Нигматуллин Р.Р. Скворцов А.И. Недопекин О.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ “МЕХАНИКА”

К а з а н ь 2 0 1 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ “МЕХАНИКА”

(Учебно-методическое пособие
для студентов первого курса физического факультета)

авторы пособия:
профессор кафедры теоретической физики *Нигматуллин Р.Р.* ,
доцент кафедры общей физики *Скворцов А.И.*
ассистент кафедры общей физики *Недопекин О.В.*

Рецензент:
д. ф.-м. н., проф. кафедры общей физики КГУ *Фишман А.И.,*

В пособии описаны некоторые стандартные способы решения задач по разделу "Механика" курса общей физики. Приводится необходимый для этого математический аппарат. Пособие рассчитано на студентов первого курса физического факультета.

©Нигматуллин Р.Р. Скворцов А.И. Недопекин О.В.
© Физический факультет Казанского госуниверситета.

Какую цель преследует это пособие?

Опыт преподавания курса “Механика” для студентов первого курса физического факультета Казанского государственного университета в течение пяти лет выявил следующие особенности и нерешенные проблемы в подготовке студентов-первокурсников, поступающих на физический факультет.

За очень редкими исключениями, большинство студентов, поступающих на физический факультет, *не умеет* решать задачи по физике. Это неумение носит общий характер и не зависит от школы, которую заканчивает абитуриент.

У большинства студентов-первокурсников весьма слабая подготовка по математике и явно недостаточная по физике. В частности, многие не умеют раскладывать вектор по осям выбранной системы координат, складывать и вычитать векторы, не знают, чему равен модуль вектора, не говоря уже о выражении скалярного произведения через компоненты векторов-сомножителей. Понятие векторного произведения, операции дифференцирования и интегрирования элементарных функций представляют собой следующий “камень преткновения”, который необходимо осилить первокурснику в кратчайшие сроки. Восполнение этих школьных пробелов требует времени и значительных усилий как от студента так и от преподавателя, а этих компонентов студенту и преподавателю (в том числе), как правило, не хватает.

Если теперь раскрыть любой задачник по физике средней трудности, например, книгу И.Е. Иродова “Задачи по общей физике” (этот задачник был выбран только по причине его наибольшей доступности для студента), то решение задач по физике, начиная с раздела “Кинематика”, предполагает, что студент хорошо знает основы интегрального и дифференциального исчисления, вплоть до умения интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Зная, что студенты этого делать не умеют, любой преподаватель, искренне стремящийся научить студента первокурсника самостоятельному навыку решать задачи по физике, сталкивается с весьма серьёзной проблемой, решение которой требует от него больших затрат времени и усилий на каждого студента.

К сожалению, курсы по высшей математике, которые идут в то же самое время, не помогают в устранении этих школьных пробелов, так как начинается обучение с изучения студентами пределов и функции одной переменной. Это “несовпадение обучения по математике и физике” мало помогает преподавателю по физике.

Если обратиться к опыту преподавания физики студентам младших курсов в развитых европейских странах, то, обобщая личные впечатления от увиденного и услышанного в университетах Великобритании (Chelsea-college, King’s college), Франции (Universite de Paris-Sud XI, ISMANS), Италии (Bologna University), можно с уверенностью утверждать, что там, “за бугром”, преподаватели сталкиваются с теми же проблемами, но решение их в значительной степени переложено “на плечи компьютеров”. В памяти компьютеров записаны основы читаемого курса с методическими указаниями и комментариями, и к каждому курсу всегда имеется минимальный набор задач с подробным методическим разбором наиболее типичных из них. Решение задач из этого минимального набора является той первой преградой, которую необходимо преодолеть каждому студенту, прежде чем быть допущенным к контрольной работе и сдать экзамен профессору. Распечатка “успехов” каждого студента доводится до сведения преподавателя, читающего лекции и принимающего экзамен, причём это могут быть разные люди. Например, в английских колледжах практикуется такая система, когда преподаватель, читающий лекции на одном потоке, принимает экзамен у студентов другого аналогичного потока и наоборот. Этим достигается “усреднение” взаимных пристрастий (исключение “любимчиков” и “негодяев”) преподавателя к студенту в данном потоке, унификация требований, предъявляемых к сдаче этого курса, и взаимная проверка преподавателей. Исключением из этого правила могут быть (по решению Ученого Совета данного колледжа) только те профессора, чьё педагогическое мастерство и компетенция не вызывают никаких сомнений.

Отметим также, что в университете г. Болоньи (Италия) информация вызывается на мониторы, установленные в библиотеках, из центрального вычислительного центра. Студенты-инвалиды на период обучения снабжаются модемами, компьютерами (под залоговую плату) и могут заниматься, не выходя из своего дома.

Некоторые идеи, реализованные “у них”, могут оказаться полезными для обсуждения и принятия конструктивных решений на нашем факультете. К сожалению, в настоящее время мы не настолько богаты, чтобы написать “компьютерные” курсы по общей физике с полным методическим обеспечением, оснастить ими, в достаточной мере, читальные залы и сделать их максимально доступными для каждого студента. Но, если мы хотим не потерять наш потенциальный контингент и научить выпускника нашего факультета умению и навыкам ставить и решать проблемы науки, техники, связанные не только с физикой, и сделать его конкурентоспособным с выпускниками других факультетов и вузов, то необходимо уже сейчас приступить к решению вышеперечисленных проблем.

Цели и задачи этого руководства состоят в том, чтобы

- в какой-то мере компенсировать недостатки и дефекты школьной подготовки и разгрузить тем самым время преподавателя по физике, (вынужденного дополнительно тратить время и давать сведения по математике)
- обеспечить самопроверку и контроль минимальных знаний по “школьной” математике и физике
- опираясь на методические указания, научить студента решать задачи средней трудности по механике в рамках общедоступного задачника И.Е.Иродова “Задачи по общей физике”.

Авторы надеются, что это пособие окажет пользу студенту первокурснику и послужит основой для разработки в будущем компьютерного методического пакета для всех разделов общей физики.

Профессор *Нигматуллин Р.Р.*

Структура и содержание пособия

Методические указания по механике построены по следующему принципу:

Пособие состоит из 11 разделов, которые включают в себя основные 8 разделов курса “Механика”, перечисленных в задачнике И.Е.Иродова с включением раздела 4.1 по механическим колебаниям, а также двух разделов: по математике с добавлением минимальных сведений о вычислениях с приближенными числами и теории размерности.

Перед каждым разделом приводятся с минимальными комментариями необходимые теоретические формулы, без знания которых решение задач раздела становится невозможным, и решения нескольких типовых задач, призванные помочь студенту разобраться самостоятельно в разделе в целом.

Хотя предлагаемые методические указания “сделаны” под задачник И.Е. Иродова, авторы полагают, что методические рекомендации общего характера и разобранные примеры с активными индивидуальными консультациями преподавателя на практических занятиях (как это практикуется в университетах развитых европейских стран) помогут в приобретении навыка решения задач по механике и послужат базой для понимания других разделов общей физики.

Несколько советов общего характера к решению задач по физике

Если Вы действительно хотите, научиться решать задачи по физике и получать удовлетворение от самостоятельно решенной задачи, то полезно прочесть эти советы, прежде чем приступить к “практическому плаванию”. Процесс и выработка навыка решения задач по физике составляет, на наш взгляд, основу подготовки выпускника физического факультета Казанского государственного университета. Выработка этого навыка очень напоминает процесс обучения плаванию. Можно детально и основательно разобраться в теории каждого стиля плавания, но первый же самостоятельный заплыв в бассейне быстро отделит “теоретиков” от “практиков”. Аналогичная ситуация наблюдается и в физике. Можно очень хорошо разбираться в теории, но первая же проверка её усвоения на задаче сразу отделит тех, кто действительно разбирается в физике, от тех, кто усвоил теорию формально и не в состоянии применить полученные знания на практике.

Может ли человек научиться плавать, если у него нет интереса, да и плавает за него тренер. Ответ на этот вопрос будет положительным только в том случае, когда есть желание научиться решать задачи, проверив при этом свои способности к творчеству, и понять свои собственные и чужие ошибки в процессе обучения этому навыку, требующему, кроме интереса, силу воли, упорство и время.

Прежде чем приступить к решению конкретной задачи, полезно ответить на ряд вопросов общего характера:

Что такое идеализация физической задачи?

Пытаясь решить физическую задачу, Вы сталкиваетесь уже с идеализированной задачей, когда автор задачника вводит ряд условий, упрощающих задачу. Эти условия искусственно отсекают рассматриваемое физическое явление от других дополнительных условий, влиянием которых можно пренебречь. Таким образом, идеализированная задача – это поставленная задача, когда введены разумные физические упрощения и выделен класс изучаемых (в данном случае механических) явлений. *Разумная идеализация конкретных физических задач – это важнейшая черта физики как науки и талант ученого-физика, изучающего данное явление. Без такого разумного пренебрежения в физике невозможно было бы решить ни одной физической задачи.*

Поэтому при решении задачи очень важно отметить для себя упрощающие ограничения, допущения и предположения, которые присутствуют в задаче в скрытом или явном виде. Эта предварительная работа помогает написать необходимые формулы, которые помогают раскрыть связи между известными физическими величинами и величинами, подлежащими определению. В механике как разделе физики вводится множество таких понятий, которые часто используются при решении идеализированных задач. Полезно еще раз вспомнить такие важные для механики идеализированные понятия как *материальная точка*, *абсолютно твёрдое тело, абсолютно упругий и неупругий удары, невесо-*

мый блок, нерастяжимая нить и т.д. Важно всегда задать себе следующий вопрос: какое упрощающее предположение стоит за идеализированным понятием и каковы границы его применимости?

Приведём пример:

Снаряд выпущен из орудия под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью v_0=500 м/с. Найти дальность полета снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Проводим предварительный анализ задачи на “идеализацию”.

Задача поставлена. Задача является идеализированной. Одна идеализация в задаче указана явно – “сопротивлением воздуха пренебречь”. Однако другие упрощающие условия в задаче только подразумеваются. Неявно предполагается, что:

- орудие расположено на Земле,
- не учитывается движение Земли вокруг Солнца,
- не учитывается вращение Земли вокруг собственной оси,
- предполагается, что направление вектора ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ в любой точке траектории имеет одно и тоже направление,
- ускорение свободного падения на Земле считается постоянным: $g = 9{,}8$ м/с^2,
- снаряд принимается за материальную точку.

Попробуйте указать границы применимости каждого из вышеперечисленных предположений и сформулировать условия, когда влияние каждого из отброшенных факторов на дальность полета снаряда может оказаться существенным.

Какой основной вывод можно сделать из этого анализа?

Важно научиться “видеть” упрощающие предположения в каждой задаче и постараться обобщить задачу на тот случай, когда отброшенное предположение оказывается существенным. Можно руководствоваться следующим принципом: “Понять – значит обобщить”. Это умение может оказаться существенным при оценке вашей квалификации как физика-исследователя.

Какие задачи могут встретиться, и возможна ли их классификация?

Физические задачи имеют множество признаков. Полезно выделить наиболее существенные из этих признаков, чтобы определить группу методов пригодных для решения этих задач. При изучении физического явления одни физические величины являются известными, а другие – нет. Поэтому если попытаться ответить на вопрос, что же такое физическая задача, то можно дать такое определение:

Физическая задача – это словесная модель физического явления с некоторыми известными и неизвестными физическими величинами, которые существенным образом (этап “идеализации” произведён) характеризуют это явление. Решить физическую задачу – это значит восстановить неизвестные связи и найти неизвестные величины.

Из этого определения следуют две квалификации физических задач. Первая основана на различии методов нахождения неизвестных величин, а вторая учитывает содержание данного явления, которое отражает данная физическая задача.

Деление по методу предполагает, что для нахождения неизвестных физических величин можно выбрать два пути: *экспериментальный и теоретический*. При первом методе предполагается, что неизвестные величины определяются из опыта путем измерений. В теоретическом методе неизвестные величины определяются из анализа физических законов, управляющих этим явлением, что предполагает решение замкнутой системы математических уравнений: алгебраических, дифференциальных, интегральных, функциональных, из которых можно восстановить неизвестные физические величины. В данной методической разработке предполагается решение теоретических задач, без использования измерений. Классификацию теоретических задач проведём по степени анализа физического явления и разделим на два больших класса: *поставленные и непоставленные*.

Под *непоставленной* задачей понимается такая задача, в которой не приводится совокупность необходимых данных для получения управляющих уравнений (за исключением может быть табличных величин) или не проведена её идеализация или отсутствуют оба признака.

Пример задачи П.Л. Капицы взятый из брошюры: “Понимаете ли вы физику” (изд-во “Знание”, Москва 1968. под ред. Л.Асламазова и И.Слободецкого):

Оценить порядок скорости, с которой человек должен бежать по воде, чтобы не тонуть.

В этой задаче не указана связь между такой физической величиной как скорость и физическими характеристиками воды, которые характеризуют условия плавания тел в жидкости (плотность, вязкость, поверхностное натяжение и др.). Не проведён этап идеализации (выбор модели жидкости), из которой можно получить уравнения, связывающие характеристики жидкости с движением твёрдого тела по её поверхности.

В *поставленной* задаче не только обеспечена полнота величин и их значений, необходимых для её решения, но и проведён процесс идеализации. Здесь нет необходимости приводить пример поставленной задачи, так как значительное их число приводится в многочисленных задачниках по курсу “Общей физики”.

Основной вывод, который можно сделать из этого анализа, следующий: задачи, с которыми встречается студент при изучении физики являются поставленными и их решение предполагает знание основных закономерностей изучаемого явления и понимания физических формул, которые “управляют” данным явлением. Задачи, с которыми встретится студент как начинающий физик-исследователь после окончания университета, в большинстве случаев уже будут непоставленными и для их решения необходима “постановка” (выработка модели) и весь арсенал методов и законов, необходимый для их решения.

Существуют ли некоторые общие методы решения задач по физике?

Даже при решении поставленной задачи полезно выделить некоторые этапы, которые существенно помогают при её решении.

1.Физический этап начинается с ознакомления с условиями задачи и заканчивается составлением *замкнутой* системы уравнений (в большинстве случаев дифференциальных или алгебраических), в число неизвестных которой входят искомые величины. После получения замкнутой системы уравнений на основании связей (законов) для неизвестных величин задача считается физически решенной. При этом весьма полезным оказывается *графическое* представление исходной информации (рисунок, графики функций, которые в визуальной форме помогают найти место искомых физических величин в изучаемом физическом явлении).

2.Математический этап начинается *решением замкнутой* системы уравнений и заканчивается получением формулы для неизвестных величин через известные и численного ответа. Задача решена правильно только в том случае, если получен верный общий и численный ответ.

3.Анализ решения проводят после получения решения в общем виде и численного ответа. На этом этапе выясняют от каких физических величин зависит искомая величина, при каких физических условиях эта зависимость осуществляется и т.п. В заключение общего анализа рассматривается возможность постановки других физических задач путем изменения, обобщения и преобразования условий данной задачи. При анализе общего решения методом теории размерностей устанавливается правильность полученного решения, что является необходимым, но недостаточным признаком правильности полученного решения. При анализе численного ответа необходимо проверить:

а) размерность искомой физической величины;

б) соответствие полученного ответа физически разумным значениям искомой величины;

в) при получении многозначного ответа– соответствие полученных ответов условиям задачи.

Эти этапы, впрочем, зачастую перекрываются, например удобную для решения систему уравнений, иногда проще получить, проводя некоторые простые математические операции в записываемых уравнениях, а размерности физических величин можно (и нужно) проверять и при записи исходных уравнений и при проведении математических выкладок.

Можно ли выделить ряд общих методов, которые, обладая широким диапазоном применимости, помогли бы студенту решить любую задачу из общего курса физики?

Ответ на этот вопрос не может быть однозначным, но тем не менее полезно выделить *два общих метода* (не претендующих на роль универсальных), полезных для выработки умения по решению физических задач. Методы, излагаемые ниже, можно рассматривать как полезные советы, призванные помочь студенту в его самостоятельной деятельности по решению физических задач.

1.Метод анализа физической ситуации задачи.

Любая физическая задача выражает собой физическое явление, группу явлений или его какую-то часть. Соотношения между исходными и искомыми физическими величинами содержатся внутри анализируемого явления. Для того, чтобы найти эти связи, приводящие, в конечном итоге, к системе замкнутых уравнений, необходимо:

- знать и понимать сущность данного явления,
- систему физических законов, “управляющих” данным явлением,
- систему физических величин, входящих в данное явление,
- границы применимости физических законов,
- группу факторов и явлений, приведших к “идеализации” данной задачи,
- умение выделить все эти элементы в задаче.

Приступая к предварительному анализу задачи после её первого прочтения, полезно записать её условия, осмыслить данные, искомые величины и попытаться “нащупать” связи между ними. Для этого необходимо сделать чертеж, схему, рисунок, обозначить на них все данные и искомые величины и, если это возможно, вычертить графики заданных физических величин. Такая предварительная работа позволяет наглядно представить физическое явление задачи.

Как известно, физическое явление содержит качественную и количественную стороны. Поэтому сначала полезно определить качественную характеристику явления (чем это явление отличается от других, по каким причинам оно происходит, в чём его сущность и т.д.). Затем необходимо выделить физическую систему, произвести анализ этапа “идеализации” и выделить физические процессы, в которых участвуют выделенные объекты системы. После этого этапа попытаться установить количественные связи и соотношения между физическими величинами для того, чтобы получить замкнутую систему уравнений для искомых физических величин.

Поэтому метод анализа физических явлений отвечает на вопросы: с чего начать?, что и как надо делать? и полезен на физическом этапе решения задачи.

2. Система обще-частных методов. Методы дифференцирования–интегрирования (Д-И).

Этих методов сравнительно немного. Из них можно выделить: *кинематический, динамический, метод законов сохранения* и *метод дифференцирования и интегрирования (Д-И).* Суть первых трех методов будет изложена в последующих разделах 3-5. Суть же метода Д-И основана на двух принципах: возможности представления закона в дифференциальной форме и принципе суперпозиции (если физические величины, входящие в закон, аддитивны).

Пусть, соотношение между физическими величинами K, L, M имеет вид:

$$K=LM$$

Допустим также, что условием применения этой формулы служит требование $L=const$ и для величины K выполняется принцип суперпозиции. Как распространить данное соотношение на случай $L\neq const$, если известно, что $L=f(M)$?

Для этого выделим малый промежуток dM, на котором для заданного M можно приближенно считать L постоянной. Тогда для малого участка dM исходное соотношение примет вид:

$$dK=L(M)dM$$

Используя принцип суперпозиции, получим значение величины K в виде

$$K = \int_{M_1}^{M_2} L(M)dM \;,$$

где M_1 и M_2 – начальное и конечное значения величины M.

Таким образом метод Д-И состоит из двух частей:

1. в начале необходимо представить исходное соотношение в дифференциальной форме;
2. во второй части метода производят суммирование (интегрирование). Наиболее трудными моментами во второй части являются: выбор переменной интегрирования и определение пределов интегрирования (пределов применимости исходного закона). Для этого выбирают наиболее существенную переменную и определяют функцию $L(M)$. После этого определяют пределы интегрирования и вычисляют искомый интеграл.

Пример. *Какова связь между пройденным путем S(t) и величиной модуля скорости v(t) для произвольного момента времени?*

Из курса школьной физики известно, что при равномерном и прямолинейном движении связь между физическими величинами S и v имеет вид $S=vt$

Для некоторого малого интервала времени dt, в пределах которого можно считать $v(t)=const$, эта связь сохраняется.

$$dS = v(t)dt$$

Отсюда для произвольного интервала времени и произвольного закона $v(t)$ связь между пройденным путём и скоростью выразится в виде интеграла

$$S(t) = \int_0^t v(t)dt$$

Аналогичные формулы можно получить для работы в случае переменной силы. Метод Д-И целесообразно применять для задач, где приходится иметь дело с распределением масс, скоростей, сил и т.п. в зависимости от времени или координаты.

