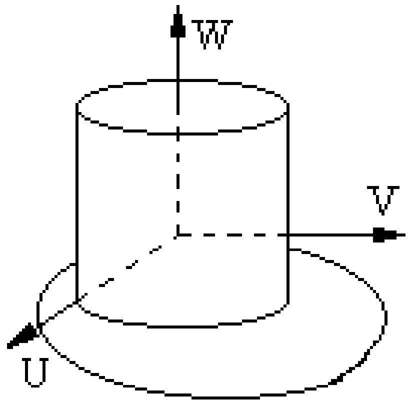
Определение статической и динамической жесткости системы виброизоляции



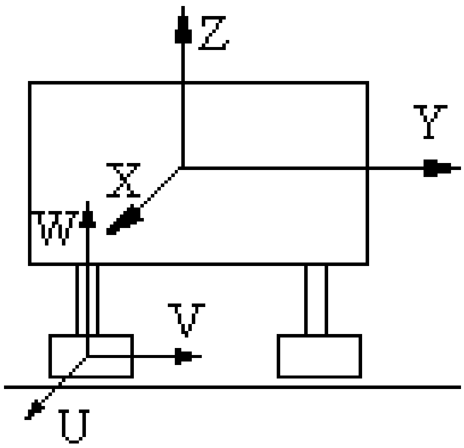
Для амортизаторов, которые часто бывают телами вращения, приняты главные направления.

Рис.1.15 Главные направления виброизоляторов

Главные направления - это такие направления осей, деформация вдоль которых вызывает деформацию только вдоль этого направления.

Жесткостные параметры амортизатора задаются также вдоль главных направлений, т.е. необходимо задать C_u, C_w, C_v. Если амортизатор - тело вращения, то $C_u = C_v > C_w$, аналогично задается и динамическая жесткость C_{gu}, C_{gw}, C_{gv}, причем $C_{gu} = C_{gv} > C_{gw}$.

Амортизаторы устанавливаются в системе и ориентируются как правило таким образом, чтобы их главные направления были параллельны осям блока.



U || X;   W || Z;   V || Y.

Направление оси W амортизатора совпадает с действием статической нагрузки.

Рис.16 К определению сдвоенной системы координат

В дальнейшем оси координат будут обозначаться 2-мя буквами: Z-W; Y-V; X-U.

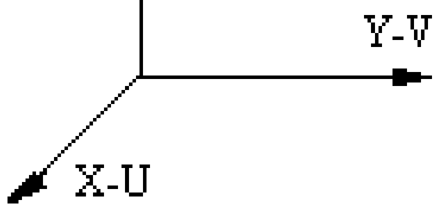


Рис.1.17 Сдвоенная система координат

Для системы амортизации, в которой существует n амортизаторов, справедливо:

$$C_{u\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{ui}; \qquad C_{gu\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{gui};$$

$$C_{v\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{vi}; \qquad C_{gv\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{vgi};$$

$$C_{w\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{wi}; \qquad C_{gw\,сист} = \sum_{i=1}^{n} C_{gwi};$$

Эти значения C_g определяют жесткостной параметр системы, характеризующей поступательное движение блока: т.е. эти динамические жесткости определяют колебание блока вдоль координат Z-W; Y-V; X-U.

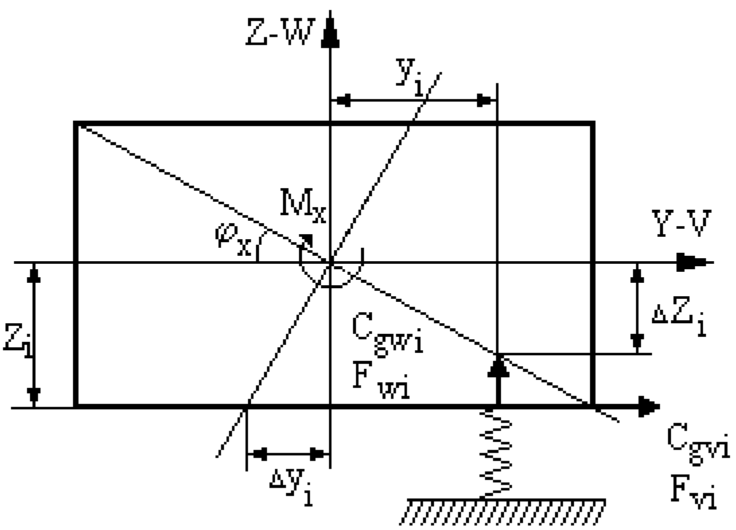
Поворотные жесткости системы виброизоляции

Поворотные жесткости определяют колебания вокруг 3-х координат и определяются в общем случае через динамические жесткости амортизаторов и координаты их установки.

