Незатухающие механические колебания

1. Список основных формул

Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия,

A - амплитуда колебаний,

t – время,

ω_0 - циклическая частота,

φ_0 - начальная фаза колебаний,

$(\omega_0 t + \varphi\ )$ - фаза колебаний в момент t.

1. Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0,$$

где T_0 и ν_0 - период и частота колебаний.

2. Период собственных колебаний математического маятника $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Где *l*- длина маятника, g—ускорение свободного падения g= 9.8м^2/с

3. Скорость точки, совершающей гармонические колебания по закону $x = A\cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\upsilon_m\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

4. Ускорение точки, при гармонических колебаниях

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^{\ 2}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

5. Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

где A_1 и A_2 – амплитуда составляющих колебаний,

φ_1 и φ_2 - их начальные фазы.

6. Начальная фаза результирующего колебания определяется из формулы

$$tg\varphi=\frac{A_1\cdot\sin\varphi_1+A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1+A_2\cdot\cos\varphi_2}.$$

7. Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2, начальными фазами φ_1 и φ_2 и равными частотами имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_2^{\ 2}}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1).$$

8. Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории принимает вид

$$y=\frac{A_2}{A_1}\cdot x \quad \text{или}$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}\cdot x,$$

т.е. точка движется по прямой.

9. В том случае, если разность фаз $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm\frac{\pi}{2}$, уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_2^{\ 2}}=1,$$

т.е. точка движется по эллипсу.

10. Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$W_к=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{m\cdot A^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{2},$$

11. Потенциальная энергия колеблющейся точки

$$W_p=\frac{kx^2}{2}=\frac{k\cdot A^2\sin^2\omega_0 t}{2}.$$

12. Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2{\omega_0}^2,$$

где m – ее масса,

k – коэффициент квазиупругой силы $\left(k = m{\omega_0}^2\right)$.

13. Уравнение затухающих колебаний

$$x = A(t)\cdot\cos(\omega\ t + \varphi_0),$$

где $A(t)$ - амплитуда затухающих колебаний в момент t,

ω - их циклическая частота.

14. Амплитуда затухающих колебаний в момент t

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t},$$

где A_0 - амплитуда колебаний в момент $t = 0$,

β - коэффициент затухания.

15. Частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$.

где ω_0- частота собственных колебаний системы

16. Логарифмический декремент затуханий

$$\lambda = ln\frac{A(t)}{A(t+T)},$$

где $A(t)$, $A(t+T)$ - амплитуда двух последовательных колебаний, отстающих по времени друг от друга на период.

Примеры решения задач

Пример 1

Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону синуса с периодом T = 2 с и начальной фазой, равной нулю. Полная энергия колеблющейся точки W = 0,1 мДж.

Найти: 1) амплитуду колебаний; 2) написать уравнение данных колебаний;

3) найти наибольшее значение силы F_{max}, действующей на точку.

Дано:	Решение:
m = 10 г = 0,01 кг T = 2 с W = 0,1 мДж = 0,1x10^{-3} Дж	Уравнение гармонических колебаний имеет вид
A - ? $F_{\max}$ - ?	

$$x = A\cdot\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

По условию задачи начальная фаза равна нулю, следовательно

$$x = A\cdot\sin\omega_0 t.$$

Взяв первую производную смещения по времени, найдем скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cdot\cos\omega_0 t\,.$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{2}$$

Полная энергия колеблющейся точки равна максимальному значению ее кинетической энергии

$$W = W_{к\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Отсюда находим следующее выражение для амплитуды колебаний

$$A = \frac{1}{\omega_0}\cdot\sqrt{\frac{2W}{m}}$$

Циклическая частота связана с периодом колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Подставляя его в выражение для амплитуды, получаем

$$A = \frac{T_0}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{2W}{m}}\,,$$

$$A = \frac{2}{2\cdot 3{,}14}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}}{0{,}01}} = 0{,}045\,\text{м}.$$