Раздел 1. Минимальные сведения по математике, необходимые для решения задач по курсу механики

В этом разделе приводятся минимальные сведения по математике, которые необходимы для того, чтобы приступить к решению задач по механике. Информация даётся в предельно сжатой форме. Практической стороне отдаётся приоритет по отношению к математической строгости. Авторы предполагают, что студент, ознакомившись с этим разделом, обратится к соответствующим учебникам и задачникам по курсу школьной математики, чтобы восполнить возможные пробелы и восстановить полузабытые разделы.

1.1 Векторы и действия над ними

Вектор – математический объект, характеризующийся *величиной и направлением.*

Если в n-мерном пространстве задана система координат (СК) (т.е. система n штук взаимно-перпендикулярных единичных (ортов) $\mathbf{e}_j$[1]), то задание вектора в этом пространстве эквивалентно выбору n чисел, отложенных по осям заданной СК. Математическая запись вектора в трёхмерном пространстве в базисе ортов $\mathbf{e}_j$ ($j=x,y,z$) выглядит так:

$$\mathbf{A}(A_x,A_y,A_z) = A_x\mathrm{e}_x + A_y\mathrm{e}_y + A_z\mathrm{e}_z\,, \qquad (1.1)$$

где A_x, A_y, A_z – координаты вектора **A**.

Длина (модуль) вектора

определяется выражением:

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,. \qquad (1.2)$$

***Векторная сумма* A+B**

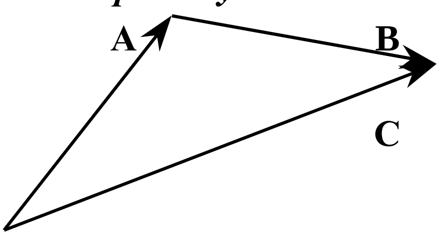


Рис. 1.1

двух векторов **A** и **B**, соответствующая геометрической сумме направленных отрезков определяется *правилом параллелограмма* (см. рис. 1.1).

***Произведение вектора* A *на скаляр* s**

есть вектор, в раз $|s|$ больший, чем исходный вектор **A**. Если $s>0$, направление нового вектора совпадает с направлением **A,** если $s<0$, новый вектор противоположен по направлению вектору **A**.

[1] Здесь и далее буквы, выделенные жирным шрифтом, обозначают векторы. Если в тексте встречается одна и та же буква, в одном случае выделенная жирным шрифтом, а в другом – курсивом, то в первом случае буква обозначает вектор, а во втором – его длину. Например, **A** читаем “вектор A”; *A* – “длина вектора A”.

***Вычитание векторов* A–B**

сводится к сложению вектора **A** и –**B:**

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \qquad (1.3)$$

Выражения в прямоугольных декартовых координатах для суммы и разности двух векторов, а также для произведения вектора на число получите самостоятельно на основе (1.1).

***Скалярное произведение* A·B**

(другие обозначения (**A,B**), или (**AB**) двух векторов **A** и **B** с углом γ между ними в результате даёт скаляр, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\cdot B\cos(\gamma). \qquad (1.4)$$

Два ненулевых вектора **A** *и* **B** *взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда* **AB** = 0.

Свойства скалярного произведения.

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA};\quad \mathbf{AA}=A^2\geq 0;\quad |\mathbf{AB}|\leq AB;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC};\quad (s\mathbf{A})\mathbf{B}=s(\mathbf{AB});\quad \cos(\gamma)=\mathbf{AB}/(AB);$$

Если $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$, то $\mathbf{C}^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-2\mathbf{AB}$ (*теорема косинусов*).

Выражение скалярного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

$$\mathbf{e}_x^{\,2}=\mathbf{e}_y^{\,2}=\mathbf{e}_z^{\,2}=1;\qquad \mathbf{e}_x\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z=0;$$

$$\mathbf{AB}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z; \qquad (1.4а)$$

$$A_x=\mathbf{Ae}_x;\quad A_y=\mathbf{Ae}_y;\quad A_z=\mathbf{Ae}_z.$$

***Проекция вектора* A *на направление* s**

$$A_s=\mathbf{As}/s \qquad (1.4б)$$

Угол между двумя векторами

может быть выражен через их координаты:

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{AB}}{AB}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\cdot\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}} \qquad (1.5)$$

***Векторное произведение* A×B**

(другое обозначение [**A,B**]) двух векторов есть вектор, *модуль* которого равен

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = A\cdot B\,|\sin(\gamma)| \qquad (1.6)$$

(совпадает с площадью параллелограмма, построенного на векторах **A** и **B)**. Его *направление* перпендикулярно к обоим векторам **A** и **B** и совпадает с направлением правого винта при его повороте от **A** к **B** на угол меньший π.

Два вектора параллельны или антипараллельны друг другу тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

Свойства векторного произведения.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A};\quad \mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0;\quad (s\mathbf{A})\times\mathbf{B} = s(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C};$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0.$$

Выражение векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

$$\mathbf{e}_x\times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y\times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z\times \mathbf{e}_z = 0;\quad \mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z;\quad \mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x;\quad \mathbf{e}_z\times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y;$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{e}_z =$$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.6a}$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{ABC}). \tag{1.7}$$

Последнее равенство выражает собой сокращенное обозначение смешанного произведения и отражает *свойство циклической перестановки векторов в смешанном произведении*.

Произведения, содержащие более двух векторов.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}) \text{ (\textit{Правило} “бац”–”цаб”)}, \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{AC})(\mathbf{BD}) - (\mathbf{AD})(\mathbf{BC}),$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{AB})^2,$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{ACD})\mathbf{B} - (\mathbf{BCD})\mathbf{A} = (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D}.$$

В последнем равенстве три вектора в одной скобке обозначают смешанное векторное произведение.

Решение некоторых векторных уравнений

(Предполагается, что $(\mathbf{ABC}) \neq 0$)

Система	Решение
$\mathbf{AX} = p$ $\mathbf{A}\times\mathbf{X} = \mathbf{B}$	$\mathbf{X} = \mathbf{A}\dfrac{p}{A^2} + \mathbf{B}\times\mathbf{A}\dfrac{1}{A^2}$ (1.9)
$\mathbf{AX} = p$ $\mathbf{BX} = q$ $\mathbf{CX} = r$	$\mathbf{X} = \dfrac{p}{\mathbf{ABC}}\mathbf{B}\times\mathbf{C} + \dfrac{q}{\mathbf{ABC}}\mathbf{C}\times\mathbf{A} + \dfrac{r}{\mathbf{ABC}}\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (1.10)

1.2 Дифференцирование скалярных и векторных функций

Производной функции $f(x)$ в точке называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента.

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Производные часто встречающихся функций

Таблица 1.1.

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
x^a	ax^{a-1}	$\mathrm{ctg}(x)$	$-1/\sin^2(x)$
e^x	e^x	$\sec(x)$	$\sin(x)/\cos^2(x)$
a^x	$a^x\ln(a)$	$\mathrm{cosec}(x)$	$-\cos(x)/\sin^2(x)$
$\ln(x)$	$1/x$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\log_a x$	$1/x\ln(a)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{th}(x)$	$1/\mathrm{ch}^2(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathrm{cth}(x)$	$-1/\mathrm{sh}^2(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$1/\cos^2(x)$	$\mathrm{arsh}(x)$	$1/(1+x^2)^{1/2}$
$\arcsin(x)$	$1/(1-x^2)^{1/2}$	$\mathrm{arch}(x)$	$1/(x^2-1)^{1/2}$
$\arccos(x)$	$-1/(1-x^2)^{1/2}$	$\mathrm{arth}(x)$	$1/(1-x^2)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$1/(1+x^2)$	$\mathrm{Arcth}(x)$	$-1/(x^2-1)$
$\mathrm{arcctg}(x)$	$-1/(1+x^2)$	x^x	$x^x(\ln(x)+1)$

Примечания к таблице 1.1:

Гиперболические функции

определяются следующим образом:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}; \qquad \mathrm{cth}(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}. \tag{1.11}$$

Обратные гиперболические функции

выражаются через логарифмическую функцию следующим образом :

$$\mathrm{arsh}(x) = \ln\left[x + \sqrt{(x^2+1)}\right]; \qquad \mathrm{arch}(x) = \ln\left[x + \sqrt{(x^2-1)}\right];$$

$$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}; \qquad \mathrm{arcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}. \tag{1.12}$$

Правила дифференцирования скалярных функций скалярного аргумента.

$$\frac{d}{dx}\left[u(x) \pm v(x)\right] = \frac{d}{dx}u(x) \pm \frac{d}{dx}v(x); \qquad \frac{d}{dx}\left[cu(x)\right] = c\frac{d}{dx}u(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right] = \left(\frac{d}{dx}u(x)\right)v(x) + u(x)\left(\frac{d}{dx}v(x)\right);$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{1}{v^2(x)}\left[\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)v(x) - u(x)\left(\frac{d}{dx}v(x)\right)\right];$$

$$\frac{d}{dx}f\left(u(x)\right) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$ (дифференцирование сложной функции).

$$\frac{d}{dx}\ln\left(y(x)\right) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$ (логарифмическая производная);

Правила дифференцирования векторных функций скалярного аргумента.

Обычно в механике приходится иметь дело с векторными функциями времени. Поэтому здесь правила дифференцирования приведены на примере именно таких функций. Сравните эти правила с приведёнными выше. В соответствии с общепринятыми правилами точка сверху означает полную производную по времени ($\dot{S} = dS/dt$).

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}(t) \pm \mathbf{u}(t)\right) = \dot{\mathbf{v}}(t) \pm \dot{\mathbf{u}}(t); \qquad \frac{d}{dt}\left(c\mathbf{v}(t)\right) = c\dot{\mathbf{v}}(t)\ (c - const);$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\mathbf{v}(t)\right) = \dot{f}(t)\mathbf{v}(t) + f(t)\dot{\mathbf{v}}(t);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}(t)\mathbf{u}(t)\right) = \dot{\mathbf{v}}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\dot{\mathbf{u}}(t); \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{u}(t)\right) = \dot{\mathbf{v}}(t)\times\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\times\dot{\mathbf{u}}(t);$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}\left(f(t)\right) = \left(\frac{d}{df}\mathbf{v}\left(f\right)\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}f(t)\right);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{w}(t)\right) = \dot{\mathbf{v}}(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t)\mathbf{u}(t)\dot{\mathbf{w}}(t).$$

Дифференцирование вектора в прямоугольных декартовых координатах.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{v}_x(t)\mathbf{e}_x + \dot{v}_y(t)\mathbf{e}_y + \dot{v}_z(t)\mathbf{e}_z.$$

1.3 Интегрирование элементарных функций. Среднее значение физической величины

Для расчёта определённого интеграла удобно пользоваться основной теоремой интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.13}$$

При этом $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – *нижним и верхним пределами интегрирования*. $F(x)$ – *первообразной функции* $f(x)$. По определению $F'(x) = f(x)$.

Необходимо помнить, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями в смысле нижеприведённых формул:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x); \qquad \int_0^x \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)dx = f(x) - f(0).$$

Неопределённый интеграл и первообразная функции отличаются на произвольную постоянную

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Неопределённые интегралы элементарных функций

Таблица 1.2

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $(m \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\lvert \operatorname{tg}(x/2) \rvert + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\lvert \operatorname{tg}(x+\pi)/2 \rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \operatorname{tg}(x)dx = -\ln\lvert \cos(x) \rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \operatorname{ctg}(x)dx = \ln\lvert \sin(x) \rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Свойства интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [u(x)+v(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx; \qquad \int_a^b [cu(x)]dx = c\int_a^b u(x)dx.$$

Интегрирование подстановкой (способ замены переменной).

Если $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)dx = \int \left(f\left(\varphi(t)\right) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) dt$.

Для интегралов с заданными нижними и верхними пределами необходимо при переходе к другой переменной поменять и пределы интегрирования. Поэтому для определённого интеграла формула примет следующий вид

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} \left(f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) \right) dt. \qquad (1.14)$$

В последнем равенстве пределы интегрирования t_a, t_b находятся из решения алгебраического уравнения $a = \varphi(t_a)$, $b = \varphi(t_b)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int (ax+b)^m dx$.

Полагаем $ax+b=t$. Дифференцируя это соотношение, находим $adx=dt$. Откуда $dx=dt/a$. Итак, имеем

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{1}{a}\frac{t^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1}.$$

Аналогичным образом с помощью замены $ax+b = t$ можно обобщить интегралы, приведённые в таблице 1.2.

Интегрирование по частям.

Общая формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1.15)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x\sin(ax+b)dx$.

Полагаем $x = u$; $\sin(ax+b)dx = dv$ и находим du и v.

$$du = dx; \quad v = \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b).$$

При вычислении последнего интеграла мы использовались замену переменной – $ax+b=t$. Теперь, интегрируя по частям, получим

$$\int x\sin(ax+b)dx = -\frac{x}{a}\cos(ax+b) + \frac{1}{a}\int \cos(ax+b)dx =$$

$$= -\frac{x}{a}\cos(ax+b) + \frac{1}{a^2}\sin(ax+b) + C.$$

Среднее значение

некоторой функции в интервале [a,b] определяется формулой:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{1.16}$$

1.4 Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядка

При решении задач по механике вам придется столкнуться с простейшими дифференциальными уравнениями. Общая теория и методы решения дифференциальных уравнений излагаются на втором курсе, поэтому здесь мы изложим только *метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и с постоянными коэффициентами.*

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Общая структура дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = F(y)f(x).$$

Известны начальные условия, т.е. при $x=x_0$ $y=y_0$. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Разделим переменные x, y друг от друга. Для этого перенесём функцию $F(y)$ в левую часть равенства под дифференциал dy, а дифференциал dx в правую часть этого уравнения. Тогда получим

$$\frac{dy}{F(y)} = f(x)dx.$$

После *разделения* (знаком равенства) переменных x, y можно проинтегрировать обе части равенства с учётом начальных условий

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{F(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Последнее равенство представляет собой решение исходного дифференциального уравнения. Далее необходимо проинтегрировать обе части этого равенства и выразить (если это удается) неизвестную y как функцию x.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = (ax+b)^m(c^2-y^2).$$

Известно, что при $x=0$ $y=0$. $m\neq-1$.

Согласно вышеизложенному методу, имеем

$$\int_0^y \frac{dy}{c^2 - y^2} = \int_0^x (ax+b)^m dx.$$

Интегралы в правой и левой частях равенства являются табличными. Поэтому имеем

$$\frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c+y}{c-y}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} - \frac{b^{m+1}}{m+1}\right).$$

Выражая из последнего равенства y, получим окончательно

$$y(x) = c\ \mathrm{th}\left\{\frac{cb^{m+1}}{a(m+1)}\left[\left(1+\frac{ax}{b}\right)^{m+1} - 1\right]\right\}.$$

Функция $\mathrm{th}(x)$ определена в примечаниях к таблице 1.1.

Пример 2. Тело движется по прямой таким образом, что, начиная с некоторого момента времени $t=t_0$, величина мгновенной скорости в n раз ($n > 0$) превышает её среднюю скорость. Найти, по какому закону $x(t)$ движется тело.

Решение. Напишем условие, которому удовлетворяет движение материальной точки

$$v(t) = n < v(t) > = \frac{n}{t}\int_{t_0}^t v(t)dt.$$

Обозначив через $y(t) = tv(t)$, преобразуем это условие к виду

$$\frac{dy}{dt} = n\frac{y}{t}.$$

Получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого определяется по методу, изложенному выше.

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = n\int_{t_0}^t \frac{dt}{t}.$$

Интегрируя эти выражения, получим

$$y(t) = y_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^n,$$

откуда получаем функцию

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{n-1}.$$

Интегрируя последнее выражение, получим закон движения

$$x(t) = \frac{v_0 t_0}{n}\left(\frac{t}{t_0}\right)^n.$$

При изучении свободных и затухающих колебаний вам встретятся линейные дифференциальные уравнения второго (т.е. содержащее вторую производную) порядка с *постоянными коэффициентами*. Изложим метод его решения.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение с *постоянными действительными* коэффициентами ($a_i = const,\ i = 0,1,2$) имеет вид

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 .$$

Общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x) .$$

Значения $k_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 .$$

Величины констант $C_{1,2}$ определяются из начальных условий.

Приведём решение для случая *комплексных* корней. (Более детально операции с комплексными числами разъясняются в разделе 8.) Дискриминант квадратного уравнения меньше нуля.

$$y(x) = C \exp(\gamma x) \cos\left(\Omega x + \varphi_0\right) .$$

Здесь $\gamma = -\dfrac{a_1}{2a_0}$, $\Omega = \dfrac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0}$. Если заданы начальные условия $y(0)$, $y'(0)$, то постоянные C и φ_0 определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C \cos\varphi_0 \\ y'(0) - \gamma y(0) = -C\Omega \sin\varphi_0 \end{cases} .$$

Раздел 2. Минимальные сведения по теории размерностей

2.1 Как устроена физическая формула?

Любая физическая формула устроена таким образом, что, во-первых, размерность левой части равна размерности правой части, во-вторых, аргумент любой функции должен быть безразмерной величиной.

Зависимость физической величины Y от другой величины x в соответствии с этими требованиями должна иметь вид $Y=Af(x/b)$. Здесь размерность величины Y должна быть равна размерности A, а размерность величины x должна быть равна размерности b, чтобы отношение x/b было безразмерной величиной.

Например, зависимость амплитуды линейного гармонического колебания от времени t, выражается формулой $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$. Если величина $x(t)$ измеряется в метрах, то величина A также должна выражаться в метрах, а величина параметра ω (частоты колебания) должна иметь размерность обратную размерности времени $[\omega]=1/T$. Величина φ (начальная фаза колебания), в соответствии с этими правилами должна быть безразмерной.

2.2 Применение π-теоремы. Переход к безразмерным переменным.

На практике чаще встречаются ситуации, когда физическая величина Y зависит не от одной величины x, а от нескольких сразу, т.е:

$$Y = f(x_1, x_2, ...x_n).$$

Как в этом случае правильно записать физическую формулу, в соответствии с вышеприведёнными требованиями? Ответ на этот вопрос дает π-теорема [1], которая формулируется следующим образом:

Выберем среди величин $x_1, x_2, ...x_n$ *k штук, независимых (т.е. таких, размерности которых не могут быть выражены друг через друга). Тогда из оставшихся n–k величин могут быть образованы n–k безразмерных комбинаций, которые преобразуют исходную формулу к виду*

$$Y = Af\left(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-k}\right),$$

где величины $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-k}$ *являются уже безразмерными. Размерность* $[Y]$ *должна быть равна размерности* $[A]$*, т.е., отношение* $[Y]/[A]=\Pi$ *– безразмерная величина.*

Величина k зависит от выбора системы единиц. Если придерживаться системы единиц СИ, то число независимых размерностей, достаточных для выражения размерности произвольной механической величины, равно *трём*. Это: единица массы – *килограмм* (M), единица длины – *метр* (L), единица времени *секунда* (T). Размерности остальных механических величин могут быть представлены в виде

$$\left[x_i\right] = M^{a_i} L^{b_i} T^{c_i} \ (i=1,2...,n),$$

где степени a_i, b_i, c_i зависят от конкретной физической величины x_i.

Приведём таблицу степеней a, b, c для размерностей часто встречающихся механических величин, чьи единицы являются производными от основных – *массы* M (a=1, b=0, c=0), *длины* L (a=0, b=1, c=0) и *времени* T (a=0, b=0, c=1). Обратите внимание на то, что некоторые величины имеют одинаковые размерности.

Таблица 2.1.

Механическая величина	a степень M	b степень L	c степень T
Объём (V)	0	3	0
Кривизна ($1/R$)	0	–1	0
Линейная скорость ($\mathbf{v}$)	0	1	–1
Угловая скорость ($\boldsymbol{\omega}$)	0	0	–1
Секторная скорость ($\boldsymbol{\sigma}=1/2\mathbf{r}\times\mathbf{v}$)	0	2	–1
Линейное ускорение ($\boldsymbol{a}$,$\mathbf{w}$)	0	1	–2
Угловое ускорение ($\boldsymbol{\beta}$)	0	0	–2
Объёмная плотность массы (ρ)	1	–3	0
Импульс ($\mathbf{p}$)	1	1	–1
Момент импульса ($\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$)	1	2	–1
Сила ($\mathbf{F}$)	1	1	–2
Работа, энергия, момент силы (A, E, $\mathbf{M}= \mathbf{r}\times\mathbf{F}$)	1	2	–2
Момент инерции (J)	1	2	0
Мощность (N)	1	2	–3
Давление (P)	1	–1	–2
Вязкость (μ)	1	–1	–1
Поверхностное натяжение (s,σ)	1	0	–2
Модуль Юнга, модуль сдвига (E, G)	1	–1	–2
Гравитационная постоянная (γ)	–1	3	–2

Имея перед глазами Таблицу 2.1, можно решить ряд задач по теории размерностей на составление безразмерных комбинаций.

