Глава 9

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определённый интеграл – одно из центральных понятий математического анализа – является мощным средством исследования и решения многочисленных теоретических и прикладных задач.

§ 9.1. Некоторые задачи, определения

1. Понятие площади криволинейной трапеции. Пусть на промежутке $a \le x \le b$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x) \ge 0$ (рис. 9.1). Фигура $AabB$, ограниченная отрезком $[a,b]$, кривой $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*. Определим, что понимать под её площадью.

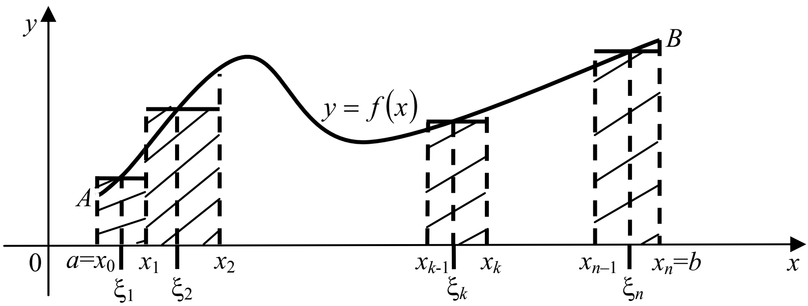


Рис. 9.1

Разделим $[a,b]$ произвольным образом на n малых частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Получим *n частичных отрезков* $[x_{k-1}, x_k]$ и обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,...n)$, причём через Δx_k будем обозначать не только длину, но и сам отрезок $[x_{k-1}, x_k]$. В каждом из частичных отрезков возьмём произвольно по точке $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ и в них проведём ординаты $f(\xi_k)$ $(k = 1,2,...,n)$. Кривую $y = f(x)$ заменим ступенчатой линией, а криволинейную трапецию – ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников с площадями $\Delta P_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = 1,2,...,n)$. Величину ΔP_k берут за приближённое значение площади малой криволинейной трапеции, соответствующей участку $[x_{k-1}, x_k]$. Сумму

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + ... + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + ... + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

принимают за *приближённое* значение площади P криволинейной трапеции. Точное значение площади *определится* как предел

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k , \tag{9.1}$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ (если $\lambda \to 0$, то $n \to \infty$; обратное необязательно).

2. Определение работы переменной силы. Известно, что работа A постоянной силы F, направленной в сторону движения на прямолинейном участке длины S, определяется формулой $A = F \cdot S$. Теперь допустим, что материальная точка перемещается по отрезку $a \le x \le b$ под действием переменной силы $f(x)$, направленной в сторону движения и меняющейся *непрерывно*. Чтобы определить работу этой силы, разделим $[a,b]$ на n малых участков Δx_k (см. п. 1). Поскольку участок мал, то и сила на нём меняется мало, она почти постоянна, и её можно принять приближённо равной $f(\xi_k)$, где ξ_k – какая-нибудь точка промежутка $[x_{k-1}, x_k]$, а работа на нём приближённо будет $\Delta A_k \approx f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$. За работу на всём промежутке $[a,b]$ принимают предел:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k . \tag{9.2}$$

Так в геометрии и физике мы пришли к необходимости рассмотрения одинаковых образований (9.1) и (9.2). Надо изучить их в чистом виде, независимо от их природы. Этим и занимается математика.

Отметим, что в обеих задачах применяется одинаковый приём – непрерывно меняющая величина $f(x)$ заменяется дискретно меняющейся: кусочно-постоянной, а для постоянных процессов соответствующие величины заранее известны. Ещё заметим, что хотя и применили знак предела $(\lim)$, однако это предел нового сорта (не предел функции или последовательности), и надо ещё дать его определение.

3. Понятие определённого интеграла. Пусть на промежутке $a \le x \le b$ задана *некоторая* функция $f(x)$. Разобьём этот промежуток произвольным образом на n частей точками (см. рис. 9.2):

$$a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n \equiv b .$$

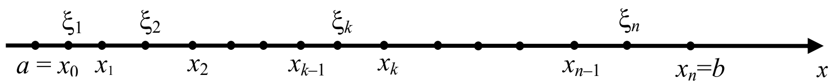


Рис. 9.2

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ – это длина *частичного промежутка* $[x_{k-1}, x_k]$. В каждом из них берём произвольно по точке ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Она называется *интегральной* или *римановой* суммой и зависит от функции, от отрезка $[a,b]$, способа его разбиения и выбора точек ξ_k. Обозначим

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

– это есть наибольшая из длин отрезков Δx_k, она называется *мелкость* данного разбиения.

