностями. Поэтому используют тот или иной признак сходимости, дающий достаточные условия сходимости или расходимости ряда, которые изложены в следующем разделе.

2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Теоремы, перечисленные в этом разделе, относятся к знакоположительным числовым рядам (1.1), все члены которых неотрицательны.

Признак Даламбера:

если $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, *то ряд* (1.1) *с неотрицательными членами сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$*; при* $q=1$ *вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Признак Коши:

если $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, *то ряд* (1.1) *с неотрицательными членами сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$*; при* $q=1$ *вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Первый признак сравнения:

если для двух знакоположительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, *начиная с некоторого номера* n, *выполняется неравенство для общих членов:* $a_n\le b_n$, *то ряд с меньшими членами сходится, если сходится ряд с большими членами; если ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.*

Второй признак сравнения:

если для двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *с неотрицательными членами существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$, *то при* $q\ne 0$ *оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости, т.е. либо оба ряда сходятся, либо оба - расходятся.*

Интегральный признак Коши:

если члены ряда (1.1) *удовлетворяют условиям* $a_{n+1}\le a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, *а непрерывная убывающая неотрицательная функция вещественной переменной* $f(x)$ *такова, что при* $x=1,2,\ldots,n,\ldots$ *ее значения равны соответствующим членам ряда* (1.1) *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$, *то ряд* (1.1) *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Когда приходится исследовать на сходимость конкретный ряд, то естественно встает вопрос о том, каким из перечисленных признаков (а они не исчерпывают все известные признаки) воспользоваться. Полезно, прежде всего, проверить выполнение необходимого условия сходимости (1.3): $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. Если оно нарушено, то ряд расходится. Если же оно выполнено, то для исследования сходимости следует обратиться к наиболее простым признакам – Даламбера или Коши (выбор одного из них легко определяется видом общего члена a_n).

Отметим, что когда признаки Даламбера и Коши «не действуют» (т.е. если $q=1$), часто оказывается полезным обратиться к признакам сравнения. Этими признаками удобно пользоваться, когда исследуемый ряд сравнивается с другим рядом, поведение которого с точки зрения сходимости известно, либо который легче поддается исследованию. Такими рядами достаточно простого вида являются обобщенный гармонический и геометрический ряды. Исследуем их на сходимость (см. далее примеры 2.1 и 2.2).

Пример 2.1. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд (иногда его называют рядом Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, p – любое вещественное число.

Решение. Если $p<0$, то общий член a_n ряда при $n\to+\infty$ стремится к бесконечности; если $p=0$, то при любом $n: a_n=1$, и, следовательно, по достаточному признаку расходимости исходный ряд расходится. Если $p>0$, то данный ряд удобно исследовать на сходимость с помощью интегрального признака Коши. Действительно, общий член ряда $a_n=\frac{1}{n^p}$ стремится к нулю при $n\to+\infty$, причем это стремление монотонно относительно n. В качестве функции $f(x)$ выберем функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$, которая удовлетворяет всем условиям, наложенным на нее в формулировке интегрального признака (она определена при $x\geq 1$, непрерывна, неотрицательна, монотонно убывает и стремится к нулю при $x\to+\infty$). Остается выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, при $p>0$.

Так как первообразная неопределенного интеграла имеет вид:

$$\int\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}, & \text{при } p\neq 1,\\ \ln|x|, & \text{при } p=1,\end{cases}$$

то определенный интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)}, & \text{при } p>1,\\ +\infty, & \text{при } p\leq 1.\end{cases}$$

Итак, обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{matrix}\text{сходится, при } p>1,\\ \text{расходится, при } p\leq 1.\end{matrix}\tag{2.1}$$

При $p=1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется гармоническим, и как установили, он является расходящимся. ■

Пример 2.2. Исследуем на сходимость геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (иногда его называют рядом геометрической прогрессии).

Решение. Как известно, сумма первых n членов геометрической прогрессии (это и есть частичная сумма ряда) $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$ находится по формуле $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этих частичных сумм: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{1-q}$. Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1) если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, т.е. ряд сходится;

2) если $|q| > 1$, то $q^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд расходится;

3) если $|q| = 1$, то:

при $q = 1$ ряд принимает вид $1+1+1+...+1+...$, для него частичная сумма: $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд расходится;

при $q = -1$ ряд принимает вид $1-1+1-1+...$, в этом случае частичная сумма: $S_n = \begin{cases} 0, \text{ при четном } n, \\ 1, \text{ при нечетном } n. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, т.е. в этом случае ряд расходится.