Найдем численное значение частоты

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},\;\; \omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{2} = \pi\, c^{-1}.$$

Запишем уравнение гармонических колебаний для данной точки

$$x = 0{,}045\cdot\sin\pi t\,,\ \text{м}$$

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma \qquad (1)$$

Ускорение колеблющейся точки найдем, взяв вторую производную смещения по времени (или, что то же самое, первую производную от скорости по времени)

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cdot \sin\omega_0 t$$

Отсюда максимальное ускорение

$$a_{max} = A\omega_0^2.$$

Подставив это выражение максимального ускорения в соотношение (1), найдем максимальную силу, действующую на точку,

$$F_{max} = m \cdot A \cdot \omega_0^2.$$

Произведем вычисления

$$F_{max} = 0{,}01 \cdot 0{,}045 \cdot 3{,}14^2 = 4{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

<u>Ответ:</u> $A = 0{,}045$ м; $x = 0{,}045 \sin \pi t$, м; $F_{max} = 4{,}44$ мН.

Пример 2

Написать уравнение гармонического колебательного движения, происходящего по закону синуса, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

Дано:

$a_{max} = 49.3$ см/с^2

$T = 2$ с

$x_0 = 25$ мм

Уравнение г.к.- ?

Решение: Смещение точки изменяется с течением времени по закону

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

1). Зная период колебаний, находим циклическую частоту

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ с}^{-1}.$$

2). Найдем, как изменяется с течением времени ускорение материальной точки. Для этого надо установить зависимость скорости точки от времени, а затем продифференцировать эту зависимость по времени

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ а}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Ускорение будет максимальным при $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \pm 1.$

Таким образом, $a_{max} = A\omega_0^2$,откуда следует, что

$$A = \frac{a_{max}}{\omega_0^2} = \frac{49{,}3}{\pi^2} = 5 \text{ см}.$$

3). Начальную фазу φ_0 найдем из условия, что в начальный момент времени $(t = 0)$ смещение от положения равновесия $x_0 = 25$ мм:

$$x_0 = A\sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0),$$

$x_0 = A\sin\varphi_0$, откуда находим, что

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{A} = \arcsin\frac{25}{50} = \arcsin\frac{1}{2},$$

т.е. $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Подставив полученные значения амплитуды, циклической частоты и начальной фазы в уравнение колебаний, получим искомое уравнение гармонического колебания

$$x = 5\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}), \text{ см.}$$

Ответ: $x = 5\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$, см.

Пример 3

Найти отношение кинетической энергии $W_к$ точки, совершающей гармонические колебания по закону синуса к ее потенциальной энергии W_p для моментов времени $t = \frac{T}{12}$. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$.

Дано:	Решение:
$\varphi_0 = 0$ $t = \frac{T}{12}$ $\frac{W_к}{W_p} - ?$	Так как начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$, то уравнение смещения точки от положения равновесия примет вид $x = A\sin\omega_0 t$. Тогда скорость точки изменяется по закону $\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\cdot\omega_0\cos\omega_0 t.$

Кинетическая энергия точки $W_к$ равна

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\cdot A^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{2},$$

а потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания, вычисляется по формуле

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\cdot A^2\sin^2\omega_0 t}{2}.$$

Тогда $$\frac{W_к}{W_p} = \frac{m\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{k\sin^2\omega_0 t} = \frac{m\omega_0^2}{k}\mathrm{ctg}^2\omega_0 t.$$

Так как $k = m\omega_0^2$, то получаем, что

$$\frac{W_к}{W_p} = \mathrm{ctg}^2\omega_0 t = \mathrm{ctg}^2(\frac{2\pi}{T}\cdot t).$$

Найдем отношение $\frac{W_к}{W_p}$ для момента времени $t = \frac{T}{12}$:

$$\frac{W_к}{W_p} = ctg^2(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12}) = ctg^2\frac{\pi}{6} = 3$$

<u>Ответ:</u> $\frac{W_к}{W_p} = 3$.

