Момент силы

1. Момент силы относительно точки.

О. Моментом силы относительно точки называется векторная физическая величина, которая определяется векторным произведением радиуса вектора $\vec{R}$ и силы $\vec{F}$ (рис. 1) :

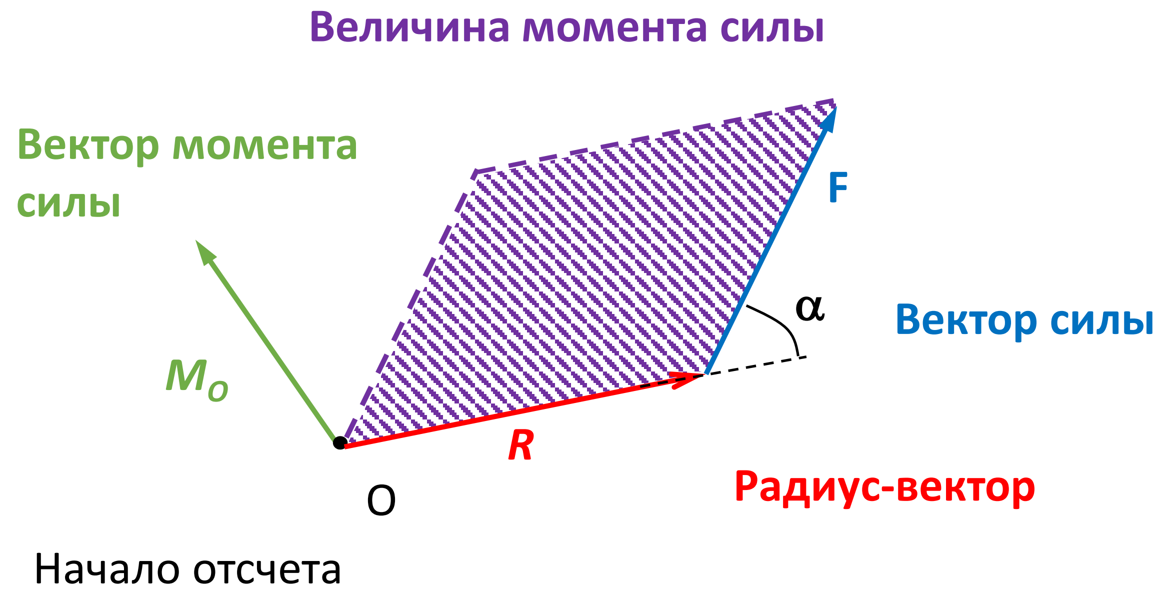

Рис. 1.

$$\vec{M}_O = \left[\vec{R}, \vec{F}\right] = \vec{R} \times \vec{F} \qquad (1)$$

Величина момента силы:

$$\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{R}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\alpha \qquad (2)$$

Размерность момента силы:

$$[M_O] = \text{Н·м}$$

Нажмите мышку или пробел

Свойства вектора момента силы

1) $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{R}$ и $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{F}$ (3)

2) В декартовых координатах:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(yF_z-zF_y\right)+\vec{e}_y\left(zF_x-xF_z\right)+\vec{e}_z\left(xF_y-yF_x\right) \quad (4)$$

3) Момент суммы сил равен векторной сумме моментов каждой из сил:

$$\vec{M}_O\left(\sum_i\vec{F}_i\right)=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

То есть:

$$\vec{M}_O=\left[\vec{R},\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots\right)\right]=\left[\vec{R},\vec{F_1}\right]+\left[\vec{R},\vec{F_2}\right]+\cdots=\left[\vec{R},\sum_i\vec{F}_i\right]=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \quad (5)$$

Нажмите мышку или пробел

4) При переносе силы вдоль линии ее действия момент силы не изменяется.
Линия действия силы – прямая линия, на которой лежит вектор силы. Рис. 2