Выделим в блоке произвольный амортизатор и введем следующие обозначения:

C_n - поворотная жесткость, которая определяется $C_п = \dfrac{M}{\Delta\varphi}$ - отношение момента, действующего на систему, к углу поворота, вызванного этим моментом.

Данный пример - поворот вокруг оси X.



M_x - момент закручивания блока вокруг оси X.

φ_x - угол поворота.

$$C_{nx} = \frac{M_x}{\varphi_x};$$

Z_i, Y_i - координаты установки амортизатора (плечи приложения усилий, создающих моменты).

ΔZ_i - деформация блока вдоль оси Z.

$\Delta Z_i = Y_i * \varphi_x$ (ввиду малости угла)

Рис.1.18 Определение поворотной жесткости вокруг оси OX

Данная деформация вызывает вертикальную реакцию F_{wi} . Одновременно амортизаторы деформируются и в горизонтальной плоскости:
$\Delta Z_i = Z_i * \varphi_x$ (ввиду малости угла) - Это вызывает горизонтальную реакцию F_{vi} .

Усилие - произведение жесткости на деформацию.

$$F_{wi} = C_{gwi} \cdot \Delta Z_i = C_{gwi} \cdot y_i \cdot \varphi_x$$

$$F_{vi} = C_{gvi} \cdot \Delta Y_i = C_{gvi} \cdot z_i \cdot \varphi_x$$

Можно рассчитать моменты:

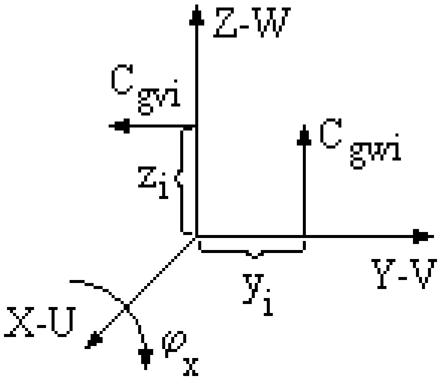
$$M_{xi} = C_{gwi} \cdot y_i^2 \cdot \varphi_x + C_{gvi} \cdot z_i^2 \cdot \varphi_x$$

Общий момент от 4-х амортизаторов:

$$M_x = \sum_{i=1}^{4} (C_{gwi} \cdot y_i^2 \cdot \varphi_x + C_{gvi} \cdot z_i^2 \cdot \varphi_x);$$

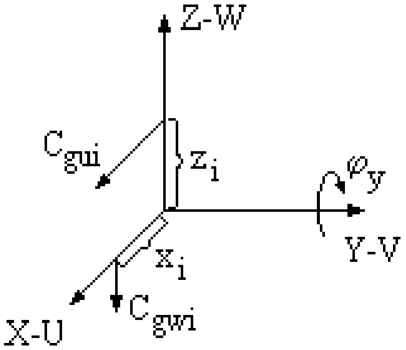
$$C_{nx} = \frac{M_x}{\varphi_x} = \sum_{i=1}^{4} (C_{gwi} \cdot y_i^2 + C_{gvi} \cdot z_i^2);$$

Чтобы рассчитать C_n по другим осям, составим вспомогательные схемы сил и моментов.