<u>Пример 4</u>

Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 4\cos\pi t$ см и $x_2 = 3\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ см. Написать уравнение результирующего колебания. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

Дано:

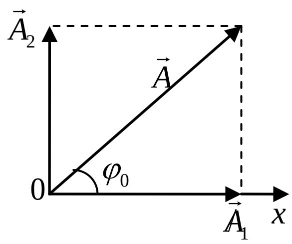
$x_1 = 4\cos\pi t$ см

$x_2 = 3\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ см

Уравнение гармонических колебаний - ?

<u>Решение:</u> Так как складываются два одинаково направленных гармонических колебания одинаковой частоты $\omega_{0_1} = \omega_{0_2} = \pi$ с$^{-1}$, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту: $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$.

Амплитуду A и начальную фазы результирующего колебания найдем с помощью метода векторных диаграмм. Для этого изобразим графически оба складываемых колебания на векторной диаграмме (см. рисунок).



Напомним, что для изображения колебания, уравнение которого $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, методом векторных диаграмм необходимо из произвольной точки O, выбранной на оси Ox, отложить вектор $\vec{A}$, длина которого равна амплитуде колебания, причем угол между вектором $\vec{A}$ и осью Ox должен быть равен начальной фазе φ_0 колебания.

В нашей задаче начальная фаза первого колебания $\varphi_{0_1} = 0$, поэтому вектор $\vec{A}_1$ откладывается вдоль оси Ox, причем его длина $\left|\vec{A}_1\right| = 4$ см.

Так как $\varphi_{0_2} = \frac{\pi}{2}$, то вектор $\vec{A}_2$ откладывается перпендикулярно оси Ox и его длина равна $\left|\vec{A}_2\right| = 3$ см. Амплитуда результирующего колебания $\vec{A}$ равна $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

Величину амплитуды найдем по теореме Пифагора

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{16+9} = 5\text{см.}$$

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{A_2}{A_1} \Rightarrow$ начальная фаза φ_0 равна

$$\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 36{,}87^0 = \frac{\pi}{5}\text{ рад.}$$

Таким образом, уравнение результирующего колебания будет иметь вид $x = 5\cos(\pi t + \dfrac{\pi}{5})$ см.

Ответ: $x = 5\cos(\pi t + \dfrac{\pi}{5})$ см.

Пример 5

Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями x_1=A_1cosω(t+τ_1), x_2=A_2cosω(t+τ_2) где, A_1=1см, A_2=2см, $\tau_1 = \dfrac{1}{6}$ с, $\tau_2 = \dfrac{1}{2}$ с, ω=π c^{-1}. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Дано:

x_1=A_1cosω(t+τ_1)

x_2=A_2cosω(t+τ_2)

A_1=1см

A_2=2см

$\tau_1 = \dfrac{1}{6}c$

$\tau_2 = \dfrac{1}{2}c$

ω=π c^{-1}

$\varphi_1 = ?\ \varphi_2 = ?$

$A = ?\ \varphi = ?$

Уравнение результирующего колебания - ?

Решение: Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A\cdot\cos\omega(t+\tau).$$

Преобразуем уравнения, заданные в условия задачи, к такому же виду: $x_1 = A_1\cdot\cos(\omega t + \omega\tau_1)$, (1)

$$x_2 = A_2\cdot\cos(\omega t + \omega\tau_2) \quad (2)$$

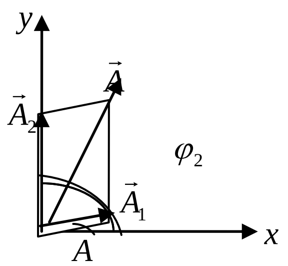
Из сравнения выражений (2) с равенством (1) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \frac{\pi}{6}\text{ рад;}$$

$$\varphi_2 = \omega\tau_2 = \frac{\pi}{2}\text{ рад.}$$

Для определения амплитуд A и начальной фазы φ результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