Определение 1. *Число I* (если оно существует) называется пределом интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, если каким бы малым числом $\varepsilon > 0$ мы ни задались, по нему найдётся число $\delta > 0$, такое, что неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$ будет иметь место для всех интегральных сумм, для которых $\lambda < \delta$, независимо от способа разбиения и выбора точек ξ_k. В этом случае пишут $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Определение 2. Если существует предел I интегральных сумм при $\lambda \to 0$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$. Само *число I* называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается символом $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается: интеграл от a до b от функции $f(x)$ на dx).

Итак, по определению

$$I \equiv \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (9.3)$$

Число a – нижний предел интеграла, b – верхний предел, x – переменная интегрирования.

Определённый интеграл – это не функция, а число, и в образование интегральных сумм σ обозначение переменной x не входит – в них присутствуют лишь значения $f(\xi_k)$ в любых точках отрезка $[a,b]$, и x можно заменить любой другой буквой:

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi = \ldots$$

(например, $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \ldots.$).

Это есть *свойство независимости величины определённого интеграла от обозначения переменной интегрирования*.

Знак $\int$ ввёл Лейбниц – это стилизованная буква S (начальная буква от латинского *Summa*), ею ранее обозначалась сумма вместо греческой буквы Σ. Поскольку числа ξ_k могут заполнять весь отрезок $[a,b]$, а Δx_k напоминают dx, то стали писать *f(x)dx* в знак того, что учитываются значения функции во всех точках $x \in [a,b]$. Окончательное обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$ ввёл французский математик и физик Жозеф Фурье (1768–1830). Оказалось, что такое обозначение имеет большой смысл: оно позволяет лучше запоминать формулы, формализовать вычисления, на значок *dx* в определённой ситуации смотреть как на дифференциал и так далее. Термин «интеграл» (от лат. *integer* – целый, восстановленный) предложил Иоганн Бернулли – ученик и сподвижник Лейбница. Исторически определённый интеграл возник раньше неопределённого.

4. В соответствии с определением (9.3) формулы (9.1) и (9.2) представляют соответственно *геометрический и физический* (механический) *смысл* определённого интеграла:

- $P = \int_a^b f(x)\,dx$ – площадь криволинейной трапеции,
- $A = \int_a^b f(x)\,dx$ – работа переменной силы.

5. Теорема 9.1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция f(x) интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на нём.*

Δ Дано, что интеграл (9.3) существует. Рассуждаем «от противного»: если бы функция $f(x)$ на $[a,b]$ была неограниченной, то как бы мы ни разбивали этот промежуток, она будет неограниченной хотя бы в одном из частичных промежутков, – пусть это будет Δx_m. Но тогда за счёт выбора точки ξ_m можно было бы сделать $f(\xi_m)$, а вместе с тем $f(\xi_m)\cdot\Delta x_m$ и всю сумму σ сколь угодно большой по абсолютной величине – и поэтому конечного предела для σ не существовало бы. А это означает, что функция неинтегрируема. Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Итак, интегрируемая функция необходимо, обязательно ограничена. Поэтому далее рассматриваемую функцию $f(x)$ будем предполагать ограниченной: $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$.

Однако одной ограниченности функции недостаточно для интегрируемости, теорема (9.1) необратима. Убедимся в этом на примере.

Пример. На промежутке $0 \le x \le 1$ рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \textit{рациональное}, \\ 0, \text{ если } x - \textit{иррациональное}. \end{cases}$$

Она ограничена: $0 \le D(x) \le 1$, однако не будет интегрируемой. Для доказательства этого утверждения разделим отрезок [0,1] на части произвольным образом и составим интегральную сумму $\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k$.

1) При любом разбиении за ξ_k можно взять рациональные числа, тогда $D(\xi_k) = 1$ и $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$.

2) Но в качестве ξ_k можно взять и иррациональные точки, тогда $D(\xi_k) = 0$ и $\sigma = 0$.

Так что при *любых* разбиениях существуют интегральные суммы, равные 0 и 1, поэтому они предела не имеют – функция неинтегрируема.

6. Классы интегрируемых функций. Мы видели, что и ограниченные функции не все интегрируемы. Какие же из них интегрируемы? Ответ даёт

Теорема 9.2 (достаточные условия существования определённого интеграла).