Прежде чем решать задачу на составление безразмерных комбинаций, полезно составить для себя некий алгоритм, содержащий в себе основные действия.

Инструкция по основным действиям, приводящим к физической записи формул в соответствии с требованиями π-теоремы.

1.Определить набор физических величин (найти n), оказывающих влияние на рассматриваемое явление. Обратить внимание на физические постоянные, которые могут неявно присутствовать в задаче.Первоначальный выбор величин неоднозначен и может быть уточнён после физического анализа.

2.Выбрать систему основных размерностей (найти k). Это может быть система MLT, FLT, $EFLT$ и т.д.

3.Определить число основных безразмерных комбинаций по формуле: $m=n-k$.

4.Представить m оставшихся величин по формуле $\Pi_m = \dfrac{x_m}{x_1^{a_m} x_2^{b_m} x_3^{c_m}}$ (для определённости считаем, что x_1, x_2, x_3 являются независимыми величинами, т.е., их размерности не могут быть выражены друг через друга).

5.Найти неизвестные показатели степеней исходя из условия, что новые величины Π_m являются безразмерными.

6.Проанализировать полученную физическую комбинацию. Если обнаружено физическое противоречие, то постараться подобрать другой набор физических величин, уменьшая или увеличивая число n.

2.3 Примеры задач на применение теории размерностей

Пример1. Свяжите радиус орбиты планеты с периодом обращения её вокруг Солнца.

1.Планеты и Солнце электрически нейтральны, поэтому взаимодействуют посредством гравитации. Период обращения планет T зависит от расстояния r до Солнца и от масс планеты m и Солнца M. Гравитационное притяжение планет можно связать с величиной гравитационной постоянной γ (постарайтесь обосновать это предположение!).

Итак, допустим, что (n=4)

$$T=f(m, M, r, \gamma).$$

2.Выбираем систему СИ, что автоматически определяет число k=3.

3.Независимые физические величины m, r, γ.

4.Величина $\Pi_1 = \dfrac{M}{m^{a_1} r^{b_1} \gamma^{c_1}}$, $\Pi_2 = \dfrac{T}{m^{a_2} a^{b_2} \gamma^{c_2}}$.

5.Из условия того, что величина Π_1 является безразмерной, находим, что $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$. Из того же требования безразмерности величины Π_2 получаем линейную систему уравнений для отыскания величин степеней a_2, b_2, c_2.

$$M^0 L^0 T^1 = M^{a_2} L^{b_2} M^{-c_2} L^{3c_2} T^{-2c_2}.$$

Откуда $a_2 - c_2 = 0$, $b_2 + 3c_2 = 0$, $-2c_2 = 1$.

Из этой системы уравнений находим: $a_2 = c_2 = -1/2$, $a_2 = 3/2$.

6.В соответствии с π-теоремой получаем

$$\Pi_2 = f\left(\Pi_1\right) \text{ или } T = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{m\gamma}} f\left(\frac{M}{m}\right).$$

Анализ показывает, что при некоторых предположениях последняя формула воспроизводит третий закон Кеплера: $\frac{T^2}{r^3}$=*const*.

Пример 2. Объём воздуха, прокачиваемого вентилятором в еденицу времени (расход) $[Q] = L^3/T$, зависит от следующих физических величин: плотности воздуха $[\rho]=M/L^3$, числа оборотов винта $[n] = 1/T$, давления воздуха $[H]=M/(LT^2)$, мощности двигателя $[N]=E/T$ и диаметра винта D.

Исходная зависимость имеет вид $Q = f(\rho,n,H,N,D)$.

Пользуясь π-теоремой, получите зависимость величины Q в виде

$$Q = nD^3 f\left(\frac{H}{\rho D^2 n^2}, \frac{N}{\rho D^5 n^3}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения.

***Задача* 1.** Произведено измерение скорости пузырьков газа, выходящих из различных жидкостей и с помощью фотоаппарата, находящегося на расстоянии D от поверхности жидкости, регистрируются диаметры всплывающих пузырьков газа. Определите какие физические величины влияют на скорость всплывающего пузырька. С помощью π-теоремы получите число независимых безразмерных параметров и составьте необходимые безразмерные комбинации.

***Задача* 2.** На опорный подшипник действует приложенная нагрузка F. На скорость вращения вала подшипника оказывают влияние: приложенная нагрузка, диаметр подшипника, диаметр шарика, угловая скорость вращения подшипника, плотность, вязкость и давление смазки, радиальный зазор между ободом подшипника и шариком. С помощью π-теоремы определите число независимых безразмерных параметров и составьте обоснованные безразмерные комбинации.

***Задача* 3.** На величину скорости твёрдого шара, двигающегося в сжимаемой жидкости оказывают влияние: площадь поперечного сечения шара, скорость, плотность, вязкость и модуль упругости жидкости и сила лобового сопротивления. С помощью π-теоремы определите число независимых безразмерных параметров и составьте обоснованные безразмерные комбинации.

***Задача* 4.** Скорость волны на поверхности жидкости определяется длиной волны, ускорением силы тяжести, толщиной слоя жидкости, её плотностью и поверхностным натяжением. С помощью π-теоремы определите число независимых безразмерных параметров и составьте логически обоснованные безразмерные комбинации.

ЛИТЕРАТУРА ***[1] Л.А.Сена. Единицы физических величин и их размерности. Москва. Наука. 1988г.***

Раздел 3. Кинематика

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо очень чётко представить связи между основными величинами, осознать физический смысл каждой из них, вникнуть в смысл каждой формулы, вспомнить её вывод и пределы применимости. Полезно также по определённым признакам провести классификацию (если это возможно) и систематизацию используемых формул.

3.1 Основные понятия и формулы кинематики

Приведём основные понятия и формулы кинематики, основываясь на порядке производной (n_d=0,1,2), определяющей кинематическую величину.

n_d =0.

Траектория материальной точки – это геометрическое место точек концов ***радиуса-вектора*** $\mathbf{r}(t)$, который в каждый момент времени направлен из начала системы координат (СК) на движущуюся материальную точку.

Траектория определяется в трехмерном случае тремя скалярными функциями (координатами) $x(t)$, $y(t)$, $\mathrm{z}(t)$, которые задаются в выбранной декартовой СК.

$$\mathbf{r}(t)= x(t)\mathbf{e}_x+y(t)\mathbf{e}_y+\mathrm{z}(t)\mathbf{e}_z \qquad (3.1)$$

***Примеры*:**

- *уравнение пространственной эллиптической спирали,*

$$\mathbf{r}(t) = A\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + B\cos(\omega t)\mathbf{e}_y + vt\mathbf{e}_z$$

- *плоское движение тела, брошенного с высоты H с начальной скоростью v_0 и под начальным углом* θ *к горизонту*

$$\mathbf{r}(t) = \left(v_0\cos\theta\right)t\mathbf{e}_x + \left(H + \left(v_0\sin\theta\right)t - \frac{gt^2}{2}\right)\mathbf{e}_y .$$

Траектория тела может быть задана и в *полярной* СК, через расстояние до материальной точки ρ и угол φ между направлением радиуса вектора и некоторой (полярной) оси. Связи этих переменных с декартовыми координатами могут быть записаны в виде:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \mathrm{tg}\varphi = x/y.$$

Пределы изменения переменных: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$; $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

- *уравнение плоской спирали с равномерным шагом в полярной СК.*

$\mathbf{r}(t) = v_0 t\mathbf{e}_\rho$, (где $\mathbf{e}_\rho = \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y$ – переменный вектор)

Перемещение материальной точки есть вектор между двумя точками траектории т.е.:

$$\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1). \qquad (3.2а)$$

Выражение для вектора перемещения в декартовой СК найдите самостоятельно.

Вектор бесконечно малого поворота $\overrightarrow{d\varphi}$ имеет *длину* равную бесконечно малому углу поворота радиуса-вектора материальной точки, и *направление,* совпадающее с направлением перемещения правого винта, вращаемого вместе с радиусом-вектором. Например, на рис. 3.1 поворот $\mathbf{r}(t)$ происходит в плоскости рисунка против часовой стрелки, поэтому вектор $\overrightarrow{d\varphi}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой происходит поворот, на нас. Связь между элементарным перемещением $d\mathbf{r}$ с $\overrightarrow{d\varphi}$ определяется ниже выражением:

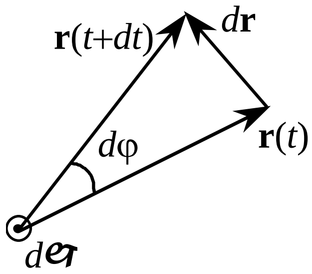


Рис. 3.1

$$d\mathbf{r} = \overrightarrow{d\varphi} \times \mathbf{r}. \qquad (3.2б)$$

Путь, пройденный материальной точкой, к моменту времени t, определяется как длина участка траектории и выражается через интеграл от *модуля* скорости:

$$S(t) = \int_0^t v(t)dt. \qquad (3.3)$$

Следует особо отметить, что в этой формуле и ниже величина пути S является функцией верхнего предела интегрирования t. Переменная внутри интеграла может обозначаться и другой буквой.

$\boldsymbol{n_d}$ ***=1.***

Мгновенная линейная скорость материальной точки в момент времени t:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (3.4)$$

определяется выражениями

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z \qquad (3.4а)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \qquad (3.4б)$$

соответственно в декартовой и полярной СК. Напомним, что точкой сверху, для краткости, обозначается полная производная по времени, т.е.: $\dot{\rho} = d\rho/dt$ и т.д.

Средняя скорость за время τ от начала движения определяется выражением

$$\left\langle \mathbf{v}(t) \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathbf{v}(t)dt = \frac{\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}(0)}{\tau}, \qquad (3.5)$$

а ***средняя величина модуля скорости*** за время t от начала движения –

$$\left\langle v(t) \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = \frac{S(\tau)}{\tau}. \qquad (3.6)$$

При выводе последнего выражения использовалась формула для модуля скорости, которая получается из (3.3) дифференцированием по времени:

$$\frac{dS}{dt} = v(t). \qquad (3.7)$$

Секторная скорость определяется соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,. \tag{3.8}$$

и используется, в основном, при описании движения материальной точки в центральном поле сил.

Вектор угловой скорости определяется как отношение вектора бесконечно малого поворота к промежутку времени, за который этот поворот произошёл:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}\,. \tag{3.9}$$

Связь угловой скорости с линейной скоростью:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,. \tag{3.10}$$

n_d =2.

Мгновенное линейное ускорение материальной точки

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{3.11}$$

можно записать в декартовой СК в виде:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v}_x(t)\mathbf{e}_x + \dot{v}_y(t)\mathbf{e}_y + \dot{v}_z(t)\mathbf{e}_z = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z \tag{3.11a}$$

Вектор углового ускорения определяется как производная по времени от вектора угловой скорости:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\,. \tag{3.12}$$

в декартовой СК имеет вид

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt} = \dot{\omega}_x(t)\mathbf{e}_x + \dot{\omega}_y(t)\mathbf{e}_y + \dot{\omega}_z(t)\mathbf{e}_z\,. \tag{3.12}$$

Связь между линейным ускорением и угловыми ускорением и скоростью можно найти дифференцированием по времени выражения (3.10)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\,. \tag{3.13}$$

Среднее ускорение за время *t* от начала движения определяется выражением

$$\langle \boldsymbol{a}(t) \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{a}(t)dt = \frac{\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0)}{t} \tag{3.14}$$

Движение материальной точки по криволинейной траектории иногда удобно описывать в *сопровождающей системе* координат, задаваемой *нормальным* $\mathbf{n}$ и *тангенциальным* $\boldsymbol{\tau}$ ортами (см. рис. 3.2). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен вдоль вектора скорости, а вектор $\mathbf{n}$ – перпендикулярно скорости к центру окружности, касательной к траектории в данной точке.

Полное ускорение раскладывают на *тангенциальное* ускорение $\boldsymbol{a}_\tau$, направление которого совпадает или противоположно направлению вектора линейной скорости и *нормальное* ускорение $\boldsymbol{a}_n$, направленное вдоль **n**. Длины векторов $\boldsymbol{a}_\tau$, $\boldsymbol{a}_n$ определяются выражениями:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right|, \qquad (3.15)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (3.16)$$

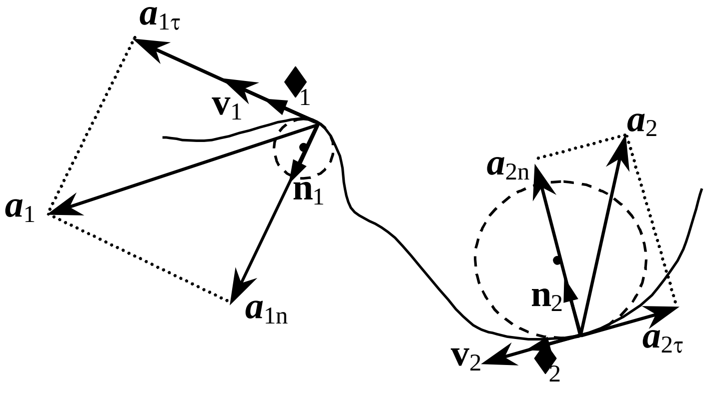


Рис. 3.2

Из сказанного ясно, что тангенциальное ускорение меняет *только длину* вектора скорости, в то время как нормальное ускорение определяет *только поворот* вектора скорости.

Если траектория задана в декартовой СК уравнением $y=y(x)$, или параметрически, причём в качестве параметра используется временная переменная t: $y=y(t)$, $x=x(t)$, радиус кривизны траектории R может быть вычислен по формулам:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}. \qquad (3.17)$$

Преобразование координат скоростей и ускорений при переходе к другой системе отсчёта

Пусть имеются две системы отсчёта S и S_1(см. рис. 3.3). При этом система S_1 относительно системы S характеризуется радиусом вектором начала отсчёта **R**, его скоростью **V** и ускорением **A,** а также угловой скоростью **Ω**.

Положение одной и той же материальной точки определяется радиусами-векторами **r** и $\mathbf{r}_1$. Соотношение между ними (см. рис.3.3) очевидно:

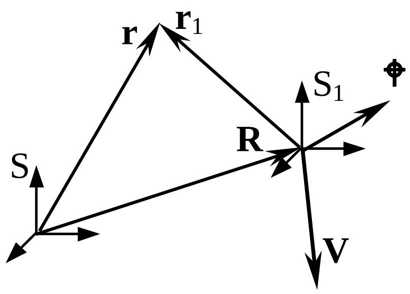


Рис. 3.3

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1. \qquad (3.18)$$

Дифференцируя его по времени, получим связи между скоростями и ускорениями материальной точки, определяемыми в разных системах отсчёта:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_1. \qquad (3.19)$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{A} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\right) + 2\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{a}_1. \qquad (3.20)$$

3.2 Основные задачи кинематики

Отличительной особенностью кинематических задач является то, что при их постановке речь идёт только о переменных характеризующих движение (радиусы-векторы, скорости и т.д.). При этом характеристики взаимодействий (силы, работы сил и т.д.) не упоминаются.

Решение кинематической задачи начинается с определения её типа. Практически все кинематические задачи можно свести к двум типам: *прямые задачи и обратные*.

Прямая задача кинематики заключается в нахождении любого параметра движения (обычно эта группа величин с n_d=1,2) по известному закону движения (по группе величин с n_d=0). Обычно она решается дифференцированием известных величин с n_d=0 и последовательным нахождением величин с n_d=1,2. О дифференцировании простейших функций см. разделы 1.1, 1.2.

Обратная задача кинематики состоит в определении закона движения (траектории движущейся материальной точки или других физических величин из n_d=0) по какому-либо известному параметру движения из группы величин с n_d=1 или n_d=2. Обычно эта задача сложнее прямой, так как требует решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях. Для студентов-первокурсников, впрочем, эти уравнения не сложнее описанных в разделе 1.4.

При этом необходимо иметь в виду, что *в качестве уравнений используемых при решении кинематических задач фигурируют математические выражения определений величин кинематических величин*. Например, соотношение $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ можно рассматривать и как определение скорости материальной точки, и как дифференциальное уравнение для функции радиуса-вектора. Эти уравнения являются векторными. Решение векторных уравнений сводится к решению системы скалярных уравнений для координат векторов. Поэтому в значительной мере простота математических выкладок зависит от удачного выбора системы отсчёта (СО). Можно посоветовать перед окончательным выбором направлений осей системы координат нарисовать на рисунке все векторы необходимые для решения задачи и одну из осей системы координат направить вдоль прямой, которой параллельно большинство нарисованных векторов.

3.3 Примеры решения задач кинематики

Задача 1.25.

Точка движется в плоскости xy по закону $x=\alpha t$, $y=\alpha t(1-\beta t)$, где a и b положительные постоянные.

Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить её график;

б) скорость v и ускорение a точки в зависимости от t;

в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.

Предварительный анализ задачи. Задача относится к прямой задаче кинематики. Известен закон движения материальной точки, заданный параметрически, причём параметром является t. При таком способе описания нет необходимости заботиться о выборе системы отсчёта, т.к. она задана в условии.

Скорость и ускорение точки находятся дифференцированием закона движения по времени t. В пункте б) v, a не выделены жирным шрифтом. Следовательно, подразумевается, что необходимо найти модули векторов скорости и ускорения. Ответ на вопрос пункта в) можно найти используя формулу (1.5).

Решение. а) Найдём t из соотношения $x=\alpha t$: $t=x/\alpha$ и подставим это выражение в равенство $y=\alpha t(1-\beta t)$. Тем самым, получим ответ на вопрос а): $y(x)=x(1-\beta x/\alpha)$. Функция $y(x)$ представляет собой уравнение параболы, которая направлена своими ветвями вниз и пересекает ось OX в точках $x=0$, $x=\alpha/\beta$.

б) Дифференцированием координат вектора $\mathbf{r}(t)$ ($x=\alpha t$, $y=\alpha t(1-\beta t)$) по времени (см. выражения 3.4 и 3.11) в выбранной СК найдём координаты векторов линейной скорости и ускорения:

$$\mathbf{v}(t)=\dot{x}\mathbf{e}_x+\dot{y}\mathbf{e}_y=\alpha\mathbf{e}_x+(\alpha-2\alpha\beta t)\mathbf{e}_y,$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{x}(t)\mathbf{e}_x+\ddot{y}(t)\mathbf{e}_y=-2\alpha\beta\mathbf{e}_y.$$

Модули этих векторов равны:

$$v(t)=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2(1-2\beta t)^2}=\alpha\sqrt{1+(1-2bt)^2}\ \text{ и } a(t)=2\alpha\beta.$$

в) Запишем формулу (1.5) (см. раздел 1.1) через переменные нашей задачи:

$$\cos(\pi/4)=\frac{\mathbf{v}(t_0)\boldsymbol{a}(t_0)}{v(t_0)a(t_0)}=\frac{\alpha\cdot 0+(\alpha-2\alpha\beta t_0)(-2\alpha\beta)}{\left(\alpha\sqrt{1+(1-2\beta t_0)^2}\right)(2\alpha\beta)}=\frac{2\beta t_0-1}{\sqrt{1+(1-2\beta t_0)^2}}.$$

Отсюда находим $t_0=1/\beta$.

Задача полностью решена. Но для студента, желающего самостоятельно овладеть навыком решения задач, полезно в решенной задаче увидеть, по крайней мере, еще несколько задач, которые могут встретиться в той или иной формулировке. Поэтому приведём список вопросов, на которые желательно ответить при анализе решения.

Анализ решения. 1.Как изменится результат задачи, если вместо приведённых законов движения по $x(t)$ и $y(t)$ взять другие, например, соседней задачи **1.26**?