Итак, получили, что ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{matrix} \text{сходится, при } |q| < 1, \\ \text{расходится, при } |q| \geq 1. \end{matrix} \quad \blacksquare \tag{2.2}$$

Пример 2.3. Исследовать на сходимость числовой ряд $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7} + ...$

Решение. По виду членов ряда можно утверждать, что общий член ряда имеет вид: $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$. То есть мы исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n-1}$. Проверим необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Т. к. он нарушается, то данный ряд расходится (или говорим, расходится по достаточному признаку расходимости). ■

Пример 2.4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$.

Решение. Учитывая, что $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}\sim b_n=\frac{1}{n^{5/2}}$ при $n\to+\infty$ (так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$), то по второму признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ ведут себя одинаково, в смысле сходимости. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ – обобщенный гармонический, и т.к. $p=\frac{5}{2}>1$, то по (2.1) он является сходящимся. Следовательно, искомый ряд также сходится. ■

Пример 2.5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3^n-2}$.

Решение. С помощью второго признака сравнения упростим исходный ряд, так как $a_n=\frac{2n^2+1}{3^n-2}\sim b_n=\frac{2n^2}{3^n}$ при $n\to+\infty$, то о сходимости искомого ряда можно судить по ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. По виду общего члена последнего знакоположительного ряда можно сделать выбор достаточного признака, в данном случае признака Коши. По признаку Коши

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

(учли известный факт из матанализа: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$). Так как $q=\frac{1}{3}<1$, то искомый ряд сходится. ■

Пример 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3(n)}$.

Решение. Для того чтобы исследовать данный знакоположительный ряд на сходимость, удобно применить интегральный признак Коши, положив, что $f(x)=\frac{1}{x\ln^3(x)}$. Условия, допускающие применение этого признака, выполнены, ибо функция $f(x)$ непрерывна при $x\geq 2$, положительна при этих значениях x, монотонно убывает с ростом x и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; выполнение условия $f(n)=a_n$ очевидно. Исследуем соответствующий несобственный интеграл на сходимость:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Bigg|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится, следовательно, вместе с ним сходятся и искомый ряд. ■

Пример 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n}{(n+4)!}$.

Решение. Так как общий член ряда $a_n = \dfrac{5n}{(n+4)!} \sim b_n = \dfrac{5^n}{n!}$, при $n \to +\infty$, то исследуем по достаточному признаку Даламбера эквивалентный искомому ряд в смысле сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n!}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{5^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}\, n!}{5^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = \left(\frac{c}{\infty}\right) = 0 < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится. ■

Пример 2.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Решение. Форма общего члена данного знакоположительного ряда наводит на мысль об использовании признака Коши. Действительно:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} = \left| \begin{matrix} \text{второй замечательный} \\ \text{предел}: \lim\limits_{\alpha\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1}.$$

Так как $e^{-1} = 1/e < 1$, то по признаку Коши исходный ряд сходится.

Решение возможно и с помощью признака Даламбера, но в этом случае его использование было бы нерационально. ■

При исследовании некоторых задач на сходимость числовых рядов удобно при применении признаков сравнения использовать следствия первого и второго замечательных пределов: применительно к рядам считаем $\alpha(n)$ бесконечно малой величиной, т.е. $\alpha(n) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Таблица эквивалентностей

$\sin(\alpha) \sim \alpha$	$tg(\alpha) \sim \alpha$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha) \sim \alpha$	$arctg(\alpha) \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$1-\cos(\alpha) \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$	$ctg(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln(b)}$
$\pi/2 - \arccos(\alpha) \sim \alpha$	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$	$b^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \ln(b)$

Пример 2.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right)$.

Решение. Так как $\ln\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{n^2-2n}{n^3+2n+1}\right)$ и $\frac{\mathrm{n}^2-2n}{n^3+2n+1} \to \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$, то можно применить эквивалентность: $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$. Тогда общий член исследуемого ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right) \sim b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$ при $n \to +\infty$. Из второго признака сравнения и сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ (см. (2.1)) следует сходимость искомого ряда. ■

Пример 2.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right)$.

