Н.И.Самойленко, А.И.Кузнецов,
А.Б.Костенко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Харьков - 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Н.И. Самойленко, А.И. Кузнецов, А.Б. Костенко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

Издательство «НТМТ»

Харьков – 2009

УДК 519.21 (075.8)
С17
ББК 22.171я73

Самойленко М.І., Кузнєцов А.І., Костенко О.Б. Теорія ймовірностей: Підручник. – Х.: Видавництво «НТМТ», ХНАМГ, 2009. – 200 с. (рос. мовою).

Самойленко Н.И., Кузнецов А.И., Костенко А.Б. Теория вероятностей: Учебник. – Х.: Издательство «НТМТ», ХНАГХ. – 2009. – 200 с.

Гриф выдан Министерством образования и науки Украины, решение № 1.4.18-Г-286 от 29 января 2008 г.

Рецензенты:

Мамалуй А.А., заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики Национального технического университета “ХПИ”, доктор физико-математических наук, профессор.

Колосов А.И. заведующий кафедрой высшей математики Харьковской национальной академии городского хозяйства, доктор технических наук, профессор.

Левыкин В.М., заведующий кафедрой информационных управляющих систем Харьковского национального университета радиоэлектроники, доктор технических наук, профессор.

Учебник знакомит с основными понятиями и методами теории вероятностей. Приведенные методы иллюстрируются типовыми примерами. Каждая тема заканчивается практическим разделом для самостоятельного приобретения навыков по использованию методов теории вероятностей при решении стохастических задач.

Учебник снабжен двуязычной электронной версией, включающей динамические фрагменты представления сложного учебного материала и имеющей возможность постановки учебных экспериментов.

Для студентов высших учебных заведений.

Табл.: 8. Ил.: 55. Библиограф. наименований: 15.

ISBN 978-966-8603-70-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 7
ВВЕДЕНИЕ. 8
1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ 10
1.1. Классическое определение вероятности. 10
1.1.1. Необходимость и случайность 10
1.1.2. Основные определения 11
1.1.3. Классическое определение вероятности 14
1.2. Элементы комбинаторики. 17
1.2.1. Основные принципы комбинаторики 17
1.2.1.1. Правило сложения 17
1.2.1.2. Правило умножения 17
1.2.2. Основные виды комбинаторных соединений 18
1.2.2.1. Перестановки 18
1.2.2.2. Размещения 19
1.2.2.3. Сочетания. 20
1.2.2.4. Полезные соотношения 20
1.2.3. Примеры комбинаторных задач 21
1.3. Алгебра событий 22
1.3.1. Пространство событий 22
1.3.2. Операции над событиями 24
1.3.2.1. Сумма событий. 25
1.3.2.2. Произведение событий 26
1.3.3. Свойства операций сложения и умножения 26
1.4. Практикум и вопросы для самоконтроля. 27
2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ 35
2.1. Основные теоремы теории вероятностей 35
2.1.1. Вероятность суммы событий 35
2.1.2. Полная группа событий и противоположные события 36
2.1.3. Зависимые и независимые события 37
2.1.4. Условная вероятность. 38
2.1.5. Вероятность произведения событий 39
2.2. Модели надежности технических систем 41

2.2.1. Надежность технических систем 41
2.2.2. Последовательное соединение элементов 43
2.2.3. Параллельное соединение элементов 45
2.2.4. Смешанное соединение элементов 46
2.3. Практикум и вопросы для самоконтроля. 47
3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ 50
3.1. Алгебра гипотез 50
3.1.1. Формула полной вероятности 50
3.1.2. Формула Байеса 53
3.1.3. Надежность систем с мостовым соединением элементов 55
3.2. Повторение опыта. 57
3.2.1. Задачи на повторение независимых опытов. 57
3.2.2. Формула Бернулли. 59
3.2.3. Локальная теорема Лапласа 60
3.2.4. Интегральная теорема Лапласа 62
3.2.5. Наивероятнейшее число наступления событий 63
3.3. Практикум и вопросы для самоконтроля. 66
4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 69
4.1. Формы задания дискретных случайных величин 69
4.1.1. Основные определения 69
4.1.2. Формы задания закона распределения дискретной случайной величины. 70
4.1.2.1. Ряд распределения 70
4.1.2.2. Интегральная функция распределения 71
4.1.3. Пример построения закона распределения 72
4.1.4. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок. . 74
4.2. Формы задания непрерывной случайной величины и её свойства 76
4.2.1. Интегральная функция распределения. 76
4.2.2. Вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины 77
4.2.3. Плотность распределения вероятности 78
4.2.4. Свойства плотности распределения вероятности 79
4.2.5. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок 80
4.3. Числовые характеристики случайных величин 81
4.3.1. Характеристики положения случайной величины на числовой оси. . 81
4.3.1.1. Математическое ожидание. 81
4.3.1.2. Мода 83
4.3.1.3. Медиана 84
4.3.2. Моменты случайных величин 84
4.3.2.1. Начальные моменты 84
4.3.2.2. Центральные моменты 85
4.3.3. Свойства моментов случайных величин 85
4.3.3.1. Первый начальный момент. 86

4.3.3.2. Первый центральный момент. 86
4.3.3.3. Второй начальный момент. 86
4.3.3.4. Второй центральный момент 87
4.3.3.5. Связь дисперсии с начальными моментами 88
4.3.4. Среднее квадратичное отклонение 88
4.3.5. Моменты высоких порядков 89
4.3.5.1. Третий центральный момент и коэффициент асимметрии. . . . 89
4.3.5.2. Четвертый центральный момент и величина эксцесс 90
4.4. Практикум и вопросы для самоконтроля. 91
5. ЧАСТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 100
5.1. Законы распределения дискретных случайных величин 100
5.1.1. Биномиальный закон распределения 100
5.1.1.1. Общая характеристика биномиальной случайной величины . . . 100
5.1.1.2. Числовые характеристики биномиальной случайной величины . 101
5.1.2. Закон распределения Пуассона 103
5.1.2.1. Простейший поток событий 103
5.1.2.2. Общая характеристика пуассоновской случайной величины. . . 104
5.1.2.3. Числовые характеристики пуассоновской случайной величины . 106
5.1.2.4. Вероятность попадания пуассоновской случайной величины на заданный участок. 107
5.2. Законы распределения непрерывных случайных величин 108
5.2.1. Равномерный закон распределения 108
5.2.1.1. Общая характеристика. 108
5.2.1.2. Числовые характеристики 110
5.2.1.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок 111
5.2.2. Показательный закон распределения 112
5.2.2.1. Общая характеристика 112
5.2.2.2. Числовые характеристики 113
5.2.2.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок 114
5.2.3. Нормальный закон распределения 115
5.2.3.1. Общая характеристика. 115
5.2.3.2. Числовые характеристики 116
5.2.3.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок 117
5.2.3.4. Правило трех сигм 119
5.3. Распределения, производные от нормального распределения 120
5.3.1. Распределение Пирсона. 120
5.3.2. Распределение Стьюдента. 121
5.3.3. Распределение Фишера 121
5.4. Практикум и вопросы для самоконтроля. 122
6. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ И ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ . . 128
6.1. Случайные векторы 128

6.1.1. Интегральная функция распределения случайного вектора 128
6.1.2. Вероятность попадания случайного вектора на заданный участок . . 130
6.1.3. Плотность распределения случайного вектора 131
6.1.4. Условные законы распределения 132
6.1.5. Числовые характеристики случайного вектора 133
6.2. Функции случайных аргументов 135
6.2.1. Числовые характеристики функции случайных аргументов 135
6.2.2. Теоремы о числовых характеристиках функции случайных аргументов. 137
6.2.3. Закон распределения функции случайных аргументов 141
6.3. Практикум и вопросы для самоконтроля 143
7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. 146
7.1. Закон больших чисел. 146
7.1.1. Теорема Бернулли 146
7.1.2. Закон больших чисел в форме Чебышева. 147
7.1.2.1. Неравенство Чебышева 147
7.1.2.2. Теорема Чебышева 147
7.1.2.3. Проверка закона больших чисел 148
7.1.2.4. Сжатие распределения с ростом числа слагаемых 150
7.2. Усиленный закон больших чисел. 151
7.2.1. Теорема Бореля 151
7.2.2. Теорема Колмогорова. 153
7.2.3. Основная теорема статистики 154
7.3. Центральная предельная теорема. 156
7.3.1. Содержание центральной предельной теоремы 156
7.3.2. Теорема Линдеберга 157
7.3.3. Теорема Ляпунова 157
7.3.4. Сумма одинаково распределенных случайных величин. 158
7.4. Практикум и вопросы для самоконтроля. 161
ОТВЕТЫ. 162
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ. СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ 184
БИБЛИОГРАФИЯ 193
ПРИЛОЖЕНИЯ 194
Приложение A. Значения функции Гаусса 194
Приложение B. Значения функции Лапласа 195
Приложение C. Математические формулы для справок. 196
Приложение D. Основные формулы дифференциального исчисления 197
Приложение E. Основные формулы интегрального исчисления 198
Приложение G. Электронная версия учебника 199

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник предназначен для студентов специальностей менеджмента и экономики высших учебных заведений дневной, заочной и дистанционной форм обучения, которые прослушали общий курс высшей математики.

Основная цель учебника – способствовать дальнейшему повышению уровня фундаментальной математической подготовки студентов, а также формированию у них теоретических знаний и практических навыков по использованию вероятностно-статистического аппарата для решения прикладных задач экономики и менеджмента.

Основной задачей изучения дисциплины является предоставление студентам сведений об основных понятиях, положениях, ключевых теоремах теории стохастических явлений и процессов, а также формирование умений:

выполнять качественный и количественный анализ случайных событий, случайных величин и систем таких величин;

использовать элементы дисперсионного анализа и теории корреляции в исследовании систем случайных величин;

включать результаты исследований в математические модели задач экономики и менеджмента.

Основная особенность учебника – *наличие электронной версии*, позволяющей студентам изучать «Теорию вероятностей» без непосредственного участия преподавателя. По мнению авторов, электронный учебник является доминирующим в процессе изучения дисциплины, поскольку предполагает использование элементов современных информационных технологий. Электронная версия учебника включает ряд динамических фрагментов, которые в процессе обучения предоставляют студенту возможность проводить учебные эксперименты, наблюдать процессы решения типовых задач и управлять ими, отслеживать решение многоэтапных задач по схеме алгоритма, строить графики и диаграммы, графически интерпретировать математические операции и пр. Гипертекстовая организация учебного материала, наличие гипертекстового словаря терминов, совмещенного с предметным указателем, возможность многократно воспроизводить динамические фрагменты и управлять ими делают электронный учебник более предпочтительным по сравнению с традиционным учебником. Но, чтобы избежать длительных сеансов работы с электронной версией дисциплины, последняя должна иметь традиционный вариант учебника. На любом этапе обучения у студента должна быть возможность выбора способа изучения дисциплины: с помощью персонального компьютера или без него. Поэтому данная книга является органическим дополнением электронного учебника в информационно-методическом обеспечении самостоятельного изучения дисциплины студентами любой формы обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие экономики страны непосредственно связано с использованием математической теории в прикладной сфере деятельности человека. Решающую роль в обеспечении высоко эффективной экономики должны сыграть специалисты, хорошо владеющие математическими методами и имеющие достаточный опыт их использования в решении практических задач. Теоретическая подготовка таких специалистов ложится на плечи высшей школы.

«Теория вероятностей» является прикладным разделом высшей математики. Это значит, что знания и умения, приобретаемые обучающимися в результате изучения курса, понадобятся им для решения конкретных задач в будущей профессиональной деятельности. Прикладная ориентация дисциплины не ограничивается только профессиональной деятельностью. Данная наука с успехом может и должна быть использована для решения задач, которые часто возникают в повседневной жизни – в быту и на работе. Особенно полезны знания по теории вероятностей при оценке выбора действий, способных привести к материальному выигрышу или потерям. Нельзя считать человека образованным, если он не может дать количественной оценки, например, целесообразности участия в той или иной денежно-вещевой лотерее, а тем более объяснить выбор принимаемого решения по оперативному управлению производством.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники:

- теории надежности;
- теории массового обслуживания;
- теоретической физике;
- геодезии;
- астрономии;
- теории стрельбы;
- теории ошибок наблюдений;
- теории автоматизированного управления;
- общей теории связи;
- медицинской и технической диагностиках;
- теории распознавания образов;
- радиолокационной технике;

- стохастическом программировании;
- во многих других теоретических и прикладных науках.

«Теория вероятностей» лежит в основе другой прикладной дисциплины – «Математической статистики», которая, в свою очередь, используются при планировании и организации производства, анализе технологических процессов, планово-предупредительном ремонте, контроле качества продукции и для многих других целей. «Математическая статистика» является органическим дополнением «Теории вероятностей».

Краткая историческая справка. Первые работы, в которых зарождались основные понятия «Теории вероятностей», представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и др. в XVI-XVII вв.).

Следующий этап развития «Теории вероятностей» связан с именем Якова Бернулли (1654-1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название "Закона больших чисел", была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами «Теория вероятностей» обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый период связан с именами П.Л.Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А.Маркова и А.М.Ляпунова (1857-1918). В этот период «Теория вероятностей» становится стройной математической наукой.

Как своим зарождением, так и развитием «Теория вероятностей» во многом обязана азартным играм. Именно при анализе результатов азартных игр было замечено, что достаточно большое число однородных событий, независимо от их конкретной природы, подчинено определенным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается «Теория вероятностей».

Предметом «Теории вероятностей» является изучение закономерностей, которым подчиняются однородные случайные явления.

Знание закономерностей, которым подчиняются случайные массовые события, позволяют предвидеть, как эти события будут протекать в дальнейшем.

В целом ***«Теория вероятностей и математическая статистика»*** представляет собой математическую дисциплину, которая изучает количественные и качественные методы и средства анализа закономерностей эволюции систем прикладного характера, развивающихся в условиях стохастической неопределенности.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Классическое определение вероятности

1.1.1. *Необходимость и случайность*

Теория о причинно-следственных связях утверждает, что в объективной действительности имеет место причинно-следственная цепочка событий. Каждое последующее событие предопределено предыдущими событиями. Поэтому в каждый момент времени происходит то событие, и только то, которое *должно* произойти. Происходящее событие является следствием предыдущих событий в цепочке. Происшедшее событие само становится причиной последующих событий.

Из сказанного вытекает, что в объективной действительности случайно ничто не происходит и не может произойти.

На первый взгляд, последнее утверждение ставит под сомнение право на существование теории вероятностей, предметом исследования которой являются *случайные* события, явления, процессы и их закономерности.

Чтобы примирить обе теории, рассмотрим два эксперимента с бросанием монеты.

Для первого эксперимента создадим идеальные условия. Пусть монета многократно бросается:

– с сообщением ей одного и того же момента импульса силы, приложенного к одной и той же точке монеты;
– в безвоздушном пространстве;
– с одной и той же высоты;
– с одного и того же исходного положения монеты;
– на горизонтальную поверхность с одинаковой упругостью в каждой её точке.

При многократном повторении описанного эксперимента мы будем получать один и тот же результат – либо "орел", либо "решку" (в зависимости от исходного положения монеты). То есть исход эксперимента не является случайным.

Второй эксперимент будем проводить без соблюдения каких-либо идеальных условий – так, как это делается при бросании жребия. При многократном повторении такого эксперимента в 50 процентах исходов будет наблюдаться "орел" и 50 процентах – "решка", причем предсказать заранее исход любого эксперимента не представляется никакой возможности. То есть исход любого нового эксперимента является случайным.

Вывод. Если мы не можем учесть или сознательно пренебрегаем какими-либо существенными факторами, влияющими на протекание эксперимента (процесса, явления), то его результат автоматически становится случайным. При многократном повторении такого эксперимента он может протекать по-разному, и предсказать точный его исход невозможно.

1.1.2. *Основные определения*

Знакомство с основами теории вероятности начинается с темы «Случайные события».

Определение 1.1. ***Событием*** называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Событие всегда связано с *опытом*.

Определение 1.2. Под ***опытом*** (экспериментом, испытанием) понимают некоторую совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Примеры: бросание монеты – опыт, выпадение "орла" или "решки" – события; вытаскивание карты из преферансной колоды – опыт, появление красной или черной масти – события; проведение лекции – опыт, присутствие студента на лекции – событие.

Примечание. В электронном варианте учебника теоретический материал сопровождается программно реализованным экспериментом, который состоит в однократном бросании игральной кости и наблюдении за числом очков, выпавших на ее верхней грани. Кость имеет шесть граней, на каждой из которых нарисованы точки, соответствующие числу очков от одного до шести. Результатом такого эксперимента может быть выпадение 1,2,3,4,5 или 6 очков. Эксперимент можно повторять неограниченное число раз. Для вызова эксперимента следует щелкнуть левой кнопкой мыши на значке .

Когда человек анализирует случайное событие, его, прежде всего, интересует, как часто событие может произойти или не произойти в результате опыта. С этой целью вводится специальная характеристика – *вероятность события*.

Определение 1.3. ***Вероятностью события*** называется численная мера степени объективной возможности появления события в результате нового опыта.

В теории вероятностей принято события обозначать заглавными латинскими буквами A, B и так далее, а вероятности событий – соответственно $P(A)$, $P(B)$ и т.д.

Вероятность любого события (обозначим его через A) лежит в пределах от нуля до единицы: $0 \le P(A) \le 1$. Последнее соотношение часто называют шкалой вероятностей.

При решении любых задач необходимо следить за тем, чтобы ни в каких конечных, ни в каких промежуточных результатах не появились значения вероятности какого-либо события, выходящие за пределы указанной шкалы.

Все события делятся на *достоверные, невозможные* и собственно *случайные*.

Определение 1.4. ***Достоверным*** называется событие, которое в результате опыта непременно должно состояться (обозначается: U).

Вероятность достоверного события принимается равной единице: $P(U) = 1$.

Определение 1.5. ***Невозможным*** называется событие, которое в результате опыта не может произойти (обозначается: $\varnothing$).

Вероятность невозможного события принимается равной нулю: $P(\varnothing) = 0$.

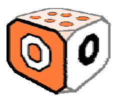
Определение 1.6. ***Случайным*** называется событие, которое при многократном повторении опыта в одних исходах происходит, а в других – нет.

Вероятность случайного события (обозначим его через A) больше нуля и меньше единицы: $0 < P(A) < 1$.

В качестве примеров рассмотрим эксперименты с бросанием игральной кости. Так, при однократном бросании игральной кости выпадение:

– не более шести очков является достоверным событием;
– десяти очков – невозможным событием;
– трех очков – случайным событием.

Одной из ключевых задач раздела "Случайные события" является численное определение вероятности случайных событий. Прежде чем перейти к определению вероятности простейших событий, введем еще ряд определений.



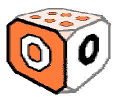
Определение 1.7. Несколько событий в опыте называются ***равновозможными***, если по условиям симметрии опыта нет основания считать появление какого-либо из них более предпочтительным по отношению к любому другому.

Равновозможные события имеют равную степень объективной возможности произойти в результате опыта.

В условиях эксперимента  в качестве примеров *равновозможных* событий могут выступать события, которые заключаются в выпадении:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков;
– четного и нечетного числа очков.

Примером *неравновозможных* событий является выпадение двух очков и нечетного числа очков.



Определение 1.8. Несколько событий называются ***несовместными***, если никакие два из них не могут произойти одновременно в одном опыте.

Обращаясь снова к эксперименту , в качестве примеров несовместных событий можно отметить выпадение:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков;
– четного и нечетного числа очков.

Примером *совместных* событий является выпадение одного и нечетного числа очков.

Определение 1.9. ***Полной группой*** событий называются несколько попарно несовместных событий таких, что в результате опыта одно из них непременно должно произойти.

В эксперименте , полной группой событий является выпадение:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков;
– четного и нечетного числа очков;
– 1 и не менее 2-х очков.

Определение 1.10. Если исходы опыта образуют полную группу несовместных равновозможных событий, то они называются ***случаями***.

В условиях однократного эксперимента  случаями являются исходы, которые заключаются в выпадении:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков;
– четного и нечетного числа очков.

Определение 1.11. Случай называется ***благоприятствующим*** событию, если его появление влечет за собой появление события.

Пример. Пусть событием A заключается в выпадении нечетного числа очков в эксперименте . Тогда среди шести случаев, которые заключаются в выпадении 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков, благоприятствующими событию A будут только три – выпадение 1, 3 или 5 очков.

1.1.3. *Классическое определение вероятности*

Вероятность события A как возможного исхода некоторого эксперимента определяется отношением количества случаев, благоприятствующих событию A, к общему количеству случаев в данном эксперименте.

Если m – количество случаев, которые благоприятствуют событию A, а n – общее количество случаев в данном опыте, то вероятность события A

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad . \tag{1.1}$$

Соотношение (1.1) является классической формулой расчета вероятности событий, которые могут возникать в результате эксперимента с исходами, подпадающими под *определение 1.10.* Расчет вероятности события по классической формуле (1.1) предполагает следующую последовательность действий (алгоритм):

1. Определение общего количества случаев в эксперименте, предложенном в условии задачи.
2. Определение количества случаев, благоприятствующих событию, вероятность которого необходимо найти по условию задачи.
3. Расчет вероятности искомого события, как отношения чисел, найденных в п.п. 1 и 2.

Приведенную методику определения вероятности события называют схемой случаев.

Пример 1.1. Пусть в условиях эксперимента следует определить вероятность выпадения четного числа очков.

Решение первым способом. В качестве случаев при бросании игральной кости рассматриваем группу событий: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Тогда:

- общее количество случаев в эксперименте – шесть;
- количество случаев, благоприятствующих событию “четное число очков” – три: выпадение 2, 4 и 6 очков;
- искомая вероятность – 3/6, или 1/2.

Решение вторым способом. В качестве случаев при бросании игральной кости рассматриваем группу событий: выпадение “четного” и “нечетного” числа очков.

- общее количество случаев в эксперименте – два;
- количество случаев, благоприятствующих событию “четное число очков” – один (случай “четное”);

- искомая вероятность – 1/2.

Как видим, результат решения не зависит от того, какую полную группу событий эксперимента считать случаями. Желательно только, чтобы через случаи этой группы можно было выразить искомое событие.

Следует заметить, что не всегда представляется возможным находить все возможные и благоприятствующие случаи в эксперименте так просто, как в *примере* 1.1. В подтверждение сказанному рассмотрим еще два примера.

Пример 1.2. В ящике находится 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлекаются 4 детали. Найти вероятность события *A* – наличие ровно трех стандартных деталей среди извлеченных.

Как видим, здесь все возможные исходы опыта представляют собой комбинации 4 деталей, среди которых возможны группы, состоящие из деталей:

- только стандартных;
- одной стандартной и трех бракованных;
- двух стандартных и двух бракованных;
- трех стандартных и одной бракованной;
- только бракованных.

Благоприятствующие исходы представляют собой группу комбинаций трех стандартных и одной бракованной.

Вполне очевидно, что определение количества комбинаций в каждой группе методом прямого перебора представляет собой довольно сложную задачу.

Пример 1.3. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово “КНИГА”. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово “КНИГА”.

В этом примере общее количество случаев определяется числом возможных перестановок букв, из которых состоит слово “КНИГА”, и число это довольно внушительное.

Задачам на отыскание количества комбинаций элементов, подобных приведенным в *примерах* 1.2 – 1.3, занимается раздел математики, называемый комбинаторикой. Необходимые сведения по комбинаторике приведены в следующем подразделе.

Примечание. После ознакомления с подразделом «Элементы комбинаторики» мы вернемся к рассмотрению *примеров* 1.2 – 1.3.

1.2. Элементы комбинаторики

1.2.1. *Основные принципы комбинаторики*

Основные принципы комбинаторики позволяют определять общее число различных способов выполнения определенной работы, в зависимости от способов выполнения отдельных ее операций и их отношений между собой.

1.2.1.1. Правило сложения

Пусть некоторую работу можно выполнить с помощью k ***взаимоисключающих*** операций. При этом первая операция может быть реализована n_1 способами, вторая – n_2 способами, ... , k-я – n_k способами. Тогда работу можно выполнить $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

1.2.1.2. Правило умножения

Пусть некоторую работу можно выполнить с помощью k ***последовательных*** операций. При этом первая операция может быть реализована n_1 способами, вторая – n_2 способами, ... , k-я – n_k способами. Тогда всю работу можно выполнить $n_1 * n_2 * ... * n_k$ способами.

Пример 1.4. Сколько сигналов можно подать с корабля с помощью четырех флагов различного цвета, размещая их на мачте, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов?

Решение. Сигналы можно подавать двумя, тремя и четырьмя флагами.

Первым для сигнала из двух флагов может быть любой из имеющихся 4 флагов (4 способа), после чего вторым – любой из трех оставшихся (3 способа). Тогда, согласно правилу умножения, количество возможных способов подачи сигнала из 2 флагов составит 4*3=12.

Аналогично для сигнала из трех флагов имеем: 4*3*2=24 способа.

Наконец, для сигнала из 4 флагов получим 4*3*2*1=24 способа.

Все рассмотренные выше варианты предполагают выполнение последовательных операций по выбору флага для сигнала и потому рассчитываются по правилу умножения. Однако подачи сигналов 2, 3 и 4 флагами является ***взаимоисключающими*** операциями и потому общее число сигналов можно получить как сумму способов для сигналов из 2, 3 и 4 флагов, т.е. 24+24+12=60 способами. Таким образом, для определения общего количества сигналов используется правило сложения.

1.2.2. *Основные виды комбинаторных соединений*

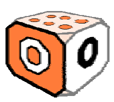
В комбинаторике различают три вида различных соединений (комбинаций) элементов произвольного множества:

– перестановки;
– размещения;
– сочетания.

При решении многих задач теории вероятностей часто приходится обращаться к формулам комбинаторики, которые позволяют без осуществления полного перебора возможных соединений определять их количество.

Рассмотрим последовательно все виды соединений и соответствующие формулы подсчета их количества.

1.2.2.1. Перестановки



Определение 1.12. ***Перестановками*** из m элементов называют такие их соединения, которые отличаются друг от друга порядком следования элементов.

Общее количество возможных перестановок из m элементов обозначается P_m и определяется выражением

$$P_m = m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m \,. \tag{1.2}$$

Пример 1.5. Сколькими способами можно расположить на полке в ряд три различные книги.

Решение. Общее количество возможных способов расположения книг определяется согласно выражению (1.2): $P_3 = 3! = 6$.

Легко заметить, что такой же результат можно получить, применяя правило умножения. На первое место на полке можно поставить любую из 3 книг (3 способа), после чего на второе – любую из двух оставшихся (2 способа), после чего на третьем месте будет стоять последняя не размещенная книга (1 способ), что по правилу умножения дает 3*2*1 = 6 способов. Таким образом, правило умножения можно считать логическим обоснованием формулы (1.2).

1.2.2.2. Размещения

Определение 1.13. Размещениями из n элементов по m называют такие соединения m элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом или порядком их следования ($m \leq n$).

Общее количество возможных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и определяется выражением

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.3)$$

Пример 1.6. Сколькими способами можно выбрать две книги из трех и расположить их в ряд на полке.

Решение. Общее количество возможных способов расположения книг определяется согласно выражению (1.3): $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Опять же, основанием для использования формулы (1.3) является правило умножения. На первое место на полке можно поставить любую из 3-х книг (3 способа), после чего на второе – любую из двух оставшихся (2 способа), что по правилу умножения дает 3*2=6 способов.

1.2.2.3. Сочетания

Определение 1.14. Сочетаниями из n элементов по m называют такие соединения m элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом ($m \le n$).

Общее количество возможных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и определяется выражением

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.4}$$

Пример 1.7. Сколькими способами можно выбрать две книги из трех.

Решение. Общее количество возможных способов выбора книг определяется согласно выражению (1.4): $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Эта задача отличается от *примера 1.6* тем, что 2 книги, например, AB и BA, являются различными размещениями и одинаковыми сочетаниями, т.е. в сочетаниях не учитывается порядок элементов. Следовательно, количество сочетаний может быть получено из числа размещений путем его деления на число перестановок размещаемых (выбираемых) элементов. В данном случае число размещений 3 книг по 2 равно 6; число перестановок из двух выбираемых (или размещаемых в *примере 1.6*) книг равно двум, так что выбрать 2 книги из 3 можно 6/2 = 3 способами.

Общая связь между перестановками, размещениями и сочетаниями показана ниже в формуле (1.7).

1.2.2.4. Полезные соотношения

При решении ряда задач могут пригодиться следующие соотношения:

$$0! = 1; \qquad 1! = 1; \tag{1.5}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \tag{1.6}$$

$$P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m}; \tag{1.7}$$

$$C_n^0 = 1; \qquad C_n^n = n; \qquad C_n^1 = n. \tag{1.8}$$

1.2.3. *Примеры комбинаторных задач*

Пример 1.8. В коробке лежат 9 белых и 4 черных шара. Вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что они:

***а*)** белые;

***б*)** черные;

***в*)** разноцветные;

***г*)** оба белые или оба черные.

Решение. Обозначим события:

A – шары белые,

B – шары черные,

C – шары разноцветные,

D – шары или белые, или черные.

Для решения задачи используем *классическую формулу вероятности* (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

требующую расчета общего количества n случаев в опыте и количества m благоприятных случаев для каждого из событий A, B, C, D, которые мы обозначим соответственно m_A, m_B, m_C, m_D.

Общее количество случаев n в опыте – это число комбинаций из 13=(9+4) шаров по 2, то есть $n = C_{13}^2 = 78$.

***а*)** Для события A, число благоприятных случаев m_A – это число различных комбинаций из 9 белых шаров по 2, то есть $m_A = C_9^2 = 36$.

Таким образом, $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

***б*)** Для события B, число благоприятных случаев m_B – это число различных комбинаций из 4 черных шаров по 2, то есть $m_B = C_4^2 = 6$.

Таким образом, $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$.

***в*)** Для события C, число благоприятных случаев m_C определяется согласно правилу умножения: $m_C = 4*9 = 36$.

Таким образом, $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

*г***)** По результатам задач *а*) и *б*) данного примера два белых шара можно получить m_A = 36 способами, а два черных – m_B = 6 способами. Тогда по правилу сложения $m_D = 36 + 6 = 42$.

Таким образом, $P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{42}{78} = \frac{7}{13}$.

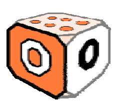
Вернемся к рассмотрению *примеров 1.2* и *1.3*.

Решение примера 1.2. Общее число возможных извлечений 4 деталей из 100 определяется как $n = C_{100}^{4}$. Все они образуют полную группу несовместных равновозможных событий. Подсчитаем число благоприятных исходов рассматриваемому событию. Три стандартные детали из 90 имеющихся в ящике можно извлечь C_{90}^{3} способами. С каждой полученной выборкой из 3 стандартных деталей может сочетаться одна нестандартная деталь из 10 имеющихся C_{10}^{1} способами. Следовательно, по правилу умножения $m = C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{1}$, а $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{1}}{C_{100}^{4}} = 0{,}3$.

Решение примера 1.3. Из пяти букв ребенок может составить различные буквосочетания, которые отличаются друг от друга только порядком следования букв. Поэтому число всех исходов опыта вычислим как число перестановок из 5 элементов: $n = P_5 = 5! = 120$. Все исходы образуют полную группу несовместных равновозможных событий, из которых только одно благоприятствует появлению события *A* – восстановлению слова “КНИГА”. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

1.3. Алгебра событий

1.3.1. *Пространство событий*



Определение 1.15. Событие, которому соответствует только один результат (исход) опыта, называется ***элементарным событием***.

В условиях эксперимента  случаи выпадения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков являются так же и элементарными событиями. Обозначим их как элементы множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ так, чтобы элемент a_1 соответствовал появлению 1 очка, элемент a_2 – 2 очков и так далее. Тогда

$$\mathbf{U} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}. \tag{1.9}$$

есть множество элементарных событий, или *пространство событий*.

Определение 1.16. Множество **U** элементарных событий, составляющих полную группу несовместных событий, называется ***пространством событий***.

Случайные события можно рассматривать как подмножества, которые составлены из элементов множества **U**. Так, в условиях эксперимента :

– подмножество $\mathbf{B} = \{a_2,\ a_4,\ a_6\}$ соответствует случайному событию, которое заключается в выпадении четного числа очков;
– подмножество $\mathbf{C} = \{a_1,\ a_2\}$ соответствует случайному событию, которое заключается в выпадении не более двух очков;
– подмножество $\mathbf{D} = \{a_6\}$ соответствует случайному событию, которое заключается в выпадении шести очков.

Определение 1.17. Произвольный набор элементарных событий из пространства событий **U** является ***случайным событием***.

Определение 1.18. Элементарные события, которым соответствуют элементы из подмножества случайного события, называются ***благоприятствующими*** этому событию.

Определение 1.19. Если событию ***E*** не соответствует ни один элемент из пространства событий, то оно называется ***невозможным*** (обозначается $\varnothing$).

Определение 1.20. Если событию ***F*** соответствуют все элементы из пространства событий, то оно называется ***достоверным*** (обозначается **U**).

Приведенные определения, сделанные на основе понятия пространства событий, ни в коей мере не противоречат утверждениям, сделанным в подразделе 1.1. Вместе с тем на их основе в начале 20-х годов XX века академиком А.Н. Колмогоровым был предложен аксиоматический подход к расчету вероятностных задач. Он базируется на схеме случаев и значительно расширяет рамки этой схемы, позволяя, в частности, раскладывать более сложные события на простые и затем вычислять их вероятность.

Для одного и того же опыта может быть построено несколько пространств событий в зависимости от того, какие элементарные события его составляют. Так, в условиях эксперимента  элементарные события b_1 (выпадение четного числа очков) и b_2 (выпадение нечетного числа очков) формируют новое пространство событий $\mathbf{U}_1 = \{b_1, b_2\}$.

Общее количество различных случайных событий для пространства событий из n элементов определяется величиной 2^n, которая включает невозможное и достоверное события. Так, в пространстве $\mathbf{U}_1$ может быть определено $2^2=4$ различных случайных событий, а пространстве $\mathbf{U}$, соответствующему выражению (1.9), – $2^6=64$.

1.3.2. *Операции над событиями*

Простые случайные события могут образовывать сложные события, а сложные – еще более сложные. Например, событие A_{2k}, которое заключается в выпадении четного числа очков в эксперименте , образуется из трех простых случайных событий: A_2 – выпадение двух очков, A_4 – выпадение четырёх очков, A_6 – выпадение шести очков. А более сложное событие A, которое заключается в выпадении четного числа очков или числа очков, кратного трем, состоит из двух менее сложных событий:

– A_{2k} – выпадение четного числа очков (события A_2, A_4, A_6);
– A_{3k} – выпадение числа очков, кратного трем (события A_3, A_6).

Теория вероятностей, как это будет показано в следующем подразделе, предоставляет исследователям возможность по известным вероятностям простых событий рассчитывать вероятности сложных событий. Но чтобы воспользоваться этой возможностью, необходимо обладать умением раскладывать сложные события на простые или составлять из простых событий сложные. Для разложения или составления сложных событий достаточно владеть двумя операциями над событиями: суммированием и умножением.

1.3.2.1. Сумма событий

Определение 1.21. ***Суммой*** двух событий *A* и *B* называют такое событие *C*, которое происходит тогда, когда происходит или событие *A*, или событие *B,* или события *A* и *B* одновременно в одном опыте.

Суммирование событий A и B принято записывать следующим образом: $A + B = C$.

Операция суммирования имеет место, когда простые события объединяются в сложное с использованием союза "или".

Использование союза "или" равносильно использованию словосочетания "хотя бы". Так, *определение* 1.21 с использованием этого словосочетания звучало бы следующим образом: "***Суммой*** двух событий A и B называют такое событие C, которое происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B.

Пример 1.9. Пусть в условиях эксперимента событие $A=\{a_1, a_3, a_5\}$ определяется как выпадение нечетного числа очков, а событие $B=\{a_3, a_6\}$ – как выпадение числа очков, кратного трем. Тогда событие C, которое заключается в выпадении нечетного числа очков или числа очков, кратного трем, будет суммой событий A и B ($C=\{a_1, a_3, a_5, a_6\}$).

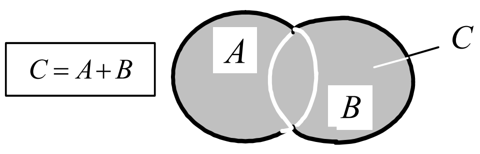


Рис. 1.1

На рис. 1.1 дана графическая интерпретация операции суммирования событий A и B. Здесь область A представляет собой множество точек, которые соответствуют элементарным исходам опыта, благоприятствующим событию A; область B – событию B; область C – хотя бы одному из событий A и B.

Операция суммирования может быть обобщена на суммирование нескольких событий. В этом случае суммой нескольких событий будет событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из суммируемых.

1.3.2.2. Произведение событий

Определение 1.22. ***Произведением*** двух событий *A* и *B* называют такое событие *D*, которое происходит тогда, когда происходит и событие *A,* и событие *B* одновременно в одном опыте.

Произведение событий *A* и *B* принято записывать следующим образом: $A*B = D$.

Операция умножения имеет место, когда простые события объединяются в сложное с использованием союза "и".

Пример 1.10. Пусть в условиях эксперимента событие *A* определяется как выпадение нечетного числа очков $A=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}$, а событие *B* – как выпадение числа очков, кратного трем ($B=\{a_3,\ a_6\}$). Тогда событие *D,* которое заключается в выпадении нечетного числа очков и одновременно кратного трем, будет произведением событий *A* и *B* ($D=\{a_3\}$).

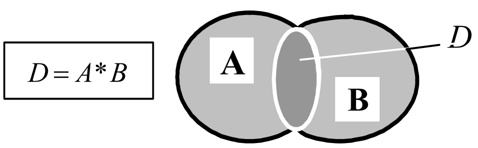


Рис. 1.2

На рис. 1.2 дана графическая интерпретация операции умножения событий *A* и *B*. Здесь область *A* представляет собой множество точек, которые соответствуют элементарным исходам опыта, благоприятствующим событию *A*; область *B* – событию *B*; область *D* представляет собой множество точек, которые соответствуют элементарным исходам опыта, одновременно благоприятствующим и событию *A*, и событию *B*.

Операция умножения может быть обобщена на умножение нескольких событий. В этом случае произведением нескольких событий будет являться событие, которое состоит в одновременном появлении в одном опыте всех событий.

1.3.3. *Свойства операций сложения и умножения*

Операции сложения и умножения событий обладают следующими свойствами:

- ***коммутативностью:***

$$A+B = B+A\ ;$$

$$A*B = B*A\ ;$$

- ***ассоциативностью:***

$$(A+B)+C = A+(B+C)\ ;$$

$$(A*B)*C = A*(B*C)\ ;$$

- ***дистрибутивностью:***

$$A*(B+C) = A*B + A*C\ .$$

Полезные формулы:

- для Ø-события: $A + \varnothing = A$; $A * \varnothing = \varnothing$;
- для U-события: $A + U = U$; $A * U = A$;
- для A-события: $A + A = A$; $A * A = A$.

1.4. Практикум и вопросы для самоконтроля

1.1. Какова основная цель дисциплины?

1.2. В каких областях человеческой деятельности используются методы «Теории вероятностей»?

1.3. Что является предметом изучения «Теории вероятностей»?

1.4. При каких условиях явление считается случайным?

1.5. Дать определение понятию "*событие*".

1.6. Дать определение понятию "*опыт*".

1.7. Дать определение понятию "*вероятность события*".

1.8. Дать определение понятию "*достоверное событие*".