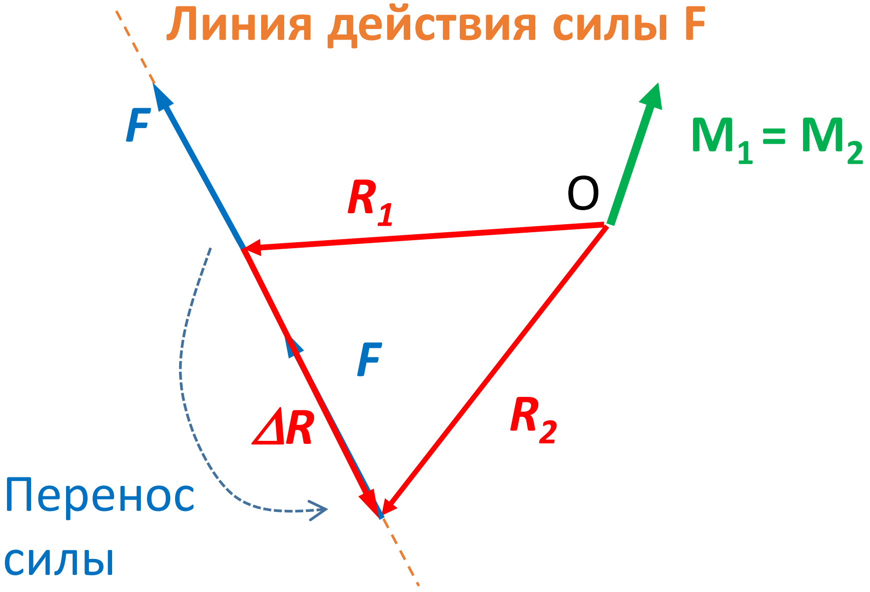

Рис. 2.

$$\vec{M}_1 = [\vec{R}_1, \vec{F}]$$

$$\vec{M}_2 = [\vec{R}_2, \vec{F}]$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \overrightarrow{\Delta R}$$

Так как $\overrightarrow{\Delta R} || \vec{F}$, то $[\overrightarrow{\Delta R}, \vec{F}] = \vec{0}$,

следовательно, $\vec{M}_1 = [\vec{R}_1, \vec{F}] = [\vec{R}_2, \vec{F}] = \vec{M}_2$. (6)

Вывод: если две *одинаковые* силы лежат *на одной прямой – линии действия этих сил*, то их моменты будут *одинаковыми*.

Нажмите мышку или пробел

5) Момент пары внутренних сил,

лежащих на одной прямой линии (рис. 3).

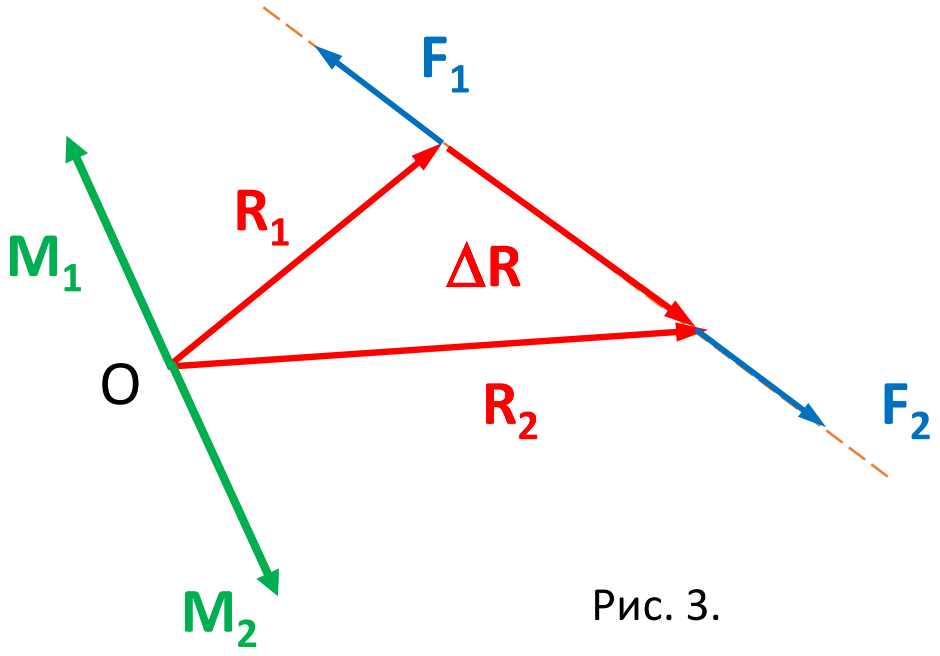

Рис. 3.