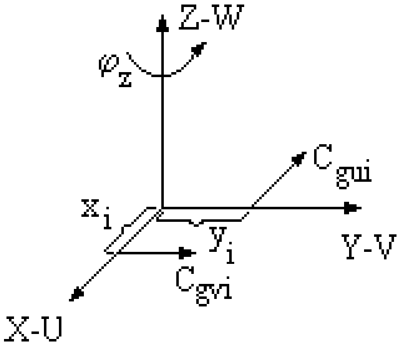
$$C_{nx} = \sum_{i=1}^{n} (C_{gvi} \cdot z_i^2 + C_{gwi} \cdot y_i^2);$$

Схема отображает все компоненты, необходимые для ее определения.



$$C_{ny} = \sum_{i=1}^{n} (C_{gui} \cdot z_i^2 + C_{gwi} \cdot x_i^2);$$

Моменты, препятствующие повороту, возникают в плоскости ZY.



$$C_{nz} = \sum_{i=1}^{n} (C_{gvi} \cdot x_i^2 + C_{gui} \cdot y_i^2);$$

Препятствующие моменты возникают в плоскости XZ.

Рис.1.19 Поворотные жесткости вокруг осей X, Y, Z.

Поворотные жесткости характеризуют колебательные движения вокруг осей X, Y, Z.

Замечания: Динамические жесткости системы определяются только параметрами виброизолятора и фиксируются как только выбран конкретный типоразмер амортизатора.

1. Поворотные жесткости при заданном типоразмере виброизолятора могут изменяться конструктором путем изменения координат установки.

2. Поворотные жесткости при заданном типоразмере амортизатора могут изменяться конструктором путем изменения координат установки

Основные виды диссипативных сил

Диссипативные силы – возникают при колебаниях системы и за счет трения совершают необратимую работу.

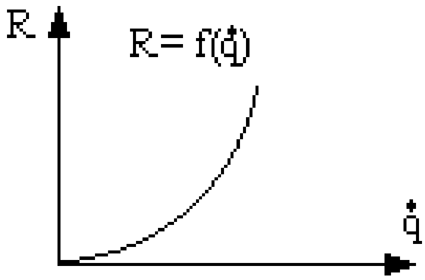
Виды диссипативных сил:

1. Силы трения в опорах и сочленениях.
2. Силы сопротивления среды, в которой происходят колебания.
3. Силы внутреннего трения в материалах опор (в амортизаторах).

Принимаемое обозначение сил: R: $R = -f(\dot{q})$ функция скорости. «-» т.к. силы противоположны по направлению скорости.

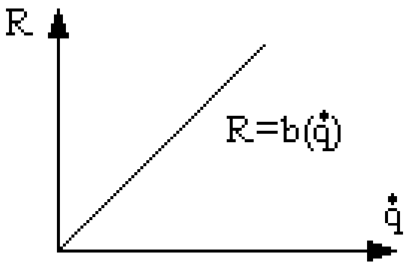
Классификация диссипативных сил

По виду функции f.

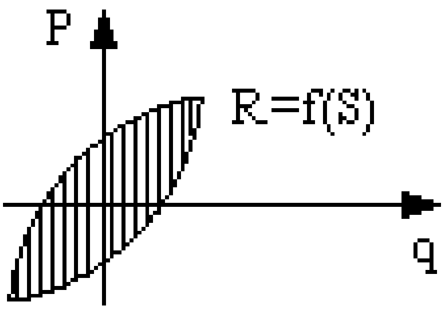
1


- нелинейная функция от скорости.

При аналитических исследованиях стараются избежать этой зависимости. При использовании систем амортизаторов нелинейности, как правило, не встречаются.

2


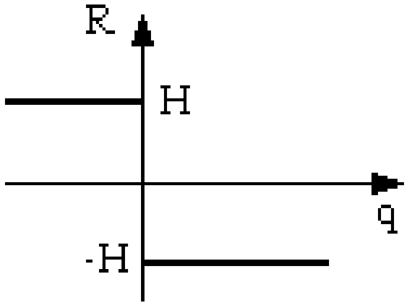
- линейная зависимость – вязкое трение – характерна для случая сопротивления среды, в которой происходит колебание.

3


- гистерезисные потери (внутреннее трение в материале). S – площадь петли гистерезиса. Здесь принимают следующее допущение (из-за сложности подсчета площади петли):

$R = b_0 \cdot \dot{q}$. Значение b_0 отсчитывается из следующих соображений: определенный типоразмер амортизатора с гистерезисными потерями исследуется экспериментально и для него подсчитываются силы рассеивания за один цикл колебания. Принимается, что этому амортизатору эквивалентен по параметрам рассеивания некоторый другой амортизатор с вязким трением. Приравнивая диссипативные силы этих амортизаторов, определяют значение b_0.