На рисунке построена векторная диаграмма по данным задачи



Согласно теореме косинусов амплитуда результирующего колебания определяется соотношением

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(3)

Подставив значения A_1, A_2 и $(\varphi_2-\varphi_1)$ в соотношение (3), произведем вычисления

$$A=\sqrt{1^2+2^2+2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})}=2{,}65\text{ см.}$$

Тангенс начальной фазы φ результирующего колебания определим по соотношению

$$tg\varphi=\frac{A_1\cdot\sin\varphi_1+A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1+A_2\cdot\cos\varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi=arctg\,\frac{A_1\cdot\sin\varphi_1+A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1+A_2\cdot\cos\varphi_2}.$$

Подставив значения $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ произведем вычисления

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{1\cdot\sin\frac{\pi}{6}+2\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{1\cdot\cos\frac{\pi}{6}+2\cdot\cos\frac{\pi}{2}}=\mathrm{arctg}(\frac{5}{\sqrt{3}})=70{,}9^0=0{,}394\pi.$$

Так как циклические частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде.

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),\qquad (4)$$

где $A=2{,}65\,см$, $\omega=\pi\,c^{-1}$, $\varphi=0{,}394\pi$ рад.

Подставляя значения A, ω и φ в (4), получаем уравнение результирующего колебания

$$x=2{,}65\cdot\cos(\pi t+0{,}394\pi)\text{, см.}$$

<u>Ответ</u>: $x=2{,}65\cdot\cos(\pi t+0{,}394\pi)$, см.

Пример 6

Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, заданных уравнениями: $x = A_1 \cos\omega t$ и $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$, где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\varphi = \pi$. Найти уравнение траектории точки и построить ее с соблюдением масштаба.

Дано:

$x = A_1 \cos\omega t$

$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$

$A_2 = 2$ см

$\varphi = \pi$

$y(x) - ?$

Решение: Уравнение траектории результирующего движения точки, получающего при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами, имеет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

В данном случае $\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \pi$, поэтому $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$.

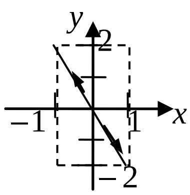
Подставляя это значение в предыдущее уравнение, имеем

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0;$$

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \qquad \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0,$$

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x; \qquad y = -2x.$$

Видно, что траекторией результирующего движения в данном случае является прямая. Построим ее с соблюдения масштаба.



Стрелками указаны направления движения точки по траектории.

Ответ: $y = -2x$

Пример 7

Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x = A\cos\omega t$ и $y = A\cos 2\omega t$, где $A = 2$ см, $\omega = \pi\ c^{-1}$. Найти уравнение траектории точки и построить ее с соблюдением масштаба.

Дано:

$x = A\ \cos\omega t$

$y = A\cos 2\omega t$

$A = 2$ см

$\omega = \pi$ с$^{-1}$

$y(x) - ?$

Решение: Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений. Для этого воспользуемся формулой $\cos 2\omega t = \cos^2\omega t - \sin^2\omega t$.

В данном случае

$$\cos\omega t = \frac{x}{A},$$

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$\frac{y}{A} = cos\,2\omega t; \qquad \frac{y}{A} = \frac{x^2}{A^2} - (1 - \frac{x^2}{A^2});\ \text{отсюда}$$

$$y = \frac{2}{A}x^2 - A$$ - это уравнение параболы.

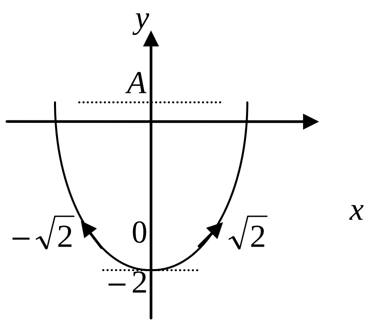
Подставим $A = 2$: $y = x^2 - 2$

Построим по точкам: $y = -2$ при $x = 0, x = 0,$

$y = 0$ при $x = \pm\sqrt{2}$,

ветви параболы направлены вверх.