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{R}_1, \vec{F}_1] + [\vec{R}_2, \vec{F}_2]$$

Учитывая, что

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1\,, \qquad \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{\Delta R}\,,$$

$$\overrightarrow{\Delta R} || \overrightarrow{F_2} \Rightarrow [\overrightarrow{\Delta R}, \vec{F}_2] = \vec{0} \Longrightarrow [\vec{R}_2, \vec{F}_2] = [\vec{R}_1, \vec{F}_2]$$

Получаем момент пары внутренних сил

$$\vec{\mathrm{M}} = [\vec{R}_1, \vec{F}_1] + [\vec{R}_1, \vec{F}_2] = [\vec{R}_1, \vec{F}_1 + \vec{F}_2] = \vec{0} \qquad (7)$$

Нажмите мышку или пробел

Момент силы относительно оси.

Координаты вектора моменты силы относительно координатных осей определяются формулами:

$$M_{Ox}\left(\vec{F}\right) = yF_z - zF_y \;,\quad M_{Oz}\left(\vec{F}\right) = xF_y - yF_x \;,\quad M_{Oy}\left(\vec{F}\right) = zF_x - xF_z \qquad (8)$$

1) Проекция вектора момента силы на ось z не зависит от выбора точки O (рис.4).

Разность векторов: $\vec{M}_2 - \vec{M}_1 = \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)\times\vec{F}$

Разность проекций векторов:

$$M_{1z} - M_{2z} = \left(\vec{M}_1, \vec{k}\right) - \left(\vec{M}_2, \vec{k}\right) = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2, \vec{k}\right)$$

Так как в смешанном произведении векторы $\overrightarrow{\Delta R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ и орт $\vec{k}$ лежат на одной прямой, то

$$\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1, \vec{k}\right) = \left(\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)\times\vec{F}, \vec{k}\right) = 0$$

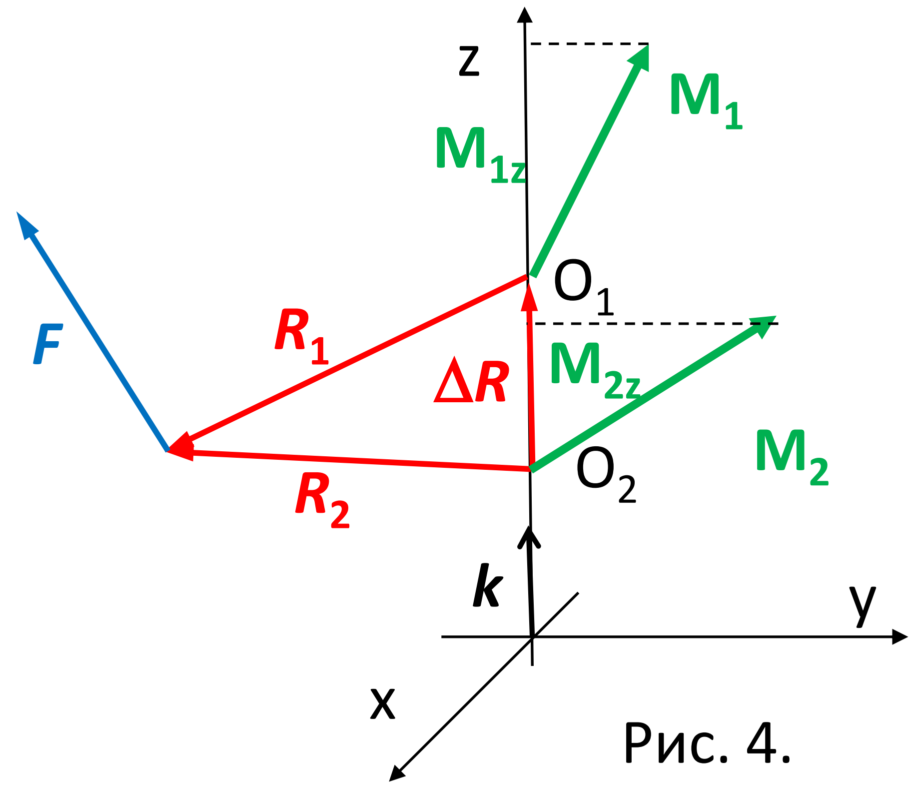

Рис. 4.

Следствие. *Если момент силы относительно некоторой точки на оси равен нулю, то равен нулю момент силы относительно этой оси.*

Нажмите мышку или пробел

2) Если вектор силы ***F*** параллелен оси Z, то момент силы относительно оси равен нулю.

