

Определение. Вероятность события B , найденная при условии, что событие A произошло, называется **условной вероятностью** события B и обозначается $P(B/A)$, или $P(B|A)$, или $P_A(B)$:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)}$$

Теорема (правило умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

1) В ящике лежат 12 красных, 8 зелёных и 10 синих шаров. Наудачу вытянули 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар.

1-й способ решения

Обозначим события:

A - оба вынутых шара разного цвета;

B - среди двух вынутых шаров нет синего шара.

Требуется найти **условную вероятность** $P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Общее количество всевозможных элементарных исходов испытания равно $n = C_{30}^2$.

Количество исходов, благоприятствующих событию B , равно $m_B = C_{20}^2$ (из 20-ти несиних шаров достаём 2).

Количество исходов, благоприятствующих событию $A \cdot B$ (оба вынутых шара разного цвета и среди двух вынутых шаров нет синего шара), равно $m_{AB} = C_{12}^1 \cdot C_8^1$ (один шар красный, другой шар зелёный; количество исходов определяем по правилу произведения в комбинаторике).

Следовательно

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{m_{AB}}{n}\right)}{\left(\frac{m_B}{n}\right)} = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95} \approx 0,505$$

2-й способ решения

Используем для расчёта непосредственно формулу **классического определения вероятности**.

Рассматриваем в качестве общего количества возможных элементарных исходов количество тех исходов, когда среди двух вынутых шаров нет синего шара: $n = C_{20}^2$ (из 20-ти несиних шаров достаём 2).

Количество благоприятных исходов равно $m = C_{12}^1 \cdot C_8^1$ (один шар красный, другой шар зелёный; количество таких исходов определяем по правилу произведения в комбинаторике).

И по формуле классического определения определения вероятности

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95} \approx 0,505$$

Ответ: $P = \frac{48}{95} \approx 0,505$.

2) Бросили игральную кость. Какова вероятность того, что выпало простое число очков, если известно, что число выпавших очков чётное ?

Обозначим события:

A - выпало простое число очков;

B - число выпавших очков чётное.

Требуется найти условную вероятность $P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Общее количество возможных элементарных исходов равно $n = 6$.

Количество исходов, благоприятствующих событию B , равно $m_B = 3$ (это очки 2, 4 и 6 - чётные).

Количество исходов, благоприятствующих событию $A \cdot B$ (выпало простое число очков И число выпавших очков чётное), равно $m_{AB} = 1$ (это число 2 - чётное и простое).

Следовательно

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{m_{AB}}{n}\right)}{\left(\frac{m_B}{n}\right)} = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $P = 1/3$.

3) Вероятность дожить человеку до 20 лет равна p , дожить до 60 лет - q . Какова вероятность дожить до 60 лет человеку 20-летнего возраста ?

Обозначим события:

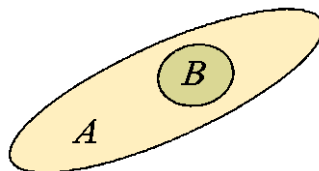
A - человек дожил до 20 лет ($t \in [0; 20]$, $P(A) = p$);

B - человек дожил до 60 лет. ($t \in [0; 60]$, $P(B) = q$).

Вычисляем условную вероятность $P(B/A)$:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{q}{p}.$$

В данном случае $P(B \cdot A) = P(B)$, т.к. $B \subset A$:



(множество A поглощает множество B , т.к. не все дожившие до 20 лет доживут и до 60; но дожившие до 60 лет все без исключения преодолели 20-летний рубеж)

Ответ: $P = q/p$.

Литература:

1) Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. "Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями", 2005, стр. 100, 343 (задача 3.49).