1°. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она интегрируема*.

2°. *Если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема*.

3°. *Монотонные ограниченные функции интегрируемы.*

Доказательство можно найти, например, в книге [19].

Замечание 1. Легко видеть, что изменение интегрируемой функции в конечном числе точек не изменяет значения интеграла, а потому совершенно неважно, определена функция в этих точках или нет. Так, существуют, как обычные, определённые интегралы

$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, $\int\limits_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ (при желании подынтегральным функциям в точке $x = 0$ можно назначить любое значение A – от него величины интегралов не зависят).

Замечание 2. Если функция интегрируема, то для вычисления предела I достаточно брать специальные разбиения и выбирать точки ξ_k (лишь бы $\lambda \to 0$).

Пример. Найдём площадь, ограниченную осью Ox, параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$ и $x = 1$.

Эта площадь есть $P = \int\limits_0^1 x^2 dx$. Так как функция $f(x) = x^2$ интегрируема, то точки деления можем брать произвольными; возьмём их так: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_k = \frac{k}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$. Отсюда за точки ξ_k возьмём правые концы подынтервалов: $\xi_k = x_k$ $(k = 1,2,...,n)$, тогда $f(\xi_k) = \xi_k{}^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$. Составляем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

(Использовали известную формулу для суммы квадратов чисел 1,2,…,*n*.) Пусть $\lambda \to 0$, тогда $n \to \infty$ и получим

$$P = \int\limits_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}(\text{ед.}^2).$$

Если провести параболу, симметричную с данной относительно биссектрисы $y = x$, то квадрат разделится на 3 равновеликие части (рис. 9.3). Интересно отметить, что эту площадь считал ещё Архимед своим «методом рычага» (тут зачатки определённого интеграла). Однако так всегда считать суммы и пределы – дело трудное и обычно невозможное. Для многих функций здесь на помощь приходит неопределённый интеграл в виде формулы Ньютона–Лейбница (см. далее, § 9.3).

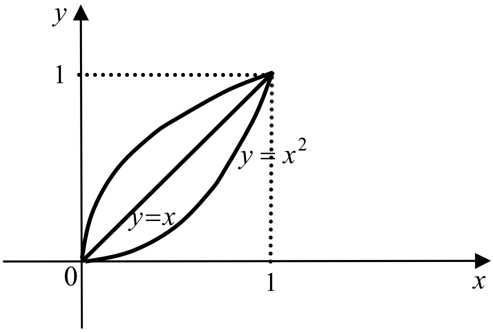


Рис. 9.3

§ 9.2. Свойства определённого интеграла

В дальнейшем будем заранее предполагать, что все рассматриваемые функции интегрируемы. Во всяком случае, не будем доказывать интегрируемость, даже когда это легко сделать.

Свойство 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых.* Так, в случае двух функций:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{9.4}$$

Δ Интегральную сумму для функции $f(x)+g(x)$ разобьём на два слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)+g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k\,.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \to 0$, получим равенство (9.4). ▲

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{9.5}$$

Δ Составляем интегральную сумму для функции $A\cdot f(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n} A\,f(\xi_k)\,\Delta x_k = A\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\ .$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим равенство (9.5). (В отличие от неопределённого интеграла здесь допустимо и значение $A=0$.) ▲

Свойства 1 и 2 выражают *«свойство линейности определённого интеграла»*:

$$\int_a^b (A\,f(x)+B\,g(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Пример. $\int_0^1 (3x^2 - x + 1)\,dx = 3\cdot\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 dx = 3\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5\,.$

Последние два интеграла можно найти как площади соответственно треугольника и прямоугольника.

Замечание. По определению полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,\ \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Это можно подтвердить тем, что в первом случае следует считать $\Delta x_k = 0$, ибо все точки $x_0, x_1, ..., x_n$ могут только совпадать, а во втором случае $\Delta x_k < 0$, так как $x_0 = b > x_1 > ... > x_n = a$. Понятно тогда, что свойства 1 и 2 остаются в силе, и когда *a* > *b*.

Свойство 3 (свойство аддитивности). (Аддитивный – получаемый путём сложения.)

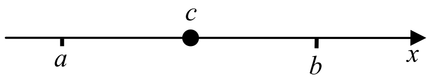
Для любых чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{9.6}$$

(*если только все эти три интеграла существуют*).