1.9. Чему равна вероятность достоверного события?

1.10. Дать определение понятию "*невозможное событие*".

1.11. Чему равна вероятность невозможного события?

1.12. Дать определение понятию "*случайное событие*".

1.13. Какие значения может принимать вероятность случайного события?

1.14. Какие случайные события называются равновозможными?

1.15. Какие случайные события называются несовместными?

1.16. Дать определение понятию "*полная группа событий*".

1.17. Какие случайные события называются случаями?

1.18. Какие случаи называются благоприятствующими событию?

1.19. Какова классическая формула расчета вероятности события?

1.20. Бросают две монеты. Какова вероятность того, что хотя бы на одной выпадет "решка"?

Решение. Обозначим: A – событие, которое заключается в появлении хотя бы одной "решки" при бросании двух монет. Тогда $P(A)$ – искомая вероятность.

Возможными исходами опыта являются четыре случая:

– первый: на первой монете – "орел", на второй также "орел";
– второй: на первой монете – "орел", на второй – "решка";
– третий: на первой монете – "решка", на второй – "орел";
– четвертый: на первой монете – "решка", на второй также "решка".

Следовательно, общее число возможных исходов опыта $n = 4$.

Из четырех случаев второй, третий и четвертый являются благоприятствующими рассматриваемому событию. Следовательно, число благоприятных исходов $m = 3$.

Подставляя в классическую формулу определения вероятности найденные значения для n и m, получим: $P(A) = m/n = 3/4$.

1.21. В лототроне находятся 37 шаров с числами 1,2,...,37 . Какова вероятность появления шара с числом, кратным 10, в результате одного запуска лототрона?

1.22. Бросают две монеты. Какова вероятность того, что на одной выпадет "решка", а на другой – "орел"?

1.23. Бросают последовательно две монеты. Какова вероятность того, что на первой монете выпадет "решка", а на второй – "орел"?

1.24. Из преферансной колоды, содержащей 32 карты, наудачу вытаскивается одна. Какова вероятность того, что ею окажется "дама", "король" или "валет"?

1.25. В академической группе 25 студентов. У трех студентов фамилия начинается на букву "А", у двух – на "О", у одного – на "И", у остальных – на согласную. Преподаватель наудачу вызывает одного студента. Какова вероятность того, что его фамилия начинается на согласную букву?

1.26. Какие комбинаторные соединения различают в комбинаторике?

1.27. Дать определение комбинаторному понятию "*перестановки из m элементов*".

1.28. Каким образом вычисляется общее число перестановок из m элементов?

1.29. Сколько перестановок можно составить из 5 элементов?

1.30. Дать определение комбинаторному понятию "*размещения из n элементов по m".*

1.31. Каким образом вычисляется общее число размещений из n элементов по m?

1.32. Сколько можно составить размещений из 5 элементов по 3?

1.33. Дать определение комбинаторному понятию "*сочетания из n элементов по m*".

1.34. Каким образом вычисляется общее число сочетаний из n элементов по m?

1.35. Сколько можно составить сочетаний из 5 элементов по 3?

1.36. В вагоне трамвая 15 двухместных кресел. Сколькими способами на них могут разместиться 30 пассажиров?

1.37. На станции имеется 8 запасных путей. Сколькими способами на них можно расставить три разных поезда?

1.38. Сколькими различными способами можно разложить в два кармана 10 монет различного достоинства по равному количеству монет?

1.39. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

1.40. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

1.41. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

1.42. Сколько натуральных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы первая цифра была 1, вторая – 2 и чтобы полученные числа делились на 5?

1.43. Сколько натуральных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы первая цифра была 1 и чтобы полученные числа делились на 5?

1.44. Сколько сигналов можно подать с помощью 6 флажков разного цвета?

1.45. Сколько различных ***а*)** четырёхзначных, ***б*)** семизначных чисел, делящихся на 25, можно составить с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

1.46. Среди перестановок цифр числа 12345 сколько есть таких, которые не заканчиваются ***а*)** пятеркой, ***б*)** числом 45, ***в*)** числом 345?

1.47. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.48. Из 10 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 выбирают наугад три. Какова вероятность того, что ***а*)** в порядке выбора карточек получится число 347, ***б*)** можно будет составить число 347?

1.49. В мешочке 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: О, П, Р, С, Т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово "СПОРТ"?

1.50. В мешочке 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: М, О, О, О, Л, К. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово "МОЛОКО"?

1.51. В мешочке 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: А, А, А, Н, Н, С. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово "АНАНАС"?

1.52. На пяти карточках написаны буквы К, М, Н, О, Т. Вынимаются наугад 3 карточки. Какова вероятность того, что ***а*)** в порядке выхода карточек получится слово "КОТ", ***б*)** из вынутых карточек можно составить слово "КОТ"?

1.53. В академической группе 25 студентов, из них 15 девушек. Какова вероятность того, что среди первых 6 вошедших в аудиторию, будет 4 девушки?

1.54. Приобретается одна карточка игры "Спортлото", в которой играющему следует вычеркнуть 6 чисел из 36. Какова вероятность, что играющий вычеркнет 6 из 6 выигрышных чисел?

1.55. Приобретается одна карточка игры "Спортлото", в которой играющему следует вычеркнуть 6 чисел из 36. Какова вероятность, что играющий вычеркнет 3 из 6 выигрышных чисел?

1.56. Приобретается одна карточка игры "Спортлото", в которой играющему следует вычеркнуть 6 чисел из 36. В случае, если играющий вычеркнет 3, 4, 5 или 6 из 6 выигрышных чисел, он получает денежный выигрыш. Какова вероятность получения денежного выигрыша?

1.57. Десять человек усаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся сидящими рядом?

1.58. Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что задуманным окажется число ***а*)** случайно названное, ***б*)** случайно названное с различными цифрами?

1.59. Дать определение понятию "*элементарное событие*".

1.60. Дать определение понятию "*пространство событий*".

1.61. Дать определение понятию "*случайное событие*" как составной части пространства событий.

1.62. Какие события с точки зрения "*пространства событий*" называются благоприятствующими другому событию?

1.63. Дать определение понятию "*невозможное событие*" с точки зрения "*пространства событий*".

1.64. Дать определение понятию "*достоверное событие*" с точки зрения "*пространства событий*".

1.65. Дать определение операции суммирования двух событий.

1.66. Дать определение операции умножения двух событий.

1.67. В условиях эксперимента , когда игральная кость бросается только один раз, представить сложное событие S – выпадение четного числа очков или кратного пяти – через простые события A_i, где индекс i соответствует числу выпавших очков.

1.68. В условиях эксперимента , когда игральная кость бросается 2 раза, представить сложное событие S – выпадение равного числа очков при первом и втором бросаниях – через простые события (выпадение i очков при втором бросании).

1.69. В условиях эксперимента , когда игральная кость бросается 3 раза, представить сложное событие S – сумма выпавших очков при трех бросаниях кратна 17 – через простые события A_i (выпадение i очков при первом бросании), B_i (выпадение i очков при втором бросании) и C_i (выпадение i очков при третьем бросании).

1.70. В условиях эксперимента , когда игральная кость бросается 3 раза, представить сложное событие S – сумма выпавших очков при трех бросаниях не меньше 17 – через простые события A_i (выпадение i очков при первом бросании), B_i (выпадение i очков при втором бросании) и C_i (выпадение i очков при третьем бросании).

1.71. Бросаются две обычные игральные кости, которые отличаются только цветом: одна кость – черная, другая – белая. Наблюдаются числа очков на их верхних гранях. Построить пространство событий, которое отвечает данному эксперименту. Найти вероятности событий: ***а)*** P(«*ч*» + «*б*» = 6); ***б)*** P(«*ч*» + «*б*» > 9); ***в)*** P(«*ч*» + «*б*» $\leq$ 5). Здесь «*ч*» – число очков на черной кости; «*б*» – на белой.

Решение. Построить пространство событий – это значит, определить ***все*** возможные элементарные события для данного эксперимента. Задачи, в которых требуется построить пространство событий, решаются либо простым перечислением всех элементарных событий, либо построением таблицы, которая наглядно изображает содержимое пространства. В последнем случае в клетках таблицы записываются пары цифр – числа очков, которые выпадают на верхних гранях белой (первая цифра) и черной (вторая цифра) костей. В условиях задачи искомому пространству событий соответствует таблица:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Общее количество элементарных событий отвечает количеству клеток, т.е. имеем $N = 6 * 6 = 36$.

Построенное пространство событий позволяет просто и наглядно получить ответы на остальные вопросы задачи.

а) Для определения вероятности *P*(«*ч*» + «*б*» = 6) выделим в таблице пространства событий клетки, которые соответствуют элементарным событиям, благоприятствующим выпадению суммы очков, равной 6:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	**1 : 5**	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	**2 : 4**	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	**3 : 3**	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	**4 : 2**	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	**5 : 1**	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Количество выделенных клеток равно 5. Общее количество клеток, как было указано выше, равно 36. По классической формуле имеем: *P*(«*ч*» + «б» = 6) = 5/36.

б) Для определения вероятности *P*(«*ч*» + «*б*» > 9) выделим в таблице пространства событий клетки, которым соответствуют элементарные события, благоприятствующие выпадению суммы очков, большей числа 9:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	**4 : 6**
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	**5 : 5**	**5 : 6**
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	**6 : 4**	**6 : 5**	**6 : 6**

Количество выделенных клеток равно 6. Общее количество клеток – 36. По классической формуле имеем: *P*(«*ч*» + «*б*» > 9) = 6/36.

в) Для определения вероятности *P*(«*ч*» + «*б*» ≤ 5) выделим в таблице пространства событий клетки, которые соответствуют элементарным событиям с условием «*ч*» + «*б*» ≤ 5:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	**1 : 1**	**1 : 2**	**1 : 3**	**1 : 4**	1 : 5	1 : 6
***б*2**	**2 : 1**	**2 : 2**	**2 : 3**	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	**3 : 1**	**3 : 2**	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	**4 : 1**	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Количество выделенных клеток равно 10. Общее количество клеток – 36. По классической формуле имеем: P(«$ч$» + «$б$» ≤ 5) = 10/36.

1.72. В условиях задачи **1.71** найти следующие вероятности: ***а)*** не выпадения дубля; ***б)*** число очков на одной кости в два раза больше, чем число очков на другой кости.

1.73. В старинной индийской игре «Тонг» два игрока синхронно показывают один другому или один, или два, или три пальца на правой руке. Подразумевается, что для каждого игрока одинаково возможно показать один, или два, или три пальца. Построить пространство событий, которое отвечает результатам игры. Найти вероятности событий: ***а)*** общее число показанных пальцев – нечетное; ***б)*** общее число показанных пальцев – меньше двух; ***в)*** общее число показанных пальцев – простое.

1.74. В условиях задачи **1.73** построить пространство событий, которое отвечает результатам игры, и найти вероятности событий: ***а)*** по крайней мере, один игрок показал меньше трех пальцев; ***б)*** первый игрок показал один палец при условии, что общее число показанных пальцев меньше или равно четырем.

1.75. У мальчика в кармане есть четыре монеты номиналом 1, 5, 10 и 25 копеек. Он вынимает одну за другой две монеты. Построить соответствующее пространство событий. Найти вероятности событий: ***а)*** обе монеты номиналом меньше 10; ***б)*** мальчик вынул меньше 20 копеек.

1.76. В условиях задачи 1.75 найти вероятности событий: ***а)*** мальчик вынул меньше 20 копеек или одна из монет номиналом меньше 10; ***б)*** мальчик вынул меньше 20 копеек, причем одна из монет номиналом меньше 10.

1.77. Какими свойствами обладают операции суммирования и умножения событий?

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

2.1. Основные теоремы теории вероятностей

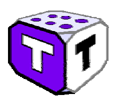
2.1.1. *Вероятность суммы событий*

Основные теоремы теории вероятностей позволяют по известным вероятностям простых событий определять вероятности более сложных событий. То есть предполагается, что вероятности всех событий, на которые раскладывается сложное событие, известны.

Основные теоремы теории вероятностей включают две теоремы:

- теорему о вероятности суммы двух событий;
- теорему о вероятности произведения двух событий.

Сформулируем и докажем первую из них.



Теорема 2.1. Вероятность суммы двух событий A и B равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения этих же событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A*B). \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть исходы опыта образуют полную группу n несовместных равновозможных событий (рис. 2.1). При этом

- m из них благоприятны событию A;
- k из них благоприятны событию B;
- l из них благоприятны произведению событий $A*B$.

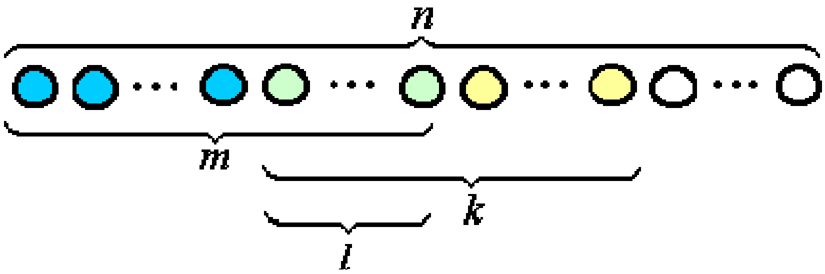


Рис. 2.1

Тогда согласно классической формуле определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \qquad P(B) = \frac{k}{n}; \qquad P(A*B) = \frac{l}{n}.$$

Согласно той же формуле вероятность появления события *A* или *B*

$$P(A+B) = \frac{m+k-l}{n}.$$

Преобразуем последнее равенство:

$$P(A+B) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A*B),$$

что и требовалось доказать.

***Следствие теоремы* 2.1.** Вероятность суммы двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме их вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2.2}$$

Следствие очевидно, поскольку произведение несовместных событий представляет собой невозможное событие, а вероятность невозможного события равна нулю:

$$A*B = \varnothing \quad \text{и} \quad P(\varnothing) = 0.$$

Следствие легко обобщается на случай нескольких событий.

2.1.2. *Полная группа событий и противоположные события*

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые составляют ***полную группу***, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{2.3}$$

Докажем данное утверждение. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу в некотором пространстве событий. Тогда, по определению полной группы, их сумма равна достоверному событию:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \mathbf{U}. \tag{2.4}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, и потому к левой части приведенного выше равенства применимо следствие (2.2), т.е. имеем:

$$P\left(A_1 + A_2 + ... + A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \tag{2.5}$$

Вероятность достоверного события, которое стоит в правой части равенства (2.4), равна единице: $P(\mathrm{U}) = 1$. Сопоставляя выражения (2.4) и (2.5), приходим к формуле (2.3), что и требовалось доказать.

Определение 2.1. Два события A и $\bar{A}$ называются ***противоположными***, если они образуют полную группу несовместных событий.

Примеры. При стрельбе по мишени два события, которые заключаются соответственно в попадании и промахе, являются противоположными. При бросании монеты, события которые заключаются в выпадении "орла" и "решки", также являются противоположными.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1\ . \tag{2.6}$$

Согласно *определению 2.1* события A и $\bar{A}$ являются несовместными и составляют полную группу. Следовательно, для них справедлива формула (2.3). Применяя формулу (2.3) к событиям A и $\bar{A}$ мы приходим к выражению (2.6).

Из (2.6) вытекают равенства:

$$P(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P(A)}\ ; \tag{2.7}$$

$$P(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})\ . \tag{2.8}$$

2.1.3. *Зависимые и независимые события*

Определение 2.2. События A и B называются ***независимыми***, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или не произошло.

Пример 2.1. В условиях эксперимента выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков – это события взаимно независимые. Сколько бы игральную кость не бросали, вероятности выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков не изменятся.

Пример 2.2. Из урны, содержащей 3 красных и 2 синих шара, последовательно извлекают наудачу два. Появление красного шара при первом и втором извлечениях – события зависимые, поскольку вероятность появления красного шара при втором извлечении будет зависеть от того, какой шар был извлечен при первом извлечении. Так, если первым извлеченным шаром был красный, то вероятность появления красного шара при втором извлечении равна 2/4; если – синий, то – 3/4 (см. *пример 2.3*).

2.1.4. *Условная вероятность*

Определение 2.3. Для зависимых событий A и B вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло, называется ***условной*** вероятностью и обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

В условиях *примера 2.2* вероятности появления красного шара при втором извлечениях 2/4 и 3/4 – это условные вероятности. Причем вероятность 2/4 вычислена при условии, что первым извлекается красный шар, а вероятность 3/4 – что синий.

Пример 2.3. Из урны, содержащей 3 красных и 2 синих шара, последовательно извлекают наудачу два шара.

Определить вероятности появления шара каждого цвета при первом извлечении, а также условные вероятности появления шаров каждого цвета при втором извлечении.

Решение. Введем обозначения:

n – общее число шаров в урне;

m – число красных шаров в урне;

k – число синих шаров в урне;

A_i – событие, которое заключается в том, что наудачу извлеченный i-й шар окажется красным, $i = 1,2$;

B_i – событие, которое заключается в том, что наудачу извлеченный i-й шар окажется синим, $i = 1,2$;

$P(A_1)$ – вероятность события A_1;

$P(B_1)$ – вероятность события B_1;

$P(A_2/A_1)$ – условная вероятность события A_2 при условии, что произошло A_1;

$P(A_2/B_1)$ – условная вероятность события A_2 при условии, что произошло B_1;

$P(B_2/A_1)$ – условная вероятность события B_2 при условии, что произошло A_1;

$P(B_2/B_1)$ – условная вероятность события B_2 при условии, что произошло B_1.

Тогда согласно классической формуле определения вероятности (1.1) искомые вероятности вычисляются следующим образом:

$P(A_1)=3/5$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=3$ (число красных шаров в урне), а общее число исходов $n=5$ (всего шаров в урне);

$P(B_1)=2/5$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=2$ (число синих шаров в урне), а общее число исходов $n=5$ (всего шаров в урне);

$P(A_2/A_1)=2/4$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=2$ (число красных шаров после извлечения одного красного шара), а общее число исходов $n=4$ (всего шаров в урне после первого извлечения);

$P(A_2/B_1)=3/4$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=3$ (число красных шаров после извлечения одного синего шара), а общее число исходов $n=4$ (всего шаров в урне после первого извлечения);

$P(B_2/A_1)=2/4$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=2$ (число синих шаров после извлечения одного красного шара), а общее число исходов $n=4$ (всего шаров в урне после первого извлечения);

$P(B_2/B_1)=1/4$, поскольку благоприятных исходов опыта $m=1$ (число синих шаров в результате извлечения одного синего шара), а общее число исходов $n=4$ (всего шаров в урне после первого извлечения).

2.1.5. *Вероятность произведения событий*

Теорема 2.2. Вероятность произведения двух событий A и B равна вероятности события A, умноженной на условную вероятность события B при условии, что событие A произошло, или равна вероятности события B, умноженной на условную вероятность события A при условии, что событие B произошло

$$P(A*B) = P(A) * P_A(B) = P(B)*P_B(A) . \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть исходы опыта образуют полную группу несовместных равновозможных событий (рис. 2.1). При этом

m из них благоприятны событию *A*;

k из них благоприятны событию *B*;

l из них благоприятны произведению событий *A*B*.

Тогда согласно классической формуле определения вероятности:

$$P(A)=\frac{m}{n};\qquad P(B)=\frac{k}{n};\qquad P_A(B)=\frac{l}{m};\qquad P_B(A)=\frac{l}{k}\ .$$

Согласно той же формуле вероятность одновременного появления событий A и B

$$P(A*B)=\frac{l}{n}\ .$$

Преобразуем последнее равенство:

$$P(A*B)=\frac{l}{n}=\begin{cases}\dfrac{l}{n}=\dfrac{l\cdot m}{n\cdot m}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{l}{m}=P(A)P_A(B)\,;\\[2ex] \dfrac{l}{n}=\dfrac{l\cdot k}{n\cdot k}=\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{l}{k}=P(B)P_B(A)\,.\end{cases}$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие теоремы 2.2. Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению их вероятностей

$$P(A*B) = P(A) * P(B)\ . \qquad (2.10)$$

Следствие довольно просто объясняется, если принять во внимание, что для независимых событий условные вероятности совпадают с безусловными: $P_B(A) = P(A)$; $P_A(B) = P(B)$.

Следствие легко обобщается на случай нескольких событий.

Пример 2.4. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень в каждом выстреле одинакова и равна 0,9. Найти вероятность того, что в мишени будет только две пробоины.

Решение. Введем обозначения:

A_1 и $\overline{A}_1$– соответственно попадание и промах при первом выстреле;

A_2 и $\overline{A}_2$ – соответственно попадание и промах при втором выстреле;

A_3 и $\overline{A}_3$ – соответственно попадание и промах при третьем выстреле.

Тогда событие A, которое заключается в том, что после трех выстрелов в мишени будет только две пробоины, может наступить в случае, если стрелок либо попадет при первом и втором выстрелах и промахнётся при третьем, либо попадет при первом и третьем выстрелах и промахнётся при втором, либо попадет при втором и третьем выстрелах и промахнется при первом. С учетом введенных обозначений событие A можно разложить на простые следующим образом:

$$A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 .$$

Поскольку слагаемые в приведенном разложении соответствуют несовместным событиям, то вероятность события A будет равна сумме вероятностей этих событий (*следствие теоремы 2.1*):

$$P(A) = P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) .$$

А поскольку все выстрелы являются независимыми между собой, то каждое слагаемое в последнем выражении можно представить как произведение вероятностей простых событий (*следствие теоремы 2.2*)

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) .$$

Вероятности $P(A_1)$, $P(A_2)$ и $P(A_3)$ по условию равны 0,9. Неизвестные вероятности $P(\overline{A}_1)$, $P(\overline{A}_2)$ и $P(\overline{A}_3)$ легко определяются как вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1)$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2)$; $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3)$. То есть все они равны 0,1 .

Подставляя вероятности простых событий в последнее разложение вероятности $P(A)$, получим искомый результат $P(A) = 0{,}243$.

2.2. Модели надежности технических систем

2.2.1. *Надежность технических систем*

Теория вероятностей играет первостепенную роль в теории надежности, предоставляя ей строгий математический аппарат. В частности, расчет *надежности технических систем* полностью базируется на основных теоремах теории вероятностей и является удачной иллюстрацией их использования в инженерной практике.

Определение 2.4. Под ***надежностью технической системы*** понимается вероятность её безотказной работы за определенный период времени T.

Основные теоремы теории вероятностей позволяют определять вероятность безотказной работы системы по известным вероятностям безотказной работы отдельных ее элементов. Другими словами, основные теоремы теории вероятностей позволяют определять надежность всего изделия по известной надежности составляющих его узлов.

Элементы системы могут различным образом объединяться в систему. В зависимости от способа объединения различают системы с

- последовательным;
- параллельным;
- мостовым;
- *смешанным* соединением элементов.

Для получения основных математических моделей надежности технических систем докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. Вероятность появления хотя бы одного из n независимых совместных событий A_1, A_2, ... , A_n равна единице минус произведение вероятностей *не* появления этих событий:

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) , \qquad (2.11)$$

где $P(A)$ – вероятность появления хотя бы одного из n независимых совместных событий;

$P(\bar{A}_i)$ – вероятность *не* появления события A_i, $i = 1, 2, \ldots , n$.

Доказательство. Событие A, которое заключается в появлении хотя бы одного из n совместных событий, происходит тогда, когда происходит:

либо одно из событий A_i , $i \in \{1,n\}$;

либо два из событий A_i ;

. . .

либо все n событий A_i .

Событие A не происходит только в одном случае, когда одновременно не происходят все n событий, то есть в случае $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n$.

Поскольку все события $\bar{A}_i$ между собой независимы, то вероятность события $\bar{A}$ определится в соответствии со *следствием теоремы* 2.2:

$$P(\bar{A}) = \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) .$$

Согласно формуле (2.8), связывающей противоположные события, окончательно получим $P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$. Теорема доказана.

Следствие теоремы 2.3. Если вероятности появления совместных независимых событий A_i одинаковы и равны p, то вероятность появления хотя бы одного из них определяется по формуле

$$P(A) = 1 - q^n , \tag{2.12}$$

где q – вероятность события $\bar{A}_i$, равная $(1 - p)$.

2.2.2. *Последовательное соединение элементов*

На рис. 2.2 представлена в общем виде схема системы с последовательным соединением элементов. Каждому i-му элементу поставлена в соответствие вероятность его безотказной работы p_i. Такая вероятность, как правило, берется из данных технического паспорта, который поставляется заводом-изготовителем вместе с элементом (комплектующим узлом).

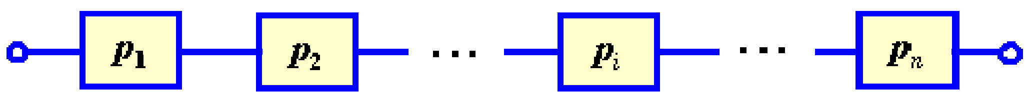


Рис. 2.2

Сейчас и в дальнейшем будем считать, что система разбита на элементы так, что отказ любого из них ни в коей степени не влияет на отказ остальных элементов.

Отказ последовательной системы, приведенной на рис. 2.2, наступает тогда, когда отказывает хотя бы один элемент. Примером такой системы может служить гирлянда последовательно соединенных лампочек. Выход из строя хотя бы одной лампочки влечет за собой выход из строя всей гирлянды.

Введем обозначения. Пусть:

A – событие, которое заключается в работоспособности системы за некоторый период времени T;

B_1 – событие, которое заключается в работоспособности 1-го элемента системы за тот же период времени T;

B_2 – событие, которое заключается в работоспособности 2-го элемента в течение времени T;

. . .

B_i – событие, которое заключается в работоспособности i-го элемента в течение времени T;

. . .

B_n – событие, которое заключается в работоспособности n-го элемента в течение времени T.

Вероятность события B_i равна вероятности безотказной работы p_i.

Вся система работоспособна только тогда, когда работоспособны все её элементы, т.е.

$$A = B_1 * B_2 * \ldots * B_i * \ldots * B_n = \prod_{i=1}^{n} B_i \, .$$

Поскольку все события B_i между собой независимы, то вероятность события A определится в соответствии *со следствием теоремы 2.2*:

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} p_i \, , \tag{2.13}$$

Выражение (2.13) является математической моделью надежности системы последовательно соединенных элементов.

Анализ модели показывает, что при $n \to \infty$, вероятность безотказной работы системы $P(A) \to 0$, поскольку все сомножители $p_i < 1$. Это значит – чем сложнее система, тем ниже её надежность. Слишком сложная система неработоспособна!

2.2.3. *Параллельное соединение элементов*

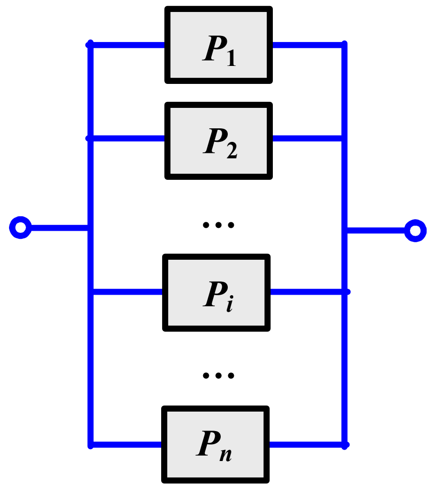


Рис. 2.3

На рис. 2.3 представлена в общем виде схема системы с параллельным соединением элементов.

Каждому *i*-му элементу поставлена в соответствие вероятность его безотказной работы p_i.

Отказ системы с параллельным соединением элементов наступает тогда, когда отказывает одновременно все элементы. Примером такой системы может служить система светильников в аудитории. При выходе из строя одного или нескольких светильников остальные продолжают освещать аудиторию.

Введем обозначения. Пусть:

A – событие, которое заключается в работоспособности всей системы за некоторый период времени T;

B_1 – событие, которое заключается в работоспособности 1-го элемента системы за тот же период времени T;

B_2 – событие, которое заключается в работоспособности 2-го элемента в течение времени T;

. . .

B_i – событие, которое заключается в работоспособности *i*-го элемента в течение времени T;

. . .

B_n – событие, которое заключается в работоспособности *n*-го элемента в течение времени T;

$\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_i, \ldots, \bar{B}_n$ – события, противоположные соответственно событиям A, B_1, B_2, ... , B_i, ..., B_n.

Тогда вероятность события $\bar{B}_i$ согласно формуле (2.7), связывающей противоположные события, равна $(1-p_i)$, и вся система будет неработоспособна, если будут неработоспособны все её элементы, то есть $\overline{A} = \overline{B}_1 * \overline{B}_2 * \ldots * \overline{B}_i * \ldots * \overline{B}_n$. Поскольку все события $\overline{B}_i$ между собой независимы, то вероятность события $\overline{A}$ определится в соответствии со *следствием теоремы* 2.2: $P(\overline{A}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$.

Используя формулу (2.8), получим окончательно

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i). \qquad (2.14)$$

Выражение (2.14) является математической моделью надежности системы параллельно соединенных элементов.

Анализ модели показывает, что при $n \to \infty$, вероятность безотказной работы системы $P(A) \to 1$, поскольку произведение $\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \to 0$.

Таким образом, ввод в систему дополнительных параллельных ветвей способствует повышению надежности системы. Так, для достижения должной надежности функционирования инженерных сетей часто прибегают к их распараллеливанию, а для повышения надежности работы приборов – к дублированию (и даже троированию) основных его узлов.

2.2.4. *Смешанное соединение элементов*

Реальные технические системы, как правило, представляют собой сложные комбинации последовательных, параллельных и мостовых соединений.

На рис. 2.4 представлен алгоритм расчета надежности сложных систем со смешанным соединением элементов – пока только с последовательными и параллельными соединениями. Расчет мостовых соединений элементов будет рассмотрен позднее в подразделе 3.1.3.

Как следует из алгоритма на рис. 2.4, расчет смешанных систем представляет собой циклический процесс замены участков системы с однотипным соединением элементов одним элементом с эквивалентной надежностью, рассчитанной по формуле (2.13) в случае последовательного соединения или по формуле (2.14) в случае параллельного соединения элементов.

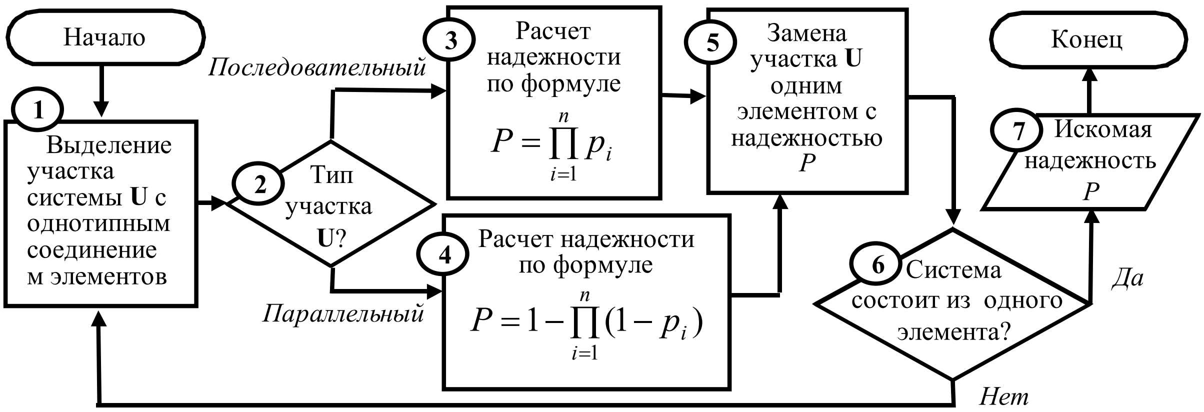


Рис. 2.4. Схема алгоритма расчета надежности системы со смешанным соединением элементов

Циклический процесс замены продолжается до тех пор, пока схема системы не будет включать только один элемент. Рассчитанная эквивалентная надежность этого элемента и будет являться искомой надежностью системы.

2.3. Практикум и вопросы для самоконтроля

2.1. Какие теоремы теории вероятности называют основными?

2.2. Как читается основная теорема о вероятности суммы двух событий?

2.3. Каково следствие основной теоремы о вероятности суммы двух событий?

2.4. Какие события называются противоположными?

2.5. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

2.6. Какие события являются независимыми?

2.7. Дать определение условной вероятности.

2.8. Как обозначается условная вероятность?

2.9. Как читается основная теорема о вероятности произведения двух событий?

2.10. Каково следствие основной теоремы о вероятности произведения двух событий?

2.11. Что понимают под надежностью технической системы?

2.12. Как подразделяются технические системы в зависимости от способа соединения их элементов?

2.13. Чему равна вероятность появления хотя бы одного из n независимых совместных событий?

2.14. Как определяется вероятность безотказной работы системы последовательно соединенных элементов?

2.15. Чему равна вероятность безотказной работы системы из бесконечного числа последовательно соединенных элементов?

2.16. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

2.17. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

2.18. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочниках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках;

г) ни в одном справочнике.

2.19. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится:

а) не более чем в трех ящиках;

б) не менее чем в двух ящиках.

2.20. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает три вопроса, предложенные ему экзаменатором.

2.21. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа всего устройства, если оно является следствием отказа хотя бы одного элемента.

2.22. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

2.23. Как определяется вероятность безотказной работы системы параллельно соединенных элементов?

2.24. Чему равна вероятность безотказной работы системы из бесконечного числа последовательно соединенных элементов?

2.25. Как производят расчет надежности систем со смешанным соединением элементов?

2.26. Определить надежность технической системы, изображенной на рис. 2.5, по известным вероятностям безотказной работы отдельных её элементов.

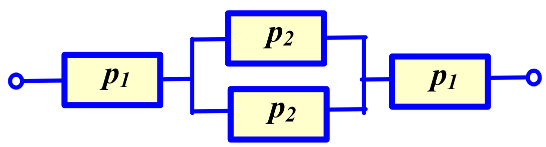


Рис. 2.5

2.27. Определить надежность технической системы, изображенной на рис. 2.6, по известным вероятностям безотказной работы отдельных её элементов.

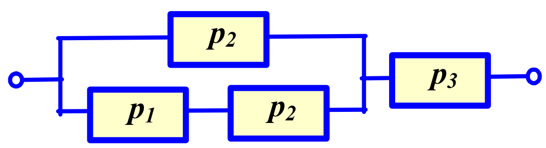


Рис. 2.6

2.28. Определить надежность технической системы, изображенной на рис. 2.7, по известным вероятностям безотказной работы отдельных её элементов.

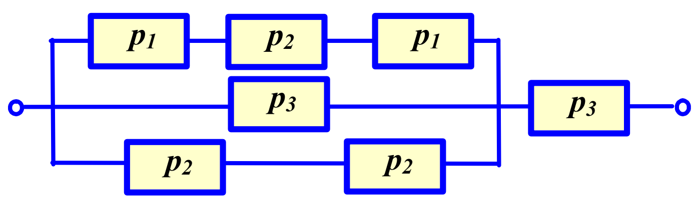


Рис. 2.7

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

3.1. Алгебра гипотез

3.1.1. *Формула полной вероятности*

Формула ***полной вероятности*** используется для определения ***средней*** вероятности события A, которое может произойти только с одним из полной группы несовместных событий H_i, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом известны ***априорные*** (доопытные) вероятности событий H_i и условные вероятности наступления события A при условии, что произошло то или иное событие H_i.

События H_i принято называть ***гипотезами***, поскольку средняя вероятность события A определяется в момент, когда неизвестно, какое из событий H_i произойдет и повлечет за собой наступление события A.

На рис. 3.1 дана графическая интерпретация условиям и данным, при которых определяется средняя вероятность. Здесь используются следующие обозначения:

$P(A)$ – полная, или средняя, вероятность события A (длинная полужирная линия);

$P(H_i)$ – априорная вероятность гипотезы H_i (площадь i-го прямоугольника), $i = 1, 2, \dots, n$;

$P(A/H_i)$ – условная вероятность наступления события A при условии, что осуществилась та или иная гипотеза H_i (короткая полужирная линия в i-м прямоугольнике), $i = 1, 2, \dots, n$.

Как показано на рис. 3.1, сумма вероятностей гипотез должна равняться единице (общая площадь всех прямоугольников), а средняя вероятность наступления события A должна быть больше (выше) самой маленькой из условных вероятностей $P(A/H_i)$ и меньше (ниже) самой большой, то есть находиться внутри прямоугольника с пунктирным контуром.

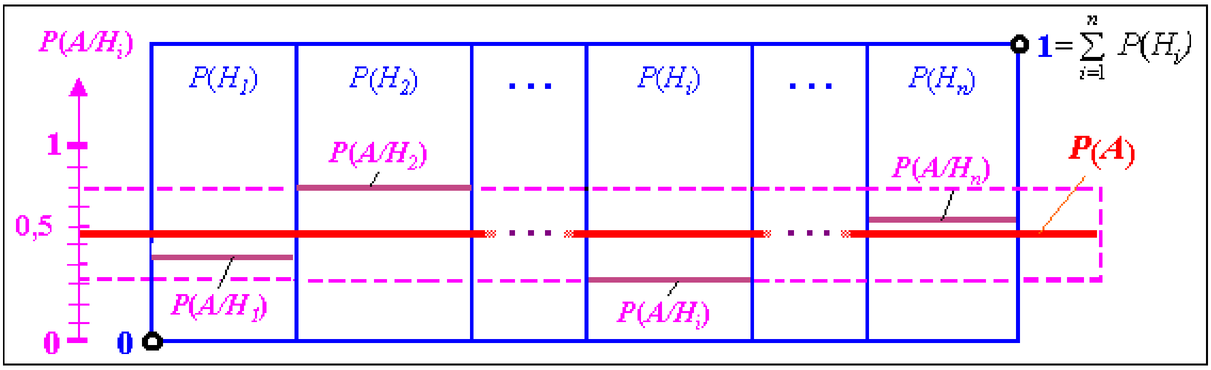


Рис. 3.1

Теорема 3.1. Если некоторое событие A может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез) H_i ($i = 1,2,\ldots,n$) и известна априорная вероятность $P(H_i)$ каждой гипотезы и условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при условии, что осуществилась та или иная гипотеза, то полная, или средняя, вероятность события A определяется по формуле

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i). \tag{3.1}$$

Доказательство. Событие A может произойти либо совместно с событием H_1, либо с H_2, ... , либо с H_n, то есть сложное событие A может быть разложено следующим образом:

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA .$$

Покажем, что из несовместности H_i следует факт несовместности H_iA.

Если $H_i{*}H_j=\varnothing$, то $H_i{*}A{*}\,H_j{*}A= H_i{*}\,H_j{*}A{*}A= (H_i{*}\,H_j){*}(A{*}A)= \varnothing{*}\mathrm{A}=\varnothing$. Отсюда вероятность события A определяется в соответствии со *следствием теоремы 2.1*, то есть

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \ldots + P(H_nA) .$$

Применяя к каждому слагаемому последнего выражения *теорему 2.2*, получим

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) \;+ P(H_2)\, P(A/H_2) \;+ \ldots + P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3.1. Завод выпускает видеомагнитофоны с гарантийным сроком эксплуатации один год. Известно, что 20% продукции будет эксплуатироваться в Заполярье, 75% – в местности с умеренным климатом, 5% – в пустыне. Известны также вероятности безотказной работы видеомагнитофонов в каждом регионе в течение гарантийного срока: 0,9 – в Заполярье; 0.99 – в местности с умеренным климатом; 0,8 – в пустыне.

Необходимо определить какой процент изделий следует выпустить дополнительно к плану для замены отказавших в течение гарантийного срока. При этом считается, что при замене изделий последние не отказывают.