4



- сухое трение (кулоново трение).
- $R = \pm H$ характеризуется независимостью диссипативных сил от скорости.

Рис.1.20. Основные виды диссипативных сил

Любые виды диссипативных сил реализуются в конструкциях амортизаторов и конкретных характер функции $R = f\ (\dot{q})$ определенным образом влияет на движение объекта при вибрации. Коэффициент b (b_0) называется ***коэффициентом демпфирования***. Его значения для нормализованных амортизаторов приведены в справочниках.

<u>Возмущающие силы</u>

Возмущающие силы не зависят от движения системы, но активно влияют на него.

Существует 2 способа задания возмущающих воздействий:

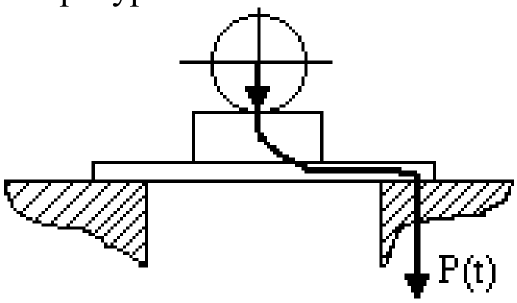
1. $P\ (t)$ – задаются возмущающие <u>силы</u> в функции от времени.
2. Задание зависимости <u>амплитуды</u> перемещения основания от времени, это кинематическое возбуждение $A\ (t)$.

Различают 2-е задачи виброизоляции (в соответствии с заданием сил):

1. Активная виброизоляция - соответствует 1-му способу задания сил.
2. Пассивная виброизоляция – соответствует кинематическому возбуждению.

1.6. Активная виброизоляция

Основным в данной задаче является изоляция источника вибрации от аппаратуры.



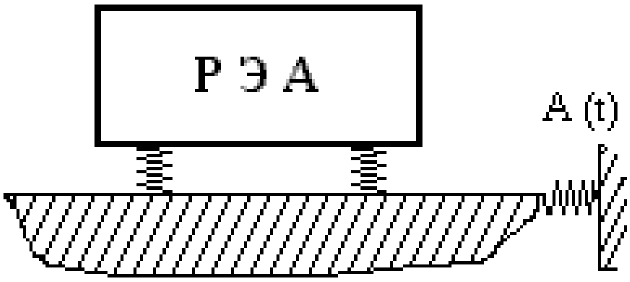
Чем более неточное изготовление, тем большая возможность появления вибраций, которые передаются на основание (из-за дисбаланса ротора). Здесь можно задать силу P (t).

Рис.1.21 Активная виброизоляция

Задача:	Имеется усилие, проходящее от источника до шасси, необходимо изолировать источник вибрации от основания, т.е. максимально уменьшить усилие, проходящее от источника к конструкции аппарата.
Решение:	Необходима установка мягких прокладок.

1.7. Пассивная виброизоляция

Пассивная виброизоляция – изоляция аппаратуры от вибрирующего основания.



Изоляция возможна за счет установки амортизаторов. При пассивной виброизоляции определяются амплитуды перемещения блока, которые при надежной защите должны быть меньше возмущающих и далее рассчитываются усилия в элементах конструкции амортизаторов.

Рис.1.22 К понятию пассивной виброизоляции

Часто по определенным амплитудам блока рассчитывают ускорения элементов конструкций. Рассчитанное ускорение сравнивается с допустимым. Если оно меньше или равно допустимому, то система спроектирована верно, если больше, то необходимо внести коррективы в систему амортизации. Постановка задачи такова: спроектировать систему амортизации, при $j \leq [j]$.

1.8. Энергетические соотношения в системе виброизоляции

Допустим, существует система с S степенями свободы.

1.8.1. Кинематическая энергия системы «Т».

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} a_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$$

$q_1\ q_2$ – для S=2

$q_1\ q_2$, $q_1\ q_3$, $q_2\ q_3$ – для S=3

a_{ij} - инерционный (кинетический) параметр системы

$$a_{ij} = \begin{cases} m \\ I \end{cases}$$

При поступательном движении объекта

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

При поворотных движениях объекта

$\dot{q}_i, \dot{q}_j$ - обобщенные скорости по соответствующим координатам (скорости абсолютные).