Стрелками указано направление движения точки.



Ответ: $y = \frac{2}{A}x^2 - A$.

Пример 1

Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t_1 = 1$мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t_2 = 3$мин?

Дано:

$t_1 = 1$ мин

$\frac{A(t)}{A(t+t_1)} = 2$

$t_2 = 3$ мин

$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} - ?$

Решение. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

где $A(t)$ – амплитуда в момент времени t;

A_0 - амплитуда колебаний в начальный момент времени;

β - коэффициент затухания.

Тогда

$$\frac{A(t)}{A(t+t_1)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t(t+t_1)}} = e^{-\beta t} \text{ и}$$

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t(t+t_2)}} = e^{\beta t_2}.$$

Прологарифмировав оба уравнения, выразим из каждого уравнения коэффициент затухания β:

$$\beta = \frac{1}{t_1} ln \frac{A(t)}{A(t+t_1)} \text{ и } \beta = \frac{1}{t_2} ln \frac{A(t)}{A(t+t_2)}.$$

Приравнивая правые части полученных выражений, находим, что $ln \frac{A(t)}{A(t+t_2)} = \frac{t_2}{t_1} ln \frac{A(t)}{A(t+t_1)}$, откуда следует, что

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = (\frac{A(t)}{A(t+t_1)})^{\frac{t_2}{t_1}}.$$

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = 2^{3/1} = 8.$$

Ответ: $\frac{A(t)}{A(t+t_{12})} = 8$.

Пример 2.

Гиря массой $m = 0{,}50$ кг подвешена к пружине, жесткость которой $k = 32{,}0$ Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период T в двух случаях: 1) за время, в течении которого произошло $n_1 = 88$ колебаний, амплитуда уменьшилась в $N_1 = 2{,}00$ раза; 2) за время двух колебаний ($n_2 = 2$) амплитуда колебаний уменьшилась в N_2= 20 раз.

Дано:

$m = 0{,}50$ кг

$k = 32{,}0$ Н/м

$n_1 = 88$

$N_1 = 2{,}00$

$n_2 = 2$

$N_2 = 20$

$T_1 - ?$

$T_2 - ?$

Решение: Сопротивление среды уменьшает частоту свободных колебаний. Период

затухающих колебаний определяется по соотношению

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Циклическую частоту собственных колебаний ω_0 определим по соотношению

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Коэффициент затухания вычислим по формуле

$$\beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Чтобы найти величину λ, обратимся к уравнению затухающих колебаний

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Уменьшающуюся со временем амплитуду выразим так:

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} = A_0 \cdot e^{\frac{-\lambda t}{T}}.$$

Пользуясь введенными в условии задачи обозначениями, можно записать

$$\frac{A_0}{A} = N, \qquad \frac{t}{T} = n.$$

Тогда

$$\frac{A_0}{A} = e^{\frac{\lambda t}{T}} = e^{\lambda n} = N.$$

Отсюда, логарифмируя, имеем

$$\lambda = \frac{ln N}{n}.$$

Подставив численные значения N и n для двух случаев, получим:

$$T^2 \cdot \omega_0^2 = 4\pi^2 + \lambda^2.$$

$$\lambda_2 = \frac{ln 20}{2} 1{,}5;$$

$$\omega_0 = \frac{32}{0{,}5} = 8{,}0 \text{ c}^{-1}.$$

Теперь запишем формулу для периода колебаний T с учетом выражения для β

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}}.$$

Получилось квадратное уравнение относительно T. Решая его, находим (отбросив, отрицательный корень)

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{2\lambda} \cdot \ln k.$$

Приступая к вычислениям периода, заметим, что в первом случае $\lambda_1^2 << 4\pi$. Поэтому, сохраняя достаточную точность вычислений, можно пренебречь слагаемым λ_1^2, тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Во втором случае величину λ^2 отбросить нельзя.

