Вариант 3

Задача 1. Тема: «Нормальное распределение».

**Вариант 3**

 Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0.04. Агрономы знают, что 65% фруктов весят меньше, чем 0.5 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута.

Решение

Ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута - это есть математическое ожидание, найти которое можно из формулы попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $α<x<β$.

$$p\left(α<x<β\right)=Ф\left(\frac{β-a}{σ}\right)-Ф(\frac{α-a}{σ})$$

По условию задачи $σ=\sqrt{D\left(x\right)}=\sqrt{0,04}=0,2$

А также известно, что $p\left(α<x<β\right)=0,65$

$$α=-\infty , β=0,5, тогда$$

$$p\left(-\infty <x<0,5\right)=Ф\left(\frac{0,5-a}{0,2}\right)-Ф\left(\frac{-\infty -a}{0,2}\right)=0,65$$

$Ф\left(\frac{0,5-a}{0,2}\right)+0,5=0,65$ поэтому

$$Ф\left(\frac{0,5-a}{0,2}\right)=0,15$$

По таблице Лапласа можно найти, что $\frac{0,5-a}{0,2}=0,385$

Отсюда получаем 0,5-a=0,077, а=0,5-0,077=0,423.

**Ответ**: ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута равен 0,423г.

**Задача 2. Тема: «Интервальные оценки».**

**Вариант 3**

Для изучения различных демографических характеристик населения выборочно обследовалось 300 семей города. Оказалось, что среди обследованных семей 15% состоят из двух человек. В каких пределах находится в генеральной совокупности доля семей, состоящих из двух человек, если принять доверительную вероятность равной 0.95?

Решение.

В данной задаче требуется построить доверительный интервал для генеральной доли. Определим выборочную долю р.

Из 300 семей 15% состоит из 2-х человек

$\frac{300}{100}∙15=45$ семей состоит из 2-х человек.

Значит, выборочная доля таких семей составляет

$$p=\frac{45}{300}=0,15$$

Поскольку объем выборки n=300>30, $u\_{кр}$ найдем из таблиц Лапласа с учетом доверительной вероятности $γ$ : $2Ф\left(U\_{кр}\right)=0,55$

$$Ф\left(U\_{кр}\right)=0,475$$

$$U\_{кр}=1,96$$

Предельная ошибка выборки $ε$ равна

$$ε=u\_{кр}\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=1,96\sqrt{\frac{0,15\left(1-0,15\right)}{300}}=0,04$$

Таким образом, доверительный интервал для генеральной доли по выборочным данным равна

(0,15-0,04;0,15+0,04) или (0,11; 0,19)

Доля семей, состоящая из 2-х человек, с вероятностью 0,95 находится в пределах от 11% до 19%.

Задача **3. Тема: «Проверка статистических гипотез»**

**Вариант 3**

 Поступление страховых полисов в 130 филиалах страховых компаний в регионе А составило$ 26∙10^{4} у. $е., в регионе В на 100 филиалов пришлось $18∙10^{4}$ у.е. Дисперсия величины страховых взносов в регионе А равна$39∙10^{8} у.е$ , в регионе В —$25∙10^{8} $(у.е.) . На уровне значимости α = 0.05 определите, существенно ли различается средняя величина поступления страховых взносов в регионах А и В из расчета на один филиал.

Решение

По условию нам известны следующие данные

Для региона А: $n\_{А}=130, \sum\_{}^{}X\_{A\_{i}}=26∙10^{4} у.е., D\_{A}=D\_{B}=39∙10^{8} у.е.$

Для региона B: $ \sum\_{}^{}Y\_{A\_{i}}=18∙10^{4} у.е., D\_{B}=D\_{γ}=25∙10^{8} у.е.$

Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу

$H\_{0}=M\_{A }\left(X\right)=M\_{B }\left(Y\right)$ о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных совокупностей, надо выявить наблюдаемое значение критерия

$$Z\_{набл}=\frac{\overbar{X\_{A}}-\overbar{Y\_{A}}}{\sqrt{\frac{D\_{A}(X)}{n\_{A}}+\frac{D\_{B}(Y)}{n\_{b}}}}$$