Δ I. Пусть $a < b$. 1) Если точка c лежит внутри отрезка [a, b], то есть $a < c < b$, то этот отрезок разделим на n частей произвольно, но так, чтобы точка c всегда была точкой деления. Тогда интегральную сумму по отрезку [a, b] можем разбить на две:

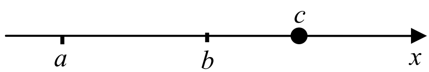
$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k$$



(так записали интегральные суммы соответственно для отрезков [a, b], [a, c], [c, b]). Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, получим равенство (9.6).

2) Пусть точка c лежит вне [a, b], например, справа: $a < b < c$. Применим доказанное к интервалу [a, c]. Получим

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx, \text{ откуда}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

II. Случай $a > b$ сводится к установленному, если применить предварительно замечание. ▲

Для $f(x) \geq 0$ и $a < c < b$ равенство (9.6) имеет простую геометрическую интерпретацию: площадь криволинейной трапеции над промежутком [a, b] равна сумме площадей криволинейных трапеций над участками [a, c] и [c, b].

Дальнейшие свойства 4, 5, 6 можно назвать: «Свойства, выражаемые неравенствами»; в них по существу $a < b$.

Свойство 4 (оценка интеграла сверху и снизу).

Если $m \leq f(x) \leq M$ *на промежутке* $a \leq x \leq b$, *то*

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a) . \qquad (9.7)$$

Δ Интегральную сумму для функции $f(x)$ оценим сверху и снизу, учитывая, что $\Delta x_k > 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$:

$$m(b-a) = m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k = M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a)\,.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\lambda \to 0,$ получим неравенство (9.7).▲

<u>Следствие 1.</u> *Если* $f(x) \ge 0$ *при* $a \le x \le b$, *то и* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$ – это получим из (9.7), где можно взять $m = 0$.

<u>Следствие 2.</u> *Если* $f(x) \ge 0$ *на отрезке* $a \le x \le b$ *и* $f(x_0) > 0$ *хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a,b]$, *в которой функция* $f(x)$ ***непрерывна,*** *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

<u>Свойство 5.</u> *Если* $f_1(x) \le f_2(x)$ *на отрезке* $a \le x \le b$, *то и*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx\,. \tag{9.8}$$

Δ Поскольку $f_2(x) - f_1(x) \ge 0$, то на основании следствия 1

$$\int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx \equiv \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \ge 0\,. \ ▲$$

<u>Упражнения</u>.

1) Выяснить геометрический смысл свойств 4, 5 и следствий 1, 2.

2) Найти некоторую, пусть грубую, оценку для чисел $\int\limits_0^3 e^{x^2}dx$, $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x}$.

<u>Свойство 6</u> <u>(оценка интеграла по модулю).</u>

Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля той же функции:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \qquad (9.9)$$

Δ Интегральную сумму функции $f(x)$ оценим по модулю, учитывая, что $\Delta x_k > 0$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k\,.$$

Справа – интегральная сумма функции $|f(x)|$. Отсюда, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим неравенство (9.9). ▲

Свойство 7 (**теорема** о среднем значении в интегральном исчислении).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке найдётся точка с, такая, что будет справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,. \qquad (9.10)$$

Δ 1) Пусть $a < b$. Так как функция $f(x)$ *непрерывна* на замкнутом отрезке $[a,b]$, то она по 2-й теореме Вейерштрасса имеет на нём наибольшее M и наименьшее m значения, так что $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. По свойству 4 будет выполняться неравенство (9.7), откуда:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,.$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (9.11)$$

Имеем $m \le \gamma \le M$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то по 2-й теореме Больцано–Коши она принимает все значения, промежуточные между значениями m и M: найдётся точка $c \in [a,b]$, в которой $f(c) = \gamma$, так что приходим к равенству (9.10).

2) Если $a>b$, то надо только использовать замечание и затем доказанный результат п. 1). ▲

Число (9.11) называется средним (или средним арифметическим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; для непрерывной функции оно действительно является *значением* функции в некоторой «средней» точке c. (Сравните с определением средней скорости $< v >= \frac{1}{T}\int\limits_0^T v(t)\,dt.$)

Вопрос о точке c можно уточнить так: такая точка *всегда* найдётся *внутри* промежутка $[a,b]$: $\exists c \in (a,b)$.