Решение. По таблице эквивалентностей общий член искомого ряда $a_n = arctg\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{n}^2-n+1} \sim b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \to +\infty$, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2-n+1} = 0$. Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следует сходимость данного ряда. ■

Пример 2.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}$.

Решение. Выпишем несколько первых слагаемых исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)} = \frac{1}{5} + \frac{1\cdot4}{5\cdot9} + \frac{1\cdot4\cdot7}{5\cdot9\cdot13} + \ldots :$$

По форме общего члена данного ряда решаем использовать признак Даламбера. Выпишем $(n+1)$-ый член этого ряда:

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3(n+1)-2)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot(4(n+1)+1)} = \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot(4n+5)}.$$

Тогда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot(4n+5)}\cdot\frac{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{4n+5}=\frac{3}{4}<1,$$

и искомый ряд сходится. ■

Пример 2.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

Решение. Так как общий член ряда $a_n=\frac{(n+1)!}{n^n}\sim b_n=\frac{n!}{n^n}$ при $n\to+\infty$, то по второму признаку сравнения исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Применим к нему достаточный признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}=\frac{1}{e}.$$

Так как $1/e<1$, следовательно, полученный и исходный ряды сходятся. ■

Пример 2.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{5/2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{13/6}}=0$, то к общему члену ряда можно применить эквивалентность: $\sin(\alpha)\sim\alpha$. Поэтому $a_n=\sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}\right)\sim\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}\sim b_n=\frac{1}{n^{13/6}}$, при $n\to+\infty$. Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13/6}}$ ($p=13/6>1$), следует сходимость искомого ряда. ■

Пример 2.14. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}\right).$$

Решение. Упростим общий член ряда a_n, умножив и разделив его на сопряженное:

$$a_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}=\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+n-1}\right)^2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}}=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} \sim \frac{2}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \text{ при } n \to +\infty .$$

То есть по второму признаку сравнения искомый ряд эквивалентен в смысле сходимости с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится (см.(2.1)), то из этого следует расходимость данного ряда. ■

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакопеременными.

3. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{3.1}$$

называется знакопеременным, если члены этого ряда a_n не все являются неотрицательными числами.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \tag{3.2}$$

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ – знакопеременный, но не является знакочередующимся.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots, \tag{3.3}$$

составленный из абсолютных величин его членов.

Числовой ряд (3.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, расходится.

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов:

если члены знакочередующегося ряда (3.2) *монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при* $n \to +\infty$, *то ряд сходится, иначе говоря, если члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$ *удовлетворяют условиям:*

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,\ 2)\ a_{n+1} \le a_n,$$

то ряд сходится.

Отметим, что из сходимости ряда (3.3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость и ряда (3.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, причем абсолютная, а из расходимости ряда (3.3), установленной с помощью признаков Даламбера или Коши, – расходимость ряда (3.1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Только для знакочередующихся рядов верна оценка остатка ряда:

$$|R_n| < |a_{n+1}|, \tag{3.4}$$

т.е. ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

В ряде не всегда можно группировать члены. Например, ряд

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+ ... ,$$

является расходящимся, так как частичные суммы четного, нечетного чисел членов равны

$$S_{2m} = 0 \ (m = 1,2,3...),\ S_{2m+1} = 1 \ (m = 1,2,3...)$$

и, следовательно, нет предела его частичных сумм. После группировки членов

$$(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+ ... = 0+0+...+0+... = 0$$

получаем сходящийся ряд, сумма которого равна нулю. При другой группировке членов

$$1-(1-1)-(1-1)-...-(1-1)- ... = 1-0-0-...-0-... = 1$$

получаем сходящийся ряд, его сумма равна единице.

Приведем два утверждения:

Утверждение 1. *Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости, сумма ряда при этом остается прежней.*

***Утверждение* 2.** *Если ряд сходится неабсолютно (т.е. сходится условно по признаку Лейбница), то путем надлежащей перестановки его членов всегда можно придать сумме ряда произвольное значение и даже сделать ряд расходящимся.*

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Это знакочередующийся гармонический ряд. Первоначально, исследуем исходный ряд на абсолютно сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – это гармонический расходящийся ряд. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Поэтому исследуем исходный ряд по признаку Лейбница на условную сходимость.