1.8.2. Потенциальная энергия объекта «П».

$$П = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} C_{ij}\, q_i\, q_j$$

Cij – жесткостной параметр системы: $C_{ij} = \begin{cases} C_g \\ C_n \end{cases}$

q_i, q_j – деформации упругих элементов (относительные).

1.8.3. Диссипативная функция «Ф».

$$Ф = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} b_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$$

b_{ij} – коэффициент демпфирования

$$R_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i}$$

$$R_i = -\sum_{i=1}^{S} b_i \cdot \dot{q}_i$$

1.9. Уравнение Лагранжа (уравнение движения объекта).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=-\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i}+Q(t)$$

I II III

L=T-П - функция Лагранжа.

i – число обобщенных координат, равное числу степеней свободы.

I - баланс кинетической и потенциальной энергии в системе.

II - потери энергии на диссипацию.

III - приток энергии за счет возмущающих сил.

В частных случаях Q(t) равно нулю:

a) при свободном движении объекта (смещение блока от положения равновесия)

b) кинематическое возмущение

Данное уравнение позволяет проанализировать движение системы с любой степенью свободы и в любой момент времени. Для системы с S степенями свободы уравнение Лагранжа превращается в систему из S дифференциальных уравнений. При S=6 уравнение Лагранжа – система из 6-ти уравнений.

Решение в общем виде подобной системы – сложная задача даже при использовании ЭВМ.

$S = 1$ - система решается, $S > 1$ – применяются упрощенные методы расчета системы.

1.10. Свободное движение объекта с одной степенью свободы

S=1,

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2,\ R=-b\dot{q}$$

$$\Pi=\frac{1}{2}cq^2,\ Q(t)=0$$

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа получим:

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=0,$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{c}{a}};\quad 2\delta=\frac{b}{a}\Rightarrow$$

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\lambda^2 q=0.$$

λ - частота собственных колебаний системы

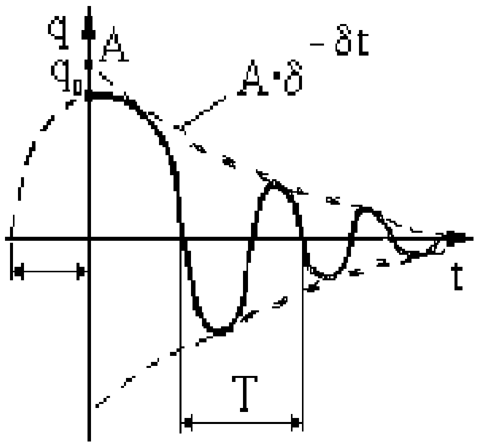
δ - коэффициент затухания

c - жесткостной параметр системы

a - инерционный параметр системы

Существуют два случая:

1. **Малое затухание системы** $\delta<\lambda$



$$q=A\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin(\sqrt{\lambda_{S_\lambda}{}^2-\delta^2}\cdot t+\varphi)\approx$$

$$\approx A\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin(\lambda t+\varphi)$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{T},\quad \lambda\approx\sqrt{\lambda^2-\delta^2}$$

q_0 – начальное смещение

φ - угол отсечки

Рис.1.23 Свободные колебания системы при малом затухании

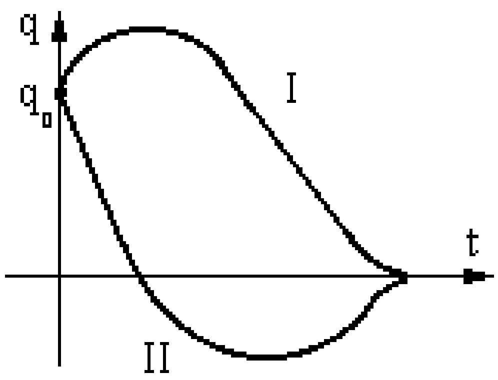
Т.к. обычно $\lambda>>\delta$ на практике логарифмический декремент Колебаний:

$$\Lambda=\ln\frac{A_i}{A_{i+1}}=\ln\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}}=\delta T$$

Замечания:

a) $\delta<\lambda$ наиболее типичен для реальных амортизаторов.
b) Затухание практически не искажает значение собственной частоты.
c) Затухание свободных колебаний происходит по экспоненте и амплитуда колебаний стремится к 0. Считают, что амплитуда колебаний равна 0 через 10…15 периодов собственных колебаний.