Решение. Введем обозначения:

A – безотказная работа видеомагнитофона;

H_1 – гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в Заполярье;

H_2 – гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в местности с умеренным климатом;

H_3 – гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в пустыне.

Тогда вероятности осуществления гипотез, исходя из условия примера, составят:

– для гипотезы H_1 величину $P(H_1) = 20\% / 100\% = 0{,}2$;
– для гипотезы H_2 величину $P(H_2) = 75\% / 100\% = 0{,}75$;
– для гипотезы H_3 величину $P(H_3) = 5\% / 100\% = 0{,}05$.

А соответствующие условные вероятности события A в соответствии с тем же условием составят: $P(A/H_1) = 0{,}9$; $P(A/H_2) = 0{,}99$; $P(A/H_3) = 0{,}8$.

Дополнительно к плану следует выпустить столько изделий, сколько их откажет во всех регионах. Искомый дополнительный процент изделий – это средняя вероятность отказа изделий по всем регионам, умноженная на 100%.

Определим сначала среднюю вероятность безотказной работы изделия:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) P(A/H_i) \;=\; 0{,}2*0{,}9 + 0{,}75*0{,}99 + 0{,}05*0{,}8 = 0{,}9625 \;.$$

Согласно формуле (2.7), связывающей противоположные события, средняя вероятность отказа изделий по всем регионам определится как

$$P(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - 0{,}9625 = 0{,}0375 \;.$$

Искомое решение: $P(\bar{A})$ * 100% = 3,75% .

3.1.2. *Формула Байеса*

Формула Байеса используется в тех же условиях, что и формула полной вероятности. Единственное отличие состоит в том, что событие A уже произошло.

Формула Байеса позволяет определять ***апостериорные*** (послеопытные) вероятности гипотез $P(H_j /A)$, j=1, 2, … , n , т.е. условные вероятности гипотез при условии, что событие A произошло.

Теорема 3.2. Если некоторое событие A может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез) H_i (i=1,2,…,n) и известны априорные вероятности гипотез $P(H_i)$, условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при условии, что осуществилась та или иная гипотеза, а также известно, что событие A произошло, то апостериорная вероятность гипотезы H_j ($j \in \{1,2,\ldots,n\}$) определяется по формуле

$$P(H_j / A) = \frac{P(H_j) P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)} \;. \qquad (3.2)$$

Доказательство. На основании *теоремы 2.2* о вероятности произведения двух событий определим вероятность одновременного появления событий A и H_j ($j \in \{1,2,\ldots,n\}$) в одном опыте:

$$P(A*H_j) = P(A)*P(H_j /A) = P(H_j)*P(A/H_j)$$

Вторую часть полученного соотношения, то есть равенство

$$P(A)*P(H_j /A) = P(H_j)*P(A/H_j) \;,$$

разрешим относительно величины $P(H_j /A)$:

$$P\left(H_j / A\right) = \frac{P\left(H_j\right)P\left(A / H_j\right)}{P(A)} \;. \tag{3.3}$$

В знаменателе выражения (3.3) стоит полная вероятность $P(A)$, которая согласно *теореме 3.1* определяется суммой $\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)P\left(A / H_i\right)$. Подставляя в (3.3) указанную сумму, окончательно получим $P\left(H_j / A\right) = \dfrac{P\left(H_j\right)P\left(A / H_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)P\left(A / H_i\right)}$. Теорема доказана.

Прикладное значение формулы Байеса довольно велико. Она находит свое применение в

- распознавании образов для выявления объектов по их нечеткому изображению,
- технической диагностике для поиска неисправности,
- в медицинской диагностике для постановки диагноза больному,
- в радиолокационной технике для отделения сигнала от шума и во многих других задачах, когда необходимо выявить вероятную причину (гипотезу) происшедшего события.

Формула Байеса, используя информацию о факте наступления события, обеспечивает коррекцию априорных вероятностей гипотез, что позволяет более объективно судить о причине, побудившей это событие.

Пример 3.2. Пусть на завод-изготовитель поступила рекламация на отказавший видеомагнитофон, условия эксплуатации которого были оговорены в *примере 3.1*. Необходимо определить, в каком регионе вероятнее всего он эксплуатировался.

Решение. По условию задачи происшедшим событием является отказ видеомагнитофона. Если оставаться в рамках обозначений, которые имели место при решении *примера* 3.1, то это событие обозначается $\overline{A}$. Его средняя вероятность $P(\overline{A})$ уже рассчитана и составляет 0,0375.

Условные вероятности события $\overline{A}$ при условии, что произошла та или иная гипотеза, определяются следующим образом:

$$P(\overline{A}/H_1) = 1 - P(A/H_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1\ ;$$

$$P(\overline{A}/H_2) = 1 - P(A/H_2) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01\ ;$$

$$P(\overline{A}/H_3) = 1 - P(A/H_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2\ .$$

Апостериорные вероятности гипотез о предполагаемом регионе эксплуатации отказавшего видеомагнитофона, согласно формуле Байеса, определятся следующим образом:

для гипотезы H_1 (эксплуатация в Заполярье)

$$P(H_1/\overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2*0{,}1}{0{,}0375} = 0{,}5333;$$

для гипотезы H_2 (эксплуатация в местности с умеренным климатом)

$$P(H_2/\overline{A}) = \frac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}75*0{,}01}{0{,}0375} = 0{,}2;$$

для гипотезы H_3 (эксплуатация в пустыне)

$$P(H_3/\overline{A}) = \frac{P(H_3)P(\overline{A}/H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05*0{,}2}{0{,}0375} = 0{,}2667.$$

Таким образом, наиболее вероятным регионом, из которого поступила рекламация, является Заполярье. Данная гипотеза имеет самую большую апостериорную вероятность – 0,5333 .

3.1.3. *Надежность систем с мостовым соединением элементов*

Формула полной вероятности, также как и формула Байеса, имеет большое прикладное значение. Одним из ее возможных практических приложений является расчет надежности технических систем с мостовым соединением элементов. В данном разделе будет рассмотрена методика расчета мостовых систем на примере простой системы с одним мостом. Расчет надежности систем с большим числом мостов является сложной инженерной задачей и в данном курсе не рассматривается.

На рис. 3.2 представлена схема системы с одним мостом. Каждому плечу мостового соединения поставлена в соответствие вероятность его безотказной работы p_i (i = 1,2,3,4) за некоторый период времени T. Самому мосту поставлена в соответствие аналогичная вероятность $p_м$.

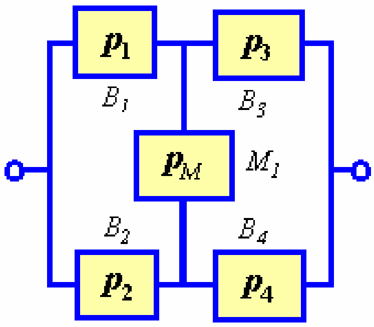


Рис. 3.2

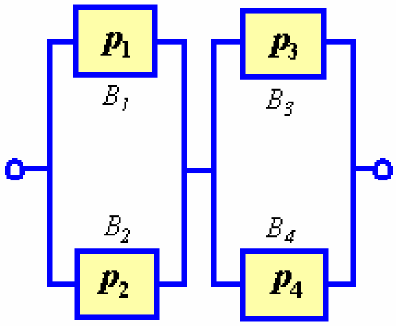


Рис. 3.3

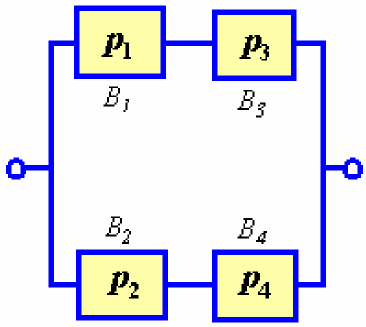


Рис. 3.4

Введем обозначения:

A – событие, которое заключается в работоспособности системы за некоторый период времени T;

H_1 – гипотеза, которое заключается в работоспособности моста в течение времени T;

H_2 – гипотеза, которое заключается в выходе из строя моста в течение времени T.

Вероятность гипотезы H_1 соответствует величине $p_м$, а вероятность гипотезы H_2 – величине $(1–p_м)$.

Вычислим условные вероятности события A в предположении, что осуществилась та или иная гипотеза. Так, условная вероятность события A в предположении, что осуществилась гипотеза H_1, соответствует надежности смешанной системы, изображенной на рис. 3.3, то есть

$$P(A/H_1) = [1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)]\ ,$$

а условная вероятность события A в предположении, что осуществилась гипотеза H_2, соответствует надежности смешанной системы, изображенной на рис. 3.4, то есть

$$P(A/H_2) = [1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)]\ .$$

Искомая вероятность безотказной работы системы, приведенной на рис. 3.2, равна средней вероятности события A. Эта вероятность в соответствии с *теоремой 3.1* определяется по формуле (3.1):

$$p(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=p_{м}[1-(1-p_1)(1-p_2)]\,[1-(1-p_3)(1-p_4)]+(1-p_{м})\,[1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)]\,. \qquad (3.4)$$

При равновесных плечах мостового соединения (p_i = p, i=1,2,3,4) формула (3.4) упрощается:

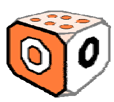
$$P(A)=p_M\left[1-(1-p)^2\right]^2+(1-p_M)\left[1-\left(1-p^2\right)^2\right]. \qquad (3.5)$$

Выражения (3.4) и (3.5) являются математическими моделями надежности для систем с одним мостовым соединением элементов соответственно с неравновесными и равновесными плечами мостового соединения.

3.2. Повторение опыта

3.2.1. *Задачи на повторение независимых опытов*

В практике экономистов и менеджеров часто возникают задачи, непосредственно или косвенно связанные с вычислением вероятности сложных событий при фиксированном числе повторения *независимых опытов* и известной вероятности наступления некоторого события A в одном опыте.



Определение 3.1. Опыты называются ***независимыми***, если вероятность появления события A в каждом опыте не зависит от того, появилось оно в предыдущих опытах или нет.

К упомянутым задачам относятся, прежде всего:

- определение вероятности наступления события A ровно k раз в n независимых испытаниях;
- определение вероятности наступления события A не менее k_1 раз и не более k_2 раз в n независимых испытаниях;
- определение наивероятнейшего числа наступления события A в n независимых испытаниях.

Все эти задачи могут быть решены с помощью основных теорем теории вероятностей. Для примера рассмотрим одну из них.

Пример 3.3. Пусть необходимо определить вероятность поражения мишени не менее двух раз при трех выстрелах, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна p.

Поставленная задача является частным случаем второй задачи из только что перечисленных. Её можно переформулировать следующим образом: необходимо определить вероятность поражения мишени не менее двух раз и не более трех раз при трех выстрелах, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна p.

Решение примера 3.3. Сложное, событие B, вероятность которого требуется определить, может быть представлено как сумма менее сложных:

$$B = C + D,$$

где C – событие, которое заключается в поражении мишени ровно 2 раза при трех выстрелах;

D – событие, которое заключается в поражении мишени ровно 3 раза при трех выстрелах.

В свою очередь, события C и D могут быть разложены на простые события:

$$C = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3\ ;$$

$$D = A_1A_2A_3\ ,$$

где A_i – событие, которое заключается в поражении мишени при i-м выстреле; $i = 1,2,3$;

$\bar{A}_i$ – событие, противоположное событию A_i, $i = 1,2,3$.

Согласно *следствию теоремы 2.1* (C и D – несовместные события),

$$P(B) = P(C) + P(D) = P(\bar{A}_1A_2A_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(A_1A_2A_3)\ .$$

Поскольку исходы $\bar{A}_1A_2A_3$, $A_1\bar{A}_2A_3$ и $A_1A_2\bar{A}_3$ – события равновозможные (два попадания и один промах при неизменных вероятностях последних), то:

$$P(B) = 3{*}P(A_1A_2\bar{A}_3) + 1{*}P(A_1A_2A_3),$$

или

$$P(B) = C_3^{\,2}{*}P(A_1A_2\bar{A}_3) + C_3^{\,3}{*}P(A_1A_2A_3\ .$$

Согласно *следствию теоремы 2.2* (A_i – события независимые*,* i = 1,2,3) и равенству единице суммы вероятностей противоположных событий, окончательно получаем:

$$P(B) = \mathrm{C}_3^{\,2}p^2(1-p)^{3-2} + \mathrm{C}_3^{\,3}p^3(1-p)^{3-3}\ . \tag{3.6}$$

Примечание. Искомый результат в последнем выражении представлен, на первый взгляд, в несколько неудобной форме. Однако, именно эта форма наиболее подходит для проведения аналогии между решением, полученным с помощью основных теорем теории вероятностей, и решением – с использованием формулы Бернулли, которая будет рассмотрена в следующем подразделе.

Как было сказано ранее, все задачи на повторение независимых опытов могут быть решены с помощью основных теорем теории вероятностей. Однако в условиях большого числа испытаний решение таких задач с помощью основных теорем становится малоэффективным из-за больших временных затрат на вычислительные процедуры. Чтобы избежать рутинных вычислений, в теории вероятностей разработаны специальные математические средства, которые и составляют предмет дальнейшего рассмотрения в данном курсе.

3.2.2. *Формула Бернулли*

В решении последней задачи с помощью основных теорем теории вероятностей при поиске вероятности наступления события A ровно 2 раза в трёх опытах, т.е. вероятности $P(B)$, мы вынуждены были прибегнуть к полному перебору возможных исходов, благоприятствующих событию B. Такая процедура полного перебора оправдывает себя только при небольшом числе испытаний. В случае большого числа испытаний, гораздо эффективнее использовать формулу Бернулли, предназначенную для той же цели.

Теорема 3.3 (*Теорема Бернулли*). Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) определяется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \; . \tag{3.7}$$

Теорема 3.3 приводится без доказательства, поскольку оно примитивно и громоздко. Читателю предлагается доказать её самостоятельно на основе использования комбинаторной формулы подсчета числа сочетаний.

Формула (3.7) известна как *формула Бернулли*.

Рекомендуется использовать формулу Бернулли при числе испытаний не превышающем числа 10.

Следует также помнить, что формула (3.7) может быть использована только в условиях *биномиального эксперимента*, то есть при выполнении следующих требований:

– эксперимент должен состоять из фиксированного числа испытаний (задано n);
– каждое испытание приводит либо к успеху, либо к неудаче (к наступлению или *не* наступлению события A);
– вероятность успеха (неудачи) во всех испытаниях должна быть одинаковой;
– все испытания должны быть независимыми друг от друга.

3.2.3. Локальная теорема Лапласа

Использование формулы Бернулли при $n \gg 1$, безусловно, предпочтительнее прямого использования основных теорем теории вероятности для той же цели. Однако наличие в формуле (3.7) числа сочетаний делает её также неудобной из-за трудоёмкого вычисления факториальных величин. Указанных вычислений можно избежать, если точное определение вероятности $P_n(k)$ заменить её оценкой.

Теорема 3.4 (*локальная теорема Лапласа*). Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x), \tag{3.8}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \;;\; q = 1 - p.$$

Функция Гаусса табулирована (*см. Приложение А*). Это позволяет избежать сложных вычислений по формуле (3.8), ограничиваясь вычислением аргумента функции x. Функция Гаусса – четная функция, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Поэтому таблица составлена только для положительных значений аргумента. Причем для диапазона значений аргумента от 0 до 4. При $|\, x \,| > 4$ функция Гаусса принимается равной 0, то есть событие с искомой вероятностью считается практически невозможным.

Пример 3.4. Пусть вероятность посещения студентом любой лекции по курсу "Теория вероятностей" равна $p = 0{,}9$. Определить вероятность посещения студентом 12 лекций из 16 запланированных в семестре.

Решение. В соответствии с *теоремой 3.4* вероятность посещения студентом 12 лекций из 16 при вероятности посещения одной (любой из 16), равной 0,9 , определяется по формуле (3.8):

$$P_{16}(12) \approx \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}} \varphi(x), \tag{3.9}$$

где $x = \dfrac{12 - 16 \cdot 0{,}9}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \dfrac{-2{,}4}{1{,}2} = -2$.

В силу четности функции Гаусса φ(–2) = φ(2). По таблице значений функции Гаусса (*см. Приложение А*) находим: φ(2) = 0,0540 . Подставляя найденное значении функции в (3.9), окончательно получаем

$$P_{16}(12) \approx \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}} \cdot 0{,}054 = \frac{1}{1{,}2} 0{,}054 = 0{,}045 .$$

Таким образом, искомая вероятность $P_{16}(12) = 0{,}045$.

3.2.4. *Интегральная теорема Лапласа*

В *примере 3.3* была рассмотрена задача определения наступления события не менее двух раз и не более трех раз в трёх опытах с помощью основных теорем теории вероятностей. Как видно из результата (3.6), решения данной задачи, её можно решить с помощью формулы Бернулли (3.7), применив её дважды. Кроме того, её можно приближенно решить и с помощью локальной теоремы Лапласа, также применив ее дважды. Решение задач рассматриваемого типа при n >> 1 можно значительно ускорить, если прибегнуть к *интегральной теореме Лапласа*.

Теорема 3.5 (*интегральная теорема Лапласа*). Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.10)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $q = 1 - p$;

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа табулирована (*см. Приложение В*). Это позволяет избежать интегрирования функции Гаусса по формуле (3.10), ограничиваясь вычислением аргументов функции x_1 и x_2 . Функция Лапласа – нечетная функция, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Поэтому таблица составлена только для положительных значений аргумента. Причем для диапазона значений аргумента от 0 до 5. При $x > 5$ функция Лапласа принимается равной 0,5 .

Пример 3.5. Пусть вероятность посещения студентом любой лекции по курсу "Теория вероятностей" одинакова и равна $p = 0{,}9$. Определить вероятность посещения студентом не менее 12 лекций из 16 запланированных в семестре.

Решение. В соответствии с *теоремой 3.5* вероятность посещения студентом не менее 12 лекций из 16 при вероятности посещения любой из них, равной 0,9 , определяется по формуле (3.10)

$$P_n(k_1,k_2) = P_{16}(12{,}16) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3.11}$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{12 - 16\cdot 0{,}9}{\sqrt{16\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \dfrac{-2{,}4}{1{,}2} = -2$;

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 16\cdot 0{,}9}{\sqrt{16\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{1{,}6}{1{,}2} = 1{,}33.$$

В силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-2) = -\Phi(2)$. По таблице значений функции Лапласа (*см. Приложение В*) находим: $\Phi(1{,}33) = 0{,}4082$, $\Phi(2) = 0{,}4772$. Подставляя найденные значения функции в (3.11), окончательно получаем

$$P_{16}(12{,}16) = \Phi(1{,}33) - \Phi(-2) = \Phi(1{,}33) + \Phi(2) = 0{,}4082 + 0{,}4772 = 0{,}8854 .$$

Таким образом, искомая вероятность $P_{16}(12{,}16) = 0{,}8854$.

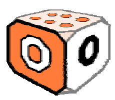
3.2.5. *Наивероятнейшее число наступления событий*

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может наступить событие A с одинаковой вероятностью p. В проводимых опытах событие A может не наступить ни разу (k=0), один раз (k=1), два раза (k=2) и так далее. С помощью формулы Бернулли при небольших n можно определить или с помощью локальной теоремы Лапласа при больших n можно оценить вероятность наступления события A в n независимых опытах ровно k раз. В табл. 3.1 приведены возможные значения величины k и соответствующие им вероятности $P_n(k)$.

Таблица 3.1

$\boldsymbol{k}$	0	1	...	k_0	...	n
$\boldsymbol{P_n(k)}$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	...	$P_n(k_0)$	...	$P_n(k)$

Среди множества чисел k, $k \in \{0,1,\ldots, n\}$, есть, по крайней мере, одно число k_0, которому соответствует максимальная вероятность $P_n(k)$.



Определение 3.2. Наивероятнейшим числом наступления события A в n независимых опытах при одинаковой вероятности наступления события A в каждом из них называется число k_0, которому соответствует максимальная вероятность $P_n(k)$, то есть число $k_0 = \arg\left(\max\limits_{k=\overline{1,n}}\{P(k)\}\right)$.

На практике часто возникает необходимость в определении числа k_0. Чтобы каждый раз при определении этого числа не строить таблицу, аналогичную табл. 3.1, следует пользоваться специально для этого предназначенным двойным неравенством

$$np - q \ \le\ k_0 \ \le\ np + p\,, \tag{3.12}$$

где p – вероятность наступления события A в одном опыте; $q = 1 - p$.

Как пользоваться двойным неравенством (3.12) ?

Прежде всего, отметим особенности этого неравенства:

- значение правой части превышает значение левой ровно на единицу;
- k_0 – целое число;
- внутри диапазона значений $[np - q;\ np + p]$ может находиться только одно целое число, либо два целых числа могут находиться на его границах.

Определение k_0 осуществляют в следующей последовательности:

- сначала определяют величину np, если np – целое число, то $k_0 = np$;
- затем определяют величину $np+p$,
  - если $(np + p)$ – целое число, то существует два наивероятнейших числа: $k_{01} = np + p$ и $k_{02} = k_{01} - 1$;
  - если $(np + p)$ – нецелое число, то k_0 – целое число в диапазоне $[np - q; np + p]$.

Пример 3.6. Каково наивероятнейшее число лекций, посещенных студентом из n=17 запланированных в семестре, если вероятность посещения каждой лекции p=0,8?

Решение. Вычисляем $np = 17*0,8 = 13,6$. Поскольку np – нецелое число, то согласно выше изложенной методике использования двойного неравенства (3.12) вычисляем $np+p = 13,6+0,8 = 14,4$. Поскольку $np+p$ – нецелое число, то согласно той же методике k_0 принадлежит диапазону $[np\text{-}q; np+p]$, или равно целой части величины $np+p$, т.е. $k_0 = 14$.

Пример 3.7. Каково наивероятнейшее число выпадения 6 очков в условиях эксперимента , если последний производится 11 раз ?

Решение. По условию примера общее число опытов $n = 11$, вероятность наступления события (выпадение шести очков) $p = \frac{1}{6}$. Как и в предыдущем примере, решение осуществляем в соответствии с выше изложенной методикой использования двойного неравенства (3.12). То есть сначала вычисляем $np = 11*\frac{1}{6} = \frac{11}{6}$. Далее, поскольку np – нецелое число, вычисляем $np + p = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} = 2$. Поскольку $np + p$ – целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $k_{01} = np + p = 2$; $k_{02} = np - q = k_{01} - 1 = 1$.

3.3. Практикум и вопросы для самоконтроля

3.1. Для какой цели используют формулу полной вероятности?

3.2. Привести формулу полной вероятности.

3.3. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

3.4. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 конькобежцев и 4 фигуриста. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника – 0,9; для конькобежца – 0,8; для фигуриста – 0,75. Найти вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен выполнит норму.

3.5. Каково назначение формулы Байеса?

3.6. Сформулировать теорему Байеса.

3.7. Какая связь существует между формулой Байеса и формулой полной вероятности?

3.8. Каково прикладное значение формулы Байеса?

3.9. В пирамиде десять винтовок, четыре из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без?

3.10. Имеется три набора деталей, из которых первый состоит из двух партий деталей по 6 стандартных и 4 нестандартных в каждой партии; второй – из четырёх партий по 2 стандартные и 8 нестандартных; третий – из трех партий по 10 стандартных и 12 нестандартных. Найти вероятность того

***а*)** что наудачу взятая деталь из наудачу взятой партии окажется стандартной;

***б*)** что деталь была взята из первого набора, если известно, что извлеченная деталь оказалась стандартной.

3.11. Батарея из трех орудий произвела залп, при этом 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало промах, если вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,4; для второго – 0,3; для третьего – 0,5.

3.12. Какие опыты являются независимыми?

3.13. Сформулировать теорему Бернулли.

3.14. При каком числе независимых опытов рекомендуется использовать формулу Бернулли?

3.15. Вероятность получения стипендии студентом равна 0,8 . Какова вероятность того, что студент будет получать стипендию в трех из шести оставшихся семестров?

3.16. Какова вероятность того, что в условиях эксперимента  при восьмикратном его повторении простое число очков выпадет ровно 5 раз?

3.17. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании $p = 0{,}4$.

3.18. Сформулировать локальную теорему Лапласа.

3.19. В чем принципиальное отличие теоремы Бернулли от локальной теоремы Лапласа?

3.20. Можно ли утверждать, что функция Гаусса является симметричной относительно оси ординат?

3.21. Чему равна функция Гаусса от аргумента –6,7?

3.22. Вероятность поражения мишени при одном выстреле постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

3.23. Сформулировать интегральную теорему Лапласа.

3.24. Каково назначение интегральной теоремы Лапласа?

3.25. Можно ли утверждать, что функция Лапласа имеет центральную симметрию относительно начала системы координат?

3.26. Чему равна функция Лапласа от аргумента –6,7?

3.27. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

***а*)** не менее 75 раз и не более 90 раз;

***б*)** не менее 75 раз;

***в*)** не более 74 раз;

***г*)** не более 75 раз.

3.28. Дать определение наивероятнейшему числу наступления событий.

3.29. Привести двойное неравенство для определения наивероятнейшего числа наступления событий.

3.30. Каковы особенности двойного неравенства для определения наивероятнейшего числа наступления событий?

3.31. В какой последовательности рекомендуется использовать двойное неравенство для определения наивероятнейшего числа наступления событий?

3.32. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попадания в цель:

***а*)** при 15 выстрелах;

***б*)** при 9 выстрелах;

***в*)** при 7 выстрелах.

4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Формы задания дискретных случайных величин

4.1.1. *Основные определения*

"Случайные величины" – это традиционно вторая обширная тема теории вероятностей, которая еще больше приближает обучающегося к миру случайных явлений и процессов.

Определение 4.1. *Случайной величиной* называют такую величину, которая в результате опыта принимает заранее неизвестное значение.

Примеры случайных величин:

- количество студентов, присутствующих на лекции;
- количество солнечных дней в году;
- вес осколка разорвавшегося снаряда;
- время ожидания общественного транспорта на остановке;
- температура окружающей среды.

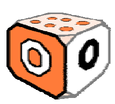
Случайные величины по типу пространства возможных значений делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 4.2. *Дискретной* называют случайную величину, возможные значения которой принадлежат счетному множеству – конечному или бесконечному.

Определение 4.3. *Непрерывной* называют случайную величину, возможные значения которой принадлежат непрерывному множеству – ограниченному или неограниченному.

Первые две случайные величины в приведенных выше примерах (количество студентов и количество солнечных дней) относятся к дискретным случайным величинам, а три последующие – к непрерывным. При этом дискретные величины – конечны и целочислены: первая меняется от нуля до общего числа студентов на потоке, вторая от 0 до 366 в високосном году или от 0 до 365 в не високосном году. Первые две непрерывные величины (вес осколка и время ожидания) ограничены с двух сторон: вес осколка ограничен снизу нулем, а сверху весом неразорвавшегося снаряда; время ожидания – снизу нулем, а сверху значением максимального временного интервала движения транспорта. Третья непрерывная величина (температура окружающей среды) ограничена только снизу значением абсолютного нуля $-273{,}2^{\circ}$C.

Для характеристики случайного события достаточно знать вероятность его наступления в результате опыта. Для характеристики же случайной величины, имеющей более двух возможных значений, этого недостаточно. Чтобы иметь исчерпывающую характеристику случайной величины, необходимо знать ее *закон распределения*.



Определение 4.4. *Закон распределения* случайной величины – это соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

4.1.2. *Формы задания закона распределения дискретной случайной величины*

В теории вероятностей различают несколько форм задания закона распределения дискретной случайной величины. На практике используются только две наиболее полезные:

- ряд распределения;
- интегральная функция распределения.

Рассмотрим последовательно каждую форму задания закона распределения дискретной случайной величины.

4.1.2.1. Ряд распределения

Ряд распределения является наиболее простой и понятной формой задания закона распределения дискретной случайной величины. Он представляет собой таблицу, состоящую из двух строк. В первой строке располагаются в порядке возрастания все возможные значения дискретной случайной величины. Во второй – соответствующие вероятности.

Общий вид ряда распределения соответствует табл. 4.1.

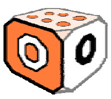
Таблица 4.1. Закон распределения в виде ряда распределения

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

В результате опыта дискретная случайная величина должна принять одно из возможных значений. Поскольку все возможные значения можно рассматривать как полную группу несовместных событий, то сумма соответствующих вероятностей обязательно должна быть равна единице (условие нормировки)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4.1}$$

4.1.2.2. Интегральная функция распределения



Определение 4.5. *Интегральная функция распределения* случайной величины X – это функция $F(x)$, которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X окажется меньше, чем значение аргумента x, т.е.

$$F(x) = P\ \{\ X < x\ \}\ .$$

Интегральная функция обладает тремя *свойствами*:

•***1-е свойство.*** Интегральная функция от аргумента "минус бесконечность" равна нулю:

$$F(-\infty) = 0\ .$$

•***2-е свойство.*** Интегральная функция от аргумента "плюс бесконечность" равна единице:

$$F(\infty) = 1\ .$$

•***3-е свойство.*** Интегральная функция – неубывающая функция:

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } F(x_2) \geq F(x_1) .$$

4.1.3. *Пример построения закона распределения*

Рассмотрим построение закона распределения в виде ряда распределения и в виде интегральной функции на конкретном примере.

Пример 4.1. Построить закон распределения случайной величины X – количества домов, сданных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9 .

Решение. Случайная величина X – количество домов, сданных в эксплуатацию в срок, может принимать значения 0, 1, 2 или 3. По условию примера общее число строящихся домов (число опытов) $n = 3$, вероятность построить каждый дом в срок (наступления события A в одном опыте) $p = 0{,}9$. Тогда вероятности p_i $(i = 0{,}1{,}2{,}3)$ – вероятности того, что из 3 строящихся домов в срок будут сдано ровно 0, 1, 2 или 3 дома, легко определяются с помощью формулы Бернулли:

$$p_0 = P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 (1-p)^{3-0} = 1*0{,}9^0*(1-0{,}9)^{3-0} = 0{,}001;$$

$$p_1 = P(X=1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 (1-p)^{3-1} = 1*0{,}9^1*(1-0{,}9)^{3-1} = 0{,}027;$$

$$p_2 = P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = 1*0{,}9^2*(1-0{,}9)^{3-2} = 0{,}243;$$

$$p_3 = P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 (1-p)^{3-3} = 1*0{,}9^3*(1-0{,}9)^{3-3} = 0{,}729.$$

Полученные вероятности позволяют сформировать ряд распределения (табл. 4.2) и построить интегральную функцию случайной величины X (рис. 4.1).

Таблица 4.2. Ряд распределения случайной величины X в условиях примера 4.1

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	**0,001**	**0,027**	**0,243**	**0,729**

Следует обратить внимание на равенство единице суммы значений вероятностей во второй строке ряда распределения. Такое равенство обязательно. Оно находится в полном соответствии с формулой (4.1) и служит критерием правильности построения закона распределения.

Ряд распределения случайной величины в силу своей табличной природы не обладает наглядностью. Кроме того, по ряду распределения довольно трудно определять и соизмерять вероятности попадания случайной величины в заданный диапазон значений. Этих недостатков лишена интегральная функция распределения случайной величины, представленная в виде графика.

Прежде чем перейти к построению графика интегральной функции, следует сначала получить ее аналитическую запись, которая складывается из частных записей для каждого из (n+1)-го диапазона, на которые разбивается бесконечная числовая ось возможными значениями случайной величины X, где n – общее число возможных значений случайной величины. В условиях примера $n = 4$ (возможные значения: 0, 1, 2 или 3). Следовательно, число диапазонов равно 5.

Аналитическую запись интегральной функции случайной величины X представим в виде таблицы.

Таблица 4.3. Таблично-аналитическое представление интегральной функции распределения случайной величины X в условиях примера 4.1

Индекс диапазона i	**Диапазон $x^{(i)}$**	**Значения интегральной функции $F(x^{(i)})$**
0	$x^{(0)} \le 0$	$F(x^{(0)}) = P\{X<x^{(0)}\}= 0$
1	$0 < x^{(1)} \le 1$	$F(x^{(1)}) = P\{X<x^{(1)}\}= P(X=0) = 0{,}001$
2	$1 < x^{(2)} \le 2$	$F(x^{(2)}) = P\{X<x^{(2)}\}= P(X=0) + P(X=1) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$
3	$2 < x^{(3)} \le 3$	$F(x^{(3)}) = P\{X<x^{(3)}\}= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 = 0{,}271$
4	$x^{(4)} > 3$	$F(x^{(4)}) = P\{X<x^{(4)}\} =$ $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1$

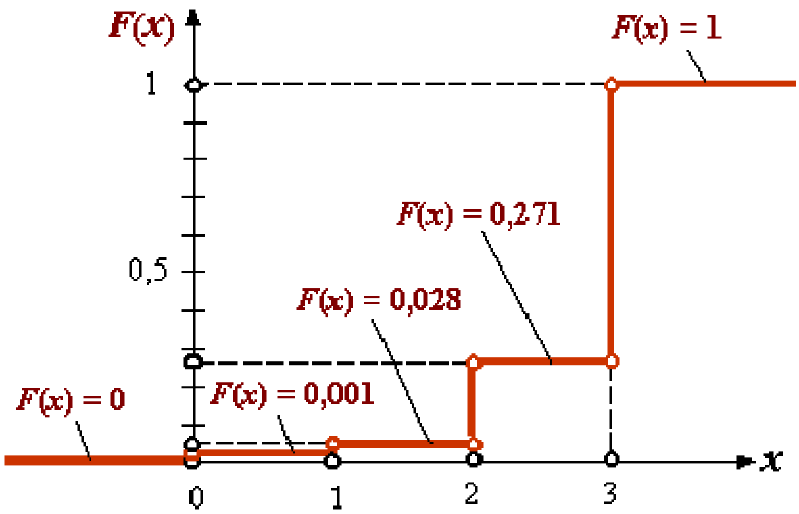


Рис.4.1

На рис. 4.1 изображен график интегральной функции распределения, построенный в соответствии с её таблично-аналитической записью в табл. 4.3. Как видно из рисунка, графиком функции дискретной случайной величины является ступенчатая непрерывная линия, определенная на всей числовой оси x. Функция $F(x)$ изменяется от 0 до 1. Она либо сохраняет свое значение на каждом i-м диапазоне изменения аргумента x, либо скачкообразно увеличивается в точках, соответствующих возможным значениям дискретной случайной величины, т.е. в точках, разделяющих диапазоны.

4.1.4. *Вероятность попадания случайной величины на заданный участок*

На практике при исследовании случайных величин довольно часто возникает задача определения вероятности попадания значений некоторой случайной величины X на заданный участок $[a,b)$, т.е. вероятности $P\{a \le X < b\}$. Такая вероятность легко определяется с помощью интегральной функции.

Введем обозначения:

A – событие, которое заключается в том, что $X < a$;

B – событие, которое заключается в том, что $X < b$;

C – событие, которое заключается в том, что $a \le X < b$.

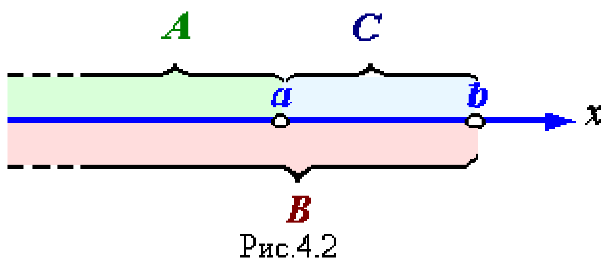


Рис.4.2

Сложное случайное событие B представляет собой сумму событий A и C (см. рис. 4.2): $B = A + C$.

Поскольку события A и C являются несовместными, то

$$P(B) = P(A) + P(C).$$

Откуда

$$P(C) = P(B) - P(A) = P\{X < b\} - P\{X < a\}.$$

По определению интегральной функции $P\{X<b\} = F(b)$, $P\{X<a\} = F(a)$. Следовательно,

$$P(C) = F(b) - F(a).$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины на заданный участок определяется по формуле

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \tag{4.2}$$

Пример 4.2. В условиях примера 4.1 определить вероятность попадания случайной величины X на участок [2,5; 3,5), т.е. вероятность $P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\}$.

Решение. В данном случае левая граница участка $a = 2{,}5$, а правая $b = 3{,}5$. Подставляя в формулу (4.2) значения аргумента интегральной функции и вычисляя значения интегральной функции на границах заданного участка, получаем искомый результат:

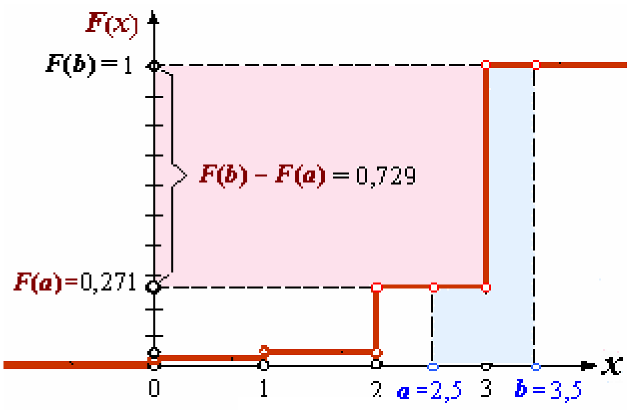


Рис. 4.3

$$P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\} = F(b) - F(a) =$$
$$= F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - 0{,}271 = 0{,}729.$$

Искомая вероятность и значения интегральной функции $F(x)$ в условиях примера легко определяются по графику интегральной функции (см. рис. 4.3).

4.2. Формы задания непрерывной случайной величины и её свойства

В теории вероятностей рассматриваются две формы задания закона распределения непрерывной случайной величины.

– интегральная функция распределения вероятности;
– плотность распределения вероятности.

Обе формы абсолютно равноправны. Первая характеризует распределение вероятностей в зависимости от диапазона значений непрерывной случайной величины, а вторая – от конкретных значений.

Рассмотрим последовательно каждую форму задания непрерывной случайной величины.

4.2.1. *Интегральная функция распределения*

Интегральная функция распределения вероятности – это универсальная форма задания случайных величин. С её помощью можно задать закон распределения как дискретной случайной величины, так и непрерывной.

Интегральную функцию непрерывной случайной величины легко представить как график интегральной функции произвольной дискретной случайной величины, у которой число дискретных значений стремится к бесконечности. На рис. 4.4 показан условный процесс превращения интегральной функции дискретной случайной величины в интегральную функцию непрерывной при последовательном дроблении диапазонов задания функции пополам, т.е. при увеличении количества значений дискретной величины в 2 раза.

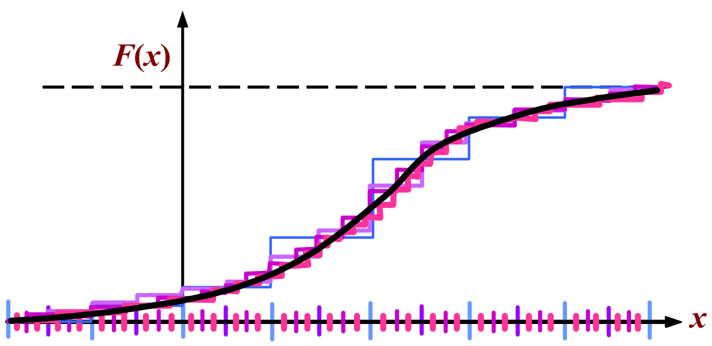


Рис. 4.4

Интегральная функция непрерывной случайной величины сохраняет все свойства интегральной функции дискретной случайной величины. Напомним их еще раз:

1-е свойство. Интегральная функция от аргумента "минус бесконечность" равна нулю: $F(-\infty) = 0$.

2-е свойство. Интегральная функция от аргумента "плюс бесконечность" равна единице: $F(\infty) = 1$.