Условия для $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$: 1) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ выполняются, следовательно, искомый ряд сходится условно. ■

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Применим к получившемуся знакоположительному ряду достаточный признак Коши: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2}$ (в силу второго замечательного предела). Из расходимости данного ряда по признаку Коши (так как $\frac{e}{2} > 1$) следует расходимость исходного ряда. ■

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$.

Решение. Искомый ряд является знакочередующимся, исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. К общему члену получившегося знакоположительного ряда можно применить эквивалентность $\sin\alpha \sim \alpha$, так как $\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда $\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^3$ при $n \to +\infty$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^3}{8\, n^{3/2}} = = \frac{\pi^3}{8} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (см. (2.2) – сходимость обобщенного гармонического ряда, $q = \frac{3}{2} > 1$) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 3.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{3^n + \sqrt{n^2+1}}$.

Решение. Исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2+1}}$. Из оценки общего члена получившегося знакоположительного ряда $\frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2+1}} < \frac{2^{n/2}}{3^n}$ и первого признака сравнения следует сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, т.к. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$ есть общий член сходящегося геометрического ряда со знаменателем $q=\frac{\sqrt{2}}{3}<1$. Поэтому исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{3^n+\sqrt{n^2+1}}$ сходится абсолютно.■

Пример 3.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$.

Решение. Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин. По виду общего члена полученного ряда делаем выбор достаточного признака сходимости. Применим признак Коши с общим членом $a_n=\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n=\frac{3}{2}>1$. Так как ряд, составленный из абсолютных величин, расходится по признаку Коши, то и искомый ряд расходится.

Можно было исследовать этот ряд с помощью необходимого признака сходимости. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$, то исходный ряд расходится (не выполняется первое условие Лейбница). ■

Пример 3.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{5^n n!}$.

Решение. Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Так как общий член $a_n=\frac{n^n}{5^n n!}$; $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!}$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!}:\frac{n^n}{5^n n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n(n+1)^{n+1}n!}{5^{n+1}n^n(n+1)!}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{5}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{5}<1,$$

и данный ряд сходится. Поэтому искомый ряд сходится абсолютно. ■

Пример 3.7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi n^2\right)}{n^2}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\pi n^2\right)=\infty\neq 0$, то нельзя применить эквивалентность: $\sin\alpha\sim\alpha$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей членов исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\left(\pi n^2\right)\right|}{n^2}$. Так как $\left|\sin\left(\pi n^2\right)\right|\leq 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\left(\pi n^2\right)\right|}{n^2}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Из сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ по первому признаку сравнения следует сходимость исходного ряда. ■

Пример 3.8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\cos^2(n)}$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд исследуем на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2(n)}$. Очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2(n)}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ по второму признаку сравнения одновременно расходится с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(p=1/2<1)$. Тогда, по первому признаку сравнения из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2(n)}$. Следовательно, абсолютной сходимости исходного ряда нет. Проверим выполнение условий признака Лейбница на условную сходимость. Отметим, что вместо члена $\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2(n)}$ можно рассматривать $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Условия 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}=0$ и 2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\leq\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ выполняются, следовательно, исходный ряд условно сходящийся. ■

Пример 3.9. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n}$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

Решение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{24^4}+\ldots$. Так как $a_3>10^{-5}$, а $a_4<10^{-5}$, то для вычисления приближенного значения ряда с требуемой точностью достаточно взять четыре первых слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{24^4}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{216}+\frac{1}{331776}=1{,}25463.$$

Отметим, что оценкой (3.4) в данном случае нельзя воспользоваться, так как ряд знакоположительный. ■

Пример 3.10. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!\cdot 2n}$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

Решение. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!\cdot 2n}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 4}+\frac{1}{6!\cdot 6}-\frac{1}{8!\cdot 8}+\ldots$. Так как четвертый член $\frac{1}{8!\cdot 8}\approx 0{,}000003<0{,}00001$, то согласно неравенству оценки остатка знакочередующегося ряда (3.4), для вычисления приближенного значения ряда с требуемой точностью достаточно ограничиться первыми тремя членами ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{(2n)!\cdot 2n}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 4}+\frac{1}{6!\cdot 6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{96}+\frac{1}{4320}\approx 0{,}23981.\ ■$$

Пример 3.11. Докажите, с помощью рядов, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0$.