2. **Значительные потери** $\delta>\lambda$**.** Характер движения апериодический. В системах амортизации практически не встречается.



Конкретный характер движения зависит от начальных условий.

1. $q_0 > 0; \quad \dot{q}_0 > 0;$
2. $q_0 > 0; \quad \dot{q}_0 < 0.$

Рис. 1.24 Свободное затухание при значительных потерях

Рассмотренные случаи соответствуют установке амортизаторов с вязким трением или гистерезисными потерями, для которых справедлива функция: $R = -b \cdot \dot{q}$

1.11. Свободное движение объекта на амортизаторах с сухим трением.

$$R = \pm H;$$

$$a\ddot{q} + cq = \pm H;$$

$$a\ddot{q} + cq \pm H = 0; \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \lambda^2 q \pm \lambda^2 \alpha = 0.$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{a}}; \quad \alpha = \frac{H}{C};$$

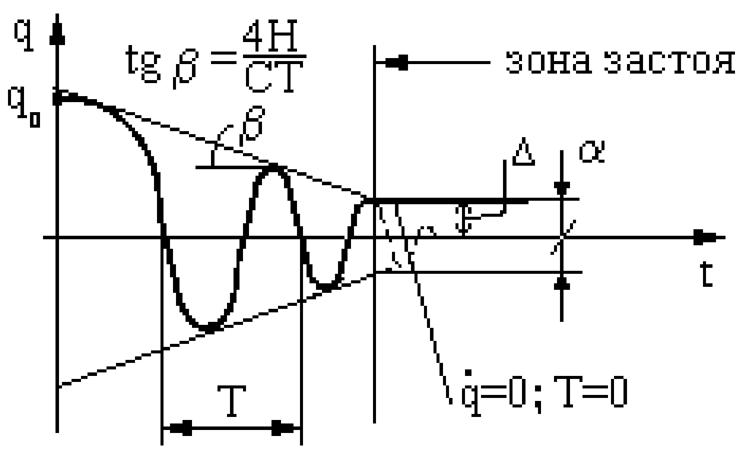


Рис.1.25 Свыободное затухание системы с сухим трением

Решение выглядит следующим образом:

1. $\dot{q} < 0;$

$$q = (q_0 - \alpha) \cdot \cos \lambda t + \alpha.$$

2. $\dot{q} > 0;$

$$q = (q_0 + \alpha) \cdot \cos \lambda t - \alpha.$$

Основные особенности движения систем на амортизаторах с сухим трением.

1. Частота собственных колебаний определяется по формуле $\lambda = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ и не зависит от величины диссипативных сил.
2. Собственные колебания затухающие и затухают по линейному закону.
3. Существует зона застоя для амортизаторов с сухим трением: собственные колебания затухают до нуля. В зоне застоя объект не доходит до положения равновесия расстояние равное Δ, т.е. существует некоторая амплитуда смещения блока относительно положения равновесия.

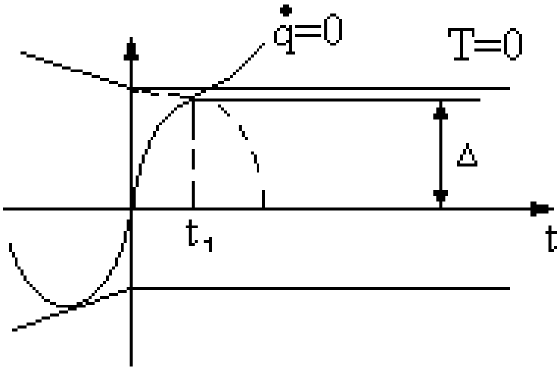


Рис. 1.25 Зона застоя

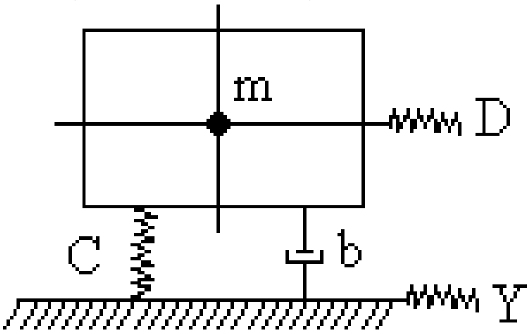
Остановка блока в зоне застоя происходит в момент времени t_1, для которого $\dot{q} = 0$ и $q < \alpha$ (при $\dot{q} = 0$);