3-е свойство. Интегральная функция – неубывающая функция: если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Для интегральной функции случайной непрерывной величины также справедлива формула (4.2), позволяющая вычислять вероятность попадания значений случайной величины на заданный участок $[a,b)$. На рис. 4.5 дана графическая интерпретация процессу определения вероятности $P\{a \leq X < b\}$.

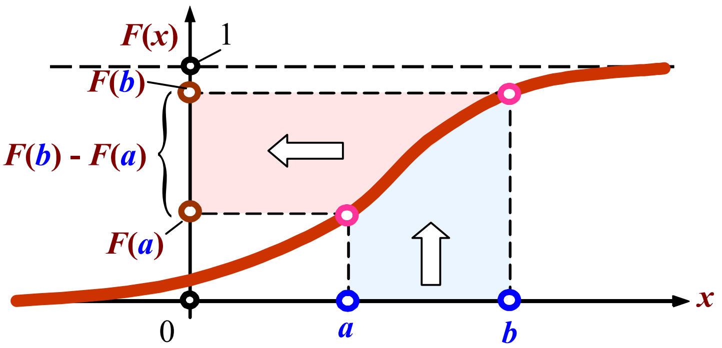


Рис. 4.5

4.2.2. *Вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины*

Вероятность любого конкретного значения a непрерывной случайной величины X можно определить с помощью формулы (4.2) – как вероятность попадания X на некоторый участок $[a,b)$ при левой границе b, стремящейся к значению a:

$$P(X = a) = \lim_{b \to a} P\{a \leq X < b\} = \lim_{b \to a}[F(b) - F(a)] = F(a) - F(a) = 0,$$

т.е.

$$P(X{=}a) = 0. \tag{4.3}$$

Равенство вероятности конкретного значения непрерывной случайной величины нулю (4.3) делает интегральную функцию $F(x)$ бесполезной для характеристики отдельных значений непрерывной случайной величины. Чтобы исследователи могли сравнивать отдельные значения непрерывной случайной величины с точки зрения их вероятностного появления в результате опыта, используется другая форма задания закона распределения этой величины – *плотность распределения вероятности.*

4.2.3. *Плотность распределения вероятности*

Интегральная функция распределения вероятности по определению 4.5 равна вероятности попадания значений случайной величины X в диапазон значений от минус бесконечности до аргумента x, т.е. интегральная функция характеризует бесконечный интервал значений ($-\infty$, x). Интегральная функция, согласно формуле (4.2), также позволяет определить вероятность попадания значений случайной величины на заданный участок $[a,b)$, произвольно выбранный на числовой оси. Однако наряду с функцией, характеризующей диапазоны значений непрерывной случайной величины, представляет интерес и функция, которая способна характеризовать каждое значение непрерывной величины. Такой функцией является плотность распределения вероятности.

Функция плотности распределения вероятности $f(x)$ представляет собой предел отношения вероятности попадания непрерывной случайной величины на малый участок $[x,x+\Delta x)$, к длине этого участка Δx:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < (x+\Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Определение 4.6. Плотностью распределения вероятности непрерывной случайной величины называется функция $f(x)$, которая является первой производной от интегральной функции распределения вероятности $F(x)$

$$f(x) = F'(x). \tag{4.4}$$

Выражение (4.4) позволяет по известной интегральной функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины определить функцию плотности распределения $f(x)$. Не менее важным является обратное преобразование

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \tag{4.5}$$

которое позволяет по известной функции плотности распределения $f(t)$ получить интегральную функцию распределения (первообразную) $F(x)$.

4.2.4. *Свойства плотности распределения вероятности*

Плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины наследует все свойства интегральной функции распределения $F(x)$. При этом два первых свойства интегральной функции $F(x)$ трансформируются в одно свойство плотности распределения.

1-е свойство. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{4.6}$$

Обоснование свойство получает путем взятия определенного интеграла от плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1\,.$$

Здесь $F(-\infty) = 0$ есть первое свойство интегральной функции, а $F(\infty) = 1$ – второе.

Геометрический смысл равенства (4.6) заключается в равенстве единице площади, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью абсцисс.

2-е свойство. Плотность распределения – функция неотрицательная:

$$f(x) \geq 0\,. \tag{4.7}$$

Данное свойство плотности распределения вероятности вытекает из третьего свойства интегральной функции: производная от неубывающей функции не может быть отрицательной.

4.2.5. *Вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок*

Вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок $[a,b)$ может быть определена по универсальной формуле (4.2):

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) \ .$$

Альтернативную формулу для определения этой же вероятности можно получить из (4.2) с помощью обратного преобразования (4.5):

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ .$$

После сокращения в последнем выражении подобных членов окончательно получаем

$$P\{a \le X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx \ . \tag{4.8}$$

На рис. 4.6 дана графическая интерпретация вероятности попадания непрерывной случайной величины на участок $[a,b)$. Численно значение такой вероятности равно площади заштрихованной области.

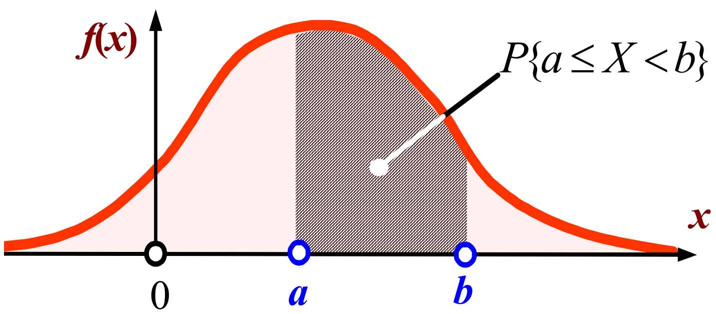


Рис. 4.6

4.3. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики случайных величин количественно определяют различные свойства случайных величин. Они позволяет проводить сравнительный анализ случайных величин, давать оценку ожидаемым результатам опыта, находить связь и определять зависимость между различными случайными величинами и многое другое. Довольно часто знание числовых характеристик дает исследователям возможность решать задачи со случайными величинами, не зная закона их распределения. Более того, для многих стохастических задач целью их решения является определение той или иной числовой характеристики.

Числовые характеристики случайных величин – это не случайные величины. Каждая числовая характеристика имеет определенное значение, которое не зависит ни от результата конкретного опыта, ни от числа проведенных опытов.

Наиболее важные числовые характеристики являются предметом рассмотрения данного раздела.

4.3.1. *Характеристики положения случайной величины на числовой оси*

К числовым характеристикам положения случайной величины на числовой оси относятся:

- математическое ожидание;
- мода;
- медиана.

4.3.1.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание случайной величины является наиболее важной её числовой характеристикой. Подавляющая часть всех других числовых характеристик случайной величины непосредственно связана с её математическим ожиданием.

Математическое ожидание случайной величины будем обозначать как m_x или $M[X]$. Оба обозначения равноправны. В дальнейшем будем пользоваться обоими обозначениями.

Определение 4.7. Математическое ожидание – это средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.

Математическое ожидание характеризует смещение значений случайной величины на числовой оси x относительно начала координат.

Математическое ожидание *дискретной* случайной величины определяется по формуле

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad , \tag{4.9}$$

где n – общее число возможных значений случайной величины, x_i и p_i – возможное значение дискретной случайной величины и соответствующая вероятность, $i = \overline{1, n}$.

Математическое ожидание *непрерывной* случайной величины определяется по формуле

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \quad , \tag{4.10}$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины.

На рис. 4.7 показаны две непрерывные случайные величины, заданные в виде плотности распределения и отличающиеся друг от друга математическими ожиданиями ($m_{x2} > m_{x1}$).

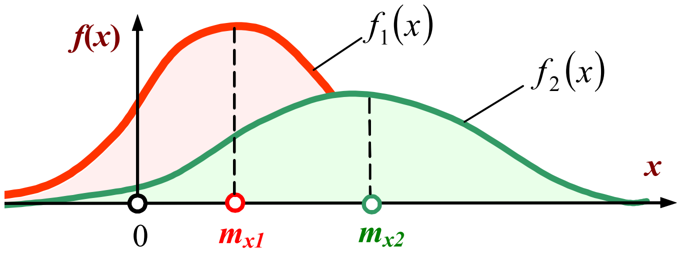
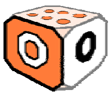


Рис. 4.7

4.3.1.2. Мода

Для обозначения наиболее вероятного значения случайной величины используют, так называемую, *моду*. Обозначается мода случайной величины символом m или M. В дальнейшем будем пользоваться обозначением m.



Определение 4.8. Модой называют наиболее вероятное значение случайной величины.

Мода m дискретной случайной величины равна такому её значению x_m, которому соответствует максимальная вероятность $p_m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{p_i\}$.

Мода m непрерывной случайной величины равна такому значению аргумента x_m функции плотности распределения $f(x)$, при котором $f(x_m) = \max f(x)$.

На рис. 4.8 показана мода непрерывной унимодальной (с одной модой) случайной величины, заданной плотностью распределения.

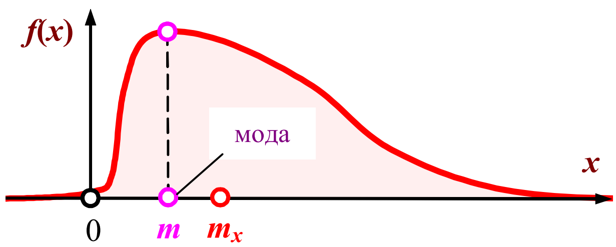


Рис. 4.8

Кроме унимодальных распределений случайных величин, различают *полимодальные* (рис. 4.9, *а*), *антимодальные* (рис. 4.9, *б*) и *безмодальные* (рис. 4.9, *в*).

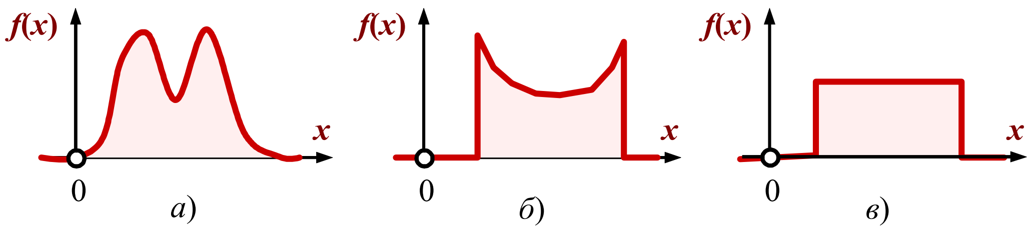


Рис. 4.9

4.3.1.3. Медиана

Непрерывные случайные величины, кроме математического ожидания m_x и моды m, имеют ещё одну характеристику положения на числовой оси – *медиану*. Эта характеристика обозначается как Me.

Определение 4.9. Медианой называют такое значение *Me* случайной величины, для которого справедливо равенство $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$.

Перпендикуляр к числовой оси, проходящий через медиану, делит площадь ограниченную графиком плотности распределения $f(x)$ и числовой осью x, на две равные части по 0,5 (рис. 4.10).

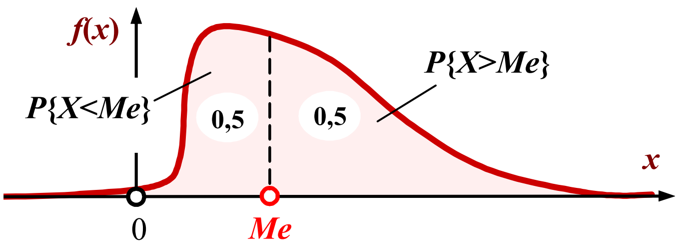


Рис. 4.10

Для симметричного унимодального закона распределения случайной величины значения математического ожидания, моды и медианы совпадают.

4.3.2. Моменты случайных величин

Для характеристики различных свойств случайных величин используются начальные и центральные моменты.

4.3.2.1. Начальные моменты

Определение 4.10. ***Начальным моментом k-го порядка*** $\boldsymbol{\alpha_k}$ называют математическое ожидание *k*–й степени случайной величины $\alpha_k = M\left[X^k\right]$.

Для дискретной случайной величины k–й начальный момент определяется по формуле

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i . \qquad (4.11)$$

Для непрерывной случайной величины k–й начальный момент определяется по формуле

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx . \qquad (4.12)$$

4.3.2.2. Центральные моменты

Определение 4.11. Отклонение случайной величины от её математического ожидания ($X - m_x$) называют ***центрированной случайной величиной***.

Определение 4.12. ***Центральным моментом s-го порядка μ_s*** называют математическое ожидание s–й степени центрированной случайной величины $\mu_s = M[(X\text{-}m_x)^s]$.

Для дискретной случайной величины s–й центральный момент определяется по формуле

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i . \qquad (4.13)$$

Для непрерывной случайной величины s–й центральный момент определяется по формуле

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)\, dx . \qquad (4.14)$$

4.3.3. Свойства моментов случайных величин

Особого внимания заслуживают свойства начальных и центральных моментов первого и второго порядков. Рассмотрим каждое из этих свойств.

4.3.3.1. Первый начальный момент

Начальный момент 1-го порядка α_1 случайной величины представляет собой её математическое ожидание: $\alpha_1 = M[X^1] = m_x$.

4.3.3.2. Первый центральный момент

Центральный момент 1-го порядка μ_1 любой случайной величины равен нулю. Следующие преобразования первого центрального момента дискретной случайной величины подтверждают сказанное:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} m_x p_i = m_x - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0 \ .$$

Аналогичный результат дают преобразования для непрерывной случайной величины:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} m_x f(x)\,dx =$$

$$= m_x - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = m_x - m_x = 0\,.$$

Первый центральный момент на практике не используется, поскольку ничего характеризовать не может.

4.3.3.3. Второй начальный момент

Начальный момент 2-го порядка α_2 случайной величины характеризует степень разброса случайной величины, а также смещение случайной величины на числовой оси относительно начала координат.

Второй начальный момент дискретной случайной величины определяется по формуле

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \ . \tag{4.15}$$

Второй начальный момент непрерывной случайной величины определяется по формуле

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \ . \qquad (4.16)$$

В силу того, что второй начальный момент характеризует сразу два свойства случайной величины, он как самостоятельная числовая характеристика не используется. Тем не менее, он имеет большое значение для определения других числовых характеристик, о чем будет говориться в подразделе 4.3.3.5.

4.3.3.4. Второй центральный момент

Центральный момент 2-го порядка μ_2 характеризует степень разброса случайной величины вокруг её математического ожидания. Данная числовая характеристика имеет еще другое название – *дисперсия*. Дисперсия – более распространенный термин, обозначается как D_x .

Поскольку дисперсия характеризует только разброс случайной величины, она представляет собой по сравнению со вторым начальным моментом более важную числовую характеристику.

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$D_x = \mu_2 = M\left[(X - m_x)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \ . \qquad (4.17)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$D_x = \mu_2 = M\left[(X - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx \ . \qquad (4.18)$$

На рис. 4.11 показаны две непрерывные случайные величины, заданные в виде плотности распределения с одинаковыми математическими ожиданиями (m_{x2} = m_{x1}=m_x) и отличающиеся друг от друга своей дисперсией ($D_{x2} > D_{x1}$).

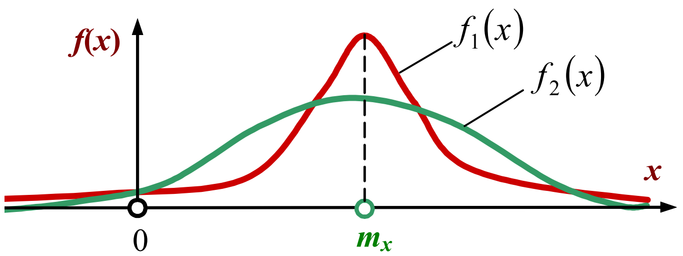


Рис. 4.11

4.3.3.5. Связь дисперсии с начальными моментами

Определение дисперсии D_x для непрерывных случайных величин связано с трудоемкими вычислениями определенных интегралов. На практике дисперсию вычисляют с помощью второго начального момента α_2 и математического ожидания (первого начального момента) m_x. Следующие математические преобразования устанавливают связь дисперсии с начальными моментами:

$$D_x = M\left[(X - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2m_x \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + m_x{}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx .$$

В полученном выражении первый интеграл равен второму начальному моменту: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \alpha_2$; второй интеграл – математическому ожиданию: $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = m_x$; третий – единице (1-е свойство плотности распределения): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Заменяя интегралы указанными выражениями, получим $D_x = \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2 - m_x^2$.

Таким образом, для вычисления дисперсии случайных величин используют формулу

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 \ . \tag{4.19}$$

4.3.4. Среднее квадратичное отклонение

Дисперсия измеряется в квадратных единицах по сравнению с единицами измерения самой случайной величины. Такое различие причиняет неудобства при анализе дисперсионных свойств случайной величины. Это связано с тем, что рядовому исследователю проще сравнивать линейные размеры. Чтобы единицы измерения числовой характеристики разброса случайной величины привести к линейным, вместо дисперсии используют *среднее квадратичное отклонение*.

Определение 4.13. ***Среднее квадратичное отклонение*** представляет собой квадратный корень из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \; . \tag{4.20}$$

Ошибка измерения представляет собой среднее квадратичное отклонение измеренной величины.

4.3.5. Моменты высоких порядков

Для анализа случайных величин имеют значение и моменты более высоких порядков. Особого внимания заслуживают третий и четвертый центральные моменты.

4.3.5.1. Третий центральный момент и коэффициент асимметрии

Третий центральный момент характеризует степень разброса случайной величины вокруг математического ожидания, а также степень асимметрии её закона распределения.

Третий центральный момент дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i \; . \tag{4.21}$$

Третий центральный момент непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x)\, dx \; . \tag{4.22}$$

В случае симметричного закона распределения $\mu_3 = 0$.

Для характеристики только степени асимметрии используется коэффициент асимметрии $s = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. В случае симметричного закона распределения коэффициент асимметрии также равен нулю.

На рис. 4.12 показаны две непрерывные случайные величины, заданные в виде плотности распределения, с разными по знаку коэффициентами асимметрии.

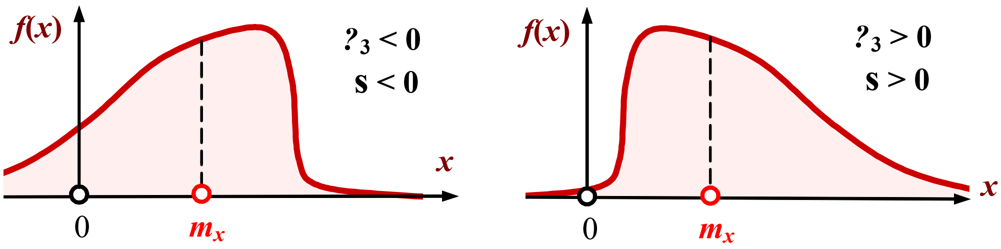


Рис. 4.12

4.3.5.2. Четвертый центральный момент и величина эксцесс

Четвертый центральный момент характеризует степень разброса случайной величины вокруг математического ожидания, а также степень островершинности её закона распределения.

Четвертый центральный момент дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$\mu_4 = M\left[(X - m_x)^4\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^4 p_i \ . \qquad (4.23)$$

Четвертый центральный момент непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$\mu_4 = M\left[(X - m_x)^4\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^4 f(x)\,dx \ . \qquad (4.24)$$

Для характеристики только степени островершинности закона распределения используется величина эксцесс: $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. В случае *нормального* закона распределения случайной величины эксцесс равен нулю (E = 0) . Более подробно нормальный закон распределения будет рассмотрен в подразделе 5.2.3.

На рис. 4.13 показаны три непрерывные случайные величины, заданные в виде плотности распределения, с разной величиной E. При этом первая случайная величина распределена по нормальному закону с E_1 = 0, вторая – с $E_2 > 0$, третья – с $E_3 < 0$.

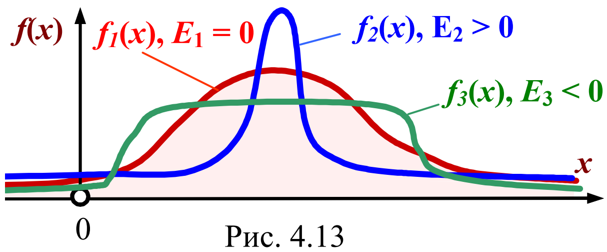


Рис. 4.13

4.4. Практикум и вопросы для самоконтроля

4.1. Какую величину называют случайной?

4.2. Какие случайные величины называются дискретными?

4.3. Какие случайные величины называются непрерывными?

4.4. Дайте определение закону распределения случайной величины.

4.5. Какие существуют формы задания закона распределения дискретной случайной величины?

4.6. Что собой представляет ряд распределения дискретной случайной величины?

4.7. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «орла» при двух бросаниях монеты.

4.8. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить ряд распределения для случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

4.9. Дать определения интегральной функции распределения случайной величины.

4.10. Каковы свойства интегральной функции распределения?

4.11. Производится один опыт, в результате которого может появиться событие A; вероятность появления события A равна p. Рассматривается случайная величина X, равная единице, если событие A происходит, и нулю, если не происходит (число появлений события A в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины X и её интегральную функцию распределения.

4.12. Привести формулу определения вероятности попадания случайной величины на заданный участок числовой оси с помощью интегральной функции распределения.

4.13. Какие существуют формы задания закона распределения непрерывной случайной величины?

4.14. В чем заключается основное отличие интегральной функции дискретной случайной величины от интегральной функции непрерывной случайной величины?

4.15. Чему равна вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины?

4.16. Дать определение функции плотности распределения вероятности.

4.17. Привести формулу обратного преобразования, позволяющего по известной плотности распределения получить интегральную функцию распределения.

4.18. В чем заключается первое свойство плотности распределения?

4.19. В чем заключается второе свойство плотности распределения?

4.20. Привести формулу определения вероятности попадания непрерывной случайной величины на заданный участок числовой оси с помощью функции плотности распределения.

4.21. Дать геометрическую интерпретацию вероятности попадания непрерывной случайной величины на заданный участок числовой оси.

4.22. Какие числовые характеристики случайной величины определяют её положение на числовой оси?

4.23. Дать определение математическому ожиданию случайной величины.

4.24. Что характеризует математическое ожидание случайной величины?

4.25. Привести определяющую формулу математического ожидания для дискретной случайной величины.

4.26. Привести определяющую формулу математического ожидания для непрерывной случайной величины.

4.27. Дать определение моде случайной величины.

4.28. Дать определение медиане случайной величины.

4.29. Для симметричного унимодального закона распределения случайной величины значения математического ожидания, моды и медианы совпадают. Справедливо ли обратное утверждение?

4.30. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4 .Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трех опытах. Построить ряд распределения и интегральную функцию распределения случайной величины X. Найти её математическое ожидание m_x и моду.

4.31. Дать определение начальным моментам случайных величин.

4.32. Привести определяющую формулу начального момента для дискретной случайной величины.

4.33. Привести определяющую формулу начального момента для непрерывной случайной величины.

4.34. Что называют центрированной случайной величиной?

4.35. Дать определение центральному моменту случайной величины.

4.36. Привести определяющую формулу центрального момента для дискретной случайной величины.

4.37. Привести определяющую формулу центрального момента для непрерывной случайной величины.

4.38. Поставить знак отношения между первым начальным моментом случайной величины и её математическим ожиданием.

4.39. Для непрерывной случайной величины X найти сумму вероятностей

$$P(X{=}0{,}5) + P(X{=}0{,}55) + P(X{=}0{,}555)\ .$$

4.40. Что характеризует второй начальный момент?

4.41. Привести определяющую формулу второго начального момента для дискретной случайной величины.

4.42. Привести определяющую формулу второго начального момента для непрерывной случайной величины.

4.43. Какую роль играет второй начальный момент в исследовании случайных величин?

4.44. Что характеризует второй центральный момент?

4.45. Поставить знак отношения между вторым центральным моментом случайной величины и её дисперсией.

4.46. Выразить дисперсию через начальные моменты.

4.47. Что представляет собой среднее квадратичное отклонение?

4.48. Что характеризует среднее квадратичное отклонение?

4.49. В условиях упражнения **4.30** определить второй начальный момент α_2, дисперсию D_x, среднее квадратичное отклонение σ_x.

4.50. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1=0,7, для второго – p_1=0,6. Рассматриваются случайные величины: X_1 – число попаданий первого стрелка; X_2 – число попаданий второго стрелка и их разность $X=X_1-X_2$. Найти закон распределения случайной величины X в виде ряда распределения и в виде интегральной функции распределения $F(x)$. Построить график функции $F(x)$. Определить математическое ожидание m_x, дисперсию, среднее квадратичное отклонение σ_x и вероятность попадания случайной величины X на заданный участок $P\{-0{,}5<X<0{,}5\}$.

Решение. Построим сначала ряды распределения для случайных величин X_1 и X_2:

x_{1i}	0	1
p_{1i}	0,3	0,7

,

x_{2i}	0	1
p_{2i}	0,4	0,6

.

В построенных законах распределения вероятности промахов определяются как вероятности противоположных событий, соответственно: $q_1=1-p_1=1-07=0{,}3$; $q_2=1-p_2=1-0{,}6=0{,}4$. Полученные ряды распределения позволяют построить ряд распределения для случайной величины $X=X_1-X_2$.

Определим сначала возможные значения случайной величины X и соответствующие вероятности:

если $X_1=0$ и $X_2=1$, то $X=-1$, а вероятность такого результата $q_1{*}p_2 = 0{,}18$;

если $X_1=0$ и $X_2=0$ или $X_1=1$ и $X_2=1$, то $X=0$, а вероятность такого результата $q_1{*}q_2 + p_1{*}p_2 = 0{,}54$;

если $X_1=1$ и $X_2=0$, то $X=1$, а вероятность такого результата $q_1{*}p_2 = 0{,}28$.

Искомый ряд распределения:

x_i	−1	0	1
p_i	0,18	0,54	0,28

.

Примечание. Для контроля правильности построения закона распределения случайной величины X следует проверить равенство единице суммы вероятностей во второй строке ряда распределения.

Ряд распределения позволяет определить интегральную функцию распределения. В условиях задачи определение интегральной функции соответствует табл. 4.2

Таблица 4.2. Интегральная функция случайной величины X

Индекс диапазона	Диапазон x	Вычисление $F(x)$
1	$x<-1$	$F(x) = P\{X<x\} = 0$
2	$-1 \le x<0$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X = -1) = 0{,}18$
3	$0 \le x<1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X = -1) + P(X=0) = 0{,}18 +$ $+ 0{,}54 = 0{,}72$
4	$x > 1$	$F(x) = P\{X<x\}= P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) =$ $= 0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$

График функции строится в соответствии с ее табличным заданием, т.е. в соответствии с табл. 4.2 (см. рис. 4.14)

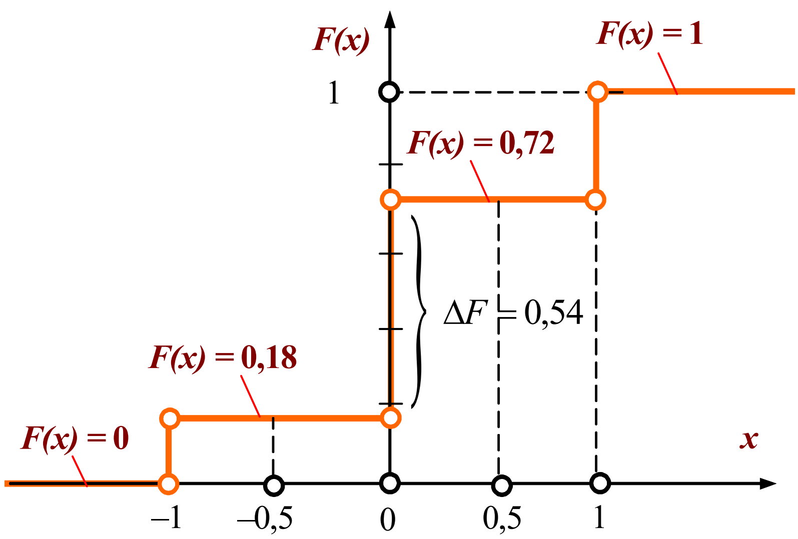


Рис. 4.14

Математическое ожидание случайной величины определим по формуле (4.9)

$$m_x = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-1)\cdot 0{,}18 + 0\cdot 0{,}54 + 1\cdot 0{,}28 = 0{,}1.$$

Для определения дисперсии D_x предварительно определим второй начальный момент α_2 по формуле (4.15)

$$\alpha_2 = \sum_{i-1}^{3} x_i^2 p_i = (-1)^2\cdot 0{,}18 + 0^2\cdot 0{,}54 + 1^2\cdot 0{,}28 = 0{,}46$$

Теперь с помощью формулы связи (4.19) определим дисперсию

$$D_x = б_2 - m_x^2 = 0{,}46 - (0{,}1)^2 = 0{,}45\,.$$

По формуле (4.20) найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67\,.$$

Вероятность $P\{-0{,}5<X< 0{,}5\}$ определим по формуле (4.2):

$$P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = 0{,}72 - 0{,}18 = 0{,}54\,.$$

Данную операцию целесообразно осуществлять с помощью графика $F(x)$ (см. рис. 4.14).

4.51. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1]; \\ ax, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Найти: $F(x)$, m_x, D_x, σ_x, Me, $P\{0<X< 0{,}5\}$.

Решение. Прежде чем вычислять искомые величины, необходимо определить параметр a в заданной плотности распределения $f(x)$. Для определения параметра воспользуемся 1-м свойством плотности распределения, согласно которому определенный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице. Возьмём сначала интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} ax\cdot dx + \int_{1}^{\infty} 0\cdot dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}\,.$$

Затем приравняем результат интегрирования единице: $\frac{a}{2}=1$. Отсюда a = 2. Итоговое выражение для плотности распределения имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,1];\\ 2x, & x\in[0,1].\end{cases}$ График $f(x)$ показан на рис. 4.15.

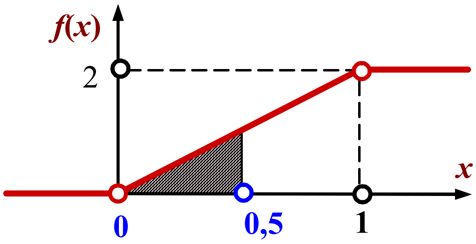


Рис. 4.15

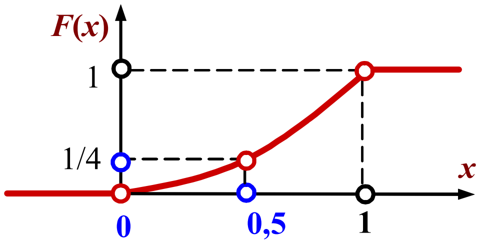


Рис. 4.16

Для определения интегральной функции воспользуемся обратным преобразованием (4.5). Поскольку плотность распределения является кусочно-непрерывной функцией, имеющей три диапазона с различным видом подынтегральной функции, то обратным преобразованием следует воспользоваться три раза:

для диапазона $x\le 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dx=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0;$$

для диапазона $0<x\le 1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{x} 2t\cdot dt=0+t^2\Big|_0^x=x^2;$$

для диапазона $x>1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{1} 2t\cdot dt+\int_{1}^{x} 0\cdot dt=0+t^2\Big|_0^1+0=1.$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0;\\ x^2, & \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ 1, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$

На рис. 4.16 построен график интегральной функции $F(x)$.

Для определения математического ожидания воспользуемся формулой (4.10)

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2 dx + 0 = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

С целью дальнейшего определения дисперсии D_x определим сначала второй начальный момент:

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^3 dx + 0 = \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Используя формулу (4.19), связывающую дисперсию с начальными моментами, определим D_x :

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} .$$

По формуле (4.20) найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6} .$$

По определению медианы $P\{X<Me\} = P\{X>Me\}$, но $P\{X<Me\} = F(Me) = 0{,}5$. Следовательно, медиану можно найти из уравнения $F(Me) = 0{,}5$, что мы и сделаем:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5 ;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 2x dx = 0{,}5 ;$$

$$\left. x^2 \right|_0^{Me} = 0{,}5 ;$$

$$(Me)^2 = 0{,}5 ;$$

$$Me \approx 0{,}71 .$$

Последнюю искомую величину $P\{0<X< 0{,}5\}$ определим двумя способами:

$$P\{0 \le X < 0{,}5\} = \begin{cases} F(b) - F(a) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \dfrac{1}{4}; \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}5} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{0{,}5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Найденной вероятности на рис. 4.15 соответствует площадь заштрихованной области. Задача решена.

4.52. Что характеризует третий центральный момент?

4.53. Привести определяющую формулу третьего центрального момента для дискретной случайной величины.

4.54. Привести определяющую формулу третьего центрального момента для непрерывной случайной величины.

4.55. Что характеризует и как определяется коэффициент асимметрии?

4.56. В условиях упражнения **4.30** определить третий центральный момент μ_3.

4.57. Что характеризует четвертый центральный момент?

4.58. Как определяется величина эксцесс и что она характеризует?

5. ЧАСТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1. Законы распределения дискретных случайных величин

Сколько существует различных дискретных случайных величин, столько существует и законов их распределения. Из всего многообразия дискретных случайных величин выделяют две большие группы. Каждая группа объединяет случайные величины, имеющие закон распределения, характерный только для этой группы. Вероятности конкретных значений таких случайных величин вычисляются по одной и той же формуле. Отличие случайных величин, входящих в одну группу, определяется различными значениями ключевых компонент в определяющих формулах. Ключевые компоненты формул называют параметрами закона распределения.

В первую группу входят так называемые биномиальные величины, в другую – пуассоновские. В связи с этим особый интерес представляют собой биномиальный и пуассоновский законы распределения дискретных случайных величин.

Рассмотрим более подробно каждый из названных законов распределения.

5.1.1. *Биномиальный закон распределения*

5.1.1.1. Общая характеристика биномиальной случайной величины

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с одинаковой вероятностью p может произойти некоторое событие A. Событие A может иметь самую различную природу. Случайная величина X – число опытов, в которых произошло событие A – распределена по биномиальному закону распределения

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} \tag{5.1}$$

с рядом распределения, соответствующим табл. 5.1.

Таблица 5.1. Ряд распределения биномиальной случайной величины

x_i	0	1	. . .	m	. . .	n
p_i	$(1\text{-}p)^n$	$np(1\text{-}p)^{n\text{-}1}$	. . .	$C_n^m\, p^m(1\text{-}p)^{n\text{-}m}$	. . .	p^n

Сумма вероятностей во второй строке ряда распределения (табл. 5.1) равна единице, т.е. $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1$. Для доказательства данного факта следует сумму $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ рассматривать как разложения бинома Ньютона с переменными p и (1-p), т.е.

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = [\, p + (1-p)\,]^n = 1 \ .$$

Биномиальный закон распределения имеет два параметра:

p – вероятность появления события A в одном опыте;

n – общее число опытов (испытаний).

Вероятность попадания дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, в заданный диапазон значений определяется с помощью формулы

$$P\{k_1 \le X \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} .$$

5.1.1.2. Числовые характеристики биномиальной случайной величины

Математическое ожидание. Рассмотрим предварительно случайную величину X_i – число появлений события A в i-м опыте, $i=\overline{1,n}$.

Ряд распределения рассматриваемой величины имеет вид:

x_{ij}	0	1
p_{ij}	$1-p$	p

.

Математическое ожидание случайной величины X_i определим по формуле (4.9): $m_i = 0*(1–p) + 1*p = p$.

Биномиальная случайная величина представляет собой сумму величин X_i. Тогда её математическое ожидание определится следующим преобразованием:

$$m_x = M[X] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np \ ,$$

т.е.

$$m_x = np \quad . \tag{5.2}$$

Дисперсия. Определим предварительно второй начальный момент и дисперсию случайной величины X_i – числа появлений события A в i-м опыте, $i = \overline{1,n}$. Ряд распределения рассматриваемой величины приведен выше. Второй начальный момент случайной величины X_i определим по формуле (4.15): $\alpha_i = 0^2 * (1-p) + 1^2 * p = p$. Дисперсию этой величины определим по формуле связи: $D_{xi} = \alpha_{2i} - m_{xi}^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

Дисперсия биномиальной случайной величины X как сумма дисперсий независимых случайных величин X_i определится с помощью следующего преобразования:

$$D_x = D[X] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p),$$

т.е.

$$D_x = np(1-p) \quad . \tag{5.3}$$

Среднее квадратичное отклонение определим в соответствии с формулой (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{np(1-p)} \,. \tag{5.4}$$

Пример 5.1. Определить математическое ожидание m_x, дисперсию D_x и среднее квадратичное отклонение случайной величины X – числа появлений “орла” при 10 бросаниях монеты.

Решение. Подбрасывание монеты – события независимые. Вероятность появления “орла” при каждом подбрасывании монеты одинакова и равна 0,5. Следовательно, случайная величина X распределена по биномиальному закону. А это значит, что её математическое ожидание определяется формулой (5.2):

$$m_x = np = 10 * 0{,}5 = 5 \,;$$

дисперсия формулой (5.3):

$$D_x = np(1-p) = 10 * 0{,}5 * (1-0{,}5) = 2{,}5 \,;$$

среднее квадратичное отклонение формулой (5.4):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58\,.$$

5.1.2. Закон распределения Пуассона

Закон распределения Пуассона связан с редкими событиями, составляющими простейший поток событий. Поэтому дальнейшее изложение будет касаться материала, определяющего и характеризующего основные особенности случайного потока событий и его частного случая – простейшего потока событий.

5.1.2.1. Простейший поток событий

Определение 5.1. ***Случайным потоком событий*** называются события, следующие друг за другом в случайные моменты времени.

Определение 5.2. ***Простейшим потоком событий*** называется поток событий, обладающий следующими тремя свойствами:

– *стационарностью*;
– *ординарностью*;
– *отсутствием последействия*.

Примером простейшего потока событий может служить поток заявок, поступающих по телефону в кассу театра на приобретение билетов.

Определим выше перечисленные свойства простейшего потока.

Определение 5.3. Случайный поток событий называется ***стационарным***, если вероятность попадания определенного числа событий на заданный временной участок зависит только от длины участка T и не зависит от того, где на временной оси t расположен этот участок.

1. Если временные интервалы T_1 и T_2, находящиеся на временной оси t в разных местах (рис. 5.1), равны между собой, то равны и вероятности появления определенного числа событий (m) в течение этих интервалов $P_1(X=m)$ и $P_2(X=m)$ (см. рис. 5.1): $T_1 = T_2 \Rightarrow P_1(X=m) = P_2(X=m)$.

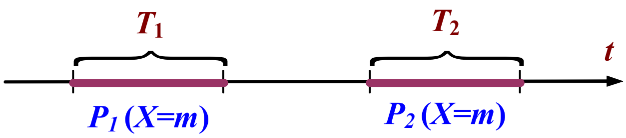
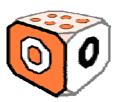
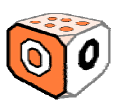


Рис. 5.1.



Определение 5.4. Случайный поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания двух и более событий на бесконечно малый участок Δt несоизмеримо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события на этот участок.

Другими словами, два и более событий на одном бесконечно малом участке произойти не могут, т.е. имеет место предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P\{X>1\}}{P(X=1)} = 0$.



Определение 5.5. Случайный поток событий называется потоком ***без последействия***, если вероятность попадания определенного числа событий на участок длиной T не зависит от того, сколько событий попало на любой другой участок, не пересекающийся с ним.

Данное свойство потока говорит о том, что все последующие события в потоке не зависят от предыдущих.