Решение. Составим числовой ряд, общий член которого задан по формуле: $a_n=\frac{n!}{n^n}$. Полученный ряд – знакоположительный, поэтому применим к нему достаточный признак сходимости. По виду общего члена ряда останавливаем свой выбор на признаке Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+1/n\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

(использовали второй замечательный предел). Следовательно, ряд сходится. По необходимому признаку сходимости (1.3): *если числовой ряд сходится, то* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, следовательно $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0$. ■

4. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим числовые ряды, членами которых являются не вещественные числа, а комплексные.

Пусть дан ряд $$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots, \qquad (4.1)$$

где общий член ряда c_n – комплексное число, т.е. $c_n=a_n+i\,b_n$, причем $\operatorname{Re}\left(c_n\right)=a_n, \operatorname{Im}\left(c_n\right)=b_n$.

Если последовательность частичных сумм $S_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$ ряда (4.1) имеет конечный предел S: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S = a + i\,b$, то ряд называется *сходящимся*, а комплексное число S – его суммой. В противном случае, когда этот предел не существует или равен бесконечности, ряд (4.1) называется *расходящимся*.

Теория рядов с комплексными числами тесно связана с теорией вещественных числовых рядов. Вместе с рядом (4.1) рассматривают ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (4.2) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (4.3), составленные из вещественных и мнимых частей комплексных членов ряда.

Теорема (необходимое и достаточное условие сходимости). *Числовой ряд с комплексными членами* (4.1) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда с вещественными членами* (4.2) *и* (4.3). *Ряд* (4.1) *расходится, когда расходится хотя бы один из числовых рядов* (4.2), (4.3).

Это дает нам метод исследования сходимости и расходимости ряда (4.1) с комплексными членами, заключающийся в исследовании сходимости и расходимости двух числовых рядов (4.2) и (4.3) с вещественными числами, для которых применимы ранее рассмотренные приемы.

Пример 4.1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + i\,\dfrac{n}{n^4+1}\right)$.

Решение. Так как данный числовой ряд с комплексными членами, то для исследования его на сходимость составим два ряда, полученные из вещественных и мнимых частей комплексных членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}.$$

Первый из составленных рядов является обобщенным гармоническим рядом, он сходится, так как $p = 2 > 1$. Второй ряд по второму признаку сравнения эквивалентен в смысле сходимости ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, т.к. $\dfrac{n}{n^4+1} \sim \dfrac{n}{n^4} = \dfrac{1}{n^3}$ при $n \to +\infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+1}$ сходится в силу сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ ($p = 3 > 1$). По теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + i\,\dfrac{n}{n^4+1}\right)$ является сходящимся, так как сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+1}$. ■

Необходимый признак сходимости ряда (4.1):

Если ряд (4.1) *сходится, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. (4.3)

Достаточный признак расходимости ряда (4.1):

Если для ряда (4.1) $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \neq 0$, *то ряд расходится.* (4.4)

Заметим, что на практике удобно находить предел модуля общего члена ряда при $n \to +\infty$, т.к. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |c_n| = 0$.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$.

Решение. Рассмотрим общий член исследуемого ряда $c_n = \dfrac{n(2+i)^n}{2^n} =$

$= n\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^n$. Вычислим модуль этого комплексного числа: $|c_n| = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\right)^n =$.

$= n\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty \neq 0$, поскольку $\dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Следовательно, по достаточному признаку расходимости (4.4) искомый ряд расходится. ■

На ряды с комплексными членами переносится понятие абсолютной сходимости.

Ряд (4.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится знакоположительный ряд с вещественными членами, составленный из модулей членов ряда (4.1), т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,. \qquad (4.5)$$

Утверждение. *Из абсолютной сходимости ряда* (4.5) *следует, сходимость рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *и искомого ряда* (4.1)*:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + i\,b_n)$.

Этот результат дает нам удобный метод исследования сходимости рядов с комплексными членами.

Пример 4.3. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+i\right)n}$.

Решение. Приведем общий член ряда к алгебраической форме комплексного числа, умножив его на сопряженное знаменателя:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{n}+i\right)n}=\frac{\sqrt{n}-i}{(n+1)\,n}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}-i\frac{1}{n(n+1)}.$$

Составим ряд из модулей членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^2(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2(n+1)^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Так как $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$ при $n\to+\infty$, и обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится ($p=3/2>1$), то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. Следовательно, искомый ряд сходится абсолютно. ■

Справедливо и обратное утверждение: *если абсолютно сходятся ряды* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, *то абсолютно сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)$.