2.Какие другие кинематические величины можно определить из заданного закона движения? Как найти, например, путь, пройденный точкой или компоненты тангенциального и нормального ускорений?

3.Как рассчитать радиус кривизны R?

4.Можно ли решить уравнение на определение t_0 при произвольном угле между векторами $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{a}$?

5. Как рассчитать средние величины скорости и ускорения для произвольного интервала времени?

6. Придумайте реальную систему, которая при некоторых приближениях (каких?) описывалась бы предлагаемой в условии задачи моделью.

Задача 1.38.

Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени её тангенциальное и нормальное ускорения по модулю равны друг другу. В момент времени $t = 0$ скорость точки равна v_0. Найти зависимости:

а) скорости точки от времени и от пройденного пути s;

б) полного ускорения точки от скорости и пройденного пути.

Предварительный анализ задачи. Задача относится к обратной задаче кинематики и для своего решения требует решения дифференциальных уравнений (см. раздел 1.4). Для получения частного решения необходимо, кроме составления уравнения, знание начальных условий (величин скорости или пройденного пути к начальному моменту времени $t = 0$). Слово “замедляясь” в условии задачи означает, что с увеличением времени скорость уменьшается ($dv < 0$), т.е. вектор тангенциального ускорения направлен в сторону противоположную вектору скорости. Сопутствующая система отсчёта определена в условии.

Решение. По условию задачи $a_n = a_\tau$. Используя соотношения (3.15) (3.16) с учётом знака dv (направления тангенциального ускорения), получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его по методу, описанному в разделе 1.4.

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{dt}{R} \quad \text{или после интегрирования} \quad \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{t}{R}.$$

Отсюда получим выражение для скорости как функции времени:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 t / R}.$$

Чтобы найти зависимость скорости от пройденного пути s, можно в исходном уравнении перейти от переменной t к переменной s.

$$\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = -\frac{v^2}{R} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{ds} = -\frac{v}{R}.$$

Последнее соотношение вновь представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его и разрешая относительно v, получаем окончательный результат $v(s) = v_0 \exp(-s/R)$ и полный ответ на вопрос пункта а).

Чтобы ответить на вопросы пункта б), достаточно воспользоваться выражением для компоненты нормального ускорения $a_n = v^2/R$ и учесть равенство $a_n = a_\tau$, данное по условию. Окончательно получим

$$a(t) = \sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}\left(1 + v_0 t/R\right)^{-2}, \quad a(s) = \sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}\exp(-2s/R)$$

Анализ решения. В соответствии с принципом “понять – значит обобщить”, глядя на полученные решения, можно задать следующие вопросы:

1.Как изменятся решения задачи, если отказаться от требования, что тело движется по окружности? Очевидно, в этом случае радиус кривизны становится переменной величиной (см., например, рис. 3.2), поэтому для решения задачи следует предположить, что зависимость радиуса кривизны $R(t)$ известна. Тогда при тех же остальных условиях получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R(t)},$$

решение которого имеет вид:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \int\limits_0^t \frac{dt}{R(t)}}.$$

Если использовать теперь формулу (3.17), то можно написать систему уравнений для отыскания уравнения **плоской** кривой в декартовой СК:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2(t), \qquad \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{v^3(t)}{R(t)}.$$

Оказывается, можно получить решение этой системы уравнений для любых функций $v(t)$, $R(t)$. Способы решения такой системы уравнений уже выходят за рамки математической подготовки студентов первого курса. Но если вы пожелаете вернуться к этой задаче на втором курсе, то можно показать, что эта система сводится к уравнениям

$$\dot{x} = v(t)\cos(\Phi(t) + \varphi_0), \qquad \dot{y} = v(t)\sin(\Phi(t) + \varphi_0),$$

где $\Phi(t) = \int\limits_0^t \frac{v(t)}{R(t)}dt$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{v_y(0)}{v_x(0)}$. Интегрируя их можно получить решение задачи.

2. Можно ли получить решение задачи, если отношение тангенциального ускорения к нормальному равно b (b – некоторое заданное положительное число)? Можно ли получить обобщение, если $b = b(t)$?

Задача 1.58.

Твёрдое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0{,}50$ рад/с вокруг горизонтальной оси АВ. В момент $t = 0$ ось АВ начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением $\beta_0 = 0{,}10$ рад/с^2. Найти модули угловой скорости и углового ускорения тела через $t = 3{,}5$ с.

Предварительный анализ задачи. Задача относится к кинематике движения твёрдого тела. Сначала, решая обратную задачу кинематики, интегрированием можно найдём вектор угловой скорости вращения твёрдого тела. Затем не составит труда определить её модуль. Угловое ускорение найдём, решая прямую кинематическую задачу, пользуясь его определением (формула 3.12).

Решение. Реализуем программу, намеченную в предварительном анализе.

Кажется естественным выбор системы координат, взаимноперпендикулярные орты которой направлены вдоль оси АВ, в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\omega}_0$ ($\mathbf{e}_a$), и вдоль вектора $\boldsymbol{\beta}_0$ ($\mathbf{e}_я$). В этой СК начальные условия для обратной задачи можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0 \mathbf{e}_a + 0 \cdot \mathbf{e}_z,$$

а временную эволюцию представить уравнением

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \beta_0.$$

Интегрируя последнее, найдём вектор угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \mathbf{e}_a + \beta_0 t \mathbf{e}_z, \tag{1}$$

откуда находим модуль полного углового ускорения:

$$\omega(t) = |\boldsymbol{\omega}(t)| = \sqrt{(\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\omega}(t))} = \omega_0 \sqrt{1 + (\beta_0 t / \omega_0)^2}\,. \tag{2}$$

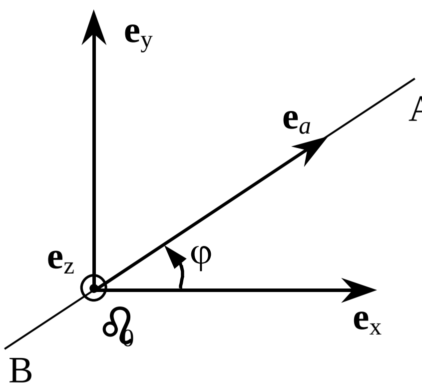
Подставив выражение (1) в формулу (3.12), находя производные координат, получим выражение для углового ускорения:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\omega}_0 \mathbf{e}_a + \left(\frac{d}{dt}(\beta_0 t) \right) \mathbf{e}_z = \beta_0 \mathbf{e}_z\,. \tag{3}$$

Модуль этого вектора, равен β_0, что не совпадает с ответом. Почему?

Анализ решения. Если внимательно проанализировать причины несовпадения, то можно заметить, что *задача решена правильно*! Только… *Во вращающейся системе координат*! В самом деле, при получении выражения (3) мы посчитали, что орт $\mathbf{e}_a$ неподвижен. В то же время по условию ось АВ *вращается* вокруг вертикальной оси, меняя со временем свою ориентацию. Если это учесть, то выражение (3) примет вид:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\omega}_0 \mathbf{e}_a + \omega_0 \dot{\mathbf{e}}_a + \left(\frac{d}{dt}(\beta_0 t) \right) \mathbf{e}_z = \omega_0 \dot{\mathbf{e}}_a + \beta_0 \mathbf{e}_z$$



Задача в этом случае сведётся к расчёту производной $\dot{\mathbf{e}}_a$ в лабораторной системе отсчёта. Ось OZ лабораторной СК выберем, как и прежде, вдоль вектора $\boldsymbol{\beta}_0$ (см. рис.). Пусть ось OX совпадает с направлением вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в момент времени $t = 0$, а орт $\mathbf{e}_y$ образует с двумя другими правую тройку, т.е. $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$.

Из рисунка 3.4 очевидно, что

$$\mathbf{e}_a(t) = \cos[\varphi(t)]\mathbf{e}_x + \sin[\varphi(t)]\mathbf{e}_y,$$

где φ – угол поворота оси АВ вокруг вертикальной оси.

Угол φ можно найти, решая обратную кинематическую задачу, описываемую уравнениями:

$$\omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}; \;\; \beta_0 = \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$$

с начальными условиями:

$$\omega_z(0) = 0; \;\; \varphi_z(0) = 0$$

Интегрируя записанные уравнения, находим

$$\varphi(t) = \frac{\beta_0 t^2}{2}.$$

Тогда вектор угловой скорости в лабораторной СК определится равенством:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \mathbf{e}_a + \beta_0 t \mathbf{e}_z = \omega_0 \left(\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_y\right) + \beta_0 t \mathbf{e}_z.$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени, получим выражение для вектора угловой скорости:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) &= \omega_0 \dot{\mathbf{e}}_a + \beta_0 \mathbf{e}_z = \omega_0 \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_y\right) + \beta_0 \mathbf{e}_z = \\ &= \omega_0 \beta_0 t \left(-\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_y\right) + \beta_0 \mathbf{e}_z \end{aligned}.$$

Модуль этого вектора равен:

$$\beta(t) = \sqrt{\boldsymbol{\beta}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t)} = \beta_0 \sqrt{1 + (\omega_0 t)^2},$$

что совпадает с выражением, приведённым в ответе.

Основной урок, который можно извлечь из решения этой задачи, состоит в том, что при использовании координатного способа описания векторов необходимо всегда помнить в какой СК проводятся вычисления.

Чтобы лучше усвоить этот урок решите самостоятельно задачу для случая, когда ω_0 и β_0 зависят от времени.

Дополнительное замечание. Иногда студенты, самостоятельно решая эту задачу, получают выражение для модуля углового ускорения в виде:

$$\beta(t) = \frac{\beta_0^2 t}{\omega_0 \sqrt{1 + (\beta_0 t / \omega_0)^2}}.$$

К такому результату можно прийти, продифференцировав выражение для модуля угловой скорости (2). Это грубейшая ошибка, связанная с не чётким пониманием связи между скоростью и ускорением (определение 3.12). Нужно помнить, что модуль производной от произвольного вектора $\mathbf{s}(t)$ и производная от модуля этого вектора не всегда равны друг другу. В самом деле, выражения $|\dot{\mathbf{s}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{s}}\dot{\mathbf{s}}}$ и $\dot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{ss}} = \frac{\dot{\mathbf{s}}\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{ss}}} = |\dot{\mathbf{s}}|\cos\gamma$ равны друг другу, лишь при условии, что угол γ между векторами $\dot{\mathbf{s}}$ и $\mathbf{s}$ равен нулю, т.е. *только, если векторы* $\dot{\mathbf{s}}$ *и* $\mathbf{s}$ *параллельны*.

Раздел 4. Динамика материальной точки

4.1 Основные уравнения динамики материальной точки. Свойства сил

Приступая к решению задач по динамике материальной точки необходимо вспомнить свойства всех известных сил и особенности применения законов Ньютона. Особое внимание следует обратить запись динамическое уравнение движения (второй закон Ньютона) в инерциальных и неинерциальных системах отсчёта (ИСО и НИСО).

Напомним, свойства некоторых сил, действующих на материальные точки.

Силы давления на поверхность, и ***силы растяжения*** нитей, действуют со стороны материальных точек на поверхность или нить, соответственно. Сила давления направлена перпендикулярно поверхности, а сила растяжения действует вдоль нити. Величины этих сил заранее не известны, они определяются другими силами и характером движения материальной точки, оказывающей давление, или стремящейся растянуть нить.

Силы реакции связей, являются реакциями абсолютно твёрдых поверхностей и нерастяжимых нитей на силы давления и растяжения. Они действуют на материальную точку, взаимодействующую с поверхностью, и связаны с силами давления и растяжения третьим законом Ньютона. *Силу реакции нити называют также силой натяжения.*

Силы упругости, связаны с вектором удлинения пружины $\Delta\mathbf{r}$ выражением: $\mathbf{F}_{упр} = -k\Delta\mathbf{r}$.

Силы трения скольжения и качения пропорциональны величине силы нормальной реакции опоры (трение скольжения, качения): $F_{тр} = \mu N$, и направлены против скорости материальной точки относительно опоры. μ – соответствующий коэффициент трения.

Силы вязкого трения являются функциями скорости движения материальной точки относительно вязкой среды (при движении в газе или жидкости) и направлены противоположно этой скорости. Для малых скоростей $\mathbf{F}_{тр} = -\alpha\mathbf{v}$, где α положительная константа.

Силы трения покоя имеют место в случае, когда тело покоится на некоторой поверхности. Их величина и направление определяются суммой параллельных поверхности компонент всех остальных сил. Силы трения покоя имеют максимальное значение равное $F_{тр\ макс} = \mu_п N$. $\mu_п$ – коэффициент трения покоя.

Кулоновские силы и гравитационные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния между взаимодействующими материальными точками, и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Силы инерции, или, более точно, ***поправки в уравнение движения материальной точки***, записанное относительно неинерциальной системы отсчёта, обусловленные массой (m) материальной точки и характером движения НИСО:

* сила инерции при ускоренном движении тела отсчёта, с которым связана неинерциальная система отсчёта $\mathbf{F}_{\mathrm{i}} = -m\mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = d^2\mathbf{R}/dt^2$ – ускорение неинерциальной системы отсчёта;
* центробежная сила инерции $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}') = m\Omega^2\boldsymbol{\rho}$. $\boldsymbol{\rho}$ – вектор, перпендикулярный оси вращения системы отсчёта и характеризующий положение материальной точки относительно этой оси, $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения неинерциальной системы опсчёта;
* сила инерции при ускоренном вращении системы отсчёта $\mathbf{F}_a = -m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}')$;
* сила Кориолиса $\mathbf{F}_K = 2m(\mathbf{v}'\times\mathbf{\Omega})$, должна учитываться при движении материальной точки со скоростью $\mathbf{v}$'относительно вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ системы отсчёта.

Основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) обычно записывается одним из следующих способов:

$$ma = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \tag{4.1а}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \tag{4.1б}$$

где m – масса материальной точки, $\boldsymbol{a}$ – её ускорение, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – её импульс, $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Первая форма записи уравнения удобна для случая, движения тел постоянной массы. Вторая форма записи наиболее универсальна.

4.2 Динамический метод решения задач механики

В условии задач, которые можно пытаться решить динамическим методом, наряду с переменными характеризующими движение (радиусы-векторы, скорости и т.д.) так или иначе описаны параметры взаимодействий (силы).

Задачи динамики также можно разделить на два типа: *прямые* и *обратные*.

Прямая задача динамики требует найти ускорения материальных точек по заданным значениям сил. *Обратная задача* ставит вопрос об отыскании равнодействующих сил в случае, когда ускорения материальных точек известны.

Поскольку при движении точек с постоянными массами уравнения движения (4.1а) можно рассматривать как алгебраические, в математическом смысле разницы между этими двумя типами задач нет.

Динамический метод решения задач механики основан на совокупном применении трёх законов Ньютона и включает в себя следующие этапы:

1. выбор системы отсчёта;
2. определение физической системы (ФиС) и совокупности *всех* сил, действующих на *все* материальные точки, образующие систему. Если выбранная система отсчёта неинерциальна, необходимо учесть и силы инерции;
3. запись уравнений движения материальных точек (второго закона Ньютона) в векторной форме и последующее их представление в скалярной форме в выбранной системе отсчёта;
4. решение системы уравнений движения (нахождение зависимости $\boldsymbol{a}(t)$ и сил реакции связей).
5. если полученную систему уравнений решить не удаётся необходимо дополнить её известными выражениями для различных сил, уравнениями, следующими из третьего закона Ньютона, а также очевидными соотношениями между кинематическими и геометрическими величинами.

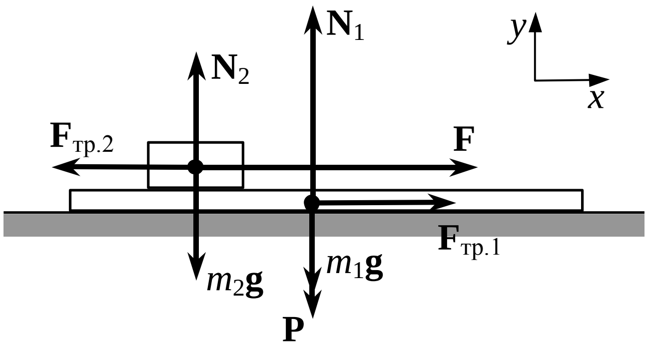
Часто решение динамической задачи является лишь начальным этапом решения более сложной задачи, которое заканчивается решением обратной кинематической задачи (см. раздел 3).

4.3 Примеры решения задач динамики

Задача 1.67.

На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся по закону $F=\alpha t$, где α – постоянная. Найти зависимости от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен k. Изобразить примерные графики этих зависимостей.

Анализ задачи и физический этап решения. Задача является прямой задачей динамики, когда по заданным силам требуется определить неизвестные силы и ускорения, а траектория не определена. Решать задачу будем в инерциальной системе отсчёта, связанной с горизонтальной плоскостью. Физическая система



представляет собой два тела: брусок и доску (см. рис.). На брусок действуют: сила тяжести $m_2\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\mathbf{N}_2$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр.2}$ со стороны доски, сила $\mathbf{F}$, определённая в условии задачи. На доску действуют: сила тяжести $m_1\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила давления $\mathbf{P}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр.1}$ со стороны бруска, сила реакции $\mathbf{N}_1$ со стороны гладкой горизонтальной поверхности.

Запишем уравнения движения для бруска и доски:

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{тр.2} + \mathbf{F}$$

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{тр.1}} + \mathbf{N}_1.$$

Третий закон Ньютона, даёт ещё два векторных уравнения:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N}_2 \text{ и } \mathbf{F}_{\text{тр.1}} = -\mathbf{F}_{\text{тр.2}}.$$

С учётом этих равенств и выражения для силы **F** перепишем уравнения движения бруска и доски в проекциях на оси СК:

Ось x:

$$m_2 a_2 = -F_{\text{тр.2}} + \alpha t \qquad (1)$$

$$m_1 a_1 = F_{\text{тр.2}} \qquad (2)$$

Ось y:

$$0 = -m_2 g + N_2 \qquad (3)$$

$$0 = -m_1 g - N_2 + N_1. \qquad (4)$$

Эта система четырёх уравнений содержит пять неизвестных. Для отыскания пятого уравнения попробуем использовать известные свойства сил, а также попытаемся записать очевидные кинематические соотношения.

Как известно *проявление сил трения зависит как от характера движения, так и от других сил*, поэтому надо иметь ввиду, что искомое уравнение будет различным в зависимости от величины силы $F = \alpha t$.

По мере возрастания силы F будет, по какому-то закону, расти и сила трения (вначале это сила трения покоя). Но сила трения покоя имеет предел: $F_{\text{тр.2 макс.}} = kN_2$. Пока этот предел не достигнут, оба тела будут двигаться как единое целое с одинаковыми ускорениями

$$a_1 = a_2 = a. \qquad (5а)$$

Это уравнение замкнёт записанную систему для случая малых времён.

Когда в некоторый момент времени t_1 сила трения достигнет своего предельного значения, доска придёт в движение с ускорением отличными от ускорения бруска $a_1 \leq a_2$. Но в этом случае, мы будем иметь дело уже с силой трения скольжения, примерно равной максимальной силе трения покоя. Т.е. для больших времён замыкающее уравнение:

$$. \qquad (5б)$$

Очевидно, в момент времени t_1 тела будут ещё неподвижны относительно друг друга, но сила трения покоя уже достигнет своего максимального значения. Т.е. будут выполняться оба дополнительных условия (5).

Математический этап решения. Для времён $t \leq t_1$ система движется как единое целое с ускорением $a = a_1 = a_2$. Найдём его из суммы уравнений (1) и (2):

$$(m_1+m_2)a = F, \text{ откуда } a(t) = \frac{\alpha t}{m_1 + m_2}.$$

Для $t \geq t_1$ значение силы трения $F_{\text{тр.2}} = kN_2$ запишем, найдя из уравнения (3) величину $N_2 = m_2 g$. С учётом этого перепишем уравнения (1) и (2)

$$m_2 a_2 = -km_2 g + \alpha t \qquad (6)$$

$$m_1 a_1 = km_2 g \qquad (7)$$

Решая эту систему можно найти ускорения тел для $t \geq t_1$

$$a_1 = km_2g/m_1, \quad a_2 = (\alpha t - km_2g)/m_2.$$

В момент времени t_1 в уравнениях (6) и (7) должны быть одинаковы ускорения:

$$m_2a = -km_2g + \alpha t \tag{6}$$

$$m_1a = km_2g \tag{7}$$

Откуда

$$t_1 = \frac{kgm_2(m_1 + m_2)}{\alpha m_1}.$$

Анализ решения. Если действовать в соответствии с принципом “понять – значит обобщить”, то можно задать себе следующие вопросы:

– как изменится результат задачи, если учесть силы трения между доской и горизонтальной плоскостью?