5.1.2.2. Общая характеристика пуассоновской случайной величины

Для простейшего потока событий случайная величина X – количество событий попавших на интервал T – распределена по закону Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{5.5}$$

где $a = \lambda T$ – среднее число событий, попадающих на интервал T (единственный параметр закона распределения);

λ – интенсивность наступления событий (количество событий в единицу времени);

T – некоторый период времени.

Ряд распределения пуассоновской случайной величины соответствует табл. 5.2.

Таблица 5.2. Ряд распределения пуассоновской случайной величины

x_i	**0**	**1**	**. . .**	m	**. . .**
p_i	e^{-a}	$a\,e^{-a}$	**. . .**	$(a^m\,e^{-a})/m!$	**. . .**

Доказательство формулы Пуассона (5.5). Введем обозначения:

λ – интенсивность событий;

T – заданный участок временной оси.

Разобьем участок длины T на участки Δt в количестве n. Причем $\Delta t = \frac{T}{n} \to 0$. В силу стационарности и ординарности потока вероятность того, что на участке Δt произойдет одно событие, определится следующим образом:

$$p = \lambda \Delta t = \frac{\lambda T}{n},$$

а вероятность того, что на участке Δt не произойдет ни одного события:

$$q = 1 - p = 1 - \lambda \Delta t = 1 - \frac{\lambda T}{n}.$$

При условии $n \to \infty$ вероятность $p = \frac{\lambda T}{n} \to 0$. Вероятность того, что за период времени T произойдет ровно m событий можно рассматривать как вероятность появления m событий в n независимых испытаниях при $n \to \infty, \quad p \to 0$, т.е. вычислять ее по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-m+1)}^{m}}{m!}\cdot p^m(1-p)^{n-m}\right]=$$

$$=\frac{n^m}{m!}\cdot p^m \lim_{n\to\infty}\frac{(1-p)^n}{(1-p)^m}=\frac{(np)^m}{m!}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n}{1^m}=\frac{(a)^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n .$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$ как *замечательный предел* (см. Приложение С), то

$$P(X=m)=\frac{(a)^m}{m!}e^{-a},$$

что и требовалось доказать.

Убедимся, что сумма вероятностей во второй строке ряда распределения (табл. 5.2) равна единице, т.е. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=1$. Для доказательства данного равенства преобразуем его левую часть: $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}$. Здесь сумма $e^{-a}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}$ представляет собой функциональный бесконечный *ряд,* сходящийся к функции e^a (см. Приложение С).

Преобразуем исходную сумму:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}=e^{-a}\cdot e^{a}=1 .$$

Таким образом, равенство $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=1$ доказано.

5.1.2.3. Числовые характеристики пуассоновской случайной величины

Математическое ожидание. В соответствии с формулой (4.9) математическое ожидание дискретной случайной величины определится следующим образом:

$$m_x = M[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{a^i}{i!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{a^i}{i!} = e^{-a} \cdot a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{a^{i-1}}{i!} = e^{-a} \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \ .$$

Последняя сумма представляет собой функциональный ряд, сходящийся к функции e^a (см. Приложение С). Продолжим преобразования:

$$m_x = e^{-a} \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a} \cdot a \cdot e^a = a \ ,$$

т.е. математическое ожидание пуассоновской случайной величины

$$m_x = a \ . \tag{5.6}$$

Дисперсия. Определим предварительно второй начальный момент в соответствии с формулой (4.15):

$$\alpha_2 = \sum_{i-0}^{\infty} x_i^2 p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \frac{a^i}{i!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{a^i}{i!} = e^{-a} a \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a} a \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= e^{-a} a \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} + \overbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!}}^{e^a} \right] = e^{-a} a \left[a \overbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{a^{i-2}}{(i-2)!}}^{e^a} + e^a \right] = e^{-a} a \, e^a (a+1) = a(a+1) \ .$$

Дисперсию пуассоновской случайной величины определим по формуле связи:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = a(a+1) - a^2 = a \ ,$$

т.е. дисперсия

$$D_x = a \ . \tag{5.7}$$

Среднее квадратичное отклонение определим в соответствии с формулой (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a} \ . \tag{5.8}$$

5.1.2.4. Вероятность попадания пуассоновской случайной величины на заданный участок

Для случайных пуассоновских величин существуют две специальные таблицы, позволяющие решать различные задачи, связанные с распределением Пуассона, без вычисления факториальных величин типа $m!$, степенных величин типа a^m и показательных величин типа e^{-a}.

Первая таблица позволяет определять вероятность того, что пуассоновская случайная величина принимает значение m, то есть вероятность $P(X=m)$.

Вторая таблица позволяет определять вероятность того, что пуассоновская случайная величина принимает значения, которые меньше или равны m, то есть вероятность $P\{X \le m\}$.

Вторая таблица является более универсальной, так как позволяет легко определять вероятности:

$P(X=m)$ как разность $P\{X \le m\} - P\{X \le (m-1)\}$;

$P\{X \le m\}$ как разность $1 - P\{X \le (m-1)\}$;

$P\{m_1 \le X \le m_2\}$ как разность $P\{X \le m_2\} - P\{X \le (m_1-1)\}$.

5.2. Законы распределения непрерывных случайных величин

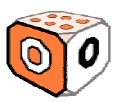
Среди непрерывных случайных величин особого внимания заслуживают величины, имеющие один из следующих законов распределения:

- равномерный;
- показательный;
- нормальный.

Рассмотрим более подробно каждый из названных законов распределения.

5.2.1. Равномерный закон распределения

5.2.1.1. Общая характеристика



Определение 5.6. Непрерывная случайная величина распределена по равномерному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b];\\ c, & x\in[a,b].\end{cases} \qquad (5.9)$$

График плотности распределения для равномерно распределенной случайной величины имеет вид, показанный на рис. 5.1.

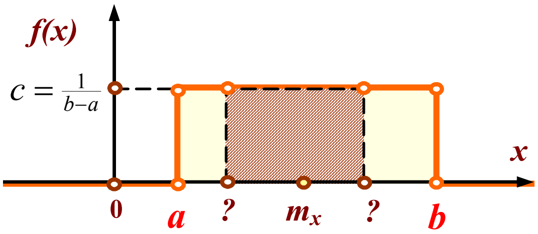


Рис. 5.1

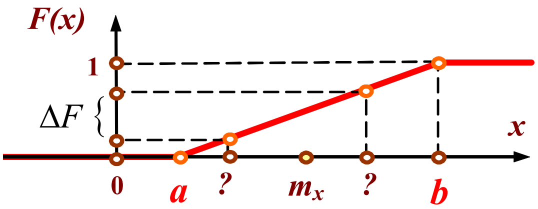


Рис. 5.2

Если случайная величина распределена по равномерному закону, то величина c в (5.9) имеет строго определенное значение, которое вычисляется с помощью первого свойства плотности распределения (4.6). Для этого необходимо взять определенный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения (5.9) и приравнять его единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} c\,dx + \int_{b}^{\infty} 0\,dx =$$

$$= 0 + cx\Big|_a^b + 0 = c(b-a);$$

$$c(b-a) = 1.$$

Откуда $c = \dfrac{1}{b-a}$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases} \qquad (5.10)$$

Равномерный закон распределения имеет два параметра: a и b .

Интегральная функция распределения, согласно обратному преобразованию (4.5), определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0, & x < a; \\ \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{x} \dfrac{1}{b-a} \cdot dt = \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{b} \dfrac{1}{b-a} \cdot dt + \int_{b}^{x} 0 \cdot dt = \dfrac{b-a}{b-a} = 1, & x > b. \end{cases}$$

Таким образом, интегральная функция равномерно распределенной величины определяется как

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (5.11)$$

График интегральной функции для равномерно распределенной случайной величины имеет вид, показанный на рис. 5.2.

5.2.1.2. Числовые характеристики

Математическое ожидание. В соответствии с формулой (4.10) математическое ожидание непрерывной случайной величины определится следующим образом:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} \cdot dx + \int_{b}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \ ,$$

т.е.

$$m_x = \frac{a+b}{2} \ . \qquad (5.12)$$

Математическое ожидание (5.12) равномерно распределенной случайной величины находится в середине отрезка [a,b] (см. рис. 5.1). Плотность распределения (5.10) имеет осевую симметрию с осью, проходящей через точку m_x параллельно оси ординат.

Дисперсия. Определим предварительно второй начальный момент в соответствии с формулой (4.16):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{\infty} x^2 0 \cdot dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

т.е.

$$\alpha_2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \ . \qquad (5.13)$$

Дисперсию равномерно распределенной случайной величины определим по формуле связи:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{a^2 + ab + b^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

т.е.

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} \ . \qquad (5.14)$$

Среднее квадратичное отклонение определим в соответствии с формулой (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}. \qquad (5.15)$$

5.2.1.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на заданный участок $P\{\alpha \le X \le \beta\}$, если участок [$\alpha,\beta$] входит в диапазон [$a,b$], можно определить двумя способами:

1-й способ. По формуле (4.2)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - a}{b-a} - \frac{\alpha - a}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

2-й способ. По формуле (4.8)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_\alpha^\beta = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Таким образом,

$$[\alpha,\beta] \subset [a,b] \ \Rightarrow \ P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \qquad (5.16)$$

Геометрически вероятности $P\{\alpha \le X \le \beta\}$ соответствует область, выделенная штриховкой на рис. 5.1.

Если участок [α,β] не входит в диапазон [a,b], то выражение (5.16) не является справедливым. В этом случае необходимо руководствоваться выражением

$$[\alpha,\beta] \not\subset [a,b] \ \Rightarrow \ P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{(\beta - \alpha)\cap(b-a)}{b-a}, \qquad (5.17)$$

где $(\beta - \alpha)\cap(b-a)$ – длина участка на числовой оси, являющегося общим (пересечением) для участка [α,β] и диапазона [a,b] .

5.2.2. Показательный закон распределения

5.2.2.1. Общая характеристика

В *простейшем потоке событий* случайная величина T – интервал времени между двумя последовательными событиями – распределена по *показательному закону*.

Определение 5.7. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0\,, & t<0\,;\\ \lambda\, e^{-\lambda t}\,, & t\ge 0\,,\end{cases} \qquad (5.18)$$

где λ – интенсивность событий, т.е. количество событий в единицу времени.

График плотности распределения для случайной величины, распределенной по показательному закону, имеет вид, показанный на рис. 5.3.

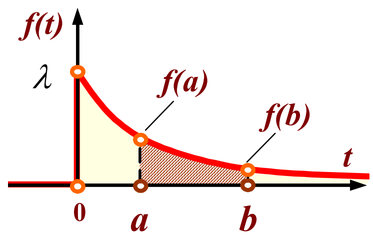


Рис. 5.3

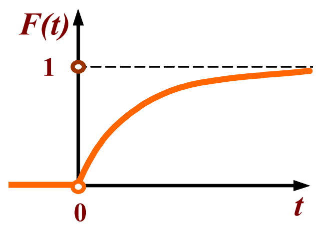


Рис. 5.4

Показательный закон распределения имеет только один параметр λ .

Интегральная функция распределения, согласно обратному преобразованию (4.5), определяется следующим образом:

$$F(t)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{t} 0\cdot dx = 0\,, & t<0\,;\\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{t}\lambda\, e^{-\lambda x}dx=\lambda\int\limits_{0}^{t}e^{-\lambda x}dx=\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{t}=-e^{-\lambda t}+1=1-e^{-\lambda t}\,, & t\ge 0\,.\end{cases}$$

Таким образом, интегральная функция случайной величины, распределенной по показательному закону, определяется выражением

$$F(t)=\begin{cases}0\,, & t<0\,;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\,.\end{cases} \qquad (5.19)$$

График интегральной функции (5.19) изображен на рис. 5.4.

5.2.2.2. Числовые характеристики

Математическое ожидание. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону, определяется равенством

$$m_x=\frac{1}{\lambda}\ . \qquad (5.20)$$

Доказательство. В соответствии с формулой (4.10) математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону, определяется следующим образом:

$$m_t=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} t\cdot 0\cdot dt+\int\limits_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt\ =\int\limits_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt\ .$$

Полученный интеграл проинтегрируем по частям. Напомним правило вычисления определенного интеграла по частям: $\int\limits_a^b udv=[uv]_a^b-\int\limits_a^b vdu$. Итак, обозначим: $u=-t,\quad dv=-\lambda\, e^{-\lambda t}dt$, тогда $du=-dt,\quad v=e^{-\lambda t}$. Проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt=\Big[\underbrace{-t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\lambda t}}_{v}\Big]_0^{\infty}-\left(\underbrace{-\int\limits_0^{\infty}\underbrace{e^{-\lambda t}}_{v}dt}_{\int\limits_a^b vdu}\right)=\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{\lambda t}}}_{0}-\underbrace{\lim_{t\to 0}\left(-te^{-\lambda t}\right)}_{0}-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty}=-\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{0}+\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda},$$

т.е.

$$m_x=\frac{1}{\lambda}\ .$$

Примечание. Вычисление предела $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{-\lambda t}}$ осуществляется по правилу Лопиталя (см. Приложение С).

Дисперсия. Определим предварительно второй начальный момент в соответствии с формулой (4.16):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot 0 \cdot dt + \int_{0}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{0}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt .$$

Полученный интеграл проинтегрируем по частям. Обозначим: $u = t^2$, $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$, тогда $du = 2tdt$, $v = -e^{-\lambda t}$. Проинтегрируем по частям:

$$\alpha_2 = \int_{0}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \underbrace{\left[\underbrace{-t^2 e^{-\lambda t}}_{uv}\right]_0^{\infty}}_{0} - \left(\underbrace{-2\int_{0}^{\infty} t\, e^{-\lambda t} dt}_{\int_a^b v du}\right) = \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_{0}^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t}}_{m_t = \frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Дисперсию определим по формуле связи:

$$D_t = \alpha_2 - m_t^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

т.е.

$$D_x = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (5.21)$$

Среднее квадратичное отклонение определим в соответствии с формулой (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (5.22)$$

5.2.2.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Вероятность попадания случайной величины на заданный участок $P\{a \le T \le b\}$, если участок $[a, b]$ входит в диапазон $[0, \infty]$, можно определить двумя способами:

1-й способ. По формуле (4.2)

$$P\{a \le T \le b\} = F(b) - F(a) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

2-й способ. По формуле (4.8)

$$P\{a \le T \le b\} = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_a^b = -\left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Таким образом,

$$P\{a \le T \le b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \tag{5.23}$$

Геометрически вероятности $P\{a \le T \le b\}$ соответствует область, выделенная штриховкой на рис. 5.3.

5.2.3. *Нормальный закон распределения*

5.2.3.1. Общая характеристика

Наиболее простым и достаточно точно отражающим случайные ошибки измерений является так называемый нормальный закон распределения.

Определение 5.8. Непрерывная случайная величина распределена по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.24}$$

где σ и m – параметры распределения.

График плотности распределения для случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид, показанный на рис. 5.5. Плотность распределения (5.24) имеет осевую симметрию с осью, проходящей через точку m_x параллельно оси ординат.

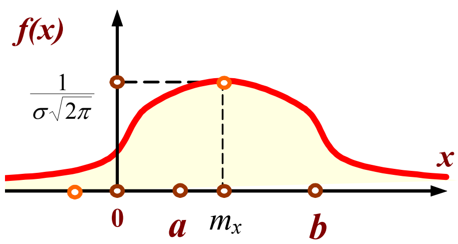


Рис. 5.5

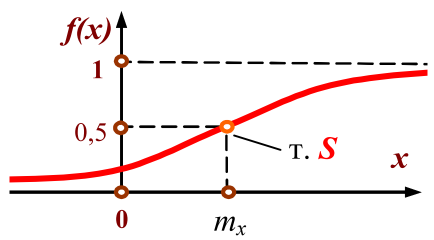


Рис. 5.6

Интегральная функция распределения, согласно обратному преобразованию (4.5), определяется следующим образом:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt\ .$$

Таким образом, интегральная функция случайной величины, распределенной по нормальному закону, определяется интегралом

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt\ . \qquad (5.25)$$

График интегральной функции (5.25) изображен на рис. 5.6. Кривая интегральной функции (5.25) имеет центральную симметрию относительно точки $\boldsymbol{S}$.

5.2.3.2. Числовые характеристики

Математическое ожидание. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону, определяется выражением

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=m\ . \qquad (5.26)$$

Дисперсия. Дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону, определяется выражением

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2\ . \qquad (5.27)$$

Среднее квадратичное отклонение определяется в соответствии с формулой (4.20):

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sigma\ . \qquad (5.28)$$

Центральные моменты. Центральные моменты любого порядка нормально распределенной случайной величины определяется рекуррентным соотношением

$$\mu_s = (s-1)\mu_{s-2}\sigma^2 . \qquad (5.29)$$

Зная 1-й и 2-й центральные моменты, можно легко найти любой другой.

Поскольку 1-й центральный момент для всех случайных величин равен нулю, то все центральные нечетные моменты для нормально распределенной случайной величины также равны нулю.

Поскольку 2-й центральный момент

$$\mu_2 = D_x = \sigma^2 ,$$

то все четные центральные моменты нормально распределенной случайной величины легко определяются с помощью выражения (5.29):

$$\mu_4 = (4-1)\,\mu_2\,\sigma^2 = 3\cdot\sigma^2\cdot\sigma^2 = 3\sigma^4 ;$$

$$\mu_6 = (4-1)\,\mu_4\,\sigma^2 = 5\cdot 3\sigma^2\cdot\sigma^2 = 15\sigma^4 ;$$

$$\mu_8 = (4-1)\,\mu_6\,\sigma^2 = 7\cdot 15\sigma^2\cdot\sigma^2 = 105\sigma^4 ;$$

$$\ldots$$

Поскольку все нечетные центральные моменты для нормально распределенной случайной величины равны нулю, то *коэффициент асимметрии* также равен нулю:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0 .$$

Коэффициент островершинности (величина эксцесс) для нормально распределенной случайной величины также равен нулю:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0 .$$

5.2.3.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный участок $P\{a \le X \le b\}$ можно получить по известным формулам:

$$P\{a \le X \le b\} = \begin{cases} F(b) - F(a); \\ \int\limits_a^b f(x)dx. \end{cases}$$

Однако в этом случае интегрирование надо проводить численными методами с привлечением вычислительной техники.

Чтобы избежать необходимости интегрировать не берущийся интеграл, используют частную интегральную функцию

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{5.30}$$

т.е. интегральную функцию нормально распределенной случайной величины с параметрами: $m = 0$; $\sigma = 1$. Распределение (2.30) называют *стандартным нормальным распределением.*

Интегральная функция $F(x)$ нормально распределенной случайной величины связана со стандартной интегральной функцией соотношением

$$F(x) = F^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Тогда вероятность попадания случайной величины на заданный участок

$$P\{a \le X < b\} = F^*\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{5.31}$$

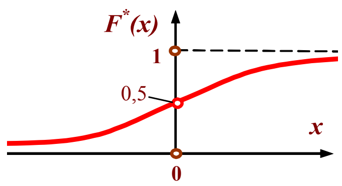


Рис. 5.7

На рис. 5.7 изображена интегральная функция стандартного нормального распределения (сравни с рис. 5.6)

Рассмотрим $F^*(x)$ от аргумента x > 0

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{0,5} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\Phi(x)} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi(X) + 0,5,$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (см. Приложение В).

Поскольку $F^*(x) = \Phi(x) + 0{,}5$, то (5.31) перепишется как

$$P\{a \le X \le b\} = F^*\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) + 0{,}5 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - 0{,}5\,,$$

т.е.

$$P\{a \le X \le b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{5.32}$$

Формула (5.32) обладает высокой универсальностью, поскольку позволяет определять вероятность попадания на заданный участок любой нормально распределенной случайной величины независимо от значений её параметров m и σ.

5.2.3.4. Правило трех сигм

Формула (5.32) может быть использована для вычисления вероятности того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону от её математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного числа δ. Часто такой расчет требуется в практических задачах, т.е. когда требуется найти вероятность осуществления неравенства

$$|X - m| < \delta\,. \tag{5.33}$$

Преобразуем (5.33) в

$$m - \delta < X < m + \delta \tag{5.34}$$

и подставим в формулу (5.32). Поскольку $\Phi(x)$ нечетная функция, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, имеем:

$$P(|X-m| < \delta) = P(m - \delta < X < m + \delta) = \Phi\left[\frac{(m+\delta)-m}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(m-\delta)-m}{\sigma}\right] = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

т.е. вероятность модуля отклонения случайной величины, распределенной по нормальному закону, можно вычислить по формуле:

$$P(|X-m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{5.35}$$

Если измерять величину отклонения в единицах σ, то можно вывести практически полезную закономерность, которая известна как правило трех сигм. Действительно, положим в (5.35) $\delta = \sigma \cdot t$. Получим:

$$P(|X-m|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

Если t=3 и, следовательно, $\sigma \cdot t = 3\sigma$, то

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973\,,$$

т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднеквадратичного отклонения, очень велика. Это означает, что вероятность противоположного события, которое заключается в том, что абсолютное отклонение превысит утроенное σ, очень мала, а именно равна 0,0027. В этом и состоит сущность правила трех сигм.

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратичного отклонения.

5.3. Распределения, производные от нормального распределения

Рассмотрим несколько распределений, которые связаны с нормальным распределением и используются как инструмент для решения многих задач математической статистики.

5.3.1. Распределение Пирсона

Распределение Пирсона имеет еще другое название – *хи-квадрат*.

Пусть независимые случайные величины u_i распределены по стандартному нормальному закону, т.е. по нормальному закону с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Тогда случайная величина

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}u_i^2 \tag{5.36}$$

распределена по закону хи-квадрат с *числом степеней свободы* k, равным n. Число степеней свободы является абстрактным понятием, определяющим в данном случае условия независимости величин u_i . Наличие любой зависимости между величинами u_i уменьшает число степеней свободы k на единицу.

С увеличением числа степеней свободы k распределение хи-квадрат приближается к стандартному нормальному распределению.

Для распределения хи-квадрат составлена таблица вероятности того, что χ^2 окажется больше фиксированного значения χ_1^2, т.е. вероятности $P\left\{\chi^2 > \chi_1^2\right\} = \beta$, где β – доверительная вероятность. Таблица имеет два входных параметра: β и k.

5.3.2. *Распределение Стьюдента*

Пусть случайная величина u распределена по стандартному нормальному закону, а случайная величина v распределена по закону хи-квадрат с числом степеней свободы k и не зависит от u. Тогда случайная величина

$$t = \frac{u}{\sqrt{v/k}} \tag{5.37}$$

распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы k.

Для распределения Стьюдента составлена таблица вероятности того, что случайная величина $|t|$ окажется меньше фиксированного значения t_1, т.е. вероятности $P\left\{|t| < t_1\right\} = \beta$, где β – доверительная вероятность. Таблица имеет два входа:

– уровень значимости $2\alpha = 1 - \beta$;

– число степеней свободы k.

5.3.3. *Распределение Фишера*

Пусть независимые случайные величины u и v распределены по закону хи-квадрат соответственно со степенями свободы k_1 и k_2. Тогда случайная величина

$$F = \frac{u/k_1}{v/k_2} \tag{5.38}$$

распределена по закону Фишера со степенями свободы k_1 и k_2.

Для распределения Фишера составлена таблица вероятности того, что случайная величина F окажется больше фиксированного значения F_1, т.е. вероятности $P\left\{F > F_1\right\} = \beta$, где β – доверительная вероятность. Таблица имеет три входа:

– доверительная вероятность β ;

– число степеней свободы k_1;
– число степеней свободы k_2.

5.4. Практикум и вопросы для самоконтроля

5.1. Какие случайные величины распределены по биномиальному закону?

5.2. Составить ряд распределения для дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами распределения p=0,6 и n=4.

5.3. Привести формулу для вычисления математического ожидания биномиальной величины.

5.4. Привести формулу для вычисления дисперсии биномиальной величины.

5.5. Привести формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения биномиальной величины.

5.6. Привести формулу для вычисления вероятности попадания значения биномиальной величины на заданный участок [k_1, k_2].

5.7. Дать определение потоку событий.

5.8. Дать определение простейшему потоку событий.

5.9. Какой поток событий называется стационарным?

5.10. Какой поток событий называется ординарным?

5.11. Какой поток событий называется потоком без последействия?

5.12. Какие случайные величины распределены по закону Пуассона?

5.13. Чему равно математическое ожидание пуассоновской величины?

5.14. Чему равна дисперсия пуассоновской величины?

5.15. Привести формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения пуассоновской величины.

5.16. Случайная величина X – количество блоков, поступающих с ДСК на строительную площадку – распределена по закону Пуассона. Интенсивность поступления блоков λ = 2 блока/час. Найти вероятность того, что количество блоков, поступивших за 2 часа:

а) составит 10 шт.;

б) превысит 10 шт.;

в) составит менее 10 шт.

5.17. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Записать функцию распределения вероятности случайной величины X. Найти вероятность того, что случайная величина X примет:

а) значение меньшее, чем ее математическое ожидание;

б) положительное значение.

5.18. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Математическое ожидание числа вызовов за час равно 30. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

5.19. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно 3 элемента.

5.20. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

5.21. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

5.22. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий:

а) ровно 3;

б) менее 3;

в) более 3;

г) хотя бы одно.

5.23. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

5.24. Дать определение случайным величинам, распределенным по равномерному закону.

5.25. Записать в общем виде интегральную функцию равномерно распределенной случайной величины.

5.26. Привести формулу для вычисления математического ожидания равномерно распределенной случайной величины.

5.27. Привести формулу для вычисления дисперсии равномерно распределенной случайной величины.

5.28. Привести формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения равномерно распределенной случайной величины.

5.29. Привести формулу для вычисления вероятности попадания значения равномерно распределенной случайной величины на заданный участок $P\{\alpha \le X < \beta\}$, если участок [α, β] входит в диапазон [a,b].

5.30. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{при} \quad -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 1, & \text{при} \quad x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале: ***а*)** (0; 1/3); ***б*)** (–5; 1/3) .

5.31. Электропоезда в метро следуют друг за другом строго по графику с интервалом движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к перрону метро, будет ожидать очередной поезд менее 3 мин.

5.32. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более, чем на 20 с.

5.33. Найти дисперсию случайной величины, распределенной равномерно в интервале (2; 8).

5.34. Дать определение случайным величинам, распределенным по показательному закону.

5.35. Записать в общем виде интегральную функцию случайной величины, распределенной по показательному закону.

5.36. Привести формулу для вычисления математического ожидания случайной величины, распределенной по показательному закону.

5.37. Привести формулу для вычисления дисперсии случайной величины, распределенной по показательному закону.

5.38. Привести формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения случайной величины, распределенной по показательному закону.

5.39. Поставить знак отношения между первым начальным моментом случайной величины и её математическим ожиданием.

5.40. Привести формулу для вычисления вероятности попадания значения случайной величины, распределенной по показательному закону, на заданный участок [a, b], где a и b – неотрицательные величины.

5.41. Написать дифференциальную и интегральную функции показательного распределения, если параметр $\lambda = 5$.

5.42. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ:

$$f(x) = \begin{cases} \mu\, e^{-\mu x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения и вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

5.43. Случайная непрерывная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 3\, e^{-3x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X попадет в интервал (0,13; 0,7).

5.44. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 5\, e^{-5x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

5.45. Студент помнил, что дифференциальная функция показательного распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} c\,e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

но забыл, чему равна постоянная c. Найти константу c.

5.46. Записать в общем виде интегральную функцию нормально распределенной случайной величины.

5.47. Как определяются основные числовые характеристики случайных величин, распределенных по нормальному закону?

5.48. Привести рекуррентное соотношение для определения центральных моментов нормально распределенной случайной величины.

5.49. Чему равен коэффициент асимметрии нормально распределенной случайной величины?

5.50. Чему равен коэффициент островершинности нормально распределенной случайной величины?

5.51. Привести формулу для вычисления вероятности попадания значения случайной величины, распределенной по нормальному закону, на заданный участок $[a, b]$.

5.52. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности:

$$f(x)=\frac{1}{5\cdot\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}\,.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

5.53. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

5.54. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ *г*. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютному значению величину 10 *г*.

5.55. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$ то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь условие не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками: $m_d = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma_d = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

5.56. В чем заключается правило трех сигм?

5.57. Какие случайные величины распределены по закону Пирсона?

5.57. Какие случайные величины распределены по закону Стьюдента?

5.58. Какие случайные величины распределены по закону Фишера?

6. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ И ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

6.1. Случайные векторы

Определение 6.1. Случайным вектором называют вектор $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$, компоненты которого представляют собой случайные величины.

Так же, как и для случайной величины, для случайного вектора вводятся понятия интегральной функции распределения и числовые характеристики.

6.1.1. *Интегральная функция распределения случайного вектора*

Определение 6.2. Интегральная функция распределения случайного вектора – это такая функция $F(x_1,x_2,...,x_n)$, которая при конкретных значениях своих аргументов численно равна вероятности того, что случайные компоненты вектора окажутся меньше соответствующих аргументов, т.е. $F(x_1,x_2,...,x_n) = P\{X_1<x_1,\ X_2<x_2,\ ...,\ X_n<x_n\}$.

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться только двумерные случайные векторы $\mathbf{Z} = (X,Y)$, где X,Y – компоненты вектора. Однако все приводимые положения либо в равной степени справедливы и для многомерных векторов, либо легко обобщаются на случай многомерных векторов.

В общем случае интегральная функция непрерывного двумерного случайного вектора представляет собой криволинейную поверхность

$F(x,y)$, заключенную между двумя неограниченными плоскостями F_0 и F_1, определяемыми соответственно равенствами $F=0$ и $F=1$ (рис. 6.1). Поверхность $F(x,y)$ асимптотически приближается к плоскости F_0, когда или $x \to -\infty$, или $y \to -\infty$, или одновременно $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$. При одновременном выполнении условий $x \to \infty$ и $y \to \infty$ поверхность $F(x,y)$ асимптотически приближается к плоскости F_1.

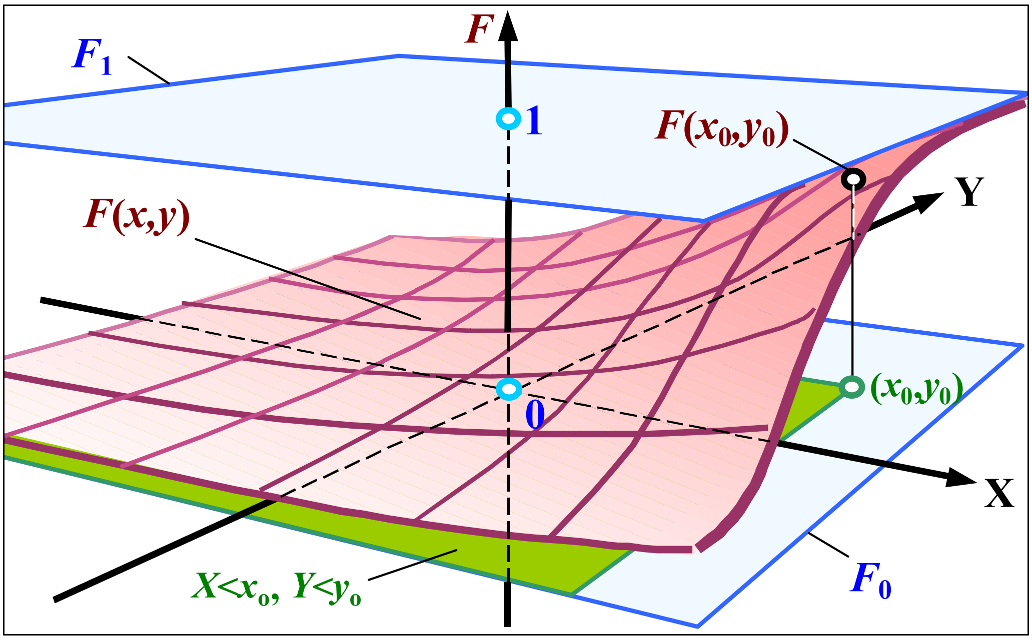


Рис. 6.1

По определению интегральная функция двумерного случайного вектора $\mathbf{Z} = (X,Y)$ – это такая функция $F(x,y)$, которая при каждых конкретных значениях своих аргументов x и y численно равна вероятности того, что случайные компоненты вектора окажутся меньше соответствующих аргументов, то есть $F(x,y) = P\{X<x,\ Y<y\}$. Другими словами, интегральная функция двумерного случайного вектора в конкретной точке (x_0,y_0) равна вероятности попадания случайного вектора на затененный участок плоскости координат $X0Y$ (см. рис. 6.1 и рис. 6.2).

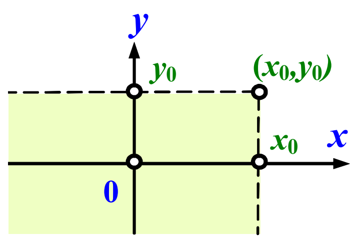


Рис. 6.2

Интегральная функция двумерного случайного вектора $\mathbf{Z} = (X,Y)$ обладает рядом свойств, которые формулируются следующим образом:

1-е свойство

$$F(-\infty,-\infty)=0; \tag{6.1}$$

$$F(x,-\infty)=0; \tag{6.2}$$

$$F(-\infty, y) = 0\,. \tag{6.3}$$

2-е свойство

$$F(\infty, \infty) = 1\,. \tag{6.4}$$

3-е свойство

$$F(x, \infty) = P\{X < x, Y \to \infty\} = P\{X < x\} = F_1(x)\ ; \tag{6.5}$$

$$F(\infty, y) = P\{X \to \infty, Y < y\} = P\{Y < y\} = F_2(y)\ . \tag{6.6}$$

4-е свойство

$F(x,y)$ – неубывающая функция от обоих своих аргументов.

Учет 3-го свойства (6.5) – (6.6) позволяет по известной интегральной функции $F(x,y)$ определять интегральные функции распределения компонент, т.е. $F_1(x) = F(x,\infty)$; $F_2(y) = F(\infty, y)$.

Обобщение 3-го свойства на интегральные функции трехмерных векторов и функции большей размерности позволяет получить выражения для определения частных интегральных функций. Так, для трехмерной интегральной функции $F(x_1,x_2,x_3)$ справедливы выражения: $F_1(x_1) = F(x_1,\infty,\infty)$; $F_2(x_2) = F(\infty,x_2,\infty)$; $F_{2,3}(x_2,x_3) = F(\infty,x_2,x_3)$ и т.д.

6.1.2. *Вероятность попадания случайного вектора на заданный участок*

Вероятность попадания дискретного или непрерывного случайного вектора на заданный участок (прямоугольник) может быть определена с помощью одной и той же формулы, основанной на использовании интегральной функции распределения.

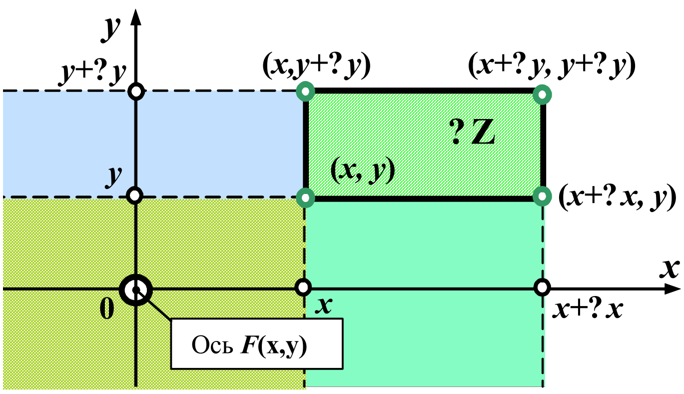


Рис. 6.3

Пусть известна интегральная функция $F(x,y)$ и заданы параметры участка $\Delta\mathbf{Z}$, на который с искомой вероятностью попадает случайный вектор **Z** (см. рис. 6.3), т.е. заданы координаты углов прямоугольника $\Delta\mathbf{Z}$**.** Тогда искомая вероятность

$$P\{(X,Y) \in \Delta\mathbf{Z}\} = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) + F(x,y)\ . \tag{6.7}$$

6.1.3. *Плотность распределения случайного вектора*

Если компоненты случайного вектора являются непрерывными величинами, то закон распределения этого вектора может быть задан в форме плотности распределения (дифференциальной функции распределения).

Плотность распределения случайного вектора – это предел отношения вероятности попадания случайного вектора на бесконечно малый участок $\Delta\mathbf{Z}$ к площади этого участка:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{P\{(X,Y)\in\Delta\mathbf{Z}\}}{\Delta x\cdot\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y},$$

т.е. плотность распределения двумерного случайного вектора представляет собой вторую частную производную от интегральной функции

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (6.8)$$

Из (6.8) следует, что при известной плотности распределения случайного вектора интегральная функция определяется с помощью обратного преобразования

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(t,\tau)\,dt\,d\tau. \qquad (6.9)$$

Плотность распределения случайного вектора $f(x,y)$ наследует все свойства интегральной функции $F(x,y)$. Так, приведенные ранее 1-е и 2-е свойства интегральной функции (6.1) – (6.4) трансформируются в ***1-е свойство плотности распределения***

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1\ ; \qquad (6.10)$$

3-е свойство (6.5) – (6.6) трансформируется во ***2-е свойство плотности распределения***

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\ ; \qquad (6.11)$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\ ; \qquad (6.12)$$

4-е свойство – в ***3-е свойство плотности распределения***

$$f(x,y) \geq 0 \ . \qquad (6.13)$$

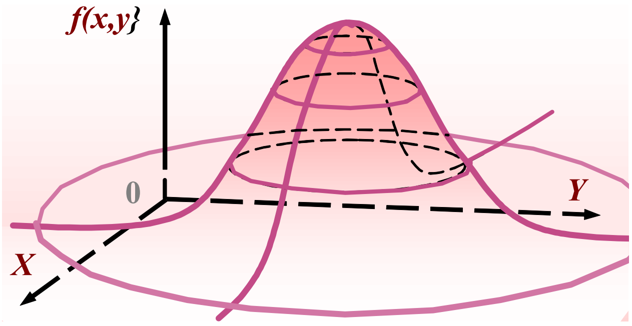


Рис. 6.4

С геометрической точки зрения первое свойство плотности распределения (6.11) означает, что объем, заключенный между поверхностью $f(x,y)$ и координатной плоскостью $X0Y$ (рис. 6.4), равен единице. Третье свойство (6.13) говорит о том, что поверхность $f(x,y)$ не может располагаться ниже координатной плоскости $X0Y$.

6.1.4. *Условные законы распределения*

Определение 6.3. *Условный закон распределения* в форме $f(x/y)$ или $F(x/y)$ – это закон распределения случайной величины X, вычисленный при условии, что случайная величина Y приняла конкретное значение.

Определение 6.4. Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если закон распределения X не зависит от того, какое значение приняла случайная величина Y. В противоположном случае величины X и Y называются ***зависимыми***.

Если случайные величины X и Y являются независимыми, то

$$f(x/y) = f(x) \quad \text{и} \quad f(y/x) = f(y) \ .$$

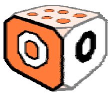
Если случайные величины X и Y являются зависимыми, то справедливо следующее соотношение:

$$f(x,y) = f(x)*f(y/x) = f(y)*f(x/y) \ .$$

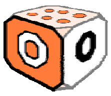
Откуда

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy} \quad \text{и} \quad f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx}.$$

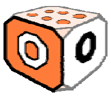
6.1.5. *Числовые характеристики случайного вектора*



Определение 6.5. ***Математическое ожидание*** случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ есть такой неслучайный вектор $\mathrm{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, компонентами которого являются математические ожидания соответствующих компонент случайного вектора $\mathbf{X}$.