Произведем вычисления:

$$T_1 = \frac{2\pi}{8{,}0} = 0{,}78 \text{ c};$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{4x^2 + 1{,}5^2}}{8{,}0} = 0{,}81 \text{c}.$$

Ответ: $T_1 = 0{,}78$ с, $T_2 = 0{,}81$ с.

Пример 3*

Математический маятник длиной $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания. Через какое время Δt энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания:

а) $\lambda = 0{,}01$; б) $\lambda = 0{,}1$.

Дано:	Решение. Полная энергия маятника, совершающего затухающие колебания, уменьшается с течением времени по закону
$l = 24{,}7$ см $=$ $24{,}7 \cdot 10^{-2}$ м $\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = k = 9{,}4$ а) $\lambda = 0{,}01$; б) $\lambda = 0{,}1$.	
Δt -?	

$$W(t) = \frac{m\omega^2 A^2 t)}{2},$$

где m – масса маятника;

ω - частота затухающих колебаний;

$A(t)$ - амплитуда маятника в момент времени.

Тогда отношение энергии маятника $W(t)$ в момент времени t к энергии маятника $W(t+\Delta t)$ в момент времени равно

$$\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = \frac{A^2(t)}{A^2(t+\Delta t)} = \frac{(A_0 e^{-\beta t})^2}{(A_0 e^{-\beta\,(t+\Delta t)})^2} = e^{2\beta\Delta t}.$$

Так как $\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = k$ - по условию, то

$$e^{2\beta\Delta t} = k.$$

Коэффициент затухания β связан с логарифмическим декрементом затухания λ соотношением

$$\beta = \frac{\lambda}{T},$$

где T – период затухающих колебаний.

Таким образом,

$e^{2\lambda\frac{\Delta t}{T}} = k$, откуда следует, что

$$\Delta t = \frac{T \ln k}{2\lambda}. \qquad (1)$$

Период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$,

где ω_0 – частота собственных колебаний маятника.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}},$$

$$T^2 \cdot \omega_0^2 = 4\pi^2 + \lambda^2.$$

Таким образом, период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1) для определения времени, получим

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{2\lambda} \cdot \ln k. \qquad (3)$$

а) $\lambda = 0{,}01.$

Так как $\lambda^2 << 4\pi^2$, то слагаемым λ^2 в формуле (3) можно пренебречь. Следовательно,

$$\Delta l \approx \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\lambda} \cdot \ln k = \frac{2\pi\sqrt{\frac{24{,}7 \cdot 10^{-2}}{9{,}8}}}{20{,}01} = \ln 9{,}4 = 112c;$$

б) $\lambda = 1$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{24{,}7 \cdot 10^{-2}}{9{,}8}}\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2 \cdot 1} \ln 9{,}4 = 1{,}13c.$$

<u>Ответ:</u> а) λ=0,01, Δt=112 с; б) $\lambda = 1$, $\Delta t = 1{,}13$с.

Задачи для самостоятельного решения

1. 1.* Точка совершает гармонические колебания по закону синуса. Период колебаний $T = 2c$, амплитуда $A = 50$мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость υ точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$мм.
2. Определить максимальное значение скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$см и угловой частотой $\omega = \frac{\pi}{2}c^{-1}$.
3. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 8$см, $\omega = \frac{\pi}{6}c^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила достигла значения – 5 мН,

потенциальная энергия E_n стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний.