– как изменятся формулы для ускорения, если силу F приложить не к бруску, а к доске?

– как изменится решение задачи, если горизонтальную поверхность заменить на наклонную?

Попытайтесь найти ответы на эти вопросы самостоятельно.

Только после нахождения ответов на эти и подобные вопросы задача может считаться решённой.

Примечание. Прежде чем попытаться ответить на первый вопрос попытайтесь правильно решить следующую *вспомогательную задачу*:

На горизонтальной шероховатой плоскости лежит тело массой m. Коэффициент трения равен k. В момент времени t=0 к телу приложили горизонтальную силу F=αt. Найти ускорение и путь, пройденный телом, за первые t секунд после начала движения.

С этой задачей тесно связана задача **1.78**.

Задача 1.77

На горизонтальной поверхности находится призма 1 массы m_1 с углом α и на ней брусок 2 массы m_2. Пренебрегая трением найти ускорение призмы.

Физический этап решения. Перед нами прямая задача динамики. Выберем ИСО, связанную с горизонтальной плоскостью. Физическую систему образуют два тела: брусок и призма.

На призму действуют (см. рис.): сила тяжести $m_1\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\mathbf{N}_1$ со стороны поверхности, сила давления $\mathbf{P}$ со стороны бруска. На брусок действуют: сила тяжести $m_2\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\mathbf{N}_2$ со стороны призмы.

Уравнения движения для бруска и призмы в векторном виде:

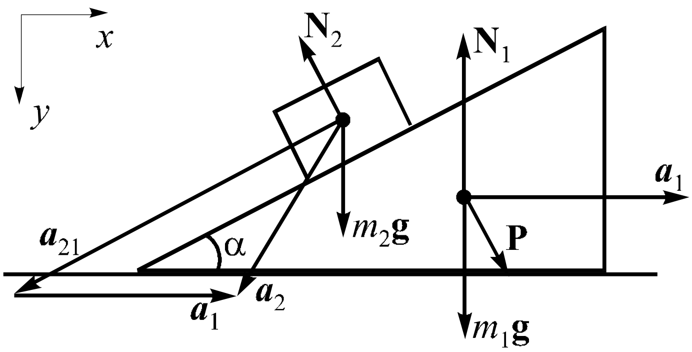
$$m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{P}, \tag{1}$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 \tag{2}$$

По третьему закону Ньютона

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N}_2.$$

С учётом последнего выражения спроецируем уравнения (1) и (2) на оси СК, показанные на рисунке. При этом надо учесть, что брусок относительно выбранной ИСО участвует в сложном движении: он перемещается относительно призмы и вместе с ней относительно горизонтальной плоскости. Поэтому сразу не очевидно значение угла, под которым направлено его ускорение к горизонтали. Можно лишь утверждать, что вдоль оси y брусок будет двигаться быстрее по сравнению с тем случаем, когда призма была бы неподвижна. Такие соображения позволили изобразить на рисунке вектор $\boldsymbol{a}_2$ под углом к горизонтали большим α.



Ось x:

$$m_1 a_1 = N_2 \sin\alpha, \tag{3}$$

$$m_2 a_{2x} = -N_2 \sin\alpha. \tag{4}$$

Ось y:

$$0 = m_1 g - N_1 + N_2 \cos\alpha. \tag{5}$$

$$m_2 a_{2y} = m_2 g - N_2 \cos\alpha. \tag{6}$$

Эта система четырёх уравнений содержат пять неизвестных: a_1, a_{2x}, a_{2y}, N_1, N_2 и однозначного решения не имеет.

Кроме силы тяжести в эти уравнения входят силы реакции опор, всю информацию о которых (направление) мы уже использовали. Значит, необходимо искать соотношения между ускорениями призмы и бруска. Очевидно, брусок всегда будет касаться призмы. Его движение относительно выбранной ИСО, как уже отмечалось, может быть представлено как сложное: он движется относительно призмы с некоторым ускорением $\boldsymbol{a}_{21}$, направленным вдоль её наклонной грани и вместе с призмой относительно ИСО. Тогда согласно формуле (3.20) можно записать

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_{21}, \tag{7}$$

или в проекциях на оси СК

$$a_{2x} = a_1 - a_{21}\cos\alpha, \tag{8}$$

$$a_{2y} = a_{21}\sin\alpha, \tag{9}$$

Математический этап решения. Надеемся, что полученную систему уравнений вы сможете решить самостоятельно и найти искомое ускорение призмы:

$$a_1 = \frac{g \sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha + m_1 / m_2}.$$

Анализ решения. При анализе полученного решения данной задачи полезно получить выражения для остальных неизвестных величин a_{21}, N_1, N_2. Поучительно обратить внимание (см. уравнение (4)) на то, что в данной системе, сила реакции опоры, действующая на брусок, зависит от того, как движется его опора – призма.

Для более глубокого понимания смысла полученного решения полезно обобщить исходные уравнения на случай шероховатых поверхностей и учесть силы трения, которые могут существовать между бруском и призмой и между призмой и горизонтальной поверхностью. Желательно исследовать полученное решение в случаях $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$, когда нулевое значение a_1 очевидно.

Задача 1.96

Цепочка массы m, образующая окружность радиуса R, надета на гладкий круговой конус с углом полураствора θ. Найти силу натяжения цепочки, если она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса.

Замечание. Для иллюстрации особенностей оперирования в инерциальных и неинерциальных системах отсчёта, приведём два способа решения этой задачи, отличающиеся выбором системы отсчёта. Тем более, что требуется найти значение силы, т.е. ***меры объективно существующего взаимодействий, она не зависит от произвола в выборе системы отсчёта.***

Вариант 1. Решение в ИСО, связанной с конусом.

Физический этап решения. Цепочка не является материальной точкой, поэтому необходимо разделить её на малые элементы Δm, каждый из которых можно принять за материальную точку. Теперь можно переформулировать задачу для элемента цепочки Δm:

Элемент цепочки равномерно движется по окружности радиуса R под действием нескольких сил, одну из которых необходимо определить.

Это обратная задача динамики. На элемент Δm в ИСО действуют четыре силы (см. рис.): сила тяжести $\Delta m\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ со стороны конуса, и две *одинаковые* по величине (почему одинаковые?) силы натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ со стороны соседних элементов цепочки. $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ направлены по касательным к окружности на границах выделенного элемента.

Запишем уравнение движения элемента Δm:

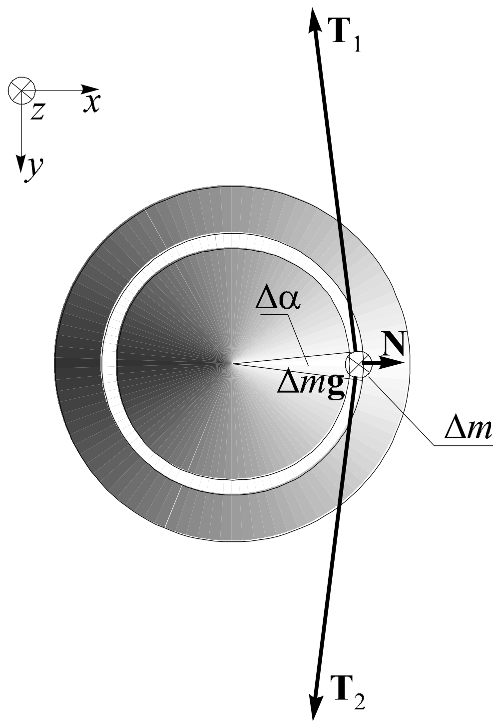
$$\Delta m\boldsymbol{a} = \Delta m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2. \tag{1}$$

Спроецируем это уравнение на оси выбранной СК (см. рис.):

(для оси x) $$-\Delta m\omega^2 R = -2T\sin(\Delta\alpha/2) + N\cos\theta, \tag{2}$$

(для оси y) $$0 = N\sin\theta - 2T\sin(\Delta\alpha/2). \tag{3}$$

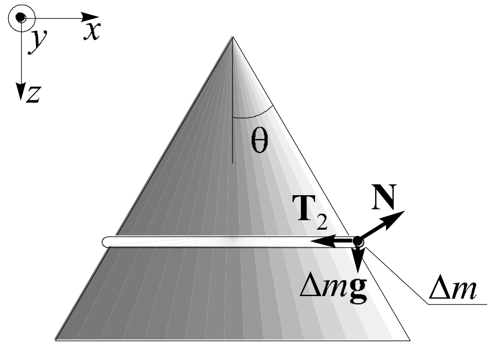
Здесь угол $\Delta\alpha$ указывает на элемент дуги, под которым “виден” элемент цепочки Δm из центра окружности радиуса R, образуемой цепочкой. Система двух уравнений содержит три неизвестных (N, T, $\Delta\alpha$) и не является замкнутой. Мы уже отразили в уравнениях всё, что знали о силах и кинематике задачи. Остаётся геометрия Попробуем связать Δm с $\Delta\alpha$. Свяжем Δm с линейной плотностью материала цепочки λ и длиной выделенного элемента Δl: $\Delta m = \lambda\Delta l$. Длина дуги окружности (считаем цепочку очень тонкой) Δl связана с углом $\Delta\alpha$, на который опирается дуга известным из геометрии соотношением: $\Delta l = R\Delta\alpha$. Для однородной цепочки $\lambda = m/(2\pi R)$. Тогда



$$\Delta m = \frac{m\Delta\alpha}{2\pi R}. \tag{4}$$

Система уравнений (2), (3), (4) становятся замкнутой. Решая её (*математический этап решения*), находим неизвестную величину T:

$$T = \frac{mg}{2\pi}\left(\mathrm{ctg}\theta + \frac{\omega^2 R}{g}\right).$$



Анализ решения. Основной вывод, который можно сделать из этого решения: – при рассмотрении динамики систем с *распределённой массой* (цепочки, веревки и т.д.) можно использовать уравнения движения материальной точки, записывая их для отдельных малых элементов этой системы, которые можно считать материальными точками в масштабах задачи.

Вариант 2. Решение в НИСО, вращающейся с цепочкой.

Физический этап решения. Перед нами, как и прежде, обратная задача динамики, но теперь элемент цепочки неподвижен относительно СК. Конкретизируем направление осей СК. Пусть, ось z, как и прежде, направлена вниз. Система координат вращается вокруг этой оси, так, что ось x всегда направлена на выделенный элемент, а направление оси y образует с двумя другими правую тройку. Тогда, изображённые на рисунке оси можно трактовать и как оси НИСО в определённый момент времени.

Запишем уравнение движения элемента Δm в НИСО*:*

$$\cancel{0 = \Delta m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2.} \tag{5}$$

Однако, это уравнение отличается от (1), а значит решая его вместе с (4) мы получим другой ответ. Почему?

Дело в том, что **уравнение (5) в НИСО записано неверно: в него не входят поправки** – ***силы инерции.***

Для того, чтобы их найти необходимо чётко представлять как движется выбранная НИСО относительно любой ИСО.

В нашем случае, НИСО вращается с постоянной угловой скоростью, при этом тело отсчёта неподвижно. Тогда из всех описанных выше сил инерции остаётся только одна: центробежная сила инерции равная $-\Delta m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения системы отсчёта, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор выбранного элемента относительно НИСО. Неверное уравнение (5) должно быть переписано в виде:

$$0=\Delta m\mathbf{g}+\mathbf{N}+\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2-\Delta m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}). \qquad (6)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит на оси z, от его направления, очевидно, ничего не зависит – центробежная сила инерции направлена вдоль оси x. Спроецируем уравнение (6) на оси СК

(для оси x) $$0=-2T\sin(\Delta\alpha/2)+N\cos\theta+\Delta m\omega^2 R, \qquad (7)$$

(для оси y) $$0=N\sin\theta-2T\sin(\Delta\alpha/2). \qquad (8)$$

С точки зрения математики (но не физики!) эти уравнения эквивалентны уравнениям (2), (3) и совместно с (4) приведут к уже известному ответу.

Анализ решения. Основной вывод, который можно сделать из решения в НИСО. При записи уравнений движения в НИСО необходимо учитывать поправки – силы инерции. Для этого важно очень ясно представлять, как движется НИСО. Скажем так: ***все ИСО эквивалентны друг другу, все НИСО – разные.***

С этой задачей тесно связана задача **1.97**.

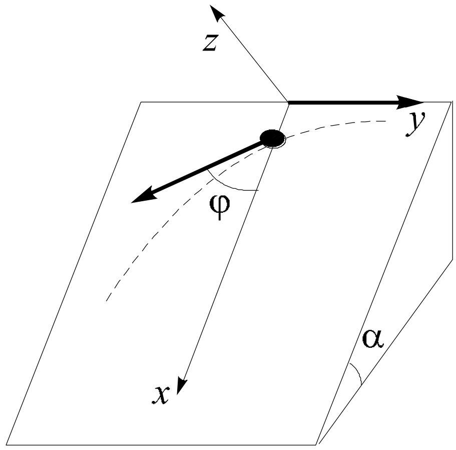
Задача 1.100

Небольшую шайбу положили на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и сообщили ей начальную скорость v_0. Найти зависимость скорости шайбы от угла φ, если коэффициент трения $k=\mathrm{tg}\alpha$ и в начальный момент $\varphi_0=\pi/2$.

Физический этап решения. Физическая система – шайба. На неё действуют (см. рис.): сила тяжести $\Delta m\mathbf{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ со стороны наклонной плоскости.

Попробуем записать уравнения движения в декартовой системе координат и в *сопровождающей* системе координат, связанной с шайбой. Ось x декартовой системы координат направим ось вниз по наклонной плоскости, ось z перпендикулярно ей, ось y – горизонтально.

Запишем уравнения движения в декартовой СК:



$$ma_x = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\varphi, \tag{1}$$

$$ma_y = -F_{\text{тр}}\sin\varphi, \tag{2}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \tag{3}$$

и в сопровождающей СК

$$ma_\tau = mg\sin\alpha\cos\varphi - F_{\text{тр}}, \tag{4}$$

$$ma_{\text{n}} = mg\sin\alpha\sin\varphi. \tag{5}$$

Учтём что,

$$F_{\text{тр}} = kN. \tag{6}$$

Математический этап решения. Из записанных уравнений, можно заметить (!?), что величины a_x и a_τ удовлетворяют условию

$$a_x + A(k,\alpha)a_\tau = gB(k,\alpha), \tag{7}$$

где $A(k,\alpha) = k\text{ctg}\alpha$, $B(k,\alpha) = \sin\alpha[1 - k^2\text{ctg}^2\alpha]$.

Рассмотрим последнее уравнение (7) как дифференциальное относительно скорости:

$$\frac{dv_{\text{x}}}{dt} + A(k,a)\frac{dv}{dt} = gB(k,a) \tag{7a}$$

Его можно проинтегрировать по времени, т.к. $A(k,\alpha)$, $B(k,\alpha)$ константы. С учётом начальных условий (при t=0 v=v_0, φ=π/2), получим:

$$v_x + A(k,\alpha)v = gB(k,\alpha)t + v_0A(k,\alpha).$$

Учитывая, что v_x=$v\cos\varphi$, получим искомую зависимость:

$$v = \frac{B(k,\alpha)gt + A(k,\alpha)v_0}{A(k,\alpha) + \cos\varphi} = \frac{v_0}{1 + \cos\varphi}. \tag{8}$$

Последнее выражение получено при подстановке k = tgα. При этом $A(k,\alpha)$ = $k$ctgα =1, $B(k,\alpha)$ = sinα[1–k^2ctg$^2\alpha$] =0.

Анализ решения. Как можно заметить из полученного решения, задача решена нестандартно. Потребовалась запись уравнений Ньютона в двух различных СК, чтобы догадаться о существовании равенства (7). Зато ответ получился более общим, чем это предполагалось составителем задачи. Фактически первая часть равенства в уравнении (8) получена для произвольного значения коэффициента трения k≠tgα.

Попытайтесь кроме этого получить ответ на вопрос: можно ли из записанных уравнений получить некоторую дополнительную информацию о траектории движения, например, зависимость радиуса кривизны траектории R в зависимости от угла φ?

Раздел 5. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются наиболее общими физическими законами. Они имеют глубокое происхождение, связанное с фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью и изотропностью. А именно: закон сохранения энергии связан с однородностью времени, закон сохранения импульса – с однородностью пространства, закон сохранения момента импульса с изотропностью пространства. Вследствие этого использование их не ограничивается рамками классической механики, они работают и при описании абсолютно всех известных явлений от космических до квантовых.

Важность законов сохранения, как инструмента теоретического исследования, обусловлена следующими обстоятельствами:

1. Законы сохранения не зависят ни от траекторий частиц, ни от характера действующих сил. Поэтому они *позволяют получить ряд весьма общих и существенных заключений о свойствах различных механических процессов, не вникая в их детальное рассмотрение* с помощью уравнений движения. Если, например, выясняется, что некий анализируемый процесс противоречит законам сохранения, то можно утверждать: этот процесс невозможен, и бессмысленно пытаться его осуществить.

2. Независимость законов сохранения от характера действующих сил позволяет *использовать их даже в том случае, когда силы неизвестны*. Так дело обстоит, например, в области микромира, где понятия материальной точки, а следовательно, и силы бессмысленны. Такая же ситуация имеет место при анализе систем большого числа частиц, когда технически невозможно определить одновременно координаты частиц, и поэтому – рассчитать действующие между частицами силы. Законы сохранения являются в этих случаях единственным инструментом теоретического исследования.

3. Даже в случае, если все силы известны и *использование законов сохранения* не дает новой по сравнению с уравнением движения (вторым законом Ньютона) информации, их применение *может существенно упростить теоретические выкладки*.

Исходя из сказанного, можно рекомендовать, *при решении любых физических задач использовать, прежде всего, один за другим, все законы сохранения, и только после того, когда станет ясно, что этого недостаточно, переходить к записи и анализу уравнений движения*.

Здесь рассмотрено применение законов сохранения в рамках классической механики.

5.1 Основные определения, формулы и формулировки законов сохранения.

Элементарная работа силы **F** на перемещении материальной точки $d\mathbf{r}$ равна скалярному произведению:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \qquad (5.1)$$

Символ δ принято использовать для обозначения бесконечно малых изменений величин, зависящих не только от состояния системы, но и от способа, которым система была переведена в данное состояние. *Работа* некоторой силы как раз такая величина – она зависит не только от начального и конечного положений материальной точки, но и от траектории движения последней. Считается работа силы так. Траектория движения материальной точки разбивается на малые прямые участки $d\mathbf{r}_\mathrm{i}$, каждый из которых мал настолько, что в пределах его силу можно считать постоянной по величине и направлению. Работа, по определению, равна сумме: $A = S\delta A_\mathrm{i} = S\mathbf{F}d\mathbf{r}_\mathrm{i}$. В пределе бесконечно малых $d\mathbf{r}_\mathrm{i}$ сумма может быть заменена интегралом:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} \qquad (5.2)$$

Цифрами 1 и 2 обозначены первое (начальное) и второе (конечное) положения материальной точки. В каждом конкретном случае в качестве пределов интегрирования должны стоять пределы изменения аргумента подынтегральной функции. Например, если сила и элементарное перемещение будут выражены как функции времени, в качестве нижнего предела необходимо поставить момент времени начала, а в качестве верхнего – конца движения.