Определение 6.6. ***Дисперсия*** случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ есть такой неслучайный вектор $\mathrm{D}=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$, компонентами которого являются дисперсии соответствующих компонент случайного вектора $\mathbf{X}$.



Определение 6.7. ***Корреляционным моментом*** k_{xy} двумерного случайного вектора $\mathbf{Z}=(X,Y)$ называют второй смешанный центральный момент

$$k_{xy}=\mu_{11}=\mathrm{M}[(X-m_x)(Y-m_y)].$$

Для *дискретных* случайных величин корреляционный момент определяется по формуле

$$k_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_i-m_y)p_{ij}, \qquad (6.14)$$

где $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_i)$;

m_x – математическое ожидание компоненты X случайного вектора $\mathbf{Z}$;

m_y – математическое ожидание компоненты Y случайного вектора $\mathbf{Z}$;

n – количество возможных значений компоненты X;

m – количество возможных значений компоненты Y.

Для *непрерывных* случайных величин корреляционный момент определяется по формуле

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{6.15}$$

где $f(x,y)$ – плотность распределения случайного вектора **Z**.

Корреляционный момент характеризует степень разброса случайных величин вокруг их математических ожиданий, а также степень линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Для характеристики только степени линейной зависимости между случайными величинами X и Y используется ***коэффициент корреляции***

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\,. \tag{6.16}$$

Значение коэффициента корреляции r_{xy} находится в диапазоне от -1 до $+1$.

Если X и Y являются независимыми между собой величинами, то $r_{xy} = 0$.

Если X и Y связаны *линейной* зависимостью $Y = aX + b$, то $r_{xy} = -1$ при $a < 0$ и $r_{xy} = 1$ при $a > 0$.

Для случайного n-мерного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ задается n-мерная ***корреляционная матрица***

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

где $k_{ij} = M[(X_i\text{-}m_i)\,(X_j\text{-}m_j)]$;

$k_{ii} = M[(X_i\text{-}m_i)^2] = D_i$ – дисперсия i-й компоненты случайного вектора **X**;

$k_{ij} = k_{ji}$.

Для анализа степени линейной зависимости между компонентами случайного вектора **X** используется ***нормированная корреляционная***

матрица **R**, элементами которой являются коэффициенты корреляции r_{ij} соответствующих компонент вектора **X,**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix},$$

где $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$; $r_{ii} = \dfrac{D_i}{\sigma_i^2} = 1$; $r_{ij} = r_{ji}$.

6.2. Функции случайных аргументов

Решение многих практических задач требует знания законов распределения или числовых характеристик различных случайных величин. В некоторых случаях эксперимент по выявлению закона распределения требует постановки дорогостоящих или длительных по времени экспериментов, а в некоторых случаях и сам эксперимент поставить не представляется возможным. Часто этот барьер легко преодолим. Если интересующая нас случайная величина является функцией случайного аргумента, то её числовые характеристики и закон распределения могут быть определены по известным характеристикам или закону распределения случайного аргумента и виду функциональной зависимости.

6.2.1. *Числовые характеристики функции случайных аргументов*

Пусть случайная величина Y является функцией случайных аргументов Y = =$\varphi(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Пусть известен закон распределения $g(y)$ функции случайных аргументов. Тогда основные числовые характеристики функции Y определяются следующими выражениями:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y)\,dy\,; \tag{6.17}$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2\, g(y)\,dy\,. \tag{6.18}$$

Однако, как уже отмечалось выше, для определения числовых характеристик вовсе не обязательно знать закон распределения g(y).

Пусть случайная величина $Y=\varphi(X)$ является функцией дискретного случайного аргумента X, для которого известен закон распределения в виде ряда распределения

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n

Тогда каждому значению x_i можно поставить в соответствие значение $y_i=\varphi(x_i)$

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . .	p_n
$y_i=\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	. . .	$\varphi(x_n)$

ряд распределения X

ряд распределения Y

В общем случае для $y_i=\varphi(x_i)$ последняя таблица не является рядом распределения (в строгом понимании этого термина), однако все необходимые для такого ряда значения случайной функции и соответствующие вероятности в ней имеются. Таким образом,

$$m_y = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \ . \tag{6.19}$$

Аналогично для непрерывной случайной величины

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \,, \tag{6.20}$$

где $f(x)$ – плотность распределения X.

Для системы двух случайных аргументов (6.19) и (6.20) будут иметь соответственно вид:

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \ \varphi(x_i, y_i) p_{ij} \ ;$$

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dx dy \,.$$

В общем случае (система из n случайных аргументов) (6.19) и (6.20) будут иметь, соответственно, вид:

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \sum_{i=1}^{n} \cdots \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \,;$$

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \,.$$

Таким образом, математическое ожидание функции любого числа случайных аргументов может быть найдено без знания закона распределения *g(y)*.

Аналогично могут быть найдены любые другие числовые характеристики (моменты) функции случайных аргументов. Например, дисперсии:

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x) dx \,.$$

$$D_z = D[\varphi(x,y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x,y) - m_y]^2 f(x,y) dx dy \,.$$

$$D_y = D[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) - m_y]^2 f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \,.$$

6.2.2. *Теоремы о числовых характеристиках функции случайных аргументов*

Во многих случаях для отыскания числовых характеристик функции случайных аргументов не требуется даже знания закона распределения случайных аргументов. В основном это касается линейных и некоторых элементарных нелинейных функций.

Рассмотрим определение математического ожидания и дисперсии для простейших функций случайных аргументов.

Теорема 6.1. Математическое ожидание неслучайной величины *c* равно самой неслучайной величине:

$$M[c] = c\,. \tag{6.21}$$

Доказательство: $M[c] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = c \cdot 1 = c\,.$

Теорема 6.2. Дисперсия неслучайной величины *c* равна нулю:

$$D[c] = 0\,. \tag{6.22}$$

Доказательство: $D[c] = M\left[(x_i - m_x)^2\right] = M\left[(c-c)^2\right] = M\left[0^2\right] = M[0] = 0\,.$

Теорема 6.3. Математическое ожидание произведения неслучайной величины c на случайную величину X равно произведению неслучайной величины c на математическое ожидание случайной величины X:

$$M[cX] = cM[X]\,. \tag{6.23}$$

Доказательство: $M[cX] = \sum_{i=1}^{n} cx_i p_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = cM[X]\,.$

Теорема 6.4. Дисперсия произведения неслучайной величины c на случайную величину X равна произведению квадрата неслучайной величины c на дисперсию случайной величины X:

$$D[cX] = c^2 D[X]\,. \tag{6.24}$$

Доказательство:

$$D[cX] = M\left[(cx - m_{cx})^2\right] = M\left[(cx - cm_x)^2\right] = M\left[c^2(x - m_x)^2\right] = c^2 M\left[(x - m_x)^2\right] = c^2 D[X].$$

***Следствие теоремы* 6.4**:

$$\sigma[cX] = \sqrt{D[cX]} = \sqrt{c^2 D[X]} = |c| \cdot \sigma_x . \qquad (6.25)$$

Теорема 6.5. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y] . \qquad (6.26)$$

Доказательство:

$$M[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right\}dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)dy = M[X] + M[Y].$$

Теорема 6.5 справедлива как для зависимых, так и независимых случайных величин X и Y. Теорема 6.5 имеет также обобщение на случай суммы нескольких случайных величин, т.е. математическое ожидание суммы n случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i]. \qquad (6.27)$$

Теорема 6.6. Математическое ожидание линейной функции n случайных аргументов X_i (i =1,2,…,n) равно этой же линейной функции от математических ожиданий случайных величин X_i:

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b . \qquad (6.28)$$

Доказательство. Утверждение (6.28) очевидно в силу теорем 6.3, 6.5 и 6.1.

Теорема 6.7. Дисперсия суммы случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий, увеличенной на удвоенный корреляционный момент этих же величин:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2k_{xy}\,. \qquad (6.29)$$

Доказательство:

$$D[X+Y] = M\left[\left((x+y)-m_{x+y}\right)^2\right] = M\left[\left(x+y-m_x-m_y\right)^2\right] =$$

$$= M\left[(x-m_x)^2 + 2(x-m_x)(y-m_y) + (y-m_y)^2\right] =$$

$$= M\left[(x-m_x)^2\right] + M\left[(y-m_y)^2\right] + 2M\left[(x-m_x)(y-m_y)\right] = D[X] + D[Y] + 2k_{xy}\,.$$

***Следствие теоремы* 6.7.** Дисперсия суммы независимых величин равна сумме их дисперсий:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y]\ , \qquad (6.30)$$

поскольку $k_{xy} = 0$.

Теорема 6.8. Дисперсия линейной функции n случайных некоррелированных (независимых) аргументов X_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ определяется по формуле

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]. \qquad (6.31)$$

Доказательство. Вывод формулы (6.31) основан на использовании теорем 6.4, 6.7 и 6.2.

Теорема 6.9. Математическое ожидание произведения случайных величин X и Y определяется по формуле:

$$M[XY] = M[X] * M[Y] + k_{xy}\,. \qquad (6.32)$$

Доказательство:

$$k_{xy} = M[(X{-}m_x)(Y{-}m_y)] = M[XY] - m_x M[Y] - m_y M[X] + m_x m_y =$$

$$= M[XY] - m_x m_y - m_x m_y + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y .$$

Откуда $M[XY] = M[X]*M[Y] + k_{xy}$.

***Следствие теоремы* 6.9.** Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M[XY] = M[X] * M[Y]\,, \tag{6.33}$$

поскольку $k_{xy} = 0$.

Теорема 6.10. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y определяется по формуле:

$$D[XY] = D[X] * D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]\ . \tag{6.34}$$

Доказательство:

$$D[XY] = M[(xy - m_{xy})^2] = M[(xy - m_x\, m_y)^2] = M[x^2 y^2] - 2m_x m_y\, M[xy] + m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= M[x^2]*M[y^2] - 2\, m_x m_y m_x m_y + m_x^2\, m_y^2 = M[x^2]*M[y^2] - m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= (D[X] + m_x^2)\,(D[Y] + m_y^2) - m_x^2\, m_y^2 = D[X] * D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]\ .$$

***Следствие теоремы* 6.10.** При $m_x = 0$ и $m_y = 0$

$$D[XY] = D[X] * D[Y]\,. \tag{6.35}$$

6.2.3. *Закон распределения функции случайных аргументов*

В ряде стохастических задач требуется определить закон распределения функции случайного аргумента при известном законе распределения случайного аргумента. Рассмотрим такую задачу для монотонных функций случайного аргумента.

Пусть имеется непрерывная случайная величина X, распределенная в интервале (a,b) с плотностью распределения $f(x)$. Пусть другая случайная величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$. При этом функция $\varphi(X)$ – монотонно ***возрастающая*** функция на интервале (a,b), непрерывная и дифференцируемая (рис. 6.5). Требуется найти плотность распределения $g(x)$ случайной величины Y.

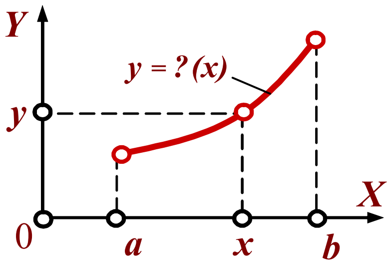


Рис. 6.5

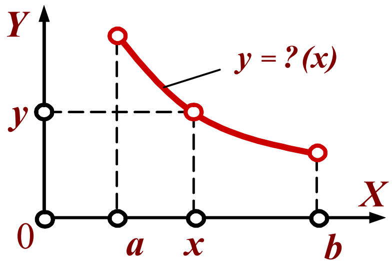


Рис. 6.6

В соответствии с ***определением 4.5*** найдем интегральную функцию случайной величины Y

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{a < X < x\} = \int_a^x f(x)dx\,.$$

Выразим x через y: $x = \varphi^{-1}(y)$, где φ^{-1} – функция, обратная функции φ. Тогда

$$G(y) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy\,.$$

Поскольку плотность распределения $g(x)$ является производной от интегральной функции, то

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]'\,. \qquad (6.36)$$

Пусть теперь функция $\varphi(X)$ – монотонно ***убывающая*** функция на интервале (a,b), непрерывная и дифференцируемая (рис. 6.6). Тогда

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{x < X < b\} = \int_x^b f(x)dx\,.$$

Выразим x через y, т.е.

$$G(y) = \int\limits_{\varphi^{-1}(y)a}^{b} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \; = -\int\limits_{b}^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \,,$$

или

$$g[y] = G'(y) = -f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' . \qquad (6.37)$$

Учитывая выражения (6.36) и (6.37) обобщенная формула для плотности распределения монотонной функции случайного аргумента примет окончательный вид:

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[\varphi^{-1}(y)\right]\right|' . \qquad (6.38)$$

Действительно, если $\varphi(x)$ – возрастающая функция, то $\varphi'(x)$, а значит, и $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$, положительны. Если $\varphi(x)$ – убывающая функция, то $\varphi'(x)$, а значит, и $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$, отрицательны. Но знак «–» в (6.37) делает результат положительным. Следовательно, обобщенная формула плотности распределения (6.38) справедлива в обоих случаях.

6.3. Практикум и вопросы для самоконтроля

6.1. Дать определение понятию "случайный вектор".

6.2. Дать определение понятию "интегральная функция распределения случайного вектора".

6.3. Какими свойствами обладает интегральная функция распределения случайного вектора?

6.4. Написать выражение для вычисления вероятности попадания двухкомпонентного случайного вектора (X,Y) на заданный прямоугольный участок по известной интегральной функции $F(x,y)$, если левый нижний угол участка имеет координаты (x_1,y_1), а верхний правый – (x_2,y_2).

6.5. Что представляет собой плотность распределения двумерного случайного вектора?

6.6. Привести формулу для обратного преобразования плотности распределения двумерного случайного вектора в интегральную функцию.

6.7. Что с геометрической точки зрения означает 1-е свойство плотности распределения двумерного случайного вектора?

6.8. Сформулировать 2-е свойство плотности распределения двумерного случайного вектора.

6.9. Что с геометрической точки зрения означает 3-е свойство плотности распределения двумерного случайного вектора?

6.10. Доказать 2-е свойство плотности распределения случайного двумерного вектора.

6.11. Дать определение понятию "условный закон распределения" для двумерного случайного вектора.

6.12. Какие случайные величины являются независимыми?

6.13. Задан закон распределения случайного вектора $f(x_1,x_2,x_3)$. Найти $F(x_1,x_2,x_3)$, $F(x_1)$, $f(x_2,x_3)$, $f(x_2)$, $f(x_1/x_2,x_3)$, $f(x_1,x_3/x_2)$.

6.14. Дать определение понятию "математическое ожидание случайного вектора".

6.15. Дать определение понятию "дисперсия случайного вектора".

6.16. Дать определение понятию "корреляционный момент двумерного случайного вектора".

6.17. Привести формулы для определения корреляционного момента двумерного случайного вектора $Z = (X,Y)$ для непрерывных и дискретных компонент.

6.18. Что характеризует корреляционный момент двумерного случайного вектора?

6.19. Что характеризует коэффициент корреляции?

6.20. Привести формулу для расчета коэффициента корреляции.

6.21. Какие значения может принимать коэффициент корреляции?

6.22. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y, связанных линейной зависимостью $X = 3Y - 5$?

6.23. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y, связанных линейной зависимостью $X = -5Y + 2$?

6.24. Сформулировать теорему о математическом ожидании неслучайной величины.

6.25. Сформулировать теорему о дисперсии неслучайной величины.

6.26. Можно ли постоянный коэффициент при случайной величине выносить за знак математического ожидания?

6.27. Можно ли постоянный коэффициент при случайной величине выносить за знак дисперсии?

6.28. Сформулировать теорему о математическом ожидании суммы случайных величин.

6.29. Чему равно математическое ожидание линейной функции случайного аргумента?

6.30. Сформулировать теорему о дисперсии суммы двух случайных величин.

6.31. Чему равна дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин?

6.32. Чему равна дисперсия линейной функции случайного аргумента?

6.33. Сформулировать теорему о математическом ожидании произведения двух случайных величин.

6.34. Чему равно математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин?

6.35. Каким образом вычисляется дисперсия произведения двух независимых случайных величин?

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

7.1. Закон больших чисел

7.1.1. *Теорема Бернулли*

Если проводится n независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие A появляется с вероятность $P(A) = p$, то относительная частота μ/n появления события A (μ – число появлений A) при большом n приближенно равна вероятности p:

$$\frac{\mu}{n} \approx p .$$

Приведенное высказывание можно уточнить следующим образом: $\frac{\mu}{n} \to p$ при $n \to \infty$, если для любого ε > 0 и для достаточно больших n соотношение

$$\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon \qquad (7.1)$$

выполняется с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n. Математическая запись данного утверждения имеет вид:

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty . \qquad (7.2)$$

Выражение (7.2) является формальным содержанием *теоремы Бернулли,* известной как *закон больших чисел*.

Теорема 7.1 (*теорема Бернулли*). С вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от её вероятности.

Заметим, что теорема не утверждает, что соотношение (7.1) достоверно, однако, если n достаточно велико, то вероятность его выполнения близка к 1 (например, 0.98 или 0.999), что **практически достоверно.** Другими словами, если проводится эксперимент, состоящий из достаточно большого числа n испытаний, то можно быть уверенным, что соотношение (7.1) будет выполнено.

Примечание. Авторы рекомендуют читателю проверить последнее утверждение с помощью эксперимента с бросанием монеты (событие А – выпадение «орла») или бросанием игральной кости (событие А – выпадение четного числа очков).

7.1.2. *Закон больших чисел в форме Чебышева*

7.1.2.1. Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева. При любом $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\xi - M[\xi]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}, \qquad (7.3)$$

т.е. абсолютное отклонение случайной величины от её математического ожидания больше или равно ε с вероятностью, не большей отношения дисперсии этой случайной величины к квадрату ε.

Из неравенства (7.3) следует закон больших чисел в форме Чебышева.

7.1.2.2. Теорема Чебышева

Одно из основных утверждений закона больших чисел состоит в том, что значение среднеарифметического $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ случайных величин с равными математическими ожиданиями $M[\xi_i] = a$ при большом n оказывается приближенно равным a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \approx a .$$

В дальнейшем будем говорить, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to a$ при $n \to \infty$, если для любого $\varepsilon>0$ и достаточно больших n соотношение

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon \qquad (7.4)$$

выполняется с вероятностью, стремящейся к единице с ростом n. Данное высказывание записывается следующим образом:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1 \text{ при } n \to \infty \ .$$

Это одно из утверждений закона больших чисел. Заметим, что, как и теорема Бернулли, оно не означает, что соотношение (7.4) достоверно. Однако, если n достаточно велико, то вероятность его выполнения близка к 1, например, 0.98 или 0.999, что означает его **практическую достоверность.** Приведем полную формулировку одной из теорем закона больших чисел – *теорему Чебышева*.

Теорема 7.2 (***теорема Чебышева***). Если $\xi_1,..,\xi_n,..$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной: $D[\xi_1] < c, \quad D[\xi_2] < c, \quad \ldots, \quad D[\xi_n] < c,$ то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right\} \to 1 \text{ при } n \to \infty \, .$$

7.1.2.3. Проверка закона больших чисел

Проверка соотношения (7.4) с помощью различных экспериментов, как правило, приводит к положительному результату, т.е. к его выполнению. Однако следует обратить внимание на имеющиеся случаи нарушения закона больших чисел.

Рассмотрим случайную величину, распределенную по закону Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \tag{7.5}$$

Заметим, что плотность симметрична относительно нуля, однако, 0 не является математическим ожиданием. Это распределение не имеет математического ожидания. Напомним, что математическим ожиданием является величина $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$, если $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)dx < \infty$. Но последнее условие для распределения Коши не выполняется. Как следствие, для последовательности независимых случайных величин, распределенных по закону Коши (7.5), закон больших чисел не выполняется. Если бы среднее арифметическое $\overline{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ сходилось с ростом n к какой-либо константе, то, в силу симметрии распределения, такой константой мог быть только 0. Однако 0 не является точкой сходимости. Действительно, можно показать, что при любом ε >0 и при любом сколь угодно большом n

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| > \varepsilon \tag{7.6}$$

с вероятностью $P = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\varepsilon$.

Поясним сказанное: можно показать, что $\overline{\xi}_n$ распределена по закону (7.5), а функция распределения для (7.5) есть arctg x. Эта вероятность, как видно, не стремится к 0 с ростом n. Например, если ε = 0.03, то вероятность выполнения (7.6) равна приближенно $P \approx 0.98$, т.е. событие (7.6) практически достоверно, и можно уверенно ожидать его выполнения с одного раза. Если ε =1, то вероятность (7.6) равна 0.5, и выполнение его хотя бы 1 раз можно уверенно ожидать, проделав 7 экспериментов (т.к. вероятность невыполнения ни разу равна $(0.5)^7 = 1/128$). И это при любом фиксированном n, например, n = 200. Экспериментальная проверка (рис. 7.1) подтверждает сказанное. Обратите внимание на то, что имеются редкие наблюдения, отстоящие очень далеко от центра распределения – точки 0.

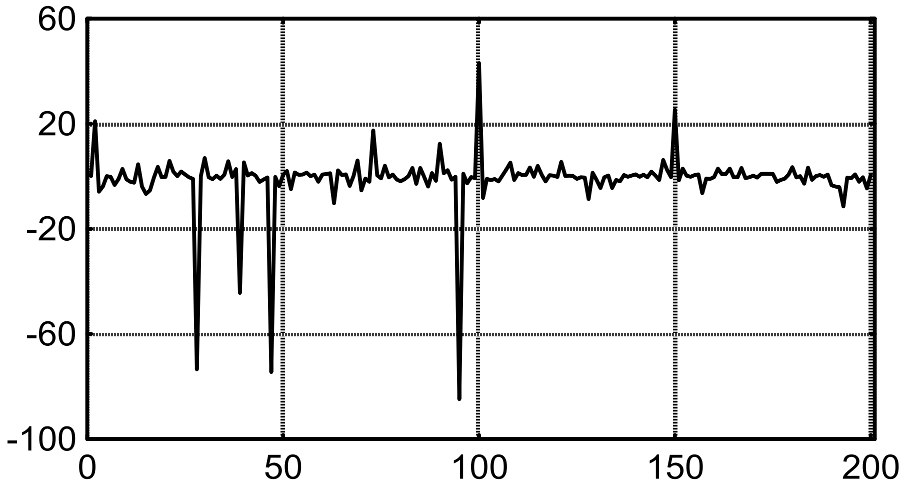


Рис. 7.1. Выборка наблюдений, распределенных по закону Коши (n = 200)

7.1.2.4. Сжатие распределения с ростом числа слагаемых

Закон больших чисел в форме Чебышева означает, что распределение случайной величины

$$\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

сжимается с ростом n. Если математические ожидания одинаковы, т.е. $M\xi_i = a$, то сжатие происходит в окрестности точки a.

Убедиться в сжатии можно, наблюдая гистограммы при различных значениях n (например, для n =10, 40, 160, 640). Сгенерируем k раз (например, хотя бы k =20) случайную величину $\overline{\xi}_n \equiv \overline{\xi}: \ \overline{x}_1,..,\overline{x}_k$ и построим для каждой такой выборки средних гистограмму. Сравнивая гистограммы для различных n, можно легко заметить сжатие (табл. 7.1 и рис. 7.2).

Таблица 7.1. Разброс средних вокруг точки a = 0,5

n	$\overline{x}$ min	$\overline{x}$ max	W
10	0.371	0.687	0.32
40	0.418	0.606	0.19
160	0.472	0.550	0.08
320	0.523	0.469	0.05

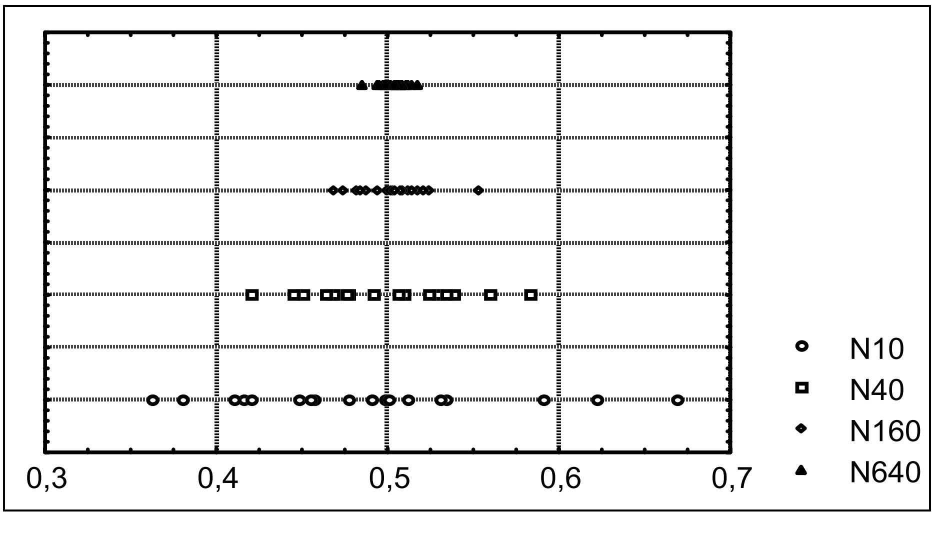


Рис. 7.2. Гистограммы разброса средних вокруг точки a = 0,5 при разных n

7.2. Усиленный закон больших чисел

7.2.1. Теорема Бореля

Теорема 7.3 (*теорема Бореля*). Относительная частота $f_n \equiv \dfrac{\mu_n}{n}$ появления случайного события A с ростом числа n независимых испытаний стремится к истинной вероятности p события A

$$\frac{\mu_n}{n} \to p \qquad (7.7)$$

с вероятностью 1.

Другими словами, при любом эксперименте с бесконечным числом испытаний имеет место сходимость последовательности f_n к p.

В справедливости сказанного можно убедиться с помощью эксперимента по бросанию монеты или игральной кости. В последнем случае для упрощения и убыстрения эксперимента следует рассматривать событие A_1 (появление нечетного числа очков) или A_2 (появление четного числа очков).

На рис. 7.3 приведены три графика относительных частот f_n выпадения герба при бросании монеты, полученных в результате натурных испытаний при n=50; на рис. 7.4 – при n=500.

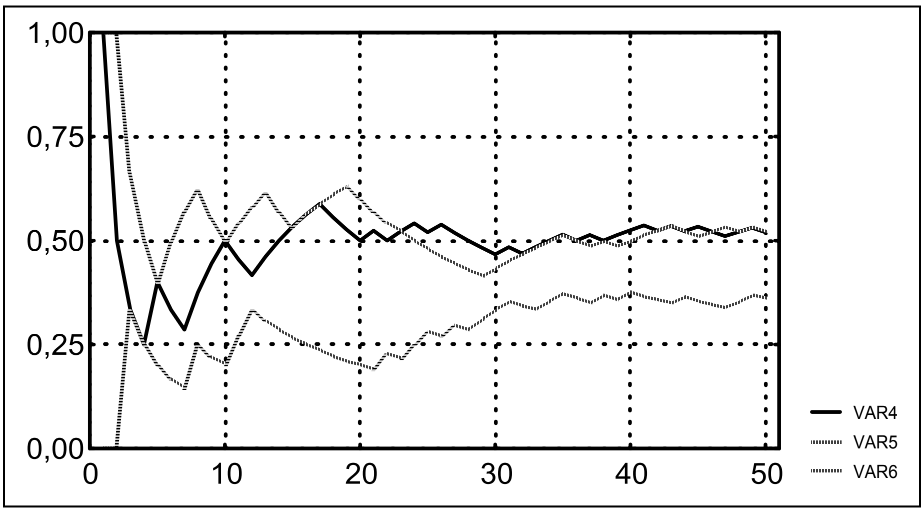


Рис. 7.3. Относительная частота выпадения герба при изменении n от 1 до 50

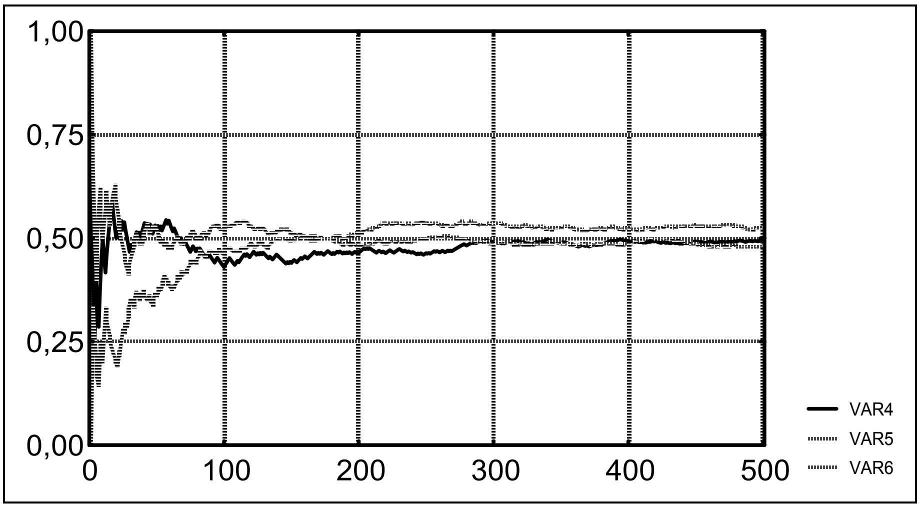


Рис. 7.4. Относительная частота выпадения герба при изменении n от 1 до 500

Графики убедительно показывают стремление относительных частот к истинной вероятности 0,5. Причем, чем больше число испытаний, тем очевиднее приближение f_n к p.

Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1,\xi_2,..,\xi_n$ подчиняется усиленному закону больших чисел, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\to 0 \quad \text{при } n\to\infty \tag{7.8}$$

с вероятностью 1.

В частном случае, при равных математических ожиданиях, $M[\xi_i]=a$, это означает

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\to a \quad \text{при } n\to\infty \tag{7.9}$$

с вероятностью 1.

На рис. 7.5 приведены графики результатов трех экспериментов по отслеживанию последовательностей средних арифметических случайных величин ξ_i, равномерно распределенных в интервале (0;1), когда i изменяется от 1 до 50; на рис. 7.6 – от 1 до 500. Графики убедительно демонстрируют стремление средних арифметических к математическому ожиданию 0.5 с ростом n.

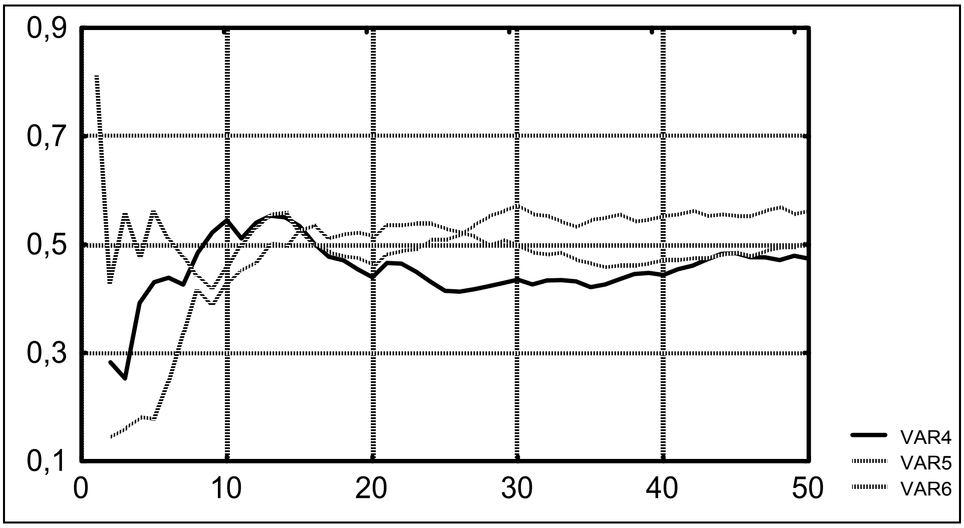


Рис. 7.5. Графики средних арифметических для равномерно распределенных случайных величин на интервале (0; 1) в зависимости от их количества $i = \overline{1,50}$

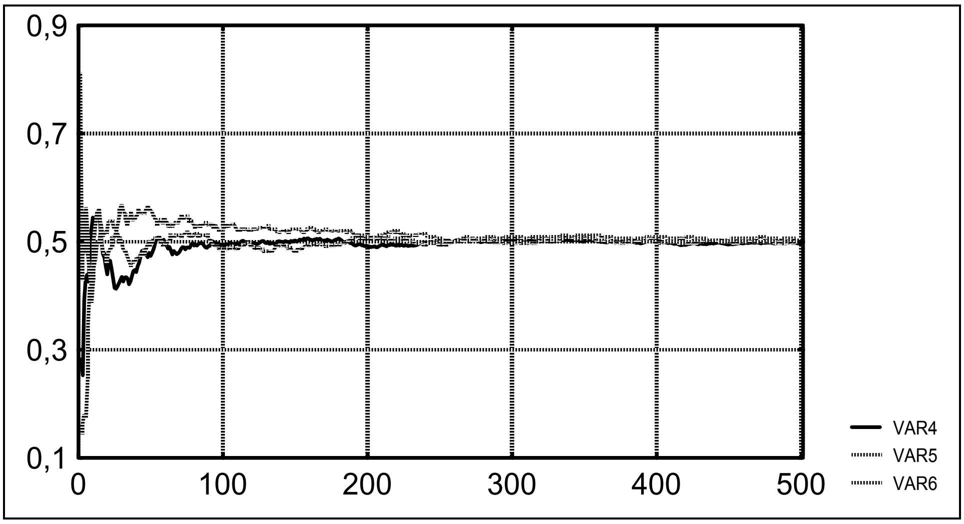


Рис. 7.6. Графики средних арифметических для равномерно распределенных случайных величин на интервале (0; 1) в зависимости от их количества ($i = \overline{1,500}$)

Достаточное условие выполнения (7.8) дает *теорема Колмогорова.*

7.2.2. *Теорема Колмогорова*

Теорема 7.4 (*теорема Колмогорова*). Если последовательность взаимно независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{n^2}\sum_{n=0}^{\infty} D[\xi_n] < \infty,$$

то она подчиняется усиленному закону больших чисел.

Для независимых и одинаково распределенных случайных величин теорема Колмогорова трансформируется в более простую теорему.

Теорема 7.5 (***теорема Колмогорова в упрощенной трактовке***). Необходимым и достаточным условием для применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых случайных величин является существование математического ожидания.

7.2.3. *Основная теорема статистики*

Пусть $x_1, x_2,...,x_n$ – выборка из n независимых наблюдений над случайной величиной X с теоретической (истинной) функцией распределения $F(x)$. Расположим наблюдения в порядке возрастания; получим вариационный ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.

Определим функцию эмпирического распределения

$$F_n^*(x) \equiv F_n^*(x : x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\mu_n(x)}{n},$$

где $\mu_n(x)$ – число тех наблюдений, для которых $x>x_i$. Ясно, что $F_n^*(x)$ – ступенчатая функция; это функция распределения, которое получается, если значениям $x_1,...,x_n$ присвоить вероятности, равные $1/n$. К тому же, $F_n^*(x)$ – функция случайная, так как зависит от наблюдений $x_1,...,x_n$.

Теорема 7.6 (***теорема Гливенко***). С ростом n максимальное абсолютное отклонение эмпирической функции распределения от теоретической стремится к нулю с вероятностью 1:

$$P\left(\sup_x | F_n^*(x) - F(x) | \underset{n\to\infty}{\to} 0\right) = 1.$$

Проиллюстрируем эту теорему на примерах наблюдений случайной величины X, распределенной по равномерному закону на интервале (0; 1), при числе испытаний n=10 (рис. 7.7), n=40 (рис. 7.8) и n=160 (рис. 7.9) .

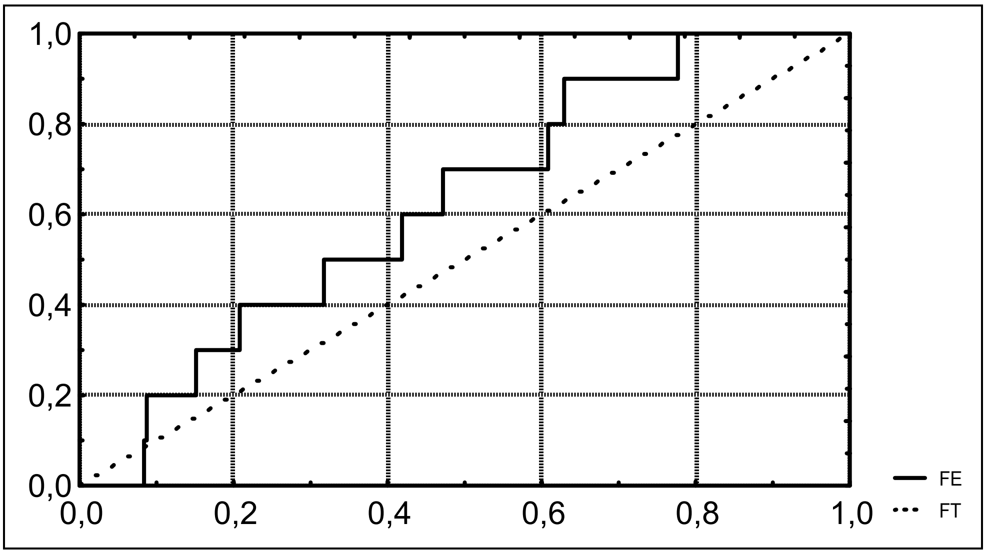


Рис. 7.7. Функции эмпирического FE и теоретического FT распределений равномерно распределенной случайной величины X при числе наблюдений n=10

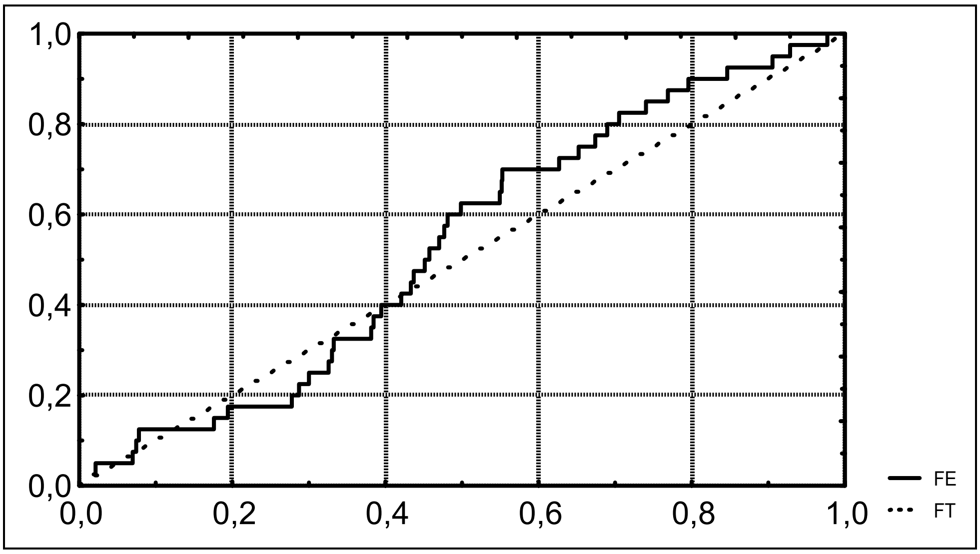


Рис. 7.8. Функции эмпирического FE и теоретического FT распределений равномерно распределенной случайной величины X при числе наблюдений n = 40

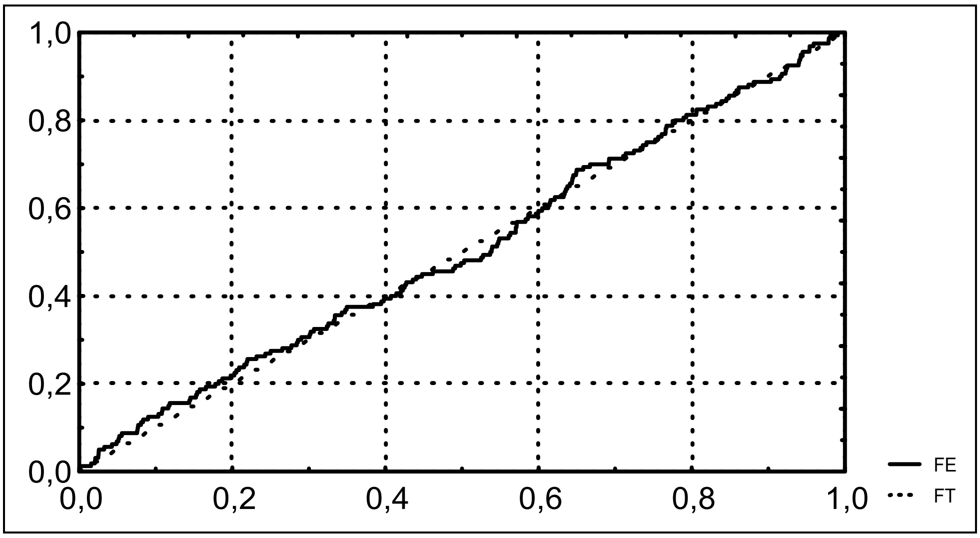


Рис. 7.9. Функции эмпирического FE и теоретического FT распределений равномерно распределенной случайной величины X при числе наблюдений $n = 160$

7.3. Центральная предельная теорема

7.3.1. *Содержание центральной предельной теоремы*

Закон больших чисел утверждает, что при $n \to \infty$ среднее арифметическое случайных величин ξ_i с равными математическими ожиданиями стремится к их математическому ожиданию

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to a ,$$

где $a = M[\xi_i]$.