$\Delta = q_{\ t=t_1}$

Наличие зоны застоя объясняется малой величиной потенциальной энергии, которая не может преодолеть силы сухого трения амортизаторов; кинетическая энергия равна нулю. Говорят, что амортизатор для зоны застоя закрыт. Амортизаторы с сухим трением не работают при амплитудах смещения $q < \alpha$.

1.12. Вынужденные колебания системы амортизации при пассивной виброизоляции.

Блок установлен на условном амортизаторе.



C - жесткость виброизолятора;

b - коэффициент демпфирования демпфера

m - масса блока

Основание колеблется по гармоническому закону $y = Y \cdot \sin \omega t$

Рис.1.27 Модель системы виброизоляции при вынужденных колебаниях

При вибрации основания происходит перемещение блока. Нам необходимо определить параметры колебания блока: D = ?; $\omega_{бл}$ =?;

Рассмотрим систему с одной степенью свободы. Решение получается при помощи уравнения Лагранжа.

1. $T = \frac{1}{2} m \dot{D}^2;$

2. $П = \frac{1}{2} C(D - y)^2;$ $q = D - y$ - с учетом сжатия с обоих концов.

3. $R = b\dot{q} = b\dot{D} - b\dot{y};$

4. $Q(t) = 0.$

Уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \left(\frac{dL}{dq}\right) = -R;$$

$$L = T - П;$$

$$\frac{dL}{d\dot{q}} = \frac{1}{2} 2m\dot{D} = m\dot{D};$$

$$\frac{dL}{dq} = -CD + yC;$$

$$итак: \quad \ddot{D} + 2\delta\dot{D} + \lambda^2 D = 2\delta\dot{y} + \lambda^2 y,$$

$$где: \quad 2\delta = \frac{b}{m}; \quad \lambda^2 = \frac{c}{m}.$$

Вынужденные колебания системы амортизации описываются неоднородными дифференциальными уравнениями второго порядка. Искомая амплитуда D является решением этого уравнения. Это сумма решений однородного и частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$D = D_0 + D_1$

D_0 – решение однородного дифференциального уравнения.

D_1 – частное решение неоднородного уравнения.

Для получения D_0 правая часть уравнения приравнивается к нулю. Т.о. получаем уравнение, которое описывает свободное движение объекта. Ввиду быстрого затухания свободных колебаний в практических случаях можно не учитывать D_0, тогда $D = D_1$ и искомое решение получается в виде частного решения этого уравнения:

$$D = D_{10} \cdot \sin(\omega t + \varphi_н);$$

$$D_{10} = Y \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{4\delta^2\omega^2}{\lambda^4}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right) + \frac{4\delta^2\omega^2}{\lambda^4}}};$$

введем обозначения:

$\frac{1}{\gamma}$ - коэффициент динамичности.

γ - коэффициент виброизоляции.

Отношение статической упругой силы к амплитуде силы возбуждающих колебаний: $$\frac{1}{\gamma} = \frac{F_{ст}}{F} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4\delta^2\omega^2}{\lambda^4}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right) + \frac{4\delta^2\omega^2}{\lambda^4}}};$$

Т.о. $D_{10} = \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma$, т.е. взаимосвязь между амплитудой вибрации блока и амплитудой вибрации основания описывается коэффициентом динамичности. Коэффициентом динамичности показывает во сколько раз амплитуда вибрации блока больше (или меньше) амплитуды вибрации основания. Для защиты блока необходимо выполнение следующего соотношения: $\frac{1}{\gamma} < 1$.

Частота вынужденных колебаний блока равна частоте возмущающих воздействий.

Амплитуда вибраций блока определяется соотношением $\frac{\omega}{\lambda}$, т.е. соотношения возмущающего воздействия и собственной частоты системы.