Мощностью называют работу, совершаемую в единицу времени

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} \ . \qquad (5.3)$$

Разделение сил по классам:

- *Потенциальные или консервативные силы* – те, работа которых не зависит от траектории движения материальной точки и, значит, может быть выражена через изменение некоторой функции, зависящей только от координат. Если материальная точка m в любой точке пространства испытывает на себе действие некоторой потенциальной силы, создаваемой телом B, говорят, что точка m находится в *потенциальном поле сил,* создаваемом телом B. Говорят, что в этом поле точка m обладает *потенциальной энергией*. По определению, приращение потенциальной энергии материальной точки, вызванное бесконечно малым перемещением в поле, равно работе сил поля взятой, с обратным знаком:

$$dU = -\delta A = -\mathbf{F} d\mathbf{r}. \qquad (5.4)$$

Отсюда следует связь между потенциальной энергией частицы в потенциальном силовом поле и силой, действующей на частицу:

$$\mathbf{F} = -gradU = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \qquad (5.5)$$

где $\mathbf{e}_\mathrm{i}$ – орты декартовой системы координат.

Консервативными являются все центральные силы, сила упругости, сила тяжести.

- *Диссипативные силы* – те, полная работа которых всегда отрицательна. Пример диссипативных сил – силы трения. Под полной работой диссипативных сил здесь понимается сумма работ диссипативных сил, совершаемых над всеми телами системы. Такое понимание позволяет избежать недоразумений, обсуждаемых при решении задачи 1. (см. ниже)
- *Гироскопические силы* – те, работа которых равна всегда нулю. Очевидно, эти силы перпендикулярны скорости. Таких сил всего две: сила Лоренца и Кориолисова сила инерции.

Кинетическая энергия материальной точки – функция, изменение которой равно полной работе всех сил, действующих на материальную точку:.

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5.6)$$

Моментом импульса материальной точки *относительно точки O* называют величину

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}\ , \qquad (5.7)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус вектор материальной точки относительно *O,* $\mathbf{p}$ – импульс материальной точки. Проекция $\mathbf{L}$ на некоторую ось z, проходящую через точку *O* и характеризующуюся ортом $\mathbf{e}_\mathrm{z}$, называется *моментом импульса относительно оси* z:

$$L_\mathrm{z} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}\mathbf{e}_\mathrm{z} = \mathbf{p}\times\mathbf{e}_\mathrm{z}\mathbf{r} = \mathbf{e}_\mathrm{z}\times\mathbf{r}\mathbf{p}, \qquad (5.8)$$

Моментом силы относительно точки O*,* называют величину

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\ , \qquad (5.9)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус вектор точки приложения силы $\mathbf{F}$ относительно *O*. Проекция $\mathbf{M}$ на некоторую ось z, проходящую через точку *O* и характеризующуюся ортом $\mathbf{e}_\mathrm{z}$, называется *моментом силы относительно оси* z:

$$M_\mathrm{z} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\mathbf{e}_\mathrm{z} = \mathbf{F}\times\mathbf{e}_\mathrm{z}\mathbf{r} = \mathbf{e}_\mathrm{z}\times\mathbf{r}\mathbf{F}, \qquad (5.10)$$

Из законов Ньютона следует ***уравнение моментов***

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \qquad (5.11)$$

При использовании законов сохранения необходимо чётко различать понятия замкнутой системы и консервативной системы.

Замкнутой называют механическую систему, ни на одно тело которой не действуют внешние силы.

Консервативной называют механическую систему, в которой все внутренние силы консервативны, а внешние консервативны и стационарны.

Естественно, эти понятия являются идеализациями, но искусство физика–исследователя как раз и состоит в умении увидеть причины, по которым ту или иную реальную систему можно считать замкнутой или консервативной .

Закон сохранения импульса. *В инерциальной системе отсчёта импульс замкнутой системы остаётся постоянным.* Математически это утверждение можно выразить одним из следующих способов:

$$\mathbf{P}=\sum \mathbf{p}_\mathrm{i} = const \text{ (для замкнутой системы),} \tag{5.12}$$

$$\text{или } d\mathbf{P}=d\sum \mathbf{p}_\mathrm{i} = \sum \mathbf{f}_\mathrm{i} dt = \mathbf{F}_{out} dt, \tag{5.13}$$

где $\mathbf{P}$ – полный импульс системы материальных точек, каждая из которых обладает некоторым импульсом $\mathbf{p}_\mathrm{i}$, $\mathbf{f}_\mathrm{i}$ – равнодействующие всех сил действующих на i-ую точку, $\mathbf{F}_{out}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на материальные точки системы. При этом полагают, что и $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_{out}$ есть векторы, приложенные к так называемому *центру масс (центру инерции*) системы, т.е. точке, характеризуемой вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} , \tag{5.14}$$

где m_i – массы, а $\mathbf{r}_\mathrm{i}$ – радиус-векторы материальных точек системы. Поэтому уравнение (5.13) часто называют *теоремой о движении центра масс*.

Нетрудно сообразить, что *полный импульс системы в системе отсчёта, связанной с центром масс (Ц–система) равен нулю.*

Из (5.13) и условия непрерывности функций, обладающих физическим смыслом, следует, что *если небольшая внешняя сила действует малое время, систему можно считать замкнутой* в смысле закона сохранения импульса. Очевидно также, что закон сохранения импульса может выполняться для отдельных (перпендикулярных $\mathbf{F}_{out}$) компонент вектора импульса.

Из сказанного выше ясно, что *простота оперирования с законом сохранения импульса существенно зависит от выбора системы координат*.

Легко получить из (5.13) **уравнение для движения тела переменной массы** M **(уравнение Мещерского):**

$$M\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_{out} + \dot{M}\mathbf{u}. \tag{5.15}$$

Здесь u – скорость отделяющихся (или присоединяющихся) частей относительно тела.

Закон сохранения энергии. *В инерциальной системе отсчёта полная механическая энергия замкнутой консервативной системы материальных точек остаётся постоянной.*

$$E=T+U=const \text{ (для замкнутой консервативной системы)}, \tag{5.16}$$

$$\text{или } dE=d(T+U)=\delta A_{out}+\delta A_{\text{in},dis}\,, \tag{5.17}$$

где $T=\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кинетическая , U – потенциальная энергии системы, δA_{out} – работа всех внешних сил, $\delta A_{\text{in},dis}$ – работа внутренних диссипативных сил.

Закон сохранения момента импульса. *В инерциальной системе отсчёта полный момент импульса замкнутой системы материальных точек остаётся постоянным.*

$$\mathbf{L}=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i=const \text{ (для замкнутой системы)}, \tag{5.18}$$

$$\text{или } d\mathbf{L}=d\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i dt=\mathbf{M}_{out}dt, \tag{5.19}$$

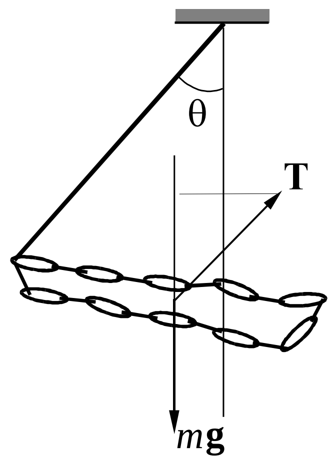
где $\mathbf{M}_{out}$ – момент только внешних сил.

Так же как и закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса может выполняться только для отдельных компонент, т.е. моментов импульса относительно осей системы координат.

5.2 Примеры решения задач с использованием законов сохранения

Задача 1.113

Замкнутая цепочка массы m=0.36 кг соединена нитью с концом центробежной машины (см.рис.) и вращается с постоянной угловой скоростью ω = 35 рад/с. При этом нить составляет угол θ =45° с вертикалью. Найти расстояние r от центра масс цепочки до оси вращения, а также силу натяжения нити.



Физический этап решения. Физическая система – цепочка, не замкнута. Решить задачу динамическим методом нельзя, т.к. неизвестны силы между звеньями цепочки. Единственный путь – использование законов сохранения. Законы сохранения энергии и момента импульса бесполезны, поскольку неизвестна форма цепочки и, следовательно, – момент инерции. Попытаемся использовать формулу (5.13). Выберем ИСО, связанную с точкой подвеса нити. Внешних по отношению к цепочке сил две – сила тяжести и сила натяжения нити. Так как угол θ не изменяется, центр инерции не должен двигаться в вертикальном направлении. Значит, вертикальная составляющая силы натяжения $T\cos\theta$ компенсируется силой тяжести. Горизонтальная составляющая силы натяжения обеспечивает центростремительное ускорение центра масс.

Математический этап решения. По горизонтальной составляющей силы натяжения восстановим её значение $T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = 5\text{Н}$.

Центростремительное ускорение по определению равно $\omega^2 r$, тогда

$$m\omega^2 r = mg\text{tg}\theta.$$

Отсюда

$$r = \frac{g\text{tg}\theta}{\omega^2} = 0{,}8\text{м}.$$

Задача 1.118

Плот массы M с находящимся на нём человеком массы m неподвижно стоит на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение $\mathbf{l}'$ со скоростью $\mathbf{v}'(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

а) вектор перемещение плота $\mathbf{l}$ относительно берега;

б) горизонтальную составляющую F силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

Физический этап решения. Из условия очевидно, что относительное перемещение человека и плота происходит за счёт внутренних сил системы человек +плот: внешние силы (силы тяжести и сила Архимеда) перпендикулярны перемещениям и, следовательно, не меняют компоненту импульса системы в горизонтальном направлении. Импульс системы до перемещения человека был равен нулю. Отсюда можно определить скорость и перемещение плота. Зная скорость плота, найдём искомую силу взаимодействия.

Математический этап решения. Итак, закон сохранения импульса

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = 0,$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ скорости человека и плота относительно берега. Очевидно кинематическое соотношение:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Из этих уравнений

$$\mathbf{V} = -\frac{m\mathbf{v}'}{m+M}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на dt и проинтегрировав его получим:

$$\mathbf{l} = -\frac{m\mathbf{l}'}{m+M}.$$

Продифференцировав выражение для $\mathbf{V}$ и умножив его на M, получим:

$$\mathbf{F} = -\frac{Mm\dot{\mathbf{v}}'}{m+M}.$$

Анализ решения. Обратите внимание на то, что перемещение плота не зависит от силы, с которой человек действовал на плот, и времени действия этой силы. Как вы думаете, почему не поставлена аналогичная задача для человека стоящего, например, на телеге?

Задача 1.122

Пушка массы M начинает свободно скользить вниз по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\mathbf{p}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда по сравнению с массой пушки, найти продолжительность выстрела t.

Физический этап решения. Эту задачу невозможно решить, используя динамический подход: неизвестно как взаимодействуют снаряд и пушка во время выстрела, чему равна в это время сила реакции опоры. При использовании закона сохранения импульса сила взаимодействия пушки и снаряда, как внутренняя сила системы пушка+снаряд в расчёт не принимается. Для этой системы тел, выбрав одну из осей системы координат в направлении по наклонной плоскости вниз, удаётся исключить из рассмотрения и силу реакции опоры. Импульс пушки перед выстрелом найдём из закона сохранения энергии: кинетическая энергия перед выстрелом будет равна работе внешних сил. Т.к. сила реакции опоры во время скольжения перпендикулярна скорости, работы она не совершает. Следовательно, кинетическая энергия системы пушка+снаряд равна работе силы тяжести.

Математический этап решения. Итак, кинетическая энергия пушки после соскальзывания на расстояние l

$$\frac{MV^2}{2} = Mgl\sin\alpha .$$

Из (5.13) для проекции импульса на наклонную плоскость получим:

$$p\cos\alpha - MV = Mg\tau\cos\alpha .$$

Решая систему двух уравнений относительно t, получим

$$\tau = \left(p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}\right)\Big/ Mg\cos\alpha .$$

Анализ решения. Попытайтесь обобщить задачу на случай, когда импульс снаряда направлен под известным произвольным углом к горизонтали.

Задача 1.156

Тело массы m начинают поднимать с поверхности Земли, приложив к нему силу $\mathbf{F}$, которую изменяют с высотой подъёма y по закону $\mathbf{F}=2(ay-1)m\mathbf{g}$, где a – положительная постоянная. Найти работу этой силы и приращение потенциальной энергии тела в поле силы тяжести Земли на первой половине пути подъёма.

Физический этап решения. Для того, чтобы найти искомую величину необходимо определить полувысоту подъёма. Здесь поможет условие, что в низшей и высшей точках подъёма кинетическая энергия равна нулю. Другими словами, работа силы $\mathbf{F}$ и силы тяжести на всём пути подъёма должна быть равна нулю.

Математический этап решения. Направим ось y вертикально вверх. Мысленно разобьём траекторию, по которой поднимается тело на элементы $d\mathbf{r}$.

Каждый такой шаг меняет координату y тела на dy. Полная работа силы **F** и силы тяжести на всём пути подъёма:

$$A = \int_0^h (\mathbf{F} + m\mathbf{g})d\mathbf{r} = mg\int_0^h (1-2ay)dy = mgh(1-ah) = 0.$$

Отсюда $h=1/a$. Тогда, искомая работа

$$A_1 = \int_0^{h/2} \mathbf{F}d\mathbf{r} = 2mg\int_0^{h/2} (1-ay)dy = 3mgh/(4a).$$

Анализ решения. Придумайте реальную ситуацию, которую моделирует эта задача.

Задача 1.205

Небольшой шарик подвесили к точке O на лёгкой нити длиной l. Затем шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась на угол θ от вертикали, и сообщили ему скорость в горизонтальном направлении перпендикулярно к вертикальной плоскости, в которой расположена нить. Какую начальную скорость надо сообщить шарику, чтобы в процессе движения максимальный угол отклонения от вертикали оказался равным $\pi/2$?

Физический этап решения. Физическая система – шарик не замкнута. Однако сил всего две: сила тяжести и сила натяжения нити. Их работы рассчитываются легко. Сила натяжения перпендикулярна скорости движения и работы не совершает. Значит, изменение кинетической энергии шарика определяется только работой силы тяжести. Эта работа связана с изменением высоты подъёма. Моменты обеих сил относительно точки подвеса направлены горизонтально (покажите), значит, вертикальная компонента момента импульса (момент импульса относительно вертикальной оси) не изменяется. Можно попробовать использовать законы сохранения. Очевидно, что в высшей точке подъёма шарик должен вращаться вокруг вертикальной оси проходящей через точку подвеса. Т.к. он уже перестанет подниматься и ещё не начнёт падать (высшая точка) его импульс будет направлен в горизонтальном направлении. Так же по условию задачи направлен импульс в начальный момент времени. Эти обстоятельства упрощают расчёт момента импульса шарика относительно вертикальной оси в начальной точке и в высшей точке подъёма.

Математический этап решения. Итак, имеем два уравнения:
закон сохранения момента импульса относительно вертикальной оси

$$mv_0 l\sin\theta = mv_1 l,$$

и выражение для изменения кинетической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mgh\cos\theta,$$

где v_0 и v_1 – скорости шарика в начале и в конце пути соответственно.

Отсюда $$v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{m\cos\theta}}.$$

Раздел 6. Динамика твёрдого тела

Абсолютно твёрдое тело (АТТ) представляет собой модель реальных тел, которая предполагает неизменными расстояния между составными частями тела. Отсюда следует, что решение задач по динамике АТТ можно разбить на два этапа:

1. определение параметров движения центра масс. При этом все силы независимо от точки их приложения переносятся в центр масс, а тело считается материальной точкой с той же массой, что у тела и имеющей координаты центра масс;
2. определение параметров вращения вокруг центра масс (оси проходящей через центр масс) или некоторой другой точки (оси) вращения неподвижной в системе отсчёта, связанной с центром масс.

О динамике материальной точки много говорилось выше, поэтому здесь мы обсудим лишь вопросы, касающиеся динамики вращательного движения.

Зачастую наиболее простое решение задач получается при использовании законов сохранения.

Как и при решении задач по динамике материальной точки, удобство работы зависит от удачного выбора системы отсчёта.

6.1 Основные определения и законы динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Вращение АТТ относительно выбранной точки O характеризуется моментом импульса:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ – радиус-вектор относительно точки O и скорость бесконечно малой части тела массой dm, суммирование ведётся по всему телу. Когда речь идет о вращении вокруг некоторой неподвижной оси x и точка O лежит на этой оси удобно пользоваться проекцией момента импульса на ось вращения – моментом импульса относительно оси x:

$$L_x = \mathbf{e}_x \int \mathbf{r}_\perp \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp\right) dm = \omega \int r_\perp^2 dm = I_x \omega, \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения, $\mathbf{e}_x$ – орт в направлении оси x, $\mathbf{r}_\perp$ - вектор, проведённый по кратчайшему расстоянию от оси вращения к элементу dm, I_x - по определению, момент инерции относительно оси вращения, является мерой инертности тела по отношению к вращению относительно оси x.

Теорема Штейнера. Момент инерции твёрдого тела I_x относительно произвольной оси равен моменту инерции I_o этого тела относительно оси параллельной данной и проходящей через центр инерции, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния между осями a:

$$I_x = I_o + ma^2. \tag{6.3}$$

Моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы относительно осей, проходящих через центры масс, приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1.

Тело	Ось	Момент инерции
Шар радиуса r	любая ось	$\frac{2}{5}mr^2$
Диск радиуса r	ось перпендикулярная плоскости диска	$\frac{1}{2}mr^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось перпендикулярная оси симметрии	$\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось симметрии	$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий стержень длиной l	ось перпендикулярная стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
Куб с длиной ребра l	любая ось	$\frac{1}{6}ml^2$

В самом общем случае, связь между моментом импульса и угловой частотой вращения описывается выражением:

$$\mathbf{L}=\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \tag{6.4}$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ – *тензор момента инерции.*

Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ (5.11) в случае неизменного тензора момента инерции:

$$\dot{\mathbf{L}}=\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{M}_{out}, \tag{6.5}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ – угловое ускорение, $\mathbf{M}_{out}$ – момент внешних сил относительно оси вращения.

Обычно, при решении задач на первом курсе требуется анализировать временное поведение момента импульса относительно некоторой неподвижной оси. Как следствие уравнения (6.5) получим:

$$L_x=I_x\omega=M_x \tag{6.6}$$

где L_x – как и прежде момент импульса относительно оси вращения.

Полезно помнить (и самостоятельно получить) некоторые свойства моментов сил в Ц–системе:

- *В Ц–системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется.*
- *В Ц–системе суммарный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю.*

Кинетическая энергия вращающегося *АТТ относительно неподвижной оси:*

$$T = \int \frac{v^2 dm}{2} = \frac{I_x \omega^2}{2}. \tag{6.7}$$

Работа внешних сил *при повороте АТТ относительно неподвижной оси* на конечный угол *:*

$$A_{out} = \int_0^{\varphi} \mathbf{M}_{out} \overrightarrow{d\varphi}. \tag{6.8}$$

Связь между угловой скоростью **ω'** ***прецессии гироскопа, его моментом импульса*** **L** ***и моментом внешних сил*** $\mathbf{M}_{out}$:

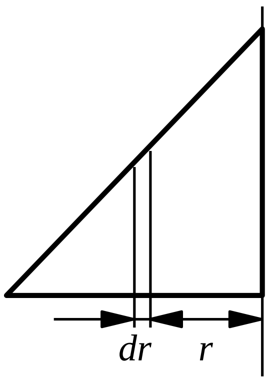
$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} = \mathbf{M}_{out}. \tag{6.9}$$

6.2 Примеры решения задач динамики твёрдого тела

Задача 1.256.

Тонкая однородная пластинка массы m=0.6 кг имеет форму равнобедренного треугольника. Найти её момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого a=200 мм.

Решение. Для решения воспользуемся определением момента инерции (6.2). Для расчёта величины

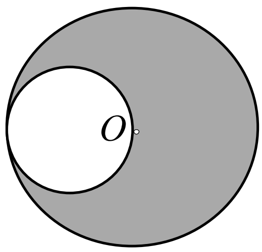


$$I = \int r^2 dm$$

удобно разбивать тело на участки находящиеся на одинаковом расстоянии от оси вращения. В нашем случае это прямые полоски (см.рис.), каждая из которых имеет толщину dr , длину $l=a-r$, площадь $ds=(a-r)dr$ и массу $dm=mds/S=2mds/a^2$. Тогда искомая величина

$$I = \int_0^m r^2 dm = \int_0^a r^2 \frac{2m}{a^2}(a-r)dr = \frac{ma^2}{6} = 4.0 \text{кг} \times \text{м}^2.$$

Задача 1.260



Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез (см. рис.) Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m . Найти момент инерции такого диска относительно оси перпендикулярной к плоскости диска и проходящей :

а) через точку O;

б) через его центр масс.