Центральная предельная теорема утверждает нечто большее, а, именно, что при $n\to\infty$ распределение среднего арифметического случайных величин (при многократном суммировании среднее арифметическое есть случайная величина) приближается к нормальному распределению с параметрами a (математическое ожидание) и σ^2/n (дисперсия) :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(a,\frac{\sigma^2}{n}) , \qquad (7.10)$$

где $\sigma^2=D[\xi_i]$.

При нормировании суммы предельная теорема записывается следующим образом:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Приведем формулировку центральной предельной теоремы в форме Линдеберга.

7.3.2. Теорема Линдеберга

Теорема 7.7 (***теорема Линдеберга***). Если последовательность взаимно независимых случайных величин ξ_1, $\xi_2,\ldots$, $\xi_n,\ldots$ при любом постоянном $\tau>0$ удовлетворяет *условию Линдеберга*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) = 0\ , \qquad (7.11)$$

где $a_k = M[\xi_k]$, $B_n^2 = D\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right]$, то при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)}{\sqrt{D\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right]}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\ , \qquad (7.12)$$

т.е. нормированная сумма случайных величин ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_n распределена по нормальному закону с параметрами 0 (математическое ожидание) и 1 (дисперсия) .

7.3.3. *Теорема Ляпунова*

Условие Линдеберга (7.11) довольно универсально, но неудобно при практической проверке. Вместо него целесообразно использовать *условие Ляпунова*: при некотором $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left|\xi_k-a_k\right|^{2+\delta}\right]=0\,. \tag{7.13}$$

Для нормированных величин условие Ляпунова имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left|\alpha_k\right|^{2+\delta}\right]=0\,. \tag{7.14}$$

Теорема 7.8 (*теорема Ляпунова – центральная предельная теорема в форме Ляпунова*). Если $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ – сумма независимых случайных величин, $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$ и выполняется условие (7.13), то распределение случайной величины s_n приближается к нормальному распределению с параметрами A_n и B_n^2.

На практике чаще всего используется условие Ляпунова

а) при δ=1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{3}}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left|\xi_k-a_k\right|^{3}\right]=0\,;$$

б) при δ=2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{4}}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left|\xi_k-a_k\right|^{4}\right]=0\,.$$

7.3.4. *Сумма одинаково распределенных случайных величин*

Центральным предельным теоремам подчинены последовательности случайных величин с различными законами распределения. На практике чаще имеет место более простой случай – последовательности случайных величин с одинаковыми законами распределения или последовательности реализаций одной и той же случайной величины.

Следствие центральной предельной теоремы. Если независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n одинаково распределены и имеют конечную отличную от нуля дисперсию, то выполняются условия (7.12) и (7.13). При этом распределение суммы $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ с ростом n приближается к нормальному с параметрами $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$.

Убедимся статистически в том, что сумма нескольких случайных величин распределена приближенно по нормальному закону. Сделаем это на примере суммы

$$S = \sum_{k=1}^{m} x_k \tag{7.15}$$

шести (m = 6) независимых случайных величин, имеющих *beta*-распределение с параметрами $a=b=0.5$, т.е. с плотностью распределения

$$p(x \mid a,b) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\ , \tag{7.16}$$

где $B(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,\mathrm{d}z$ – *beta*-функция.

Плотность распределения слагаемых при выбранных значениях параметров имеет U-образный вид, весьма далекий от нормального. Убедимся в этом, построив гистограмму плотности (рис. 7.10).

Чтобы **статистически** оценить закон распределения для суммы S, следует многократно (N раз, например, N=500) промоделировать суммирование: получим $S_1, S_2,\ldots,S_N$ – выборку для суммы; для этой выборки построим гистограмму и сравним ее визуально с нормальной плотностью.

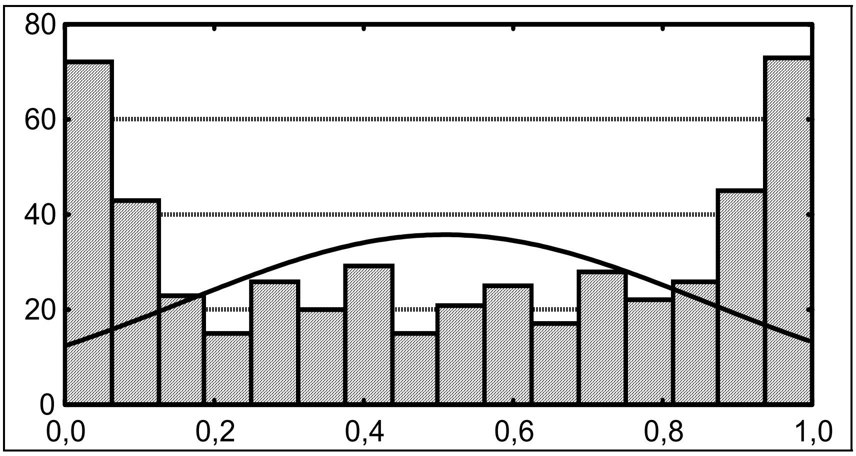


Рис. 7.10. Гистограмма одного слагаемого

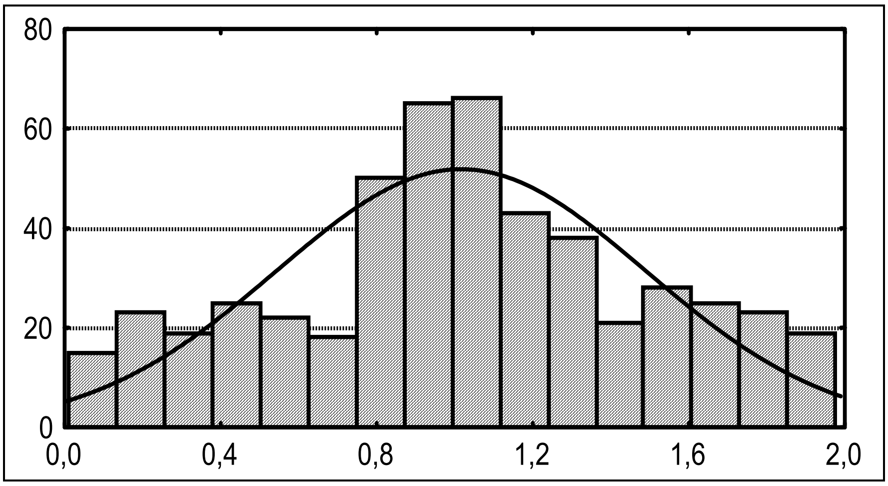


Рис. 7.11. Гистограмма суммы двух слагаемых

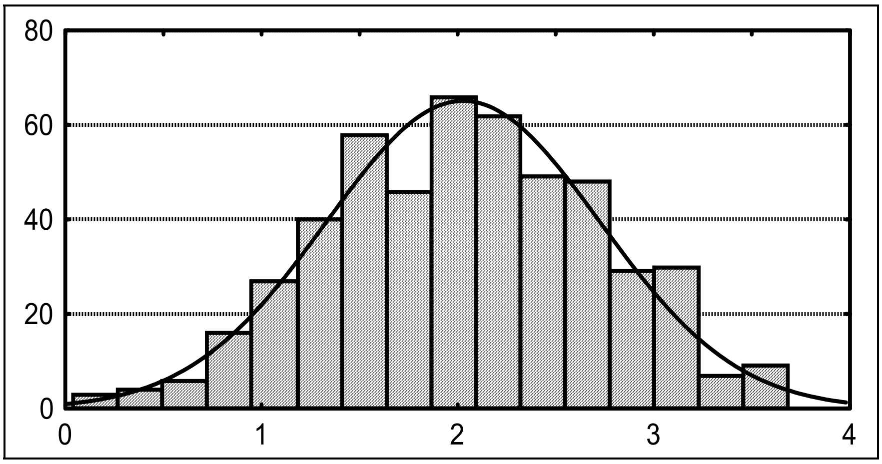


Рис. 7.12. Гистограмма суммы четырех слагаемых

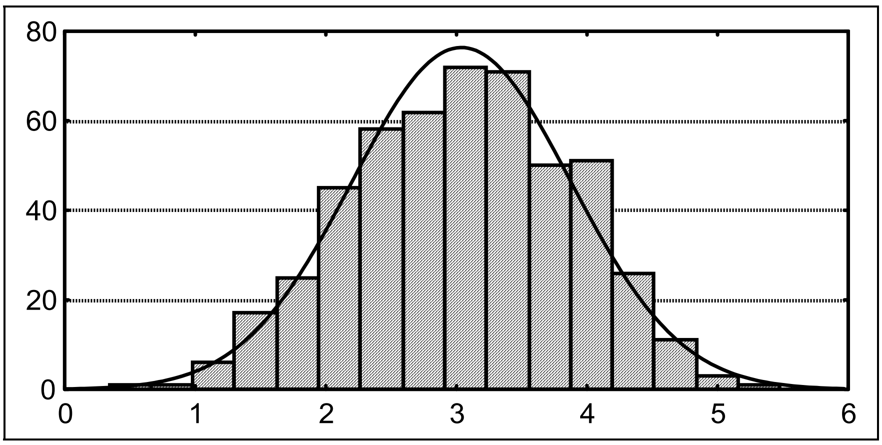


Рис. 7.13. Гистограмма суммы шести слагаемых

В заключение напомним, что в соответствии с центральной предельной теоремой распределение суммы случайных величин сходится к нормальному и в том случае, когда слагаемые распределены по ***различным*** законам.

7.4. Практикум и вопросы для самоконтроля

7.1. Сформулировать теорему Бернулли.

7.2. Привести неравенство Чебышева и пояснить его смысл.

7.3. Сформулировать теорему Чебышева.

7.4. Как ведет себя плотность распределения среднеарифметического значения случайной величины с ростом числа слагаемых по сравнению с плотностью распределения самой случайной величины?

7.5. Сформулировать теорему Бореля.

7.6. Сформулировать теорему Колмогорова.

7.7. Сформулировать теорему Колмогорова в упрощенной постановке.

7.8. Сформулировать теорему Гливенко (*основную теорему статистики*).

7.9. Что утверждает центральная предельная теорема?

7.10. Сформулировать теорему Ляпунова.

7.11. В чем заключается следствие центральной предельной теоремы?

О Т В Е Т Ы

1.1. Основная цель дисциплины – способствовать дальнейшему повышению уровня фундаментальной математической подготовки студентов. **1.2.** Методы "Теории вероятностей" используется в теории надежности; теории массового обслуживания; теоретической физике; геодезии; астрономии; теории стрельбы; теории ошибок наблюдений; теории автоматического управления; общей теории связи; медицинской и технической диагностиках; теории распознавания образов; радиолокационной технике; стохастическом программировании и во многих других теоретических и прикладных науках. **1.3.** Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей однородных случайных явлений. **1.4.** Явление считается случайным, если нельзя учесть все существенные факторы, влияющие на его протекание. **1.5.** Событием является всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. **1.6.** Под опытом понимают некоторую совокупность условий, при которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. **1.7.** Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности появления события в результате нового опыта. **1.8.** Достоверным называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти. **1.9.** Вероятность достоверного события равна единице. **1.10.** Невозможным называется событие, которое в результате опыта не может произойти. **1.11.** Вероятность невозможного события равна нулю. **1.12.** Случайным называется событие, которое при многократном повторении опыта в результате одних из них происходит, а в других нет. **1.13.** Вероятность случайного события принимает значения из диапазона, ограниченного нулем и единицей. **1.14.** Несколько событий в опыте называются равновозможными, если по условиям симметрии опыта нет основания считать появление какого-либо из них более предпочтительным по отношению к любому другому. **1.15.** Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут произойти одновременно в одном опыте. **1.16.** Полной группой событий называются несколько попарно несовместных событий, одно из которых в результате опыта непременно должно произойти. **1.17.** Исходы опыта называются случаями, если они образуют полную группу несовместных равновозможных событий. **1.18.** Случаи называются благоприятствующими событию, если их появление влечет за собой появление события. **1.19.** $P(A) = m/n$, где n – общее количество случаев в опыте, m – количество случаев, благоприятствующих событию А. **1.20.** Обозначим: А – событие, которое заключается в появлении хотя бы одной "решки" при бросании двух монет. Тогда $P(A)$ – искомая вероятность. Возможными исходами опыта являются четыре случая. Первый случай: на первой монете – "орел", на второй также "орел". Второй случай: на первой монете – "орел", на второй – "решка". Третий случай: на первой монете – "решка", на второй – "орел". Четвертый случай: на первой монете – "решка", на второй также "решка". Следовательно, общее число возможных исходов опыта $n = 4$. Из четырех случаев второй, третий и четвертый являются благоприятствующими рассматриваемому событию. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = 3$. Подставляя в классическую формулу определения вероятности найденные значения для n и m, получим: $P(A) = m/n = 3/4$. **1.21.** $P(A) = m/n = 3/37$. **1.22.** $P(A) = m/n = 2/4 = 1/2$. **1.23.** $P(A) = m/n = 1/4$. **1.24.** $P(A) = m/n = 12/32 = 3/8$. **1.25.** $P(A) = m/n = (25\text{-}3\text{-}2\text{-}1)/25 = 19/25$. **1.26.** В комбинаторике различают три вида различных соединений: перестановки, размещения и сочетания. **1.27.** Перестановками из m элементов называют такие их соединения, которые отличаются друг от друга только порядком следования элементов. **1.28.** Общее число перестановок из m элементов вычисляется по формуле $P_m = m!$ **1.29.** $P_5 = 5! = 1*2*3*4*5 = 120$. **1.30.** Размещениями из n элементов по m называют такие соединения m элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом или порядком их следования. **1.31.** Общее число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле $A_n^m = n!/(n-m)!$ **1.32.** $A_5^3 = 5!/(5\text{-}3)! = (1*2*3*4*5)/(1*2) = 60$. **1.33.** Сочетаниями из n элементов по m называют такие соединения m элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом. **1.34.** Общее число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле $C_n^m = n! / [m!(n-m)!]$. **1.35.** $C_5^3 = 5! / [3*(5-3)!] = (1*2*3*4*5) / [(1*2*3)*(1*2)] = 10$. **1.36.** Искомое количество способов представляет собой число перестановок из 30 элементов, т.е. 30! **1.37.** Искомое количество способов представляет собой число размещений из 8 элементов по 3, т.е. $A_8^3 = 8!/(8\text{-}3)! = 336$. **1.38.** Искомое количество способов представляет собой число сочетаний из 10 элементов по 5, т.е. $C_{10}^5 = 10! / 5!*[(10-5)!] = 252$. **1.39.** Число перестановок из 3 элементов, т.е. $P_3 = 6$. **1.40.** Число размещений из 4 элементов по 3, т.е. $A_4^3 = 24$. **1.41.** $A_4^3 - A_3^2 = 18$. **1.42.** $A_2^2 + A_2^1 + A_2^0 = 5$. **1.43.** $A_3^3 + A_3^2 + A_3^1 + A_3^0 = 16$. **1.44.** $A_6^1 + A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 + A_6^6 = 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$. **1.45,** ***а***) $A_5^2 + A_5^2 = = 40$; ***б***) $P_5 + P_5 = 240$. **1.46,** ***а***) $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96$; ***б***) $P_5 - P_3 = 5! - 3! = 114$;

в) $P_5 - P_2 =$ 5! – 2! = 118. **1.47.** $P(A) = m/n = 1/90$. **1.48, *а*)** 1/720 ; ***б*)** 1/120. **1.49.** 1/5! = 1/120. **1.50.** 3!/6! = 1/120. **1.51.** (2! * 2!) / 6! = 1/60. **1.52, *а*)** 1/60; ***б*)** 1/10. **1.53.** $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^4 * C_{10}^2}{C_{25}^6} = 0{,}0762$. **1.54.** Пусть A – событие, которое заключается в том, что играющий вычеркнет 6 из 6 выигрышных чисел. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{36}^6} = \frac{1}{1947792} \approx 0{,}0000005$. **1.55.** Пусть A – событие, которое заключается в том, что играющий вычеркнет 3 из 6 выигрышных чисел. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3 * C_{30}^3}{C_{36}^6} = \frac{20 * 4060}{1947792} \approx 0{,}0416882$. **1.56.** Пусть А – событие, которое заключается в том, что играющий получит денежный выигрыш. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^6 * C_{30}^0 + C_6^5 * C_{30}^1 + C_6^4 * C_{30}^2 + C_6^3 * C_{30}^3}{C_{36}^6} =$

$= \frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 30 + 15 \cdot 435 + 20 \cdot 4060}{1947792} \approx 0{,}0451311$. **1.57.** Общее число вариантов размещения 10 человек на 10 местах представляет собой число перестановок из 10 элементов (см. задачу **1.36**), т.е. n = 10! = 4082400. Пусть два определенных лица занимают 1-е и 2-е места, тогда остальные могут разместиться 8! способами. Кроме того, два определенных лица могут сидеть на местах 2 и 3, 3 и 4 и т.д., т.е. число вариантов возрастает в 10 раз. К тому же эти лица могут поменяться местами. Следовательно, число благоприятных исходов m = 8!*10*2 = 907200. Тогда искомая вероятность $P = m/n \approx 0{,}222$. **1.58, *а*)** 1/90; ***б*)** 1/81. **1.59.** Элементарным называют событие, которому соответствует только один результат (исход) опыта. **1.60.** Множество элементарных событий, составляющих полную группу несовместных событий, называется пространством событий. **1.61.** Произвольный набор элементарных событий из пространства событий **U** является случайным событием. **1.62.** Элементарные события, которым соответствуют элементы из подмножества случайного события, называются благоприятствующими этому событию. **1.63.** Если событию не соответствует ни один элемент из пространства событий, то оно называется невозможным. **1.64.** Если событию соответствуют все элементы из пространства событий, то оно называется достоверным. **1.65.** Суммой двух событий A и B называют такое событие, которое происходит тогда, когда происходит или событие A, или событие B, или события A и B одновременно в одном опыте. **1.66.** Произведением двух событий A и B называют такое событие, которое происходит тогда, когда происходит и событие A, и событие B одновременно в одном опыте. **1.67.** $S = A_2 + A_4 + {}$ $+ A_5 + A_6$. **1.68.** $S = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6$. **1.69.** $S = A_5B_6C_6 + A_6B_5C_6 + A_6B_6C_5$. **1.70.** $S = A_5B_6C_6 + A_6B_5C_6 + A_6B_6C_5 + A_6B_6C_6$. **1.72, *а*)** 30/36; ***б*)** 6/36. **1.73.** Пространство событий:

	В1	**В2**	**В3**
П1	**1 : 1**	**1 : 2**	**1 : 3**
П2	**2 : 1**	**2 : 2**	**2 : 3**
П3	**3 : 1**	**3 : 2**	**3 : 3**

Здесь П1, П2, П3 – число пальцев, показываемых первым игроком; В1, В2, В3 – число пальцев, показываемых вторым игроком. ***а*)** Вероятность того, что общее число показанных пальцев нечетное, равна 4/9. ***б*)** Вероятность того, что общее число показанных пальцев меньше двух, равна 0. ***в*)** Вероятность того, что общее число показанных пальцев простое, равна 5/9. **1.74.** Пространство событий в условиях задачи соответствует таблице:

	В1	**В2**	**В3**
П1	1 : 1	1 : 2	1 : 3
П2	2 : 1	2 : 2	2 : 3
П3	3 : 1	3 : 2	**3 : 3**

Здесь П1, П2, П3 – число пальцев, показываемых первым игроком (первая цифра в паре П : В); В1, В2, В3 – число пальцев, показываемых вторым игроком (вторая цифра в паре П : В). ***а*)** Вероятность того, что, по крайней мере, один игрок показал меньше трех пальцев, равна 8/9, поскольку общее количество элементарных событий равно 9 (число клеток с парами чисел П : В), а число благоприятствующих исходов равно 8 (все клетки с парами чисел П : В, кроме клетки 3 : 3. ***б*)** Чтобы определить вероятность того, что первый игрок показал один палец при условии, что общее число показанных пальцев меньше или равно четырем, сначала необходимо построить новое пространство событий согласно условию. Ему соответствуют выделенные клетки в таблице:

	В1	**В2**	**В3**
П1	**1 : 1**	**1 : 2**	**1 : 3**
П2	**2 : 1**	**2 : 2**	2 : 3
П3	3 : 1	3 : 2	3 : 3

Количество благоприятствующих событий на новом пространстве событий равно 3 (строка П1 таблицы). По классической формуле искомая вероятность будет равна 3/6. **1.75.** Пространство событий:

	В1	**В5**	**В10**	**В25**
П1		**1 : 5**	**1 : 10**	**1 : 25**
П5	**5 : 1**		**5 : 10**	**5 : 25**
П10	**10 : 1**	**10 : 5**		**10 : 25**
П25	**25 : 1**	**25 : 5**	**25 : 10**	

Здесь П1, П5, П10, П25 – номиналы первой монеты; В1, В5, В10, В25 – номиналы второй монеты. ***а*)** Вероятность того, что обе монеты номиналом меньше 10, равна 2/12; ***б)*** Вероятность того, что мальчик вынул меньше 20 копеек, равна 6/12. **1.76, *а)*** 10/12; ***б)*** 6/12. **1.77.** Операции суммирования и умножения событий обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

2.1. Основными теоремами теории вероятностей называют теорему о вероятности суммы двух событий и теорему о вероятности произведения двух событий. **2.2.** Вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения этих же событий. **2.3.** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей. **2.4.** Два события называются противоположными, если они образуют полную группу несовместных событий. **2.5.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице. **2.6.** События являются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошли другие события или нет. **2.7.** Условной вероятностью называют вероятность одного из зависимых событий, вычисленную при условии, что другое событие произошло. **2.8.** Условная вероятность обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$. **2.9.** Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое произошло. **2.10.** Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей. **2.11.** Под надежностью технической системы понимают вероятность её безотказной работы за определенный период времени. **2.12.** В зависимости от способа соединения элементов системы подразделяют на: последовательные, параллельные, мостовые и смешанные. **2.13.** Вероятность появления хотя бы одного из n независимых совместных событий равна единице минус произведение вероятностей не появления этих событий. **2.14.** Вероятность безотказной работы системы последовательно соединенных элементов равна произведению вероятностей безотказной работы каждого элемента. **2.15.** Вероятность безотказной работы системы из бесконечного числа последовательно соединенных элементов равна нулю. **2.16.** 0,14. **2.17.** 0,7. **2.18, *а)*** 0,188; ***б)*** 0,452; ***в)*** 0,336; ***г)*** 0,024. **2.19, *а)*** 0,6976; ***б)*** 0,9572. **2.20.** Обозначим: A – студент знает первый вопрос; B – студент знает второй вопрос; C – студент знает третий вопрос; D – студент знает все три предложенные ему вопроса; P(А) – вероятность того, что студент знает первый вопрос; $P_A(B)$ – вероятность того, что студент знает второй вопрос при условии, что он также знает первый вопрос; $P_{A*B}(C)$ – вероятность того, что студент знает третий вопрос при условии, что он также знает первый и второй вопросы. Событие D – студент знает все три предложенные ему вопроса – является сложным событием и представляет собой произведение трех событий: $D = A*B*C$. Обобщая теорему 2 на несколько событий, вероятность события D будет определяться выражением $P(A*B*C)= P(A)*P_A(B)*P_{A*B}(C)$, т.е. $P(A*B*C) = (20/25)*(19/24)*(18/23) = 57/115$. **2.21.** Обозначим: событие A – отказ 1-го элемента; событие B – отказ 2-го элемента; событие C – отказ всего устройства. Тогда вероятность безотказной работы 1-го элемента $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, а вероятность безотказной работы 2-го элемента $P(\bar{B}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Вероятность события C – вероятность отказа устройства – определим через противоположное событие: $P(C) = 1 - P(\bar{C}) =$ $= 1 - P(\bar{A} * \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})*P(\bar{B}) = 1 - 0{,}95*0{,}92 = 0{,}126$. **2.22.** Хотя бы одно попадание – это событие, которое заключается в любом возможном исходе при четырех выстрелах, кроме одновременного промаха во всех четырех выстрелах. Поэтому вероятность хотя бы одного попадания при четырех выстрелах, надо искать через вероятность противоположного события, т.е. вероятность одновременного промаха во всех четырех выстрелах. Обозначим: событие A – хотя бы одно попадание при четырех выстрелах; событие $\bar{A}$ — одновременный промах во всех четырех выстрелах; $\bar{A}_1$ – промах при 1-м выстреле; $\bar{A}_2$ – промах при 2-м выстреле; $\bar{A}_3$ – промах при 3-м выстреле; $\bar{A}_4$ – промах при 4-м выстреле; x – вероятность попадания при одном выстреле; $\bar{x}$ – вероятность промаха при одном выстреле. Тогда вероятность хотя бы одного попадания при четырех выстрелах определится как $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1*\bar{A}_2*\bar{A}_3*\bar{A}_4) = 1 - P(\bar{A}_1)*P(\bar{A}_2)*P(\bar{A}_3)*P(\bar{A}_4)$. Считаем, что вероятность промаха (попадания) в цель при каждом выстреле одинакова, т.е. $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) =$ $= \bar{x}$. Тогда $P(A) = 1 - (\bar{x})^4$. По условию задачи $P(A) = 0{,}9984$. Имеем уравнение с одним неизвестным: $0{,}9984 = 1 - (\bar{x})^4$. Откуда $\bar{x} = 0{,}2$. Вероятность попадания при одном выстреле определится как вероятность противоположного события: $x = 1 - \bar{x} = = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. **2.23.** Вероятность безотказной работы системы параллельно соединенных элементов равна единице минус произведение вероятностей отказов элементов. **2.24.** Вероятность безотказной работы системы из бесконечного числа последовательно соединенных элементов равна нулю. **2.25.** Расчет надежности смешанных систем основан на циклическом процессе замены участков системы с однотипным соединением элементов одним элементом с эквивалентной надежностью. **2.26.** $P(A) = p_1^2\ [1-(1-p_2)^2]$. **2.27.** $P(A) = p_3\ [1-(1-p_2)(1-p_1p_2)]$. **2.28.** $P(A) = p_3\ [1-(1-p_1^2p_2)\ (1-p_3)\ (1-p_2^2)]$.

3.1. Формула полной вероятности используется для определения средней вероятности события A, которое может произойти только с одной из полной группы несовместных гипотез (событий), когда известны априорные вероятности гипотез и условные вероятности наступления события A при условии, что реализовалась та или иная гипотеза. **3.2.**

$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$. **3.3.** 0,85. **3.4.** 0,86. **3.5.** Формула Байеса позволяет определять апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез. **3.6.** Если некоторое событие A может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез) H_i ($i=1,2,\ldots,n$) и известны априорные вероятности гипотез $P(H_i)$, условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при условии, что осуществилась та или иная гипотеза, а также известно, что событие A произошло, то апостериорная вероятность гипотезы H_j ($j\in\{1,2,\ldots,n\}$) определяется по формуле $P(H_j/A)=\dfrac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}$. **3.7.** Формула полной вероятности является составной частью формулы Байеса. **3.8.** Формула Байеса применяется в распознавании образов для выявления объектов по их нечеткому изображению, технической диагностике для поиска неисправности, в медицинской диагностике для постановки диагноза больному, в радиолокационной технике для отделения сигнала от шума и во многих других задачах, когда необходимо выявить вероятную причину (гипотезу) происшедшего события. **3.9.** Более вероятной является стрельба из винтовки без оптического прицела, поскольку апостериорная вероятность выстрела из винтовки без оптического прицела (0,558) больше апостериорной вероятности выстрела из винтовки с оптическим прицелом (0,442). **3.10,** ***а***) 0,5; ***б***) 4/15. **3.11.** Введем обозначения: A – событие, которое заключается в попадании двух снарядов в цель при залпе из трех орудий; H_1 – гипотеза, состоящая в промахе первым из орудий; H_2 – гипотеза, состоящая в попадании первым из орудий; B_2 – событие, которое заключается в попадании вторым из орудий; $\overline{B}_2$ – событие, которое заключается в промахе вторым из орудий; B_3 – событие, которое заключается в попадании третьим из орудий; $\overline{B}_3$ – событие, которое заключается в промахе третьим из орудий. Тогда по условию задачи $P(H_2) = 0{,}4$, а противоположная вероятность $P(H_1) = 1 – 0{,}4 = 0{,}6$. Условная вероятность $P(A/H_1)$ – это вероятность того, что первое орудие даст промах, а два остальных – попадание, т.е. $P(A/H_1) = P(H_1B_2B_3) =$ $= 0{,}6*0{,}3*0{,}5 = 0{,}09$. Условная вероятность $P(A/H_2)$ – это вероятность того, что первое орудие даст попадание, а одно из двух оставшихся – промах, т.е. $P(A/H_2) = P(H_2\overline{B}_2B_3) + P(H_2B_2\overline{B}_3) = 0{,}4*(1–0{,}7)*0{,}5 + 0{,}4*0{,}3*(1–0{,}5) = 0{,}2$. Искомую вероятность (апостериорная вероятность промаха первым из орудий) найдем по формуле Байеса: $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)}=$

$= \dfrac{0{,}6 * 0{,}09}{0{,}6 * 0{,}09 + 0{,}4 * 0{,}2} \approx 0{,}4$. **3.12.** Опыты являются независимыми, если вероятность появления некоторого события в одних опытах не зависит от его появления в других опытах. **3.13.** Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) определяется по формуле $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. **3.14.** Рекомендуется использовать формулу Бернулли при числе испытаний, не превышающем числа 10. **3.15.** 0,08192. **3.16.** Обозначим через A событие, которое заключается в появлении *простого* числа при одном бросании игральной кости. Простыми числами на игральной кости являются 1, 2, 3 и 5, т.е. число исходов m, благоприятствующих событию A, равно 4. Общее число исходов при одном бросании игральной кости равно 6. Тогда вероятность появления события A, согласно классической формуле вероятности, определится как $p = m/n = 4/6 = 2/3$. Многократные бросания игральной кости являются независимыми экспериментами, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью $p = 2/3$. Следовательно, искомая вероятность появления события A ровно 5 раз в 8 испытаниях может быть определена с помощью формулы Бернулли: $P_8(5) = C_8^5 p^5 (1-p)^{8-5} = 56*(2/3)^5*(1-2/3)^{8-5} \approx 0{,}2731$. **3.17.** $P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 (1-p)^{4-3} + C_4^4 p^4 (1-p)^{4-4} = 4*0{,}4^3*(1-0{,}4) + 1*0{,}4^4*1 = 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}1792$. **3.18.** Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле $P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – функция Гаусса, $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. **3.19.** Теорема Бернулли позволяет определить точное значение вероятности, а локальная теорема Лапласа – только оценку. **3.20.** Функция Гаусса симметрична относительно оси ординат, поскольку она является четной функцией. **3.21.** Нулю, поскольку аргумент по модулю превышает значение 4. **3.22.** 0,04565. **3.23.** Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле $P_n(k_1, k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа. **3.24.** Интегральная теорема Лапласа предназначена для оценки вероятности того, что число появлений некоторого события при многократном повторении независимых опытов попадет в заданный диапазон. **3.25.** Функция Лапласа имеет центральную симметрию относительно начала системы координат, поскольку является нечетной функцией. **3.26.** Функция Лапласа от аргумента –6,7 равна 0,5, т.к. аргумент по модулю превышает значение 5. **3.27,** ***а*)** 0,8882; ***б*)** 0,8944; ***в*)** 0,1056; ***г*)** 0,1512. **3.28.** Наивероятнейшим числом наступления события *А* в *n* независимых опытах при одинаковой вероятности наступления события *А* в каждом из них называется число k_0, которому соответствует максимальная вероятность $P_n(k)$, то есть число $k_0 = \arg\left(\max\limits_{k=\overline{1,n}}\{P(k)\}\right)$. **3.29.** $np-q \le k_0 \le np+p$. **3.30.** Особенности двойного неравенства: значение правой части превышает значение левой ровно на единицу; k_0 – целое число; внутри диапазона значений $[np–q;\ np+p]$ может находиться только одно целое число, либо два – на его границах. **3.31.** Определение k_0 осуществляют в следующей последовательности. Сначала вычисляют величину np. Если np – целое число, то $k_0 = np$. Если np – не целое число, определяют величину $np+p$. Если $(np+p)$ – целое число, то существует два наивероятнейшего числа: $k_{01}=np+p$ и $k_{02}=k_{01}–1$. Если $(np+p)$ – не целое число, то k_0 – целое число в диапазоне $[np–q;\ np + p]$. **3.32,** ***а*)** 3; ***б*)** 1 и 2; ***в*)** 1.

4.1. Случайной называют величину, которая в результате опыта принимает заранее неизвестное значение. **4.2.** Дискретными называют случайные величины, которые в результате опыта принимает значения из счетного множества (конечного или бесконечного). **4.3.** Непрерывными называют случайные величины, которые в результате опыта принимает значения из непрерывного множества (ограниченного или неограниченного). **4.4.** Закон распределения случайной величины – это соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. **4.5.** Существует две эффективные формы задания закона распределения дискретной случайной величины: ряд распределения и интегральная функция распределения. **4.6.** Ряд распределения представляет собой таблицу, состоящую из двух строк и задающую закон распределения дискретной случайной величины. **4.7.** Искомый ряд распределения:

x_i	0	1	2
p_i	1 / 4	1 / 2	1 / 4

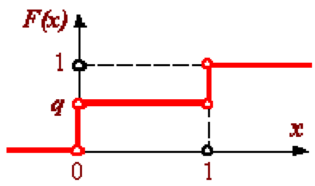
4.8. Искомый ряд распределения:

x_i	0	1	2
p_i	1 / 45	16 / 45	28 / 45

4.9. Интегральная функция распределения случайной величины X – это функция $F(x)$, которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X окажется меньше, чем значение аргумента. **4.10.** Интегральная функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами: интегральная функция от минус бесконечности равна нулю; интегральная функция от плюс бесконечности равна единице; интегральная функция – функция неубывающая. **4.11.** Искомый ряд распределения:

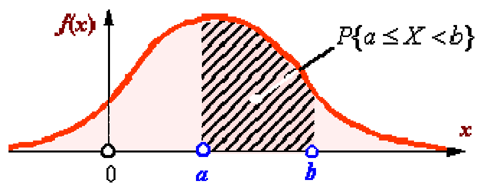
x_i	0	1
p_i	q	p

Здесь $q = 1 - p$. Интегральная функция распределения:



4.12. $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$. **4.13.** Существует две эффективные формы задания закона распределения непрерывной случайной величины: интегральная функция распределения и плотность распределения вероятности. **4.14.** Интегральная функция дискретной случайной величины – ступенчатая функция, т.е. скачкообразно возрастающая функция, а интегральная функция непрерывной случайной величины – монотонно возрастающая функция. **4.15.** Вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю. **4.16.** Плотностью распределения вероятности непрерывной случайной величины называется первая производная от интегральной функции распределения. **4.17.** $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. **4.18.** Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице. **4.19.** Плотность распределения – функция неотрицательная. **4.20.** $P\{a \le X < b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

4.21. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок числовой оси $(a,\ b)$ численно равна площади заштрихованной области на графике плотности распределения .



4.22. Математическое ожидание, мода и медиана. **4.23.** Математическое ожидание – это средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины. **4.24.** Математическое ожидание характеризует смещение значений случайной величины на числовой оси относительно начала координат. **4.25.** $m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. **4.26.** $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$. **4.27.** Модой называют наиболее вероятное значение случайной величины. **4.28.** Медианой называют такое значение Me случайной величины X, для которого справедливо равенство $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$. **4.29.** Нет. **4.30.** Математическое ожидание равно 1,2. Мода равна 2. **4.31.** Начальным моментом k-го порядка называют математическое ожидание k–й степени случайной величины. **4.32.** $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$. **4.33.** $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx$. **4.34.** Центрированной случайной величиной называют отклонение значения случайной величины от её математического ожидания. **4.355.** Центральным моментом s-го порядка называют математическое ожидание s-й степени центрированной случайной величины. **4.36.** $\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i$. **4.37.** $\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)\, dx$. **4.38.** Знак «=». **4.39.** 0. **4.40.** Начальный момент 2-го порядка случайной величины характеризует степень разброса случайной величины вокруг её математического ожидания, а также смещение случайной величины на числовой оси относительно начала координат. **4.41.** $\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i-1}^{n} x_i^2 p_i$. **4.42.** $\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$. **4.43.** Второй начальный момент используется для определения второго центрального момента. **4.44.** Центральный момент 2-го порядка характеризует степень разброса случайной величины вокруг её математического ожидания. **4.45.** Знак «=». **4.46.** $D_x = \alpha_2 - m_x^2$. **4.47.** Среднее квадратичное отклонение представляет собой квадратный корень из дисперсии. **4.48.** Среднее квадратичное отклонение характеризует то же, что и дисперсия. **4.49.** $\alpha_2 = 2{,}16$; $D_x = 0{,}72$; $\sigma_x = 0{,}85$. **4.50.** Построим сначала ряды распределения для случайных величин X_1 и X_2:

x_{1i}	0	1
p_{1i}	0,3	0,7

x_{2i}	0	1
p_{2i}	0,4	0,6

В построенных законах распределения вероятности промахов определяются как вероятности противоположных событий, соответственно: $q_1=1–p_1=1–07=0{,}3$; $q_2=1–p_2=1–0{,}6=0{,}4$. Полученные ряды распределения позволяют построить ряд распределения для случайной величины X=X_1–X_2. Определим сначала возможные значения случайной величины X и соответствующие вероятности: если X_1=0 и X_2=1 то X=–1, а вероятность исхода $q_1 * p_2$=0,18; если X_1=0 и X_2=0 или X_1=1 и X_2=1 то X=0, а вероятность исхода $q_1 * q_2 + p_1 * p_2$ = 0,54; если X_1=1 и X_2=0 то X=1, а вероятность исхода $q_1 * p_2$ = 0,28. Искомый ряд распределения:

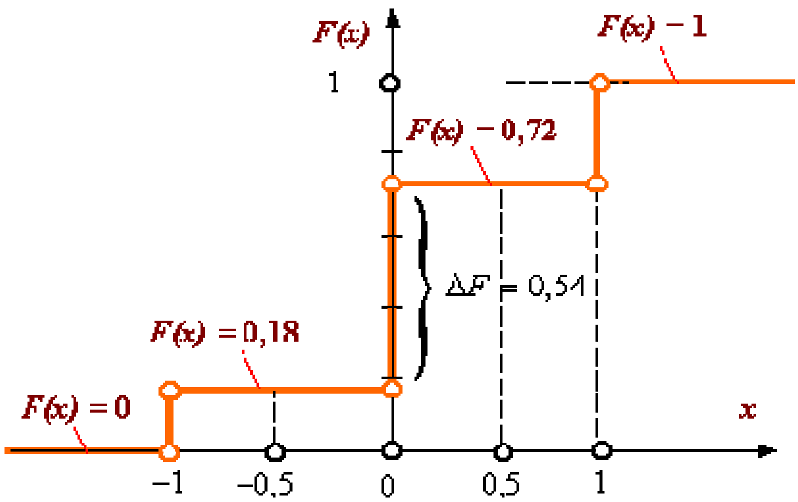
x_i	−1	0	1
p_i	0,18	0,54	0,28

Ряд распределения позволяет построить таблицу и график интегральной функции распределения.