Геометрически равенство (9.10) означает, что площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого «среднего» прямоугольника (рис. 9.4).

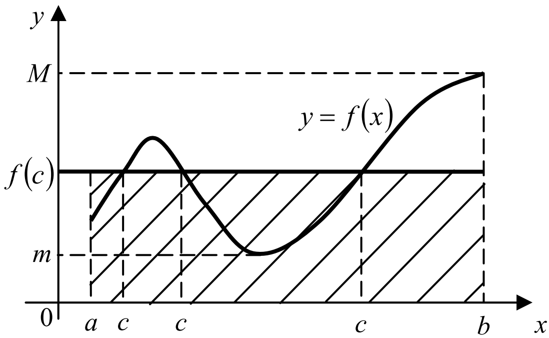


Рис. 9.4

§ 9.3. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ (возможны обе ситуации: $a < b$ и $a > b$). Рассмотрим интеграл от точки a до какой-либо точки $x \in [a,b]$ (рис. 9.5). Получим некоторое число; обозначим его через $\Phi(x)$:

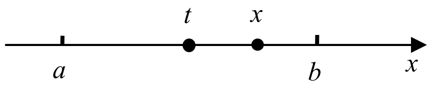


Рис. 9.5

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{9.12}$$

Если менять *x,* то будет меняться и $\Phi(x)$, то есть значение интеграла: этот интеграл определяет собою функцию *верхнего предела x* и называется *интегралом с переменным верхним пределом.* Так получаем новый *способ задания* функций: с помощью определённого интеграла с переменным верхним пределом.

Переменную интегрирования, чтобы не путать с верхним пределом *x*, мы обозначили здесь через *t* (можно обозначить любой другой буквой – от её обозначения величина интеграла не зависит). Однако часто переменную интегрирования обозначают тоже буквой *x,* то есть пишут $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, но *x* вверху и под знаком интеграла имеют совершенно разный смысл.

Теорема 9.3 (о производной интеграла по верхнему пределу).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то функция* (9.12) *дифференцируема на этом отрезке, причём*

$$\Phi'(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x), \tag{9.13}$$

то есть производная от определённого интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при верхнем пределе: когда $t = x$.

Δ Доказательство основано непосредственно на определении производной. Точке $x \in [a,b]$ дадим приращение $\Delta x \neq 0$, такое, чтобы точка $x + \Delta x \in [a,b]$, и найдём соответствующее приращение функции (9.12):

$$\Delta\Phi(x) \equiv \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = (\int\limits_a^{x} f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt) -$$

$$-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt \;=\; \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \;= f(c)\Delta x\,,\ \exists c \in [x, x+\Delta x]\,.$$

Здесь использовали свойства 3 и 7 из § 9.2. Отсюда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c)\,.$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда $c \to x$, и в силу непрерывности функции $f(x)$ будет $f(c) \to f(x)$. Поскольку правая часть имеет предел, то его имеет и левая часть, – а это и означает, что функция $\Phi(x)$ имеет производную, при этом в пределе при $\Delta x \to 0$ получаем $\Phi'(x) = f(x)$. ▲

<u>Следствие:</u> **Теорема** <u>о существовании первообразной.</u> *Всякая непрерывная на промежутке X функция f(x) имеет первообразную: в качестве её можно взять интеграл* (9.12) *с переменным верхним пределом* $(a \in X, x \in X)$. *Это есть первообразная, обладающая свойством* $\Phi(a) = 0$.

В таком случае неопределённый интеграл и соответственно *общее решение* простейшего *дифференциального уравнения* $y' = f(x)$ (то есть совокупность всех функций $y(x)$, производные которых равны $f(x)$) представится в виде

$$y = \int f(x)\,dx = \int\limits_a^{x} f(t)\,dt + C \equiv \Phi(x) + C\,,\ \forall C = \text{const}, \qquad (9.14)$$

причём *начальному условию* $y(a) = y_0$ удовлетворяет решение $y = \Phi(x) + y_0$ (при $x = a$ из (9.14) имеем $y\big|_{x=a} = \Phi(a) + C \Rightarrow C = y_0$, ибо $\Phi(a) = 0$).

<u>Упражнение.</u> Убедиться, что если функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную $f'(x)$, то $\Phi(x)$ имеет непрерывную вторую производную $\Phi''(x)$, и вообще $\exists f^{(n)}(x) \Rightarrow \exists \Phi^{(n+1)}(x)$ (интегрирование улучшает свойство непрерывности функции на единицу; дифференцирование – наоборот).