Физический этап решения. Если решать задачу в лоб она сведётся к вычислению громоздкого интеграла эллиптического типа. Упрощение возможно, так как момент инерции величина аддитивная: т.е. изменение момента инерции системы в случае добавления к ней новых частей равно моменту инерции этих частей. Тогда представим наше тело как бы состоящим из двух сплошных дисков: один большой радиуса R и массой $m+m_0$, другой маленький с радиусом (см.рис.) $R/2$ и массой $m_0=-m/3$ (получите), расположенный на месте выреза. Таким образом, мы получим систему тел, целиком эквивалентную описанной в задаче.

Решение. Для большого и малого дисков относительно перпендикулярных осей проходящих через их центры моменты инерции равны

$$I_1 = \frac{1}{2}(m+m_0)R^2, \quad I_2 = \frac{1}{8}m_0R^2.$$

С учётом теоремы Штейнера для момента инерции относительно оси, проходящей через точку O

$$I = I_1 + \left(I_2 - \frac{1}{4}m_0R^2\right) = \frac{1}{2}(m+m_0)R^2 - \frac{3}{8}m_0R^2 = \frac{13}{24}mR^2.$$

Задача 1.281

Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости – ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти:

а) установившуюся угловую скорость вращения дисков $\boldsymbol{\omega}$;

б) работу A, которую при этом совершили силы трения.

Физический этап решения. Внешней по отношению к системе двух дисков является сила тяжести. Она не изменяет полный момент импульса и кинетическую энергию, связанную с вращением, т.к. направлена вдоль оси вращения. Нас не интересует, как с течением времени система переходила к состоянию, когда оба диска стали вращаться с одинаковой скоростью, поэтому можно использовать законы сохранения энергии и момента импульса. Изменение кинетической энергии в данном случае должно быть равно работе диссипативной силы – силы трения (см. формулу 5.17).

Решение. Закон сохранения момента импульса дает уравнение

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1+I_2)\omega,$$

закон сохранения энергии –

$$\frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} = \frac{(I_1+I_2)\omega^2}{2} + A.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1+I_2} \text{ и}$$

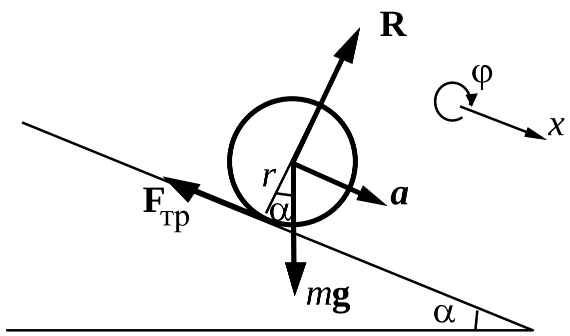
$$A = \frac{I_1I_2}{2(I_1+I_2)}(\omega_1-\omega_2)^2.$$

Анализ решения. Обратите внимание на полную формальную схожесть со случаем абсолютно неупругого удара двух материальных точек.

Задача 1.286

Однородный шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α . Найти ускорение центра шара и значение коэффициента трения, при котором скольжения не будет.

Физический этап решения. Реализуем схему решения задач динамики вращательного движения, описанную в начале раздела. Определим силы и точки их приложения. Выберем направления осей системы координат и положительное направление угла поворота (см. рис.). Напишем уравнение движения центра масс и уравнение динамики вращательного движения (6.6) относительно оси, проходящей через центр масс. Т.к. скольжения нет должна существовать кинематическая связь между угловым и линейным ускорениями.



Математический этап решения. Уравнение движения центра масс в проекции на ось x (см. рис.)

$$ma = mg\sin\alpha.-F_{\text{тр}}$$

Уравнение вращательной динамики относительно оси z, проходящей через центр масс шара и перпендикулярной плоскости рисунка

$$I\beta = rF_{\text{тр}}.$$

Если нет проскальзывания,

$$a = r\beta.$$

Записанных уравнений достаточно чтобы ответить на вопросы, сформулированные в условии. Решите полученную систему уравнений самостоятельно.

Анализ решения. Обратите внимание: как и в случае падения материальной точки по наклонной плоскости, ускорение не зависит от массы и размеров шара. Подумайте, почему в случае качения это ускорение меньше, чем в случае скольжения? Рассмотрите такую ситуацию. С наклонной шероховатой абсолютно твёрдой плоскости одновременно начинают двигаться три тела одинаковой массы из одинакового материала: шар, брусок и тележка. Что будет двигаться быстрее?

Задача 1.278

Вертикально расположенный однородный стержень массы M и длины l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая m<<M, найти: а) скорость летевшей пули; б) приращение импульса системы «пуля+стержень» за время удара; какова причина изменения этого импульса; в) на каком расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы не изменился.

Предварительный анализ. Зададимся более общей задачей: пуля попадает в стержень на расстоянии x от его верхнего конца.

Физический этап решения. Для решения используем законы сохранения. Всю эволюцию системы удобно разбить на два этапа: 1) пуля ударяет в стержень 2) стержень с пулей отклоняется на угол α. Очевидно, на первом этапе нельзя использовать закон сохранения энергии (удар не упругий) и закон сохранения импульса (возникает сила реакции оси вращения). Закон сохранения момента импульса относительно оси вращения даст уравнение

$$mvx=I\omega,$$

где $I=Ml^2/3$ – момент инерции стержня относительно его конца, ω – угловая частота вращения сразу после удара. Для второго этапа, из закона сохранения энергии стержня в поле силы тяжести получим

$$I\omega^2/2=Mgy=l\sin^2\alpha/2,$$

где Mgy – работа силы тяжести при подъёме центра тяжести стержня на высоту y. Использование в уравнении для энергии той же величины ω, что и в уравнении для момента импульса возможно при условии, что за время удара стержень не отклонился. Из записанных выражений для скорости пули до удара получим

$$v=\frac{Ml}{mx}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\left(\alpha/2\right).$$

Импульс системы пуля+стержень за время удара меняется за счёт силы реакции оси вращения.

$$\Delta p=M\omega l/2-mv=\left(\frac{3x}{2l}-1\right)\frac{Ml}{x}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\left(\alpha/2\right).$$

Анализ решения. Обратите внимание на то, что при $x>2l/3$ импульс системы увеличивается. За счёт какой внешней силы? Каково значение этой силы при $x=2/3$ при $x<2/3$. Как можно использовать результат задачи на практике?

Задача 1.305

Волчок массы m=0,50 кг, ось которого наклонена под углом $\theta=30^o$ к вертикали, прецессирует под действием силы тяжести. Момент инерции волчка относительно оси его симметрии $I=2{,}0\,\text{гм}^2$, угловая скорость вращения вокруг этой оси $\omega=350$ рад/с, расстояние от точки опоры до центра масс волчка $l=10$ см. Найти: а) угловую скорость прецессии волчка ω’; б) модуль и направление горизонтальной составляющей силы реакции F, действующей на волчок в точке опоры.

Решение. Для нахождения ω‘ можно используем уравнение (6.9).

$$\omega' I\omega\sin\theta=mgl\sin\theta.$$

Отсюда
$$\omega'=\frac{mgl}{I\omega}=0,7\text{рад/с}.$$

Центростремительное ускорение центра масс волчка

$$a_\text{ц}=\omega'^2 l\sin\theta.$$

Ему соответствует сила

$$F=ma_\text{ц}=m\omega'^2 l\sin\theta=10\text{мН}.$$

Раздел 7. Закон всемирного тяготения

Решение задач с использованием закона всемирного тяготения не требует освоения новых технических приёмов кроме тех, которые были описаны в предыдущих разделах, зато является хорошим поводом закрепить полученные навыки. Как и всегда, сначала пытайтесь использовать законы сохранения, уравнения динамики, кинематические соотношения. Некоторые задачи решаются проще, если использовать эмпирические законы Кеплера.

7.1 Некоторые законы классической теории тяготения

Законы Кеплера:

1. Все планеты солнечной системы движутся по эллипсам в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты, определяющий её положение относительно Солнца за равные промежутки времени описывает сектора равной площади.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся между собой как кубы больших полуосей планетарных орбит: $T_1^2/T_2^2=a_1^3/a_2^3$, или $a^3/T^2=K$, где K - постоянная Кеплера.

Эти законы являются следствиями законов сохранения и *закона всемирного тяготения Ньютона: Материальные точки с массами m_1 и m_2, разделённые расстоянием r, притягиваются друг к другу с силой* $F=\gamma\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, *где* $\gamma = 4\pi^2 K/M = 6{,}672\cdot10^{-11}$ м^3/(с^{2}кг) – *гравитационная постоянная (M–масса Солнца).*

Такой же формулой описывается взаимодействие двух шаров, если расстояние между их центрами не меньше суммы радиусов шаров.

Напряжённость (сила, действующая на материальную точку единичной массы) и потенциал (потенциальная энергия материальной точки единичной массы) поля тяготения точечной массы m на расстоянии r: $\mathbf{G}(\mathbf{r})=-\gamma\dfrac{m}{r^3}\mathbf{r}$, $\varphi(\mathbf{r})=-\gamma\dfrac{m}{r}$.

7.2 Примеры решения задач с использованием закона всемирного тяготения

Задача 1.225

Планета *A* движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. В момент, когда она находилась на расстоянии r_0 от Солнца, её скорость равнялась v_0 и угол между радиус-вектором планеты и вектором скорости составлял α. Найти наибольшее и наименьшее расстояния, на которые удаляется от Солнца эта планета при своём движении.

Физический этап решения. Заданные в условии величины скорости, радиус-вектора и угла между этими векторами определяют значения полной энергии планеты в поле тяготения Солнца и её момент импульса относительно Солнца. Массы Солнца и всех других тел солнечной системы несоизмеримы, поэтому можно полагать, что в солнечной системе находится только планета *A*. Учитывая, что все другие звёздные системы находятся на больших расстояниях можно считать, что момент импульса планеты *A* и её полная механическая энергия в поле тяготения Солнца неизменны. В точках максимального и минимального удаления от Солнца скорость планеты перпендикулярна её радиус-вектору. Из закона сохранения момента импульса и энергии имеем:

$$mr_0v_0\sin\alpha = mr_{\max}v_{\min} = mr_{\min}v_{\max},$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_0} = \frac{mv_{\min}^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_{\max}} = \frac{mv_{\max}^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_{\min}},$$

где m и M – массы планеты и Солнца соответственно.

В итоге получили систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными. Решая её (*математический этап*), находим:

$$r_{\max/\min} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(2-\eta)\eta\sin^2\alpha}}{(2-\eta)}r_0, \text{ где } \eta = \frac{r_0v_0^2}{\gamma M}.$$

Задача 1.232

Однородный шар имеет массу M и радиус R. Найти давление p внутри шара, обусловленное гравитационным сжатием, как функцию расстояния r от его центра. Оценить p в центре Земли, считая, что Земля является однородным шаром.

Предварительный анализ задачи. Искомое давление на расстоянии r от центра будет определяться модулем веса столба с единичной площадью основания и высотой (R–r). При решении используем формулу (7.4).

Решение. Напряжённость гравитационного поля на расстоянии r' центра:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}') = -\gamma\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r'^3}{r'^3}\mathbf{r}' = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\mathbf{r}',$$

где $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ – плотность материала шара. Искомое давление:

$$p(\mathbf{r}) = |\mathbf{P}(\mathbf{r})| = \left|\int\mathbf{G}(\mathbf{r}')dm\right| = \int_r^R\left(\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r'\right)(\rho dr') = \frac{3(R^2-r^2)\gamma M^2}{8\pi R^6},$$

где dm – масса бесконечно малой части столбика с единичной площадью основания, находящейся на расстоянии r' от центра, имеющей высоту dr'. $p(0) = 1{,}8\cdot10^6$ атм.

Раздел 8. Механические колебания

Изучение общих закономерностей и языка описания колебаний и волн чрезвычайно важно по следующим причинам:

- В состоянии равновесия величины, характеризующие поведение любых физических систем, совершают колебания около своих значений, соответствующих минимумам функций потенциальных энергий систем.
- Волны являются преимущественным способом взаимодействия между объектами физического мира.

Механические системы являются наиболее простыми из изучаемых физикой. На их примере часто возможно дать наиболее наглядное представление о принципиальных вопросах теории колебаний и волн.

Согласно теореме Фурье *любое* колебание может быть представлено *как сумма бесконечно большого числа простых, гармонических*, (происходящих по закону синуса или косинуса) *колебаний*. Благодаря этой теореме, задача об изучении любых колебаний сводится к изучению свойств *гармонических* колебаний, и нахождению наиболее простых способов оперирования с суммами гармонических колебаний.

8.1 Основные понятия и законы колебательного движения

Как правило, поведение отклонений величин x, характеризующих физическую систему, от их равновесных значений удовлетворяет ***уравнению гармонического осциллятора***:

$$p\ddot{x} + q\dot{x} + rx = 0. \tag{8.1}$$

Первое слагаемое представляет быстроту изменения x, p– является мерой инертности системы. Второе слагаемое, так называемый “диссипативный член”, учитывает связь системы с окружением, в случае $q>0$, как станет ясно ниже, происходит уменьшение энергии, а в случае $q<0$ – её увеличение, случай $q=0$ соответствует замкнутой системе. Наконец, последнее слагаемое описывает “консервативную силу”, его наличие связано с тем, что система, выведенная из состояния равновесия, стремится вернуться в него. Величина r в первом приближении определяет крутизну потенциальной ямы, определяющей устойчивое состояние системы: $r=(d^2U/dx^2)$.

Уравнение (8.1) удобно представлять в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \tag{8.2}$$

Решением (8.2) являются гармонические функции вида

$$x(t) = A(t)e^{i\Phi(t)} = x_0 e^{-\beta t} e^{i(\pm\omega t+\varphi)} , \tag{8.3}$$

где $A(t)$ называют амплитудой, $\Phi(t)$ – фазой, $\varphi=\Phi(0)$ – начальной фазой, β – коэффициентом затухания, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частотой гармонического колебания. Частота ω_o является частотой свободных колебаний в замкнутой ($\beta = 0$) системе.

Представления колебания комплексной функцией вида (8.3) имеет существенные преимущества по сравнению с выражением колебания через функции синуса или косинуса:

все операции сложения колебаний вместо сложных тригонометрических выкладок сводятся к относительно простым геометрическим приёмам сложения векторов: ведь комплексное число (8.3) можно представить вектором на комплексной плоскости, который имеет длину $A(t)$, вращается с частотой $+\omega$ (против часовой стрелки) или $-\omega$ (по часовой стрелке) вокруг точки комплексного нуля и при t=0 образует угол φ с реальной осью;

энергия колебаний $E \sim |x|^2 = xx^*$ и вновь оказывается существенно проще перемножать комплексные экспоненты, чем тригонометрические функции.

Для исследования параметров гармонических колебаний, а следовательно, и параметров системы вблизи состояния равновесия обычно используют резонансный метод, суть которого состоит в исследовании отклика системы на внешнее гармоническое воздействие. В самом деле, если подействовать на систему, описываемую (8.2), внешним периодическим возмущением то уравнение (8.2) трансформируется в

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t} \ . \tag{8.4}$$

На временах t>1/β в системе, описываемой (8.4), устанавливаются колебания с частотой вынуждающей силы

$$x(t) = ae^{i(\Omega t-\varphi)} \text{ и с амплитудой } a = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + 2\beta^2\omega^2}} \tag{8.5}$$

с запаздыванием по фазе относительно вынуждающей силы

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{8.6}$$

Максимум амплитуды вынужденного колебания достигается при частоте внешнего возмущения называемой резонансной:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

В часто реализуемом на практике случае малого затухания ($\beta \ll \omega_o$) $\Omega_{\text{рез}}=\omega_0$, что позволяет получить информацию о крутизне функции потенциальной энергии (см. выше). В этом же случае малого затухания ширина резонансной кривой, т.е. расстояние между точками пересечения функций $a(\omega)$ и $a'(\omega) = a\left(\Omega_{\text{рез}}\right)\big/\sqrt{2}$, определяет коэффициент затухания, т.е. параметр связи системы с окружением:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda\omega_0}{\pi} = \frac{\beta T\omega_0}{\pi} = 2\beta\,,$$

где T=2π/ω – период колебаний системы, $\lambda = \beta T = \ln\left(A(t+T)\big/A(t)\right)$ – логарифмический декремент затухания и Q=π/λ – добротность системы.

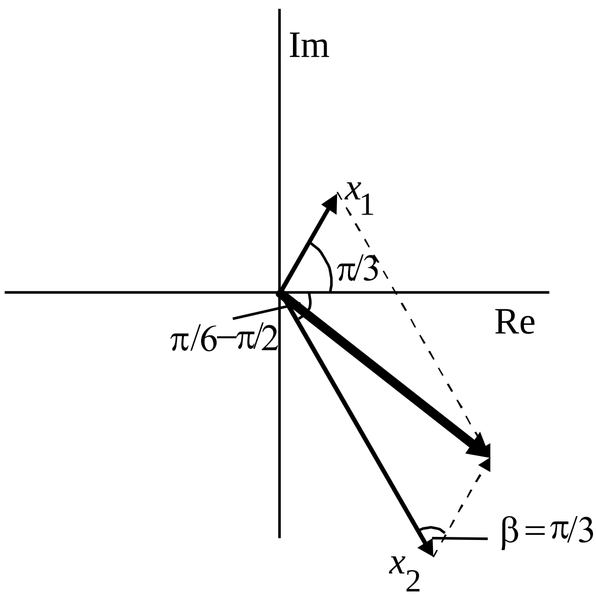
8.2 Примеры решения задач теории механических колебаний

Значительное число задач данного раздела имеют целью сформировать навыки свободного оперирования с формулами, которые связывают различные величины, характеризующие колебания, и в комментариях не нуждаются. Здесь мы уделим внимание лишь двум классам задач: задачам на отыскание суммарного колебания по частным и задачам по определению параметров малых колебаний по описанному устройству системы.

Задача 4.7

Найти амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний: $x_1=3\cos(\omega t+\pi/3)$, $x_2=8\sin(\omega t+\pi/6)$.

Предварительный анализ задачи. Используем метод векторных диаграмм. Для этого решим, что определённые в условии величины x_1 и x_2 суть реальные части комплексных чисел. С тем же успехом можно считать эти величины мнимыми частями комплексных чисел. По сравнению с первым предположением у обоих чисел появится одинаковая начальная фаза $\pi/2$. С точки зрения физики это будет означать, что часы наблюдателя были включены позже на $t = \pi/2\omega$.



Решение. Для удобства, используя тригонометрические формулы, выразим все колебания через косинусы. $x_2 = 8.0\cos\left(\omega t + \pi/6-\pi/2\right)$. Взаимное расположение векторов, представляющих колебания, в момент времени t=0 показано на рисунке. Оба вектора со временем будут вращаться против часовой стрелки с частотой ω. Из теоремы косинусов для амплитуды суммарного колебания найдём:

$$A=\sqrt{3^2+8^2-2\cdot3\cdot8\cos\beta}=7.$$

Задача 4.13

Частица массы m находится в одномерном силовом поле , где её потенциальная энергия, зависит от координаты x как $U(x)=U_0(1-\cos ax)$, U_0 и a – постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Предварительный анализ задачи. Для начала отметим, что именно такая зависимость потенциальной энергии от координаты появляется в одномерной модели одноатомного кристалла. С точки зрения механики поведение во времени материальной точки подчиняется второму закону Ньютона. Запишем его.

Решение. Проекция на ось x единственной силы, действующей на частицу, силы упругости, в приближении малых x равна:

$$-U_0 a\sin(ax) \approx -U_0 a^2 x.$$

Второй закон Ньютона

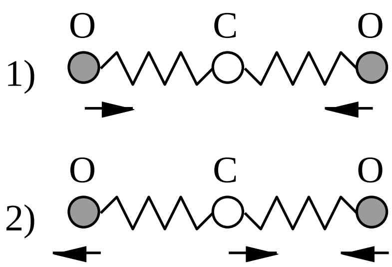
$$m\ddot{x} = -U_0 a^2 x.$$

Сопоставляя с (8.2) получим

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U_0 a^2}}.$$

Задача 4.67

Модель молекулы CO_2 – три шарика, соединённые одинаковыми легкими пружинками и расположенные вдоль одной прямой. Такая система может совершать продольные колебания двух типов, как показано стрелками на рисунке. Зная массы атомов, найти отношение частот этих колебаний.