По табличной функции Лапласа найдем критическую точку $Z\_{кр}$ из равенства

Ф($Z\_{кр})=\frac{1-α}{2}$

Если |$Z\_{набл}|<Z\_{кр}$- нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если |$Z\_{набл}|>Z\_{кр}$- отвергают нулевую гипотезу

Вычислим $Z\_{набл}$

Для этого сначала определим $\overbar{x} и \overbar{y}$.

$$\overbar{x}=\frac{\sum\_{}^{}X\_{A\_{i}}}{n\_{A}}=\frac{26∙10^{4}}{130}=2000 у.е.$$

$$\overbar{y}=\frac{\sum\_{}^{}Y\_{B\_{i}}}{n\_{B}}=\frac{18∙10^{4}}{100}=1800 у.е.$$

Тогда $Z\_{набл}=\frac{\overbar{x}-\overbar{y}}{\sqrt{\frac{D\left(x\right)}{n}+\frac{D\left(y\right)}{m}}}=\frac{2000-1800}{\sqrt{\frac{39∙10^{8}}{130}+\frac{25∙10^{8}}{100}}}=0,02697≈0,027$

Из равенства Ф($Z\_{кр})=\frac{1-α}{2}$=$\frac{1-0,05}{2}=0,475$

Используя таблицу Лапласа определим критическую точку $Z\_{кр}$:

$$Z\_{кр}=1,96$$

0,027<1,96 $\rightarrow $ |$Z\_{набл}|<Z\_{кр}$

Значит, нет оснований отвергать гипотезу о равенстве математических ожиданий данных распределений.

Гипотезу $H\_{0}=М\left(X\right)=М\left(Y\right)$ принимаем.

Значит, различие средних величин поступления страховых взносов в регионах А и В из расчета на 1 филиал не существенны.

**Задача 4.**

Тема: «Критерий согласия Пирсона». С помощью критерия согласия Пирсона на уровне значимости α = 0,05 выяснить, можно ли считать случайную величину X, заданную в виде сгруппированного статистического ряда, нормально распределенной с параметрами x ϖ и s, рассчитанными по выборке.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{j};x\_{j=1}$$ | [2.3;2.5] | [2.5;2.7] | [2.7;2.9] | [2.9;3.1] | [3.1;3.3] | [3.3;3.5] |
| $$n\_{j}$$ | 3 | 6 | 9 | 8 | 5 | 2 |

Для каждого из интервалов определим середину. Имеем

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| группы | середина интервала | nj | xj\*nj | x-x ̅ | (x-x ̅)^2) | ((x-x ̅)^2)\*nj |
| 2.3-2.5 | 2,4 | 3 | 7,2 | -0,47 | 0,22 | 0,67 |
| 2.5-2.7 | 2,6 | 6 | 15,6 | -0,27 | 0,07 | 0,45 |
| 2.7-2.9 | 2,8 | 9 | 25,2 | -0,07 | 0,01 | 0,05 |
| 2.9-3.1 | 3 | 8 | 24 | 0,13 | 0,02 | 0,13 |
| 3.1-3.3 | 3,2 | 5 | 16 | 0,33 | 0,11 | 0,54 |
| 3.3-3.5 | 3,4 | 2 | 6,8 | 0,53 | 0,28 | 0,56 |
| итого |   |   | **94,8** | **0,16** | **0,70** | **2,39** |

$\overbar{x}=\frac{\sum\_{}^{}x\_{i}n\_{j}}{n}$=$\frac{94,8}{33}=2,87$

Вычислим дисперсию

$$D=\frac{\sum\_{}^{}\left(x-\overbar{x}\right)^{2}n\_{j}}{n}=\frac{2,39}{33}=0,072$$

$$σ=\sqrt{D}=0,27$$

Нулевую гипотезу сформулируем как утверждение, что случайная величина Х имеет нормальное распределение с указанными выше параметрами $\overbar{х} и σ$.