4. Колебания точки происходят по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость $\upsilon = 20$ см/с и ускорение $a = -80$ см/с^2. Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период колебаний T и фазу $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ в рассматриваемый момент времени.
5. Определить возвращающую силу F в момент времени $t = 0{,}2$ с и полную энергию E точки массой $m = 20$ г, совершающей гармонические колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$, где $A = 15$ см; $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$.
6. Определить максимальное ускорение $a_{\max}$ материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 15$ см, если наибольшая скорость точки $v_{\max} = 30$ см/с. Написать уравнение колебаний.
7. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 2$ с$^{-1}$. В момент, когда на точку действовала возвращающая сила $F = +5$ мН, точка обладала потенциальной энергией $\Pi = 0{,}1$ МДж. Найти этот момент времени t и соответствующую фазу колебаний φ.
8. Найти максимальную кинетическую энергию $T_{\max}$ материальной точки массой $m = 2$ г, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 5$ Гц.
9. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид: $x = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 2$ с$^{-1}$. Найти момент времени (ближайший к началу отсчета), в который потенциальная энергия точки $\Pi = 10^{-4}$ Дж, а возвращающая сила $F = +5\cdot 10^{-3}$ Н. Определить также фазу колебаний в этот момент времени.
10. Найти отношение кинетической энергии $W_к/W_п$ незатухающих механических колебаний к потенциальной энергии для момента времени T/8.
11. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2см$. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ рад и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$ рад. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

12. Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинокого направления: $x_1 = 1 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ см и $x_2 = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{5\pi}{6})$ см. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить амплитуду и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

13. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos\omega t$ и $y = -A_2 \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 5$ см. Найти уравнение траектории и построить траекторию, показав направление движения точки.
14. Движение точки задано уравнениями $y = A_1 \cos\omega t$ и $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A_1 = 10$ см, $A_2 = 5$ см, $\omega = 2c^{-1}$; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ рад. Найти уравнение траектории и построить ее, указав направление движения точки.
15. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемые уравнениями $x = A_1 \sin\omega t$ и $y = A_2 \cos\omega(t + \tau)$, где A_1=2см, A_2=1см, $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\tau = 0{,}5$ с. Найти уравнение движения и построить траекторию, показав направление движения точки.
16. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой, имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний.
17. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих согласно уравнениям: $x = A_1 \sin\omega_1 t$, $y = A_2 \sin\omega_2 t$, где $A_1 = 2$ см; $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$; $A_2 = 4$ см; $\omega_2 = 2$ с$^{-1}$. Определить траекторию точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба, указать направление движения точки.
18. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду A результирующего колебания, если колебания совершаются: а) в одном направлении; б) в двух взаимно перпендикулярных направлениях.
19. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin\omega t$, м и $y = 2\cos\omega t$, м. Найти траекторию результирующего движения точки.

20. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \cos \pi t$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} t$. Найти траекторию результирующего движения точки.

21. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 5$ мин уменьшилась в $n_1 = 2$ раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в $n_2 = 16$ раз?

22. Амплитуда колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ мин уменьшилась в $n = 2$ раза. Определить логарифмический декремент затухания колебаний λ.

23. Тело, совершающее затухающие колебания, за время $t = 50$ с потеряло 60% своей энергии. Определить коэффициент затухания β.

24. Определить период T затухающих колебаний T_0, если период собственных колебаний системы равен 1с, а логарифмический декремент затухания $\lambda = 1{,}2$.

25. Определите логарифмический декремент затухания λ, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз.

Библиографический список

1. Повзнер А.А., Валишев М.Г. Курс общей физики/С- Петербург.: Лань, 2010. 576 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики/ И.В. Савельев Т.1,2. М.: Наука, 1990. Т.1:432 с.; 1988. Т.2: 496 с.; 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики/ Т.И. Трофимова. М.: Высшая школа, 2003. 352 с.
4. Детлаф А.А. Курс физики/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. М.: Высшая школа, 2006. 608 с.
5. Иродов И.Е. Волновые процессы/ И.Е. Иродов. М.: Высшая школа, 1991. 279 с.