Действительно, в этом случае $\vec{F}||\vec{k}, \vec{M} \perp \vec{k} \Rightarrow Mz = (\vec{M}, \vec{k}) = 0$

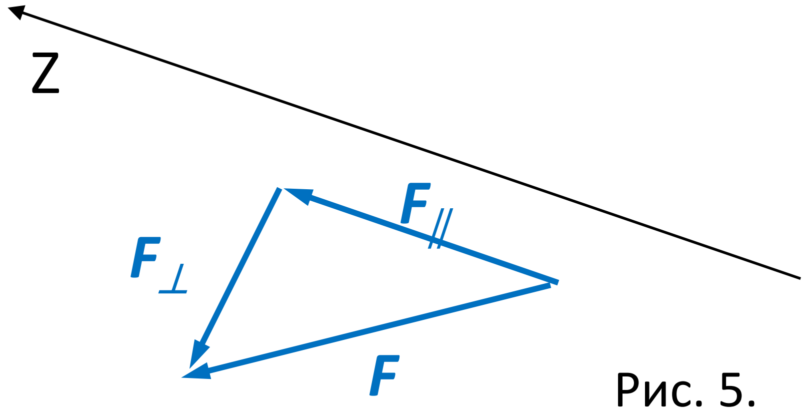

Рис. 5.

Следовательно, если $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$, то есть вектор силы можно разложить на компоненту $\vec{F}_{\parallel}$ параллельную оси, и компоненту $\vec{F}_{\perp}$, перпендикулярную оси, то (рис.5)

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{\parallel}) + M_z(\vec{F}_{\perp}) = M_z(\vec{F}_{\perp}).$$

3) Если вектор силы и ось не параллельны, но лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю.

Действительно, т.к. ось Z и векторы $\vec{R}$ и $\vec{F}$ лежат в одной плоскости, а момент силы относительно любой точки на оси $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{R}$ и $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{F}$, то M_z=0

Итак, если вектор силы и ось лежат в одной плоскости, а линия действия силы пересекается с осью, то момент силы относительно точки и оси равны нулю

Нажмите мышку или пробел

Правила нахождения момента силы F относительно оси Z

1.Найти проекцию силы $\overrightarrow{F_{\perp}}$ на любую плоскость π перпендикулярную оси Z и указать точку O – точку пересечения этой плоскости с осью Z.

2. Найти плечо силы $\overrightarrow{F_{\perp}}$ относительно оси – т.е. расстояние *L* от линии действия силы $F_{\perp}$ проекции силы (в плоскости π) до точки O (длину отрезка OA на рисунке);

3. Найти величину момента силы $|M_Z| = F_{\perp}|OA|$ и направление $\overrightarrow{M_Z}$ по правилу правого винта (буравчика).

4. Найти проекцию момента силы на выбранное направление – направление оси Z.