Пример 4.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Решение. Перепишем ряд в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n}+i\,\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$. Исследуем ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ на сходимость. Оба ряда эквивалентны ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, поэтому, они сходятся по признаку Лейбница (см. пример 3.1). Следовательно, сходится и исследуемый ряд. Если же составить ряд из модулей членов искомого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то он расходится (см. пример 2.1). Таким образом, исходный ряд является условно сходящимся. ■

Пример 4.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4i-3}{7}\right)^n$.

Решение. Проверим необходимый признак сходимости ряда с комплексными членами $\lim_{n\to\infty}|c_n| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{3}{7}+i\frac{4}{7}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{9}{49}+\frac{16}{49}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$.

Необходимый признак сходимости выполняется, но он не является достаточным. Составим ряд из модулей членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4i-3}{7}\right|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

Полученный ряд является геометрическим рядом. Он сходится, так как $q = 5/7$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходящийся. ■

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определения сходящегося и расходящегося рядов. Исследуйте сходимость ряда, составленного из членов геометрической прогрессии.
2. Докажите необходимый признак сходимости.
3. Дайте определения линейных операций над числовыми рядами.
4. Докажите, что отбрасывание конечного числа членов ряда не изменяет его сходимости (расходимости). Покажите, что сумма ряда равна сумме первых его n членов, сложенной с суммой ряда, полученного из данного ряда отбрасыванием этих n членов.
5. Докажите теорему о сравнении рядов с положительными членами. Приведите пример применения этого признака.
6. Докажите признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов. Приведите пример применения этого признака.

7. Докажите признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Приведите пример применения этого признака.
8. Докажите интегральный признак Коши сходимости ряда. Приведите пример применения этого признака.
9. Дайте понятие знакопеременного ряда, его условной и абсолютной сходимости. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.
10. Докажите, что из абсолютной сходимости знакопеременного ряда следует его сходимость.
11. Докажите признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Приведите пример на применение этого признака.
12. Покажите, что при замене суммы ряда типа Лейбница суммой первых его членов допускаемая абсолютная погрешность не превосходит модуля первого отброшенного члена.
13. Дайте определение сходимости рядов с комплексными членами. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов. Сформулируйте методы исследования на сходимость ряда с комплексными членами.
14. Используя неравенства

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|,$$

$$|x| \le |x + iy|; \; |y| \le |x + iy|,$$

докажите необходимый и достаточный признаки сходимости ряда с комплексными членами.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти сумму ряда:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n-5}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

4. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

7. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}$.

11. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-14n-48}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n+1)(n-1)(n-2)}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n-1)(n+1)}$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.

24. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{49n^2 + 21n - 10}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя признаки сравнения:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n)}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}\ln(n+1)}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(3n)}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln(n)}{n^3-5}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(n)}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos(\pi n))}{2n^2-1}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,(n^2+1)}{n\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin((n-1)/n)}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin^4(n)}{(n+1)\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4(\pi n/2)}{4^n+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\cdot\ln(n)}{n^2-3}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\cdot(2+\sin(\pi n/2))}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(3n)}{9^n+3}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}n\right)$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot arctg\sqrt{n^2-1}}{\pi\cdot\sqrt{n^2-n}}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(\pi n/2)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\left(2+(-1)^n\right)}{\ln(1+n)}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2(6n)}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{n-4}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(\pi n/2)}{n^2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n-1}\cdot\ln(n)}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos(\pi n/2))\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+10}}$; б) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^3\cdot\ln(n)}{n^4-4n^3}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2+\sin(\pi n+\pi/2)}{3n-2}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg\, n}{\sqrt{n(n+2)}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos\left((n^2-1)/n^2\right)}{\sqrt[4]{n^4-2}}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot\cos^2(n)}{n^4+4}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{\sqrt[3]{n^3-n^2}}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3+n+1}$; б) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n-5}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/3)}{3^n+21}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2(2+\cos(\pi n/2))}$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^5+n+1}}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-4n}}\cdot\cos\left(\frac{2+(-1)^n}{6}\right)$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+n}\cdot\arcsin\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\cdot arctg\sqrt{n^2-1}}{\pi\cdot\sqrt[4]{n^4-2n^3}}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+6}\cdot arctg\left(\frac{1+(-1)^n}{2}n\right)$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\sin^2(3n)}$.

24. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}\cdot\arccos\left(\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}\right)$; б) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1+\cos^2(2^n)}{\sqrt{n}-2}$.

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2^n)}{n^2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{arctg\left(4+(-1)^n\right)}{\ln(n)}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(4^n)}{n^4+2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$.

3. Применяя радикальный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 arctg^n\frac{\pi}{3n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}\cdot(n-1)^2$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

4. Применяя признак сравнения и интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$

7. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n+7)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5})}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$

13. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$

14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n-3)\ln^2(n/2)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$

22. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$

5. Исследовать на сходимость ряды по признаку Даламбера:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3^n (n-1)!}$.

2. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{7}{(n-3)\,n!}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

4. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot (n-5)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+2} \cdot (n^3+2)}{(n-1)!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n)! \cdot 5^{n+1}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n \cdot n!}{(2n+1)!}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n (n^2+2)}{(n+1)!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+2)!}{4n+5} \cdot \dfrac{1}{7^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{(n+2)!}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \dfrac{2}{5^n}$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(3n)!}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(4^n+3)(2n)!}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{n+1}}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)!}{6^{n-1}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+3)!}{n^n}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2+1}}{(n+1)!}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n+2} \cdot n!}{n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot (n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+2)! \cdot 5^{n+1}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$.

6. Исследовать на сходимость ряды, используя подходящие признаки сходимости:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n}}{n^{n+1}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt[3]{n\cdot 5^{n}}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^{2}+5n}{4n^{2}-6n}\right)^{n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)^{n}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{3}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(4n+3)^{n}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^{n}-n^{3}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^{2}+3n}-\sqrt{n^{2}-n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^{2}+1)\cdot arctg(n)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}\cdot e^{n/2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\ln\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4^{n}+n^{2}}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}(n+1)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^{2}+1}\right)^{2}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{\pi\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^{4}+1}}\right)$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{2^{n}+2^{-n}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{3}(n+2)}$.

24. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^{-n}(n^{2}+1)}{n-1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot arctg\left(\frac{2}{n}\right)$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n^{2}}\cdot\sin^{2}n$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n^4+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(5n)}{n^5}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arcsin(n/(n+1))}{\sqrt{n^2+n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n\sqrt{n^2+1}}{n^3}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$.

5. а) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

6. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{2n+3}}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{6n}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{3^n}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\left(\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln^2(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n-1}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot tg\left(\frac{1}{n}\right)$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n\sqrt{n}}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n^2-n+1}{n^2+3n+2}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sin\left(\frac{\pi\left(n^2+n+1\right)}{3n^2+5n+6}\right)\right)^n$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{n+2}}{n!}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\sin(\pi n/6)}$; б) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n-n^2}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln\left(n+e^n\right)}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\ln\left(\frac{3n^2+n+1}{2n^2+n+1}\right)\right)^n$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-5n}{2n+3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{(\ln 3)^n}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{2n+1}\cdot\left(n^2+3n\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{\sqrt{2^{n-1}}}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}\cdot tg\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{\sqrt{n^3}}$.

25. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n n\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n^2-1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2n)^n}{n^{n+2}\cdot n!}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot\frac{n^2+1}{\sqrt{2^{n-1}}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/2)}{\sqrt[3]{(n-3)^4}}$.

1. Исследовать на сходимость с помощью признаков сравнения (применять таблицу эквивалентностей):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2)\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot arctg\left(\frac{1}{n+2}\right)$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{n^2+2}\right)$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot arctg\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}\right)$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}\right)$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{1}{(n+2)(\sqrt{n}+1)}\right)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(\pi/(4n))}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{n+2}{(n^2+1)\sqrt{n}}\right)$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos(2\pi/n)\right)$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\right)$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot arctg^n\left(\pi/(3n)\right)$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot tg\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right)$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}\right)$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n}{(n^3+5)^{4/3}}\right)$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \cdot \ln\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/(n+2)}-1\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n\left(\pi/n\right)$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \arcsin\left(\frac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$.