Табличное задание интегральной функции случайной величины X

Индекс диапазона	Диапазон x	$F(x)$
1	$x \le -1$	$F(x) = P\{X<x\} = 0$
2	$-1 \le x<0$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) = 0{,}18$
3	$0 \le x<1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) + P(X=0) =$ $= 0{,}18 + 0{,}54 = 0{,}72$
4	$x>1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) =$ $= 0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$

График интегральной функции:



Математическое ожидание определим по формуле (4.9)

$$m_x = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-1)\cdot 0{,}18 + 0\cdot 0{,}54 + 1\cdot 0{,}28 = 0{,}1.$$

Для определения дисперсии D_x предварительно определим второй начальный момент α_2 по формуле (4.15)

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0{,}18 + 0^2 \cdot 0{,}54 + 1^2 \cdot 0{,}28 = 0{,}46$$

Теперь с помощью формулы связи (4.19) определим дисперсию

$$D_x = c_2 - m_x^2 = 0{,}46 - (0{,}1)^2 = 0{,}45$$

По формуле (4.20) найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67.$$

Вероятность $P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\}$ определим по формуле (4.2) :

$$P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = 0{,}72 - 0{,}18 = 0{,}54$$

Данную операцию целесообразно осуществлять с помощью графика $F(x)$.

4.51. Прежде чем вычислять искомые величины, необходимо определить параметр a в заданной плотности распределения $f(x)$. Для определения параметра воспользуемся 1-м свойством плотности распределения, согласно которому определенный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице. Возьмём интеграл:

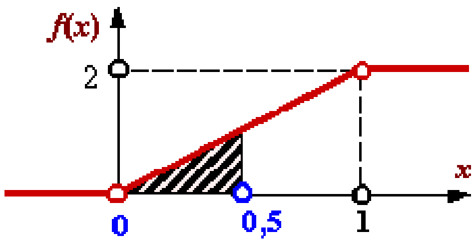
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} ax \cdot dx + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}$$

Затем приравняем результат интегрирования единице: $\frac{a}{2} = 1$. Откуда $a = 2$.

Итоговое выражение для плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1]; \\ 2x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

График $f(x)$:



Для определения интегральной функции воспользуемся обратным преобразованием (4.5). Поскольку плотность распределения является кусочно непрерывной функцией, имеющей три диапазона с различным видом подынтегральной функции, то обратным преобразованием следует воспользоваться три раза:

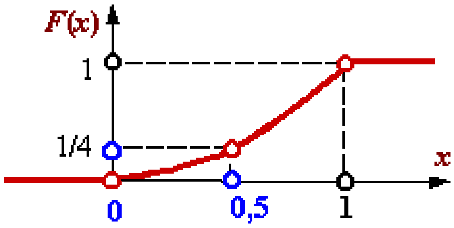
для диапазона $x < 0$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0,$

для диапазона $0 \le x \le 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} 2t\, dt = 0 + t^2\Big|_0^x = x^2;$

для диапазона $x>1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{1} 2t\, dt + \int_{1}^{x} 0 \cdot dt = 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1.$

Таким образом, $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{если} \quad 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$

График интегральной функции $F(x)$:



Для определения математического ожидания воспользуемся формулой (4.10)

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

С целью дальнейшего определения дисперсии D_x определим сначала второй начальный момент:

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^3 dx = \frac{2x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Используя формулу (4.19), связывающую дисперсию с начальными моментами, определим D_x:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

По формуле (4.20) найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

По определению медианы $P\{X<Me\} = P\{X>Me\}$, но $P\{X<Me\} = F(Me) = 0{,}5$. Следовательно, медиану можно найти из уравнения $F(Me) = 0{,}5$, что мы и сделаем:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 2xdx = 0{,}5;$$

$$x^2\Big|_0^{Me} = 0{,}5;$$

$$(Me)^2 = 0{,}5;$$

$$Me \approx 0{,}71.$$

Последнюю искомую величину P{0 ≤ X<0,5} определим двумя способами:

$$P\{0 \le X < 0{,}5\} = \begin{cases} F(b) - F(a) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \dfrac{1}{4}; \\ \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}5} 2xdx = x^2\Big|_0^{0{,}5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Найденной вероятности на приведенном выше графике плотности распределения соответствует площадь заштрихованной области.

4.52. Третий центральный момент характеризует степень разброса случайной величины вокруг математического ожидания, а также степень асимметрии её закона распределения. **4.53.** $\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^3 p_i$. **4.54.** $\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^3 f(x)\,dx$. **4.55.** Коэффициент асимметрии характеризует степени асимметрии закона распределения. Коэффициент асимметрии определяется по формуле $s = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. **4.56.** 0,144. **4.57.** Четвертый центральный момент характеризует степень разброса случайной величины вокруг математического ожидания, а также степень островершинности её закона распределения. **4.58.** Величина эксцесс характеризует степени островершинности закона распределения, заданного с помощью плотности распределения. Величина эксцесс определяется по формуле $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$.

5.1. Случайная величина распределена по биномиальному закону, если её ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	. . .	m	. . .	n
p_i	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	. . .	$C_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}$	. . .	p^n

5.2. Ряд распределения случайной биномиальной величины с параметрами распределения p=0,6 и n=4:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

5.3. $M[X] = np$. **5.4.** $D[X] = np(1–p)$. **5.5.** $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{np(1-p)}$. **5.6.** $P\{k_1 \le X \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$. **5.7.** Случайным потоком событий называются события, следующие друг за другом в случайные моменты времени. **5.8.** Простейшим потоком событий называется поток событий, обладающий тремя свойствами: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия. **5.9.** Случайный поток событий называется стационарным, если вероятность попадания определенного числа событий на заданный временной участок зависит только от длины участка T и не зависит от того, где на временной оси t расположен этот участок. **5.10.** Случайный поток событий называется ординарным, если вероятность попадания двух и более событий на бесконечно малый участок несоизмеримо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события на этот участок. **5.11.** Случайный поток событий называется потоком без последействия, если вероятность попадания определенного числа событий на участок длиной Т не зависит от того, сколько событий попало на любой другой участок, не пересекающийся с ним. **5.12.** Случайная величина распределена по закону Пуассона, если её ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	. . .	m	. . .
p_i	$e^{–a}$	$a\,e^{–a}$	. . .	$(a^m e^{–a})/m!$	. . .

5.13. $M[X] = a$. **5.14.** $D[X] = a$. **5.15.** $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a}$. **5.16.** Параметр a = $=\lambda T$ = 4 блока . **а)** $P(X=10) = P(X\le 10) – P(X\le 9) = 0{,}00529$; ***б)*** $P(X>10)$ = $= 1 – P(X\le 9)$; ***в)*** $P(X<10) = P(X\le 9)$. **5.17.** Функция распределения вероятности: $P(X=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a} = \frac{3^k}{k!}e^{-3},\ k = 0,1,2,...$ ***а)*** $P(X\le 2) = 1–Q(2,3) = 1–0{,}577 = 0{,}423$; ***б)*** $P(X>0) = Q(0,3)$. **5.18.** По условию математическое ожидание числа вызовов за час $m_x = 30$, тогда математическое ожидание числа вызовов за минуту $m_x = 30/60 = 0{,}5$. $P(X\ge 2) = P(X>1) = Q(1;0{,}5)$ = 0,0902. **5.19.** Параметр $a = np$ = 1000*0,002 = 2. Тогда $P(X=3) = \frac{a^3}{3!}e^{-a} = \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0{,}18$ (1-й способ), или $P(X=3) = Q(2,2) – Q(3,2)$ = = 0,323 – 0,143 = 0,18 (2-й способ). **5.20.** Параметр $a = np$ = = 100000*0,0001 = 10, $P(X=5) = \frac{a^5}{5!}e^{-a} = \frac{10^5}{5!}e^{-10} \approx 0{,}1029$. **5.21.** Параметр $a = np$ = 200*0,01 = 2 . Тогда $P(X=4) = \frac{a^4}{4!}e^{-a} = \frac{2^4}{4!}e^{-2} \approx 0{,}09$ (1-й способ), или

$P(X=4)=Q(3,2)-Q(4,2)=0{,}142-0{,}052=0{,}09$ (2-й способ). **5.22.** Параметр $a=np=500*0{,}002=1$. ***а***) $P(X=3)=\dfrac{a^3}{3!}e^{-a}=\dfrac{1^3}{3!}e^{-1}\approx 0{,}0613$ (1-й способ), или $P(X=3)=Q(2,1)-Q(3,1)=0{,}0803-0{,}0190=0{,}0613$ (2-й способ); ***б***) $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{1^0}{0!}e^{-1}+\dfrac{1^1}{1!}e^{-1}+\dfrac{1^2}{2!}e^{-1}=\dfrac{5}{2}e^{-1}\approx 0{,}9197$ (1-й способ), или (2-й способ) $P(X<3)=1-Q(2,1)=1-0{,}0803=0{,}9197$; ***в***) $P(X>3)=$ $=Q(3,1)=0{,}19$; ***г***) $P(X>0)=Q(0,1)=0{,}632$. **5.23.** Заданную по условию вероятность можно выразить через уравнение $0{,}98=1-P(X=0)$, или $0{,}02=\dfrac{a^0}{0!}e^{-a}$. Откуда $e^{-a}=0{,}02$ и $a\approx 4$. Таким образом, среднее число отказов равно 4. **5.24.** Непрерывная случайная величина распределена по равномерному закону, если ее плотность распределения имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b];\\ c, & x\in[a,b].\end{cases}$ **5.25.** Интегральная функция равномерно распределенной величины имеет вид: $F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$ **5.26.** $M[X]=$ $=(a+b)/2$. **5.27.** $D_x=\dfrac{(b-a)^2}{12}$. **5.28.** $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$. **5.29.** $[\alpha,\beta]\subset[a,b]\ \Rightarrow\ P\{\alpha\le X<\beta\}=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$. **5.30,** ***а***) 1/4; ***б***) 1. **5.31.** 3/5. **5.32.** 1/3. **5.33.** 3. **5.34.** Случайная величина распределена по показательному закону, если ее плотность распределения имеет вид: $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0,\end{cases}$ где λ – интенсивность событий, т.е. количество событий в единицу времени. **5.35.** Интегральная функция случайной величины, распределенной по показательному закону, имеет вид $F(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **5.36.** $m_x=\dfrac{1}{\lambda}$. **5.37.** $D_x=\dfrac{1}{\lambda^2}$. **5.38.** $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}}=$ $=\dfrac{1}{\lambda}$. **5.39.** $P\{a\le T<b\}=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$. **5.40.** $f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & \text{при } x\ge 0;\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x}, & \text{при } x\ge 0;\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$ **5.41.** Определим интегральную функцию: $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$ Искомая вероятность: $P\{0\le X<m_x\}=P\{0\le X<\frac{1}{\lambda}\}=$ $=e^{-\lambda a}-e^{-\mu\lambda}=1-e^{-1}\approx 0{,}632.$ **5.42.** $P\{0{,}13\le X<0{,}7\}=e^{-3\cdot 0{,}13}-e^{-3\cdot 0{,}7}\approx 0{,}555$.

5.43. 0,2. **5.44.** Определим константу c: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = $ $= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} c\,e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{c}{-\lambda} = \frac{c}{\lambda}$; $\frac{c}{\lambda} = 1$. Откуда $c = \lambda$. **5.45.** Случайная величина распределена по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, где σ и m – параметры распределения. **5.46.** Интегральная функция нормально распределенной случайной величины имеет вид: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt$. **5.47.** Математическое ожидание равно параметру m; среднее квадратичное отклонение – параметру σ; дисперсия – σ^2. **5.48.** $\mu_s = (s-1)\mu_{s-2}\sigma^2$. **5.49.** Коэффициент асимметрии нормально распределенной случайной величины равен нулю. **5.50.** Коэффициент островершинности нормально распределенной случайной величины равен нулю. **5.51.** $P\{a \le X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$. **5.52.** m_x=5, D_x=25. **5.53.**

$$P\{15 < X < 25\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6826.$$

5.54. $P\{|X| < 10\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10-0}{20}\right) - \Phi\left(\frac{10-0}{20}\right) = 2\Phi(0{,}5) \approx 0{,}383.$

5.55. $P = 1 - P\{d_1 < D < d_2\} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right)\right] =$

$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}0456$. **5.56.** Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратичного отклонения. **5.57.** Если независимые случайные величины u_i распределены по стандартному нормальному закону, т.е. по нормальному закону с параметрами m = 0 и σ = 1, тогда случайная величина $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2$ распределена по закону хи-квадрат с числом степеней свободы k, равным n. **5.58.** Если случайная величина u распределена по стандартному нормальному закону, а случайная величина v распределена по закону хи-квадрат со степенью свободы k и не зависит от u, тогда случайная величина $t = \frac{u}{\sqrt{v/k}}$ распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы k. **5.59.** Если независимые случайные величины u и v

распределены по закону хи-квадрат соответственно со степенями свободы k_1 и k_2, тогда случайная величина $F = \frac{u/k_1}{v/k_2}$ распределена по закону Фишера со степенями свободы k_1 и k_2.

6.1. Случайным вектором называют вектор, компоненты которого представляют собой случайные величины. **6.2.** Интегральная функция распределения случайного вектора – это такая функция нескольких случайных аргументов, которая при конкретных значениях своих аргументов численно равна вероятности того, что все компоненты случайного вектора окажутся меньше соответствующих аргументов. **6.3.** Интегральная функция двумерного случайного вектора **Z** = (X,Y) обладает четырьмя свойствами. 1-е свойство: $F(-\infty,-\infty)=0$; $F(x,-\infty)=0$; $F(-\infty,y)=0$. 2-е свойство: $F(\infty,\infty)=1$. 3-е свойство: $F(x,\infty)=P\{X<x, Y\to\infty\}=P\{X<x\}=F_1(x)$; $F(\infty,y)=P\{X\to\infty, Y<y\}=P\{Y<y\}=F_2(y)$. 4-е свойство: $F(x,y)$ – неубывающая функция от обоих своих аргументов. **6.4.** Упражнение выполняется в соответствии с формулой $P\{(X,Y)\in\Delta\mathbf{Z}\}=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-$ $-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)$, которая в данном случае трансформируется в выражение $P\{(X,Y)\in\Delta Z\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1)$ + $F(x_1,y_1)$. **6.5.** Плотность распределения двумерного случайного вектора представляет собой вторую частную производную от интегральной функции распределения этого вектора. **6.6.** $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau$. **6.7.** Первое свойство плотности распределения означает, что объем, заключенный между поверхностью функции $f(x,y)$ и координатной плоскостью, равен единице. **6.8.** $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$. **6.9.** Третье свойство плотности распределения означает, что поверхность функции $f(x,y)$ не может располагаться ниже координатной плоскости $X0Y$. **6.10.** Второе свойство плотности распределения двумерного случайного вектора определяется двумя равенствами $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$. Докажем первое: $f_1(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}[F(x,\infty)] =$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,dt\,dy\right] = \frac{d}{dx}\left[\int\limits_{-\infty}^{x}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Для доказательства была использована переменная t, чтобы отличить ее от соответствующего предела интегрирования x. Аналогично доказывается второе равенство. **6.11.** Условный закон распределения в форме $f(x/y)$ или $F(x/y)$ – это закон распределения случайной величины X, рассчитанный при условии, что случайная величина Y приняла конкретное значение. **6.12.** Случайные величины X и Y являются независимыми, если закон распределения X не зависит от того, какое значение приняла случайная величина Y. **6.13.** $F(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_3} f(t_1,t_2,t_3)dt_1\,dt_2\,dt_3$;

$F(x_1)=F(x_1,\infty,\infty)\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2,t_3)dt_1\,dt_2\,dt_3$; $f(x_2,x_3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1$;

$f(x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1\,dx_3$; $f(x_1/x_2,x_3)=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2,x_3)}=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1}$;

$f(x_1,x_3/x_2)=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2)}=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3}$. **6.14.** Математическое ожидание случайного вектора есть такой неслучайный вектор, компонентами которого являются математические ожидания соответствующих компонент случайного вектора. **6.15.** Дисперсия случайного вектора есть такой неслучайный вектор, компонентами которого являются дисперсии соответствующих компонент случайного вектора X. **6.16.** Корреляционным моментом k_{xy} двумерного случайного вектора $Z=(X,Y)$ называют второй смешанный центральный момент $k_{xy} = \mu_{11} = M[(X\text{-}m_x)(Y\text{-}m_y)]$. **6.17.** Для случайных дискретных величин корреляционный момент определяется по формуле $k_{xy}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}$, где $p_{ij} = P(X=x_i,Y=y_j)$; m_x – математическое ожидание компоненты X случайного вектора **Z**; m_y – математическое ожидание компоненты Y случайного вектора **Z**; n – число возможных значений компоненты X ; m – число возможных значений компоненты Y. Для случайных непрерывных величин корреляционный момент определяется по формуле $k_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$, где $f(x,y)$ – плотность распределения случайного вектора **Z**. **6.18.** Корреляционный момент характеризует степень разброса случайных компонент вектора вокруг их математических ожиданий, а также степень линейной зависимости между этими компонентами. **6.19.** Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между двумя случайными величинами. **6.20.** $r_{xy}=\dfrac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$. **6.21.** Коэффициент корреляции может принимать значения из диапазона [–1; 1]. **6.22.** 1. **6.23.** –1. **6.24.** Математическое ожидание неслучайной величины равно самой этой величине. **6.25.** Дисперсия неслучайной величины равна нулю. **6.26.** Да. **6.27.** Да, но предварительно возведя во вторую степень. **6.28.** Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий. **6.29.** Математическое ожидание линейной функции Y от n случайных аргументов X_i (i=1,2,…,n) равно этой же линейной функции от математических ожиданий случайных величин X_i: $M[Y] = M\left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b$. **6.30.** Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий, увеличенной на удвоенный корреляционный момент этих же величин. **6.31.** Дисперсия суммы двух случайных некоррелированных величин равна сумме их дисперсий. **6.32.** Дисперсия линейной функции n случайных некоррелированных (независимых) аргументов X_i (i =1,2,…,n) определяется по формуле $D[Y] = D\left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]$. **6.33.** Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий, увеличенному на момент корреляции этих величин. **6.34.** Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. **6.35.** Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y определяется по формуле: $D[XY] = D[X] * D[Y] + m_y^2 D[X] + m_x^2 D[Y]$.

7.1. С вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний частота появления события будет сколь угодно мало отличаться от её вероятности. **7.2.** При любом ε>0 справедливо неравенство $P(|\xi - M[\xi]| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$, т.е. абсолютное отклонение случайной величины от её математического ожидания больше или равно ε с вероятностью, не большей отношения дисперсии этой случайной величины к квадрату ε. **7.3.** Если $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной: $D[o_1] < c, D[o_2] < c, \ldots, D[o_n] < c,$ то для любого ε>0 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right\} \to 1$ при $n \to \infty$. **7.4.** Сжимается. **7.5.** Относительная частота появления случайного события с ростом числа независимых испытаний стремится к истинной вероятности появления события с вероятностью 1. **7.6.** Если последовательность взаимно независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$\frac{1}{n^2}\sum_{n=0}^{\infty} D[\xi_n] < \infty$ то она подчиняется усиленному закону больших чисел. **7.7.** Необходимым и достаточным условием для применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых величин является существование математического ожидания. **7.8.** С ростом n максимальное абсолютное отклонение эмпирической функции распределения от теоретической (истинной) стремится к нулю с вероятностью 1: $P\left(\sup_x |F_n^*(x) - F(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right) = 1$. **7.9.** Распределение среднего арифметического случайных величин (при многократном суммировании при различном числе слагаемых среднее арифметическое становится случайной величиной) приближается к нормальному с параметрами a (математическое ожидание) и σ^2/n (дисперсия): $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$, где $\sigma^2 = D[\xi_i]$. **7.10.** Если $s_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ – сумма независимых случайных величин, $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$ и выполняется условие Ляпунова (при некотором $\delta > 0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} M\left[|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\right] = 0$), то распределение случайной величины s_n приближается к нормальному с параметрами A_n и B_n^2. **7.11.** Если независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n одинаково распределены и имеют конечную отличную от нуля дисперсию, то выполняется условие Ляпунова. При этом распределение суммы $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ с ростом n приближается к нормальному с параметрами $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ. СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

априорная вероятность гипотезы 49 – доопытная вероятность гипотезы

апостериорная вероятность гипотезы 52 – послеопытная вероятность гипотезы

Байеса формула 52 – формула для определения апостериорных вероятностей гипотез

Бернулли теорема 142 – частота появления случайного событий с ростом числа независимых испытаний стремится к вероятности события

Бернулли формула 58 – формула для определения вероятности того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет ровно k раз

биномиальный закон распределения 97 – частный закон распределения дискретной случайной величины

благоприятствующий случай 14, 23 – случай, который влечет за собой появление конкретного события

Бореля теорема 147 – одно из утверждений усиленного закона больших чисел

величина эксцесс 88, 114 – числовая характеристика степени островершинности плотности распределения случайной величины

вероятность 11 – число, заключенное в диапазоне от 0 до 1 и характеризующее степень объективной возможности появления случайного абстрактного объекта любой природы (гипотезы, значения параметра, события, явления и т.п.)

вероятность полная 49 – средняя вероятность события, которое может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез)

вероятность события 12 – численная мера степени объективной возможности появления события в результате нового опыта

вероятность условная 33 – вероятность зависимого события, вычисленная при условии, что произошло событие, от которого зависит первое

второй начальный момент 84 – числовая характеристика случайной величины

второй центральный момент 85 – дисперсия случайной величины

Гливенко теорема 150 – основная теорема математической статистики

дискретная случайная величина 67 – случайная величина, возможные значения которой принадлежат счетному множеству

дисперсия 85 – числовая характеристика разброса случайной величины вокруг её математического ожидания

достоверное событие 12, 23 – событие, которое в результате опыта непременно должно состояться

зависимые величины 128 – случайные величины, у которых законы распределения одних величин зависят от конкретных значений других

зависимые события 33 – группа событий, вероятности которых зависят от того, произошли другие события в группе или не произошли

закон распределения 68 – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями

закон распределения биномиальный 97 – частный закон распределения дискретной случайной величины

закон распределения нормальный 111 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

закон распределения показательный 108 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

закон распределения Пуассона 101 – частный закон распределения дискретной случайной величины

закон распределения равномерный 105 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

закон распределения условный 128 – закон распределения одной случайной величины при условии принятия конкретных(ого) значений(я) другими(ой) случайными(ой) величинами(ы)

интегральная теорема Лапласа 61 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз

интегральная функция распределения 69 – универсальная форма задания закона распределения случайных величин

испытание 11 – совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат

классическая формула вероятности 15 – если m – количество случаев, которые благоприятствуют событию A, а n – общее количество случаев в данном опыте, то вероятность события $P(A) = m/n$

Колмогорова теорема 149 – одно из утверждений усиленного закона больших чисел

корреляционная матрица 130 – матрица корреляционных моментов

корреляционная матрица нормированная 130 – матрица корреляционных коэффициентов

корреляционный момент 129 – второй смешанный центральный момент случайных величин

коэффициент асимметрии 87, 114 – числовая характеристика степени асимметрии случайной величины

коэффициент корреляции 130 – числовая характеристика степени линейной зависимости между случайными величинами

Лапласа интегральная теорема 61 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз

Лапласа локальная теорема 59 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет ровно k раз

Линдеберга теорема 152 – одна из форм центральной предельной теоремы

локальная теорема Лапласа 59 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет ровно k раз

Ляпунова теорема 153 – одна из форм центральной предельной теоремы

математическое ожидание 79 – числовая характеристика, определяющая средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины

медиана 82 – числовая характеристика, определяющая такое значение случайной величины Me, для которого справедливо равенство $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$

мода 81 – числовая характеристика, определяющая наиболее вероятное значение случайной величины

надежность технических систем 37 – вероятность безотказной работы системы за определенный период времени

наивероятнейшее число наступления события 62 – число появления некоторого события в n независимых испытаниях, обладающее наибольшей вероятностью, определяемой по формуле Бернулли или локальной теореме Лапласа

начальный момент 82 – математическое ожидание k-й степени случайной величины

начальный момент первый 84 – математическое ожидание случайной величины

начальный момент второй 84 – числовая характеристика случайной величины

невозможное событие 12, 23 – событие, которое в результате опыта не может произойти

независимые опыты 56 – опыты, исходы которых не зависят друг от друга

независимые события 32 – группа событий, вероятность которых не зависит от того, произошли другие события в группе или не произошли

непрерывная случайная величина 67 – случайная величина, возможные значения которой принадлежат непрерывному множеству

неравенство Чебышева 143 – при любом ε>0 абсолютное отклонение случайной величины от её математического ожидания больше или равно ε с вероятностью, не большей отношения дисперсии этой случайной величины к квадрату ε

несовместные события 13 – события, которые в результате опыта не могут произойти одновременно

нормальный закон распределения 111 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

нормальный закон распределения стандартный 114 – нормальный закон распределения с параметрами $m = 0$; $\sigma = 1$

нормированная корреляционная матрица 130 – матрица корреляционных коэффициентов

опыт 11 – совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат

опыты независимые 56 – опыты, в каждом из которых некоторое событие появляется с одинаковой вероятностью

первый начальный момент 84 – математическое ожидание случайной величины

перестановки 18 – соединения (комбинации) из m элементов, которые отличаются друг от друга только порядком следования элементов

Пирсона распределение 116 – частный закон распределения

плотность распределения 76 – форма задания закона распределения для непрерывных случайных величин

показательный закон распределения 108 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

полная вероятность 49 – средняя вероятность события, которое может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез)

полная группа событий 14 – группа несовместных событий, одно из которых обязательно происходит в результате опыта

полной (средней) вероятности формула 50 – формула для определения полной вероятности событий (гипотез)

правило сложения 17 – если некоторую работу можно выполнить с помощью k взаимоисключающих операций (при этом первая операция может быть реализована n_1 способами, вторая – n_2 способами, ... , k-я – n_k способами), тогда работу можно выполнить $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами

правило трех сигм 116 – если случайная величина распределена по нормальному закону, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратичного отклонения

правило умножения 17 – если некоторую работу можно выполнить с помощью k последовательных операций (при этом первая операция может быть реализована n_1 способами, вторая – n_2 способами, ... , k-я – n_k способами), тогда всю работу можно выполнить $n_1 * n_2 * ... * n_k$ способами

произведение событий 25 – такое сложное событие, которое происходит тогда, когда одновременно происходят все события-сомножители

простейший поток событий 100 – случайный поток событий, обладающий следующими свойствами: стационарностью, ординарностью, отсутствием последействия

пространство событий 22 – полная группа несовместных событий

противоположные события 32 – два несовместных события, образующих полную группу событий

пуассоновский закон распределения 101 – частный закон распределения дискретной случайной величины

равновозможные события 13 – события, которые имеют одинаковую степень объективной возможности произойти в результате опыта

равномерный закон распределения 105 – частный закон распределения непрерывной случайной величины

размещения 19 – соединения (комбинации) по m элементов из n, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом или порядком их следования

распределение Пирсона 116 – частный закон распределения

распределение Стьюдента 117 – частный закон распределения

распределение Фишера 118 – частный закон распределения

распределение *хи*-квадрат 116 – частный закон распределения

ряд распределения 69 – форма задания закона распределения дискретной случайной величины

случаи 14 – исходы опыта, образующие полную группу несовместных равновозможных событий

случай благоприятствующий 14 – случай, который влечет за собой появление конкретного события

случайная величина 67 – величина, которая в результате опыта принимает заранее неизвестное значение

случайная величина дискретная 67 – случайная величина, возможные значения которой принадлежат счетному множеству

случайная величина непрерывная 67 – случайная величина, возможные значения которой принадлежат непрерывному множеству

случайная величина центрированная 83 – отклонение случайной величины от ее математического ожидания

случайное событие 12, 23 – событие, которое при многократном повторении опыта в результате одних из них происходит, а в других нет

случайное явление 10 – явление, зависящее от факторов (условий), которые невозможно предусмотреть

случайный вектор 124 – вектор, компоненты которого представляют собой случайные величины

случайный поток событий 100 – события, следующие друг за другом в случайные моменты времени

событие 11 – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти

событие достоверное 12, 23 – событие, которое в результате опыта непременно должно состояться

событие невозможное 12, 23 – событие, которое в результате опыта не может произойти

событие случайное 12, 23 – событие, которое при многократном повторении опыта в результате одних из них происходит, а в других нет

событие элементарное 22 – событие, которому соответствует только один результат (исход) опыта

событий полная группа 14 – группа несовместных событий, одно из которых обязательно происходит в результате опыта

событий произведение 25 – такое сложное событие, которое происходит тогда, когда одновременно происходят все события-сомножители

событий пространство 22 – полная группа несовместных событий

событий сумма 24 – такое сложное событие, которое происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из событий-слагаемых

события зависимые 33 – группа событий, вероятности которых зависят от того, произошли другие события в группе или не произошли

события независимые 32 – группа событий, вероятности которых не зависят от того, произошли другие события в группе или не произошли

события несовместные 13 – события, которые в результате опыта не могут произойти одновременно

события противоположные 32 – два несовместных события, образующих полную группу событий

события равновозможные 13 – события, которые имеют одинаковую степень объективной возможности произойти в результате опыта

сочетания 19 – соединения (комбинации) по m элементов из n, которые отличаются друг от друга хотя бы одним новым элементом

среднее квадратичное отклонение 86 – числовая характеристика разброса случайной величины вокруг её математического ожидания, равная квадратному корню из дисперсии

стандартный нормальный закон распределения 114 – нормальный закон распределения с параметрами $m = 0$; $\sigma = 1$

Стьюдента распределение 117 – частный закон распределения

сумма событий 24 – такое сложное событие, которое происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из событий-слагаемых

теорема Бернулли 142 – частота появления случайного событий с ростом числа независимых испытаний стремится к вероятности события

теорема Бореля 147 – одно из утверждений усиленного закона больших чисел

теорема Гливенко 150 – основная теорема математической статистики

теорема Колмогорова 149, 150 – одно из утверждений усиленного закона больших чисел

теорема Лапласа интегральная 61 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз

теорема Лапласа локальная 59 – теорема, оценивающая вероятность того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет ровно k раз

теорема Линдеберга 152 – одна из форм центральной предельной теоремы

теорема Ляпунова 153 – одна из форм центральной предельной теоремы

теорема центральная предельная 152 – утверждение о том, что распределение среднего арифметического случайных величин приближается к нормальному

теорема Чебышева 144 – одно из утверждений закона больших чисел

третий центральный момент 87 – числовая характеристика разброса и асимметрии плотности распределения случайной величины

условная вероятность 33 – вероятность зависимого события, вычисленная при условии, что произошло событие, от которого зависит первое

условный закон распределения 128 – закон распределения одной случайной величины при условии принятия конкретных(ого) значений(я) другими(ой) случайными(ой) величинами(ы)

Фишера распределение 118 – частный закон распределения

формула Байеса 52 – формула для определения апостериорных вероятностей гипотез

формула Бернулли 58 – формула для определения вероятности того, что в n независимых испытаниях некоторое событие произойдет ровно k раз

формула вероятности классическая 15 – если m – количество случаев, которые благоприятствуют событию A, а n – общее количество случаев в данном опыте, то вероятность события $P(A) = m/n$

формула полной (средней) вероятности 50 – формула для определения полной вероятности гипотез

центральная предельная теорема 152 – утверждение о том, что распределение среднего арифметического случайных величин приближается к нормальному

центральный момент 83 – математическое ожидание s-й степени центрированной случайной величины

центральный момент второй 85 – дисперсия случайной величины

центральный момент третий 87 – числовая характеристика разброса и асимметрии плотности распределения случайной величины

центральный момент четвертый 88 – числовая характеристика разброса и степени островершинности плотности распределения случайной величины

центрированная случайная величина 83 – отклонение случайной величины от ее математического ожидания

Чебышева неравенство 143 – при любом $\varepsilon>0$ абсолютное отклонение случайной величины от её математического ожидания больше или равно ε с вероятностью, не большей отношения дисперсии этой случайной величины к квадрату ε

Чебышева теорема 144 – одно из утверждений закона больших чисел

четвертый центральный момент 88 – числовая характеристика разброса и степени островершинности плотности распределения случайной величины

эксперимент 11 – совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат

эксцесс 88, 114 – числовая характеристика степени островершинности плотности распределения случайной величины

элементарное событие 22 – событие, которому соответствует только один результат (исход) опыта

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 2002. – 368 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. *Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю.* Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. – К.: Вища школа, 1995. – 351 с.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
6. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность.* – М.: Мир, 1969. – 431 с.
7. *Гильдерман Ю.И. Закон и случай.* – Н.: Наука, 1991. – 200 с.
8. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1973. – 368 с.
9. *Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В.* Теория вероятностей. – К.: Выща шк., 1990. – 328 с.
10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
11. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш.шк., 1971. – 328 с.
12. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.–240 с.
13. *Карасев А.И*. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979. – 279 с.
14. *Пугачев В.С.* Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968.–368с.
15. *Румшинский Л.И.* Элементы теории вероятностей.–М.: Наука, 1976 – 239 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. Значения функции Гаусса

x	+ 0	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3032	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0774	0,0759	0,0745	0,0731	0,0718	0,0705	0,0692	0,0680	0,0668
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение В. Значения функции Лапласа

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3061	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,59	0,1879	0,92	0,3211	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4665	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2086	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4780	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4975
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2640	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,4986
0,36	0,1406	0,79	0,2862	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,4993
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,4997
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,4998
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,4999
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,5
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,5
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,5

Приложение С. Математические сведения для справок

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots C_n^n a^0 b^n$$

Функциональный ряд

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = e$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x} = e^{-a}$.

Правило Лопиталя. Если $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены в интервале, содержащем точку a, и имеют в этом интервале конечные производные $[\psi'(x) \neq 0]$, и если

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \text{ и } \lim_{x\to a} \psi(x) = 0 \text{ («неопределенность } \frac{0}{0}\text{»)}$$

или

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \text{ и } \lim_{x\to a} \psi(x) = \infty \text{ («неопределенность } \frac{\infty}{\infty}\text{»),}$$

то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

при условии, что этот предел существует или равен ∞. В случае, если $f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ снова представляет собой неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то применяют это правило вторично и т.д.

Правило интегрирования по частям. Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно представить произвольным образом в виде udv, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu .$$

Приложение D. Основные формулы дифференциального исчисления

Правила дифференцирования

$c' = 0$

$(cU)' = cU'$

$(U \pm V)' = U' \pm V'$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V + UV'}{V^2}$

$(f(U))'_x = f'_U \cdot U'_x$

Здесь c – константа, $U = U(x)$, $V = V(x)$.

Основные формулы дифференцирования

$(U^a)' = aU^{a-1}U', \quad a \in \mathbf{R}$

$(\log_a U)' = \dfrac{U'}{U \ln a}$

$(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$

$(a^U)' = a^U \ln a \cdot U'$

$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$

$(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

$(\mathrm{tg} U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} U'$

$(\mathrm{ctg} U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} U'$

$(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$

$(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$

$(\mathrm{arctg} U)' = \dfrac{1}{1+U^2} U'$

$(\mathrm{arcctg} U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} U'$

Здесь $U = U(x)$. Если $U(x) = x$, то $U'(x) = x' = 1$.

Приложение Е. Основные формулы интегрального исчисления

Правила интегрирования

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx\,.$$

2. Интеграл суммы (разницы) равен сумме (разнице) интегралов от отдельных членов

$$\int (u+v-w)dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx\,.$$

3. Если $x=\varphi(t)$, то $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$.

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \ne -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (|x|<a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (|x|>a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

Здесь C – постоянная интегрирования.

Приложение G. Электронная версия учебника

К настоящему учебнику прилагается его электронная версия.

Электронная версия – двуязычная. На титульной электронной странице предусмотрен выбор языка изложения материала: русского или украинского. На каждой последующей странице имеется возможность поменять язык.

При изучении курса обучающийся имеет возможность участвовать в виртуальных экспериментах, иллюстрирующих или подтверждающих основные положения теории вероятностей. Содержание и логика виртуальных экспериментов обеспечивается соответствующими компьютерными программами со встроенными генераторами случайных чисел. Динамика экспериментов поддерживается с помощью современных графических и анимационных технологий.

Теоретический материал курса сопровождается динамическими вставками, позволяющими обучающимся самостоятельно отслеживать решение сложных задач и даже управлять самим процессом решения.

Каждый из семи разделов курса заканчивается электронным практикумом и электронным тестом.

Электронный практикум состоит из примеров решений типовых задач, контрольных вопросов и контрольных заданий по тому или иному разделу курса. Вопросы и задания имеют гипертекстовые ссылки на ответы или подробные пояснения.

Каждый из семи электронных тестов включает около 30 заданий. Тому, кто выполняет тест, необходимо по требованию задания выбрать правильное решение из предлагаемого списка. В процессе тестирования можно менять выбранное решение, а также отказаться от ответа. По завершению тестирования на экран компьютера выдаётся объективная оценка по четырёхбальной системе: отлично, хорошо, удовлетворительно или неудовлетворительно. Любой тест можно повторять многократно.

Электронный учебник снабжен гипертекстовым словарём терминов и гипертекстовыми приложениями.

Навчальне видання

САМОЙЛЕНКО Микола Іванович,
КУЗНЄЦОВ Анатолій Іванович,
КОСТЕНКО Олександр Борисович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Підручник

(російською мовою)

Відповідальний за випуск – Самойленко М.І.
Комп'ютерна верстка – Самойленко М.І.
Технічне редагування – Костенко О.Б.

Видавництво «НТМТ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, м. Харків, пр. Леніна, 58, к. 106.

Підписано до друку 29.04.2009.
Формат 60х84/16. Папір 80 г/м^2.
Умов.-друк. арк. – 12,5. Обл.-вид. арк. – 14,0.
Тираж 300 примірників.

Напечатано в типографии ООО «Современная печать»
на цифровом лазерном издательском комплексе Rank Xerox DocuTech 135.
Адрес: г. Харьков, ул. Лермонтовская, 27.
Телефон (057) 752-47-90