Примеры.

1) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{-1}^{\ln x} e^{t^2}\,dt\right) = [\textit{промежуточный аргумент } u=\ln x\,] =$

$$=\frac{d}{du}\left(\int\limits_{-1}^{u} e^{t^2}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx} = e^{u^2}\cdot\frac{1}{x} = e^{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}.$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{u^2}\,du = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x e^{u^2}\,du}{e^{x^2}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0.$

(Применили правило Лопиталя.)

2. Теорема 9.4 (основная теорема интегрального исчисления – формула Ньютона–Лейбница).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \qquad (9.15)$$

Δ Пусть $F(x)$ – первообразная по отношению к $f(x)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме 9.3 функция (9.12) тоже является первообразной. Согласно Основной лемме (лемма 8.1) $\Phi(x)=F(x)+C$, $\exists C=\mathrm{const}$, то есть

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x)+C.$$

Положим в этом равенстве $x=a$; получим $\int\limits_a^a f(t)\,dt = F(a)+C \Rightarrow$

$\Rightarrow C=-F(a)$, так что

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a). \qquad (9.16)$$

Это уже есть формула Ньютона–Лейбница для промежутка $[a,x]$, и отсюда в частности при $x=b$ получим формулу (9.15). ▲

При практическом использовании формулы (9.15) разность справа обычно изображается символом $F(x)\Big|_a^b$ (или $[F(x)]_a^b$), который читается так: «подстановка от a до b для функции $F(x)$». Формула (9.15) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (9.15')$$

<u>Замечание 1</u>. Согласно формуле (9.15) определённый интеграл равен приращению первообразной на отрезке $[a,b]$, и легко видеть, что результат (9.15) не изменится, если $F(x)$ заменить любой другой первообразной $F(x)+C$.

<u>Замечание 2.</u> Итак, чтобы найти определённый интеграл, достаточно уметь находить интеграл неопределённый, а последний умеем вычислять для многих классов функций.

<u>Замечание 3.</u> Теоремы 9.3 и 9.4 устанавливают связь дифференциального и интегрального исчислений, а теорема 9.4 ещё – определённого и неопределённого интегралов. (Дифференцируя тождество (9.16), восстанавливаем условие $F'(x)=f(x)$.)

<u>Замечание 4.</u> С установлением отмеченных фактов исторически было завершено, в основном, создание интегрального исчисления, математика получила мощный импульс развития, общий метод решения различных теоретических и прикладных задач (техники, физики, астрономии и так далее).

<u>Замечание 5.</u> Иногда определённый интеграл от непрерывной функции $f(x)$ вводится прямо по формуле (9.15), но доказательство равносильности этого факта с определением 2 из § 9.1 весьма громоздко.

<u>Примеры.</u>

1) $P=\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ (здесь $f(x)=x^2$ и первообразная $F(x)=\frac{x^3}{3}$).

2) $P=\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2$ – такова площадь под первой аркой синусоиды.

$\int\limits_{0}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos 0)=0$ – это естественно, если площадь под осью Ox на участке $[\pi,2\pi]$ считать отрицательной (рис. 9.6).

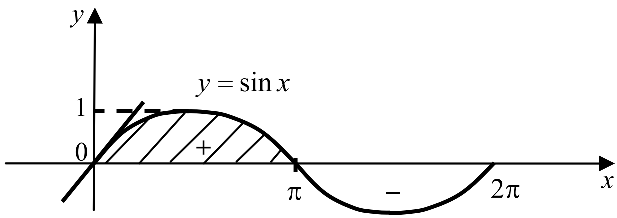


Рис. 9.6

3) Пусть $F(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Тогда $F'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\neq 0$, и, казалось бы, $\int\limits_{a}^{b}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\Big|_{a}^{b}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{b}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}$. Однако при $a<0$ и $b>0$ это равенство неверно: слева будет число отрицательное, справа – положительное! Объясняется это тем, что $\not\exists F(0)$ и тем более $\not\exists F'(0)$: функция $F(x)$ не является первообразной для $f(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ *на всём* промежутке $[a,b]$.

Аналогично – для ситуации $\int\limits_{-1}^{+1}\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-(1+1)=-2<0$ – факт ложный, тем более, что данный интеграл вообще не существует.