Вычислим теоретические частоты, учитывая n=33,
$σ=0,27$, h=0,2

$$n\_{i}=\frac{33∙0,2}{0,27}φ\left(\frac{x\_{i}-\overbar{x}}{σ}\right)=24,54φ\left(\frac{x\_{i}-\overbar{x}}{σ}\right)$$

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| группы | Ui | φ(ui) | ni |
| 2.3-2.5 | -1,76 | 0,0863 | 2,12 |
| 2.5-2.7 | -1,01 | 0,242 | 5,94 |
| 2.7-2.9 | -0,27 | 0,3857 | 9,47 |
| 2.9-3.1 | 0,47 | 0,3565 | 8,75 |
| 3.1-3.3 | 1,22 | 0,1872 | 4,59 |
| 3.3-3.5 | 1,96 | 0,0573 | 1,41 |
| итого | 0,61 | 1,315 | 32,27 |

Сравним эмпирические и теоретические частоты. Составим расчетную таблицу, из которой найдем наблюдаемое значение критерия.

$$λ^{2}$$

$$λ^{2}\_{набл}=\sum\_{}^{}\frac{(n\_{j}-n\_{i}^{'})^{2}}{n\_{i}^{'}}$$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$n\_{j}$$ | $$n\_{i}$$ | $$n\_{j}-n\_{i}^{'}$$ | $$(n\_{j}-n\_{i}^{'})^{2}$$ | $$\frac{(n\_{j}-n\_{i}^{'})^{2}}{n\_{i}^{'}}$$ |
| 3 | 2.1 | 0.9 | 0.81 | 0.39 |
| 6 | 5.9 | 0.1 | 0.01 | 0.002 |
| 9 | 9.5 | 0.5 | 0.25 | 0.03 |
| 8 | 8.7 | 0.7 | 0.49 | 0.06 |
| 5 | 4.6 | 0.4 | 0.16 | 0.03 |
| 2 | 1.4 | 0.6 | 0.36 | 0.26 |

$$λ^{2}\_{набл}=0,772$$

По таблице критических точек распределения $λ^{2}\_{}$ по уровню значимости $α=0,05$ и числу степеней свободы к=6-1-2=3 находим критическую точку правосторонней критической области

$$λ^{2}\_{кр}\left(0,05;3\right)=7,8$$

Так как $λ^{2}\_{набл}=0,772<λ^{2}\_{кр}=7,8$ то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не отклоняется. Случайная величина Х имеет нормальное распределение с указанными параметрами.

**Задача 5.**

Тема: «Ранговая корреляция». По заданной таблице рангов найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверить значимость полученного результата при α = 0.05.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ранг 1 | 11 | 4 | 10 | 1 | 8 | 9 | 2 | 12 | 6 | 7 | 5 |
| Ранг2 | 11 | 1 | 12 | 6 | 2 | 10 | 5 | 9 | 7 | 8 | 3 |

x-артистизм, y –красота

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | dx | dy | (dx-dy)^2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 1 | 9 |
| 10 | 12 | 10 | 12 | 4 |
| 1 | 6 | 1 | 6 | 25 |
| 8 | 2 | 8 | 2 | 36 |
| 9 | 10 | 9 | 10 | 1 |
| 2 | 5 | 2 | 5 | 9 |
| 12 | 9 | 12 | 9 | 9 |
| 6 | 7 | 6 | 7 | 1 |
| 7 | 8 | 7 | 8 | 1 |
| 5 | 3 | 5 | 3 | 4 |

 100

$$p=1-6∙\frac{\sum\_{}^{}d^{2}}{n^{3}-n}=1-6∙\frac{100}{12^{3}-12}=0,65$$

Связь между признаком X и Y сильная и прямая.

Значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена

$Т\_{набл}=P\_{xy} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-P\_{xy}^{2}}}=0,65 \frac{\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0,65)^{2}}}$=2,7

По таблице Стьюдента

$$Т\_{набл}=\left(10;0,05\right)=2,228$$

Поскольку $Т\_{набл}=2,228<Т\_{табл}=2,7$ то принимаем гмипотезу о равентсве коэффициента корреляции, т.е. коэффициент ранговой корреляции Спирмена статистически значим