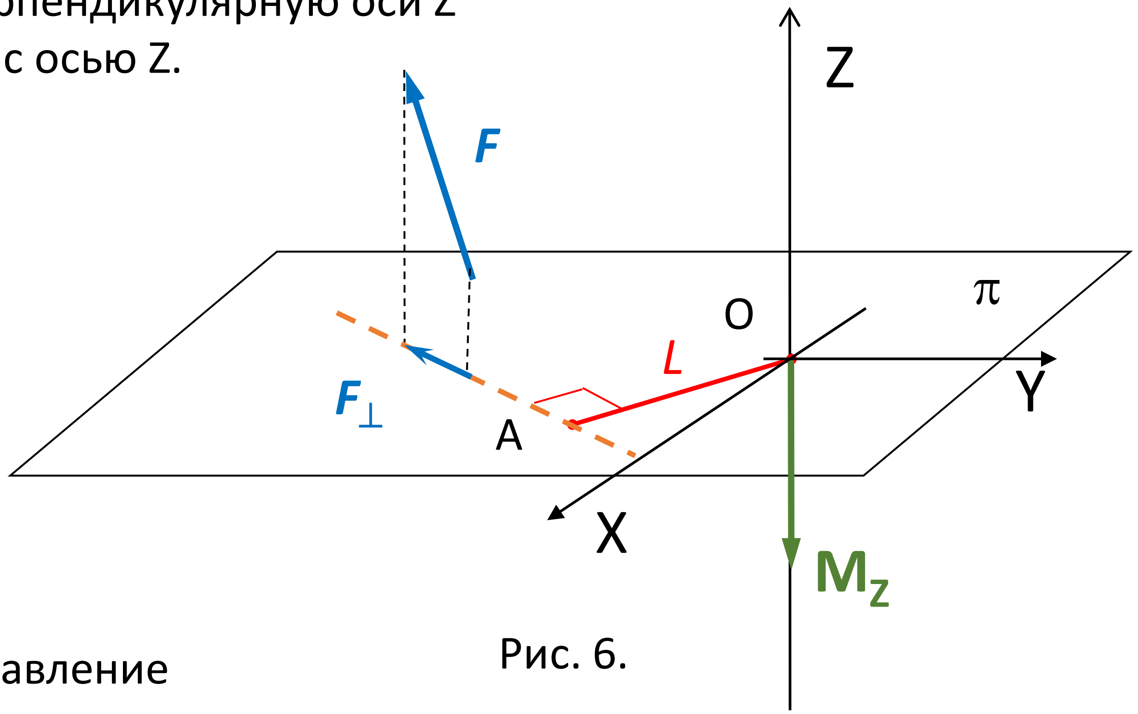

Рис. 6.

Нажмите мышку или пробел

Момент импульса материальной точки

1. Момент импульса материальной точки относительно точки

О. ***Кинетическим моментом импульса материальной точки*** массой *m*, движущейся со скоростью ***υ***, называется векторное произведение радиуса вектора $\vec{R}$, исходящего из точки *O* к импульсу движущейся точки, и вектора импульса материальной точки $\vec{p} = m\vec{v}$ (рис. 7):

$$\vec{L}_O = [\vec{R}, m\vec{v}] = [\vec{R}, \vec{p}] \qquad (9)$$

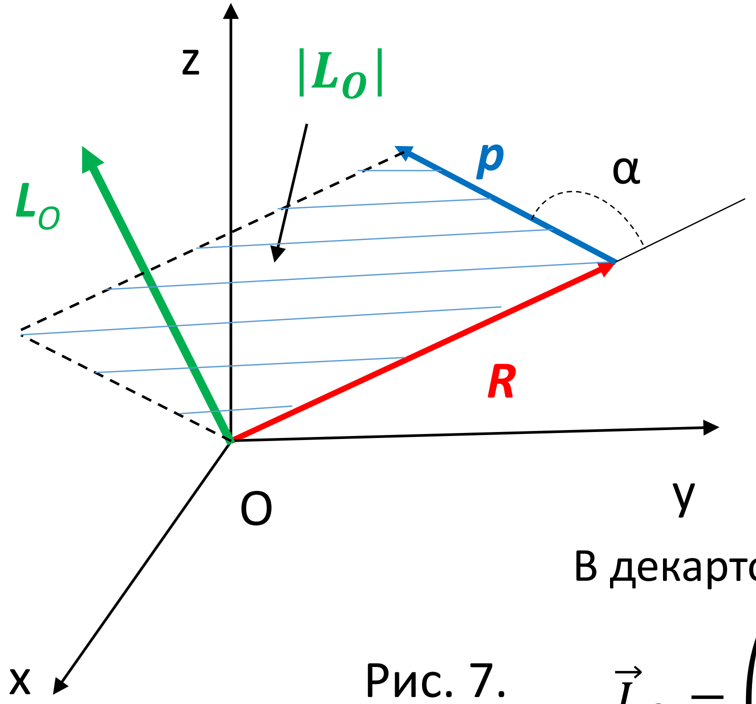

Рис. 7.

Точку О иногда называют ***полюсом.***

Размерность момента импульса - $L_O = \left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}\right]$.

Вектор момента импульса всегда перпендикулярен радиусу вектору $\vec{R}$ и вектору импульсу материальной точки

$$\vec{L}_O \perp \vec{R}, \vec{L}_O \perp \vec{p}. \qquad (10)$$

В декартовых координатах момент импульса материальной точки:

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x) \qquad (11)$$

Нажмите мышку или пробел

2. Момент импульса механической системы относительно точки

Момент импульса механической системы (системы материальных точек, тела) относительно некоторой точки О:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{p}_i \qquad (12)$$

При переходе к другой точке O_1 радиус-векторы точек системы преобразуются $\vec{R}_i = \vec{R}_{1i} + \vec{R}_1$

Поэтому
$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} + \vec{R}_1\right) \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \vec{p}_i\right) = \sum_i \vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \left(\sum_i \vec{p}_i\right) \qquad (13)$$

Суммарный импульс системы равен импульсу центра масс: $\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_C$