9. Докажите с помощью рядов, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$:

1. $a_n = \dfrac{2^{3n}}{n!}$

2. $a_n = \dfrac{n^n}{(3n)!}$

3. $a_n = \dfrac{(n+5)!}{n^n}$

4. $a_n = \dfrac{(2n)!}{5^{n^2}}$

5. $a_n = \dfrac{(2n+1)\ln(1/n)}{n+\sqrt{n}}$

6. $a_n = \dfrac{2^n}{(2n-3)!}$

7. $a_n = \dfrac{5^{n-1}}{7^{n+3}\cdot\sqrt{n}}$

8. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\left(\dfrac{n^3+n^2+1}{n^3+2n^2+1}\right)$

9. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{3n+2}\right)^n$

10. $a_n = \dfrac{5}{n\left(\ln^2 n+1\right)}$

11. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}n}$

12. $a_n = arctg\,\dfrac{\sqrt{2}}{(2n^2+1)}$

13. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

14. $a_n = \dfrac{1}{3^n+\sqrt{n^2+1}}$

15. $a_n = \dfrac{7}{n\cdot\ln^3(n+1)}$

16. $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n}$

17. $a_n = n^2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

18. $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$

19. $a_n = \dfrac{1}{n!}\,arctg\left(\sqrt{n}\right)$

20. $a_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

21. $a_n = \dfrac{n^n}{1!3!5!\ldots(2n-1)!}$

22. $a_n = \dfrac{n}{2^n+n^2}$

23. $a_n = \dfrac{(n+3)!}{(n+1)^n}$

24. $a_n = \dfrac{tg\,(1/n)}{n+\sin^2(n)}$

25. $a_n = \dfrac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$

26. $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n}$

10. Вычислить приближенно сумму числового ряда с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+3}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\cdot 5^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-1)^n}{(n^2+1)\cdot 2^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n^3+2^n)}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-5)^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+6n+10}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{7^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{6^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+6)\cdot 4^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10^{n-1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n-1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{1+5n}\right)^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-2n} \cdot 3^{n+2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{3^n+3n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$

11. Исследовать на сходимость ряд с комплексными членами:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2i)^n}{n\cdot 13^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-2i^9}{1+\sqrt{n}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-i)^2}{n^3+1}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(2+i)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n+i\,tg\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{n\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-i}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(3i-1)^n}{10^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-i^3}{e^n}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{6}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^7-i^4}{n\cdot(n+1)}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5-3i}{8}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n+i\frac{5^n}{(n+2)!}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+i}{2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2i}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+i)^2\cdot n}{5n^2+6}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-i}{(n+10)^3}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(i+1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n}-2i}{n+1}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2i}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(3+i)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+i\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}+10}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{i\,n^2+n}{6n^3+7}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^{2n}}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2+i\,n}{n(n+1)(n+2)}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1-i)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i\,n}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5i-1}{6}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5^n\,i}{10^n}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3i)^n}{11^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\,\frac{2^n}{n!}\right)$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-2i)^{2n}}{10^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sqrt{n^3}+3i}{\sqrt{n^5+2}}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+5)^n}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n^2}+i\,\frac{e^n}{(2n)!}\right)$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-2i)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+i\cdot tg\,\frac{1}{n^2+1}\right)$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-i)^2}{\sqrt{n+7}\cdot(n+1)}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(2i-3)^n}{15^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+i}$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7-i}{8}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{e}{6}\right)^n+i\cdot\frac{n^3}{(n+1)!}\right)$.

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2-i)^n\cdot n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n\,i}{2i\,n^2-\sqrt{3}}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{6-2i}\right)^n$; б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\,\frac{5}{n^2-7}+i\,\frac{1}{5^n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1983.
2. Задачник-практимум по высшей математике. Ч. III: Ряды. Теория функций комплексного переменного. Ряды и интеграл Фурье. /Под. ред. Волкова.– СПб.: изд-во СПбГУ, 1997.
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы и ряды). М.: Наука, 1981.
4. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. /Под редакцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. –М.: Наука, 1981.
5. Данко П.Е., Попов Л.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1974, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

Татьяна Александровна Матвеева
Виктория Борисовна Светличная
Неля Николаевна Короткова

Числовые ряды

Учебное пособие

Редактор Е.М.Марносова
Темплан 2003., поз.№
Лицезия ИД № 04790 от 18.05.2001

Подписано в печать _________________. Формат 60х84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл.печ.л.
Уч.-изд.л.   Тираж 250. Заказ____.

Волгоградский государственный технический университет.
400131 Волгоград, пр. Ленина,28.
РПК ”Политехник”. Волгоградского государственного технического университета.
400131 Волгоград, ул. Советская, 35.