Физический этап решения. Очевидно, в первом случае атом углерода неподвижен, отклонения атомов кислорода происходят симметрично. В этом случае удобно анализировать движение одного из атомов кислорода. Во втором случае, будем анализировать движение атома углерода. При этом учтём, что центр масс системы неподвижен.

Решение. Будем обозначать смещения атомов кислорода и углерода от положений равновесия соответственно x_O и x_C, массы – m_O и m_C, коэффициент жёсткости пружин – k. В первом случае уравнение движения для каждого из атомов кислорода

$$m_O\ddot{x}_O = -kx_O.$$

Отсюда
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_O}}.$$

Во втором случае для атома углерода получим

$$m_C\ddot{x}_C = -2\left(kx_O + kx_C\right).$$

При этом из требования неподвижности центра масс

$$2m_O x_O = m_C x_C.$$

Из двух последних уравнений

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k\left(2m_O + m_C\right)}{m_O m_C}}.$$

Окончательный ответ:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2\frac{m_O}{m_C}} \approx 1{,}9.$$

Раздел 9. Упругие деформации твёрдого тела

9.1 Основные понятия и некоторые законы теории упругости

Под деформацией твёрдого тела понимается изменение его формы или размеров. Упругими называются деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия внешней силы.

В качестве *меры воздействия* на твёрдое тело принимают значение ***напряжения***

$$\sigma = F/S\,, \qquad (9.1)$$

где F– сила, S–площадь поперечного сечения.

Деформация будет упругой, если значение напряжения не превысит определённого значения σ_y, называемого *пределом упругости*.

Если напряжение превысит значение σ_m, называемое *пределом прочности*, произойдёт разрушение материала.

Для малых деформаций выполняется *закон суперпозиции* – результирующее действие нескольких напряжений равно сумме деформаций от каждого из них.

Выделяют два основных вида деформации, комбинация которых даёт все остальные:

Сжатие (растяжение).

Мерой деформации служит относительное удлинение

$$\varepsilon = (l - l_0)/l_0\,. \qquad (9.2)$$

При малых деформациях выполняется закон Гука:

$$\varepsilon = \sigma / E\,, \qquad (9.3)$$

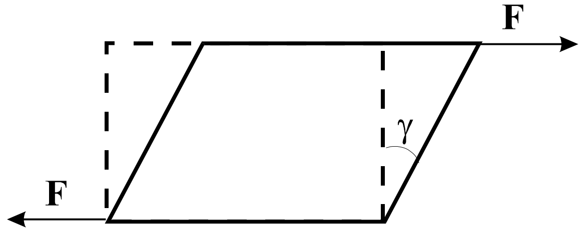
где E – модуль Юнга**.**

При сжатии и растяжении происходит также изменение поперечных размеров тела. Связь между относительным поперечным сжатием ε‘ и относительным продольным растяжением даёт коэффициент Пуассона μ:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \qquad (9.4)$$

В изотропном материале модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью определяют упругие свойства тела.

Сдвиг.



Мерой деформации служит угол γ, связанный с тангенциальным напряжением τ выражением (*закон Гука для сдвига*):

$$\gamma = \tau/G\,, \qquad (9.5)$$

где G – *модуль сдвига* (в изотропном материале равный $E/(2(1+\mu))$.

Деформированное тело обладает потенциальной энергией, объёмную плотность которой можно найти в случае упругой деформации из выражений:

$$u = E\,\varepsilon^2/2, \text{ или } \ u = G\gamma^2/2. \qquad (9.6)$$

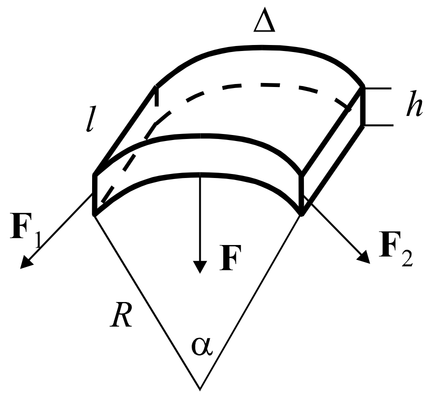
При решении задач этого раздела, обычно выделяется бесконечно малый элемент объёма и для него записывается второй закон Ньютона. Затем находится напряжение и, из закона Гука, деформация этого элемента. Зная деформацию, можно найти объёмную плотность энергии. Далее, интегрируя по объёму, находят деформацию и энергию всего образца.

8.2 Примеры решения задач теории упругих деформаций

Задача 1.313

Какое давление изнутри может выдержать стеклянная трубка радиуса R со стенками толщиной h.

Решение. Как и прежде при анализе систем с распределёнными параметрами, проанализируем поведение части трубки. Сделаем рисунок для бесконечно малого элемента трубки ($\alpha \to 0$). Сумма упругих сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ дает результирующую силу $\mathbf{F}$**,** которая и уравновешивает силу внутреннего давления.



Тогда, т.к. F_1=F_2 (почему?) и угол α бесконечно мал, мы можем записать

$$F = F_1\sin\alpha/2 + F_2\sin\alpha/2 = 2F_1\sin\alpha/2 = F_1\alpha,$$

$$F = PdS = Pl\Delta.$$

Из этих уравнений получаем

$$P = F_1\alpha/l\Delta.$$

В момент разрушения напряжение в стекле равно пределу прочности:

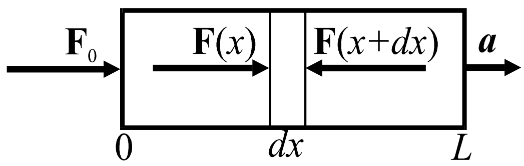
$$\sigma_m = F_1/S = F_1/lh, \quad F_1 = \sigma_m lh.$$

Пренебрегая увеличением радиуса трубки (так как относительное удлинение стекла мало), мы можем записать Δ=$R\alpha$. Подставив эти выражения в формулу для давления, получаем:

$$P = \sigma_m h/R.$$

Задача 1.317

Однородный упругий брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\mathbf{F}_0$, равномерно распределённой по торцу. Площадь торца равна S, модуль Юнга материала – E. Найти относительное сжатие бруска в направлении действия силы.



Решение. Под действием силы брусок будет двигаться с ускорением, которое можно найти из второго закона Ньютона:

$$a = F_0/m = F_0/\rho SL,$$

где ρ – плотность. Рассмотрим бесконечно тонкий элемент dx (см. рисунок). На него будут действовать силы упругости со стороны других частей бруска. Под действием этих сил выделенный элемент будет двигаться с ускорением, равным ускорению бруска. Тогда запишем второй закон Ньютона для него:

$$dm \cdot a = \rho S dx \cdot a = F(x) – F(x+dx) = – dF.$$

Интегрируя это выражение от сечения с нулевой координатой до некоторого сечения с координатой x, получим:

$$F(x) = F_0 – \rho Sax = F_0(1–x/L).$$

Находим напряжение внутри бруска:

$$\sigma(x) = F(x)/S = F_0(1–x/L)/S.$$

Проверим, что при $x=L$ напряжение равно нулю, так как этот конец бруска свободен. По закону Гука для относительного сжатия элемента dx получаем: $\varepsilon = d\Delta l/dx = \sigma/E = F_0(1–x/L)/SE$. Из этого уравнения сжатие всего бруска равно:

$$\Delta\ell = \int d\left(\Delta l\right) = \int_0^L \frac{F_0}{SE}\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx = \frac{F_0}{SE}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right)\Bigg|_0^L = \frac{F_0 L}{2SE}\ .$$

Мы видим, что удлинение будет в два раза меньше, чем в случае покоящегося бруска. Это понятно, так как в случае покоя на брусок будет действовать две силы F_0 с противоположных концов.

Задача 1.327

Установить связь между крутящим моментом N и углом закручивания φ для:

а) трубы, у которой толщина стенок Δr значительно меньше радиуса трубы;

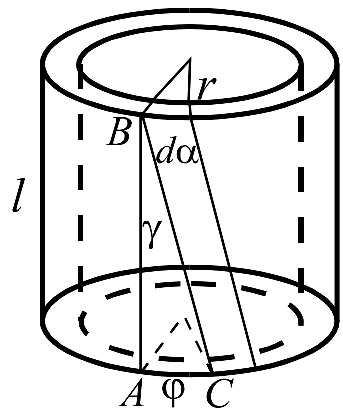
б) сплошного стержня круглого сечения.

Их длина l, радиус r и модуль сдвига G известны.

Решение. а) Выделим малый элемент объёма стержня. Из рисунка видно, что деформация, которую испытывает этот элемент, есть деформация сдвига. Запишем закон Гука для выделенного элемента:

$$\gamma = \tau/G = dF/dSG = dF/rd\alpha\Delta rG =$$

$$=dFr/r^2\, d\alpha\Delta rG = dN/r^2\, d\alpha\Delta rG.$$



Из треугольника ABC имеем: $\text{tg}\gamma = AC/AB$. Если углы φ и γ малы:

$$\gamma = r\varphi/l.$$

Подставив это выражение в первую формулу, получим:

$$dN = r^3 \Delta r G \varphi d\alpha / l.$$

Проинтегрируем это выражение по α от 0 до 2π:

$$N = 2\pi\, G \varphi r^3 \Delta r / l.$$

б) Сплошной стержень можно разбить на множество труб с толщинами стенок dr. Для каждой из этих труб можно записать выражение, полученное в пункте а). Тогда общий крутящий момент найдётся суммированием крутящих моментов отдельных труб:

$$N = \int dN = \frac{1}{l}\int_0^r 2\pi\varphi G r^3 dr = \frac{\pi\varphi G r^4}{2l}.$$

Из этой задачи видно, что деформация кручения сводится к деформации сдвига.

Задача 1.333

Какую работу необходимо совершить, чтобы стальную полосу длины l, ширины h и толщины δ согнуть в круглый обруч? Предполагается, что процесс происходит в пределах упругой деформации.

*Решение***.** После сворачивания полосы в обруч центральный слой будет не деформирован, внутренние слои сожмутся, а внешние растянутся. Таким образом, деформация изгиба сводится к деформациям сжатия и растяжения. Если деформация упругая, вся работа пойдёт на увеличение потенциальной энергии. Найдём эту энергию. Слой, отстоящий от центрального на расстояние Δ, будет иметь радиус $r+\Delta$ (r=l/2π). Тогда его относительное удлинение будет равно

$$\varepsilon = (2\pi(r+\Delta) - l)/l = 2\pi\Delta/l.$$

Объёмная плотность энергии этого слоя будет равна

$$u = E\varepsilon^2/2 = 2E\pi^2\Delta^2/l^2.$$

Энергию получим как интеграл от этого выражения по $dV \approx l d\Delta$:

$$A = U = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} 2E\pi^2\Delta^2 l d\Delta / l^2 = E\pi^2\delta^3/6l.$$

Раздел 10. Гидродинамика

10.1 Некоторые понятия и законы гидродинамики

Гидродинамика изучает движение жидкости или газа. Если жидкость разбить на элементарные объёмы, которые можно считать точечными, мы можем воспользоваться уравнениями динамики материальной точки. Второй закон Ньютона в этом случае запишется в форме (***уравнение Эйлера***):

$$d\mathbf{v}/dt=\mathbf{f}-\nabla p, \qquad 10.1)$$

где ρ – плотность жидкости, p – давление, $\mathbf{f}=d\mathbf{F}/dV$ – объёмная плотность сил. Это уравнение аналитически можно решить только в некоторых частных случаях. Поэтому для описания движения жидкости применяют часто другой подход.

В каждой точке пространства определяют скорость частицы проходящей её в данный момент времени. Соединяем точки линиями, касательная к которым в каждой точке параллельна скорости. Эти линии будем называть ***линиями тока***. Если линии тока не меняются со временем, то течение называется *ламинарным*. Для линии тока, при отсутствии трения (идеальная жидкость), можно записать закон сохранения энергии (уравнение Бернули):

$$v^2/2+\rho gh+p=const. \qquad 10.2)$$

Можно записать так же закон сохранения массы который в случае несжимаемой жидкости запишется в виде: $vS=const$, где S площадь сечения перпендикулярного линиям тока.

В случае стационарного течения линии тока совпадают с траекторией движения частиц и эти два подхода эквивалентны.

Сила трения в жидкости пропорциональна градиенту скорости и площади соприкасающихся слоев. Коэффициент пропорциональности называется вязкостью жидкости.

Ясно, что характер течения жидкости может зависеть от скорости v и плотности ρ жидкости, её вязкости η и размеров трубы r. Из этих параметров можно составить одну безразмерную величину (***число Рейнольдса***)

$$\mathrm{Re}=\rho vr/\eta. \qquad (10.3)$$

Согласно π-теореме, любая физическая величина, определяемая движением жидкости, будет находится с точностью до функции от числа Рейнольдса. Тогда число Рейнольдса полностью определяет характер течения жидкости.

Сила сопротивления движению тела в жидкости, из теории размерности, должна определяться формулой $F=\eta rvf(\mathrm{Re})$. При малых числах Рейнольдса функцию $f(\mathrm{Re})$ можно считать постоянной зависящей только от формы тела. Для шара это число равно 6π.

10.2 Примеры решения задач гидродинамики

Задача 1.343

На горизонтальном дне широкого сосуда с идеальной жидкостью имеется круглое отверстие радиуса R_1, а над ним укреплен круглый закрытый цилиндр радиуса $R_2>R_1$. Зазор между цилиндром и дном сосуда очень мал, плотность жидкости ρ. Найти статическое давление жидкости в зазоре как функцию расстояния r от оси отверстия и цилиндра, если высота слоя жидкости равна h.

Решение. Ясно, что в этом случае линии тока будут начинаться у поверхности жидкости и в зазоре будут направлены вдоль радиусов. Запишем уравнение Бернулли для линии тока и условие непрерывности для течения жидкости в зазоре:

$$p_0+\rho gh=\frac{\rho v(r)^2}{2}+p(r),$$

$$v(R_1)2\pi R_1 l=v(r)2\pi rl,$$

здесь l – толщина слоя, p_0– атмосферное давление. Заметим, что при $r=R_1$ давление равно p_0. Это условие позволяет из уравнения Бернулли получить $v(R_1)=\sqrt{2gh}$. Из уравнения непрерывности находим $v(r)$ и подставив её в уравнение Бернулли получаем искомое выражение:

$$p=p_0+\rho gh(1-(R_1/r)^2).$$

Раздел 11. Релятивистская механика

11.1 Некоторые понятия и законы релятивистской физики

Релятивистская механика обобщает законы механики на случай движений со скоростями близкими к скорости света c. Основой релятивистской механики является ***принцип относительности***, который утверждает, что все физические законы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта (принцип относительности Галилея утверждал это применительно только к механическим законам).

Для согласования данных наблюдений в разных ИСО служат ***преобразования Лоренца***, которые заменяют преобразования Галилея. Если система отсчёта K' движется с постоянной скоростью V, направленной вдоль оси x, относительно системы отсчёта K и направление осей координат параллельно то:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \qquad (11.1)$$

Из этих уравнений вытекают ***наблюдаемые сокращение длины*** (вдоль направления движения) и ***замедление часов*** системы отсчёта K', движущейся относительно нас со скоростью V.

$$l = l_0\sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \qquad (11.2)$$

Здесь l_0 и Δt_0 длина и время в системе отсчёта K'.

При решении задач часто бывает полезна следующая инвариантная (не меняющаяся в различных системах отсчёта) величина:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \qquad (11.3)$$

где t_{12} время, а l_{12} расстояние между двумя событиями.

Продифференцировав уравнение (11.1) по t' получаем формулы для ***преобразования скорости***:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_{y,z} = \frac{v_{y,z}\sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - v_x V/c^2}. \qquad (11.4)$$

Уравнение динамики частицы записывается, как и раньше в виде:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F},$$

где в качестве ***релятивистского импульса*** следует понимать выражение:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_r \mathbf{v}. \qquad (11.5)$$

m_r называют релятивистской массой.

Уравнение движения получается очень сложным и может быть проинтегрировано только для небольшого класса задач.

Полная энергия частицы записывается в виде:

$$E=m_r c^2. \tag{11.6}$$

Кинетическая энергия равна

$$T=E-mc^2. \tag{11.7}$$

Часто при решении задач бывает полезно следующее инвариантное соотношение, включающее импульс и энергию частицы:

$$E^2-p^2c^2 = m^2c^4=\text{inv} \tag{11.8}$$

Решая задачи этого раздела необходимо прежде всего уяснить, какие величины в какой системе отсчёта записаны (собственные значения длины, массы, времени даны для системы отсчёта движущейся вместе с телом). Многие задачи решаются проще при применении инвариантных соотношений (11.3), (11.8). Надо помнить, что понятие одновременности событий относительно.

11.2 Примеры решения задач релятивистской механики

Задача 1.370

В K–системе отсчёта мюон, движущийся со скоростью v, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние l. Определить: а) собственное время жизни мюона; б) расстояние, которое пролетел мюон в K– системе отсчёта с “его точки зрения”.

Решение. В K–системе отсчёта время жизни мюона будет равно l/v. Из-за релятивистского замедления времени, эта величина будет больше собственного времени жизни. Применяя формулу (11.2), находим собственное время жизни мюона:

$$\tau = \frac{l}{v}\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}.$$

Это же выражение можно было получить из формулы (11.3). В системе K время между событиями рождения и гибели мюона равно l/v, расстояние – l. В собственной системе отсчёта мюон покоится, поэтому время равно τ, расстояние – 0. Подставим эти значения в формулу (11.3):

$$c^2(l/v)^2-l^2 = c^2\tau^2.$$

Откуда получим то же значение τ.

Система отсчёта K движется относительно мюона со скоростью $-v$. Из формулы (11.2) получаем, что расстояние в l системе отсчёта K, в системе отсчёта мюона сократится до

$$l' = l\sqrt{1-\left(V/c\right)}^2.$$

Задача 1.402

Частица массой m в момент времени t=0 начинает двигаться под действием постоянной силы $\mathbf{F}$. Найти скорость частицы и пройденный ею путь в зависимости от времени t.

Решение. Выберем ось x системы отсчёта в направлении действия силы **F**. Тогда в направлениях y и z движения не будет и полная скорость будет равна скорости вдоль оси x. (Почему ?) Запишем уравнение движения вдоль оси x:

$$\frac{dp_x}{dt} = F \ .$$

Проинтегрируем это уравнение: $p_x=Ft$. Подставив вместо импульса его релятивистское значение и выразив v_x получим:

$$v = v_x = Fct \Big/ \sqrt{m^2c^2 + F^2t^2} \ .$$

Проанализируем это выражение. При малых t получаем $v \approx Ft/m$, что совпадает с решением уравнения Ньютона. При $t \to \infty$, $v \to c$, так как скорость тела не может быть больше c. Для того, что бы найти x, надо это выражение проинтегрировать по t. Получим

$$x = \sqrt{\left(mc^2/F\right)^2 + c^2t^2} - mc^2/F \ .$$

При малых t,

$$x \approx Ft^2/2m.$$

Задача 1.410

Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра масс была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями T=25 Гэв?

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (11.8). Для системы двух протонов движущихся навстречу друг другу:

$$W^2=(2\cdot(T+mc^2))^2.$$

Для протона, налетающего на другой, покоящийся протон:

$$W^2=(mc^2+(T_1+mc^2))^2-p^2c^2.$$

Импульс протона найдём, используя формулу (11.8) для одного протона:

$$(T_1+mc^2)^2-p^2c^2=m^2c^4.$$

Решая полученную систему найдём:

$$T_1=4T+2T^2/mc^2=1{,}4\cdot10^3 \text{ Гэв}.$$

Видно, что энергия значительно возрастает (по квадратичному закону, если $T>mc^2$).

Т.к. мощности современных ускорителей подошли к техническому пределу, усилия ученых направлены на развитие ускорителей на встречных пучках.

Оглавление