Момент импульса механической системы: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{R}_1 \times \vec{p}_C$ (14)

В системе отсчета, где центр масс тела покоится: $\vec{p}_C = \vec{0}$ (15)

Суммарный момент импульса *не зависит* от точки, относительно которой он вычисляется:

$$\vec{L} = \vec{L}_1$$

Нажмите мышку или пробел

Уравнение динамики вращательного движения материальной точки

Момент импульса материальной точки: $\vec{L}_O = [\vec{R}, m\vec{v}] = [\vec{R}, \vec{p}]$ (16)

Найдем производную от вектора момента импульса по времени: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} + \vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ (17)

Так как $\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = \vec{0}$

в инерциальной системе отсчета по второму закону Ньютона (в импульсной форме): $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

То второе слагаемое имеет вид $\vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}$ - вектор момента равнодействующей силы

Уравнение динамики вращательного движения материальной точки в векторном виде (относительно произвольной точки)*:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) \qquad (18)$$

О. Производная от вектора момента импульса относительно точки равна моменту действующих сил относительно этой точки.

Нажмите мышку или пробел

Уравнение динамики вращательного движения механической системы в векторном виде.

Суммарный момент импульса механической системы в векторной форме:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{p}_i \qquad (19)$$

Производная от вектора суммарного момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i \qquad (20)$$

На частицы действуют внешние и внутренние силы:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{F}_i^{ВНЕШ}$$

При этом внутренние силы подчинятся третьему закону Ньютона – они лежат на прямых линиях, попарно соединяющих точки, противоположны по направлению и одинаковы по величине:

$$\vec{F}_i^{ВНУТР} = -\vec{F}_j^{ВНУТР} \qquad \text{и} \qquad \left|\vec{F}_i^{\text{ВНУТР}}\right| = \left|\vec{F}_j^{\text{ВНУТР}}\right|$$

и, поэтому момент внутренних сил равен нулю:

$$\sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{ВНУТР} = \sum_i \left(\vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_j^{ВНУТР}\right) = \sum_i \vec{R}_{\perp ij} \times \left(\vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{F}_j^{ВНУТР}\right) = \vec{0} \qquad (21)$$

Изменение вектора момента импульса механической системы во времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{ВНЕШ} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right) \qquad (22)$$

Уравнение динамики вращательного движения (УДВД) механической системы (системы материальных точек):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right) \qquad (23)$$

Суть уравнения ДВД: ***Производная от вектора суммарного момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.***

УДВД в проекциях на оси:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{Ox}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{Oy}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right) \qquad (24)$$

Закон сохранения момента импульса.

В случае замкнутой механической системы:

$$\sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\text{ВНЕШ}}\right) = \vec{0} \qquad (36)$$

И, следовательно, из уравнения динамики вращательного движения механической системы имеем:

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{0} \implies \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \vec{0} \implies \boxed{\sum_i \vec{L}_i = \mathrm{const}} \qquad (37)$$

О. - ЗСМИ: ***«Если момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно некоторой точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки. Иными словами, в замкнутых, изолированных механических системах вектор момента импульса сохраняется, то есть не меняется с течением времени».***

Для проекций момента импульса механической системы:

$$\sum_i L_{ix} = \text{const}; \ \sum_i L_{iy} = \text{const}\,; \ \sum_i L_{iz} = \text{const} \qquad (38)$$

Если система частично замкнута:

$$\begin{cases} \sum_i \frac{d\vec{L}_{ix}}{dt} = \vec{0}; \\ \sum_i \frac{d\vec{L}_{iy}}{dt} \neq \vec{0}; \\ \sum_i \frac{d\vec{L}_{iz}}{dt} \neq \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \sum_i L_{ix} = const; \\ \sum_i L_{iy} \neq const; \\ \sum_i L_{iz} \neq const \end{array} \qquad (39)$$

***Условия равновесия тела можно сформулировать таким образом, как следствия из ЗСИ и ЗСМИ*:**

1.Если тело покоится, то центр масс тела не движется, поэтому для центра масс

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_i \vec{F}^{ВНЕШ}}{m_c} = \vec{0}$$

То есть: $\sum_i \vec{F}_i^{ВНЕШ} = \vec{0}$

2. Если тело не вращается, то

$$\varepsilon = \frac{M_z^{ВНЕШ}}{I_z} = 0$$

То есть: $M_z^{ВНЕШ} = 0$