4) Как уже упоминалось, существуют неберущиеся интегралы (см. § 8.1), то есть интеграл (9.12) в этом случае с помощью формулы Ньютона–Лейбница, не вводя некие новые, неэлементарные

функции, вычислить невозможно. Тем не менее эскиз графика функции $y = \Phi(x)$ иногда построить можно, например, графики функций $y = \int\limits_0^x e^{t^2} dt$ и $y_1 = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$. (Предлагаем построить эти графики, учитывая известный факт: $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1(x) \equiv \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

3. Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 9.5. *Пусть* 1°) *функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a,b]$, 2°) *функция* $x = \varphi(t)$ *имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$ *на промежутке* $[\alpha,\beta]$, *причём* 3°) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, 4°) *сложная функция* $f(\varphi(t))$ *определена и непрерывна на промежутке* $[\alpha,\beta]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (9.17)$$

Δ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ по формуле Ньютона–Лейбница имеем равенство (9.15). С другой стороны, функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная для непрерывной на $[\alpha,\beta]$ функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, ибо

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)\,.$$

Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)\,.$$

Сравнивая этот результат с (9.15), убеждаемся в справедливости равенства (9.17). ▲

Замечание 1. Преимущество перед соответствующим методом для неопределённого интеграла в том, что здесь не требуется возвращаться к старой переменной x: вычислив интеграл в правой части равенства (9.17), мы тем самым вычислим интеграл в левой части. Ещё раз отметим, что на символ dx можно смотреть как на дифференциал функции $x=\varphi(t)$, именно, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Поэтому формула (9.17) легко и вполне естественно запоминается.

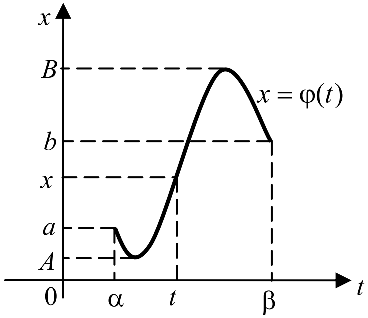


Рис. 9.7

Замечание 2. Новые пределы интегрирования α и β найдутся из уравнений: α – из уравнения $\varphi(t)=a$, β – из уравнения $\varphi(t)=b$.

Замечание 3. После условий 1º) – 3º) требование 4º) кажется излишним. Но это не так: значения «промежуточного аргумента» $x=\varphi(t)$ могут выходить за пределы $[a,b]$. Пусть они образуют промежуток $[A,B]\supset[a,b]$. Тогда условие 4º) фактически есть требование непрерывности $f(x)$ на $[A,B]$ (рис. 9.7). Однако условие 4º) можно заменить менее общим: потребовать, чтобы значения $x=\varphi(t)\in[a,b]$, в частности, чтобы функция $\varphi(t)$ была монотонной.

4. Интегралы от чётной и нечётной функций по промежутку $[-a,a]$

а) Пусть функция $f(x)$ чётная: $f(-x)=f(x)$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

Δ Применив подстановку $x=-t$, найдём

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt \equiv \int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

По свойству аддитивности имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx . \qquad \blacktriangle$$

б) Аналогично, если $f(x)$ – нечётная функция: $f(-x)=-f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 .$$

Геометрически (из сравнения площадей) отмеченные свойства очевидны.

Примеры. 1) Вычислим $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Используем подстановку $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt$; $a\sin t = 0 \Rightarrow$ возьмём $t=0$; $a\sin t = a \Rightarrow$ возьмём $t = \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} =$ $= a\cos t$ – модуль не ставим, так как $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Поэтому $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$.

2) Найдём площадь эллипса $P_{эл}$ с полуосями *a* и *b*. Запишем его каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отсюда $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (знак (+) для верхней половины, (–) – для нижней, рис. 9.8).

$$P_{эл} = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \pi ab.$$

В частности, при $a = b$ находим площадь круга радиуса *a*: $P_{кр} = \pi a^2$.

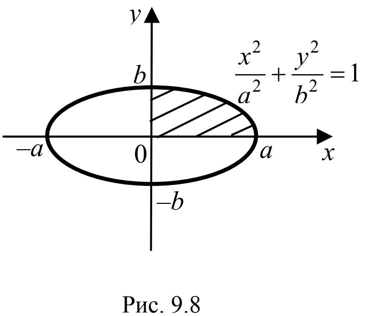


Рис. 9.8

3) $\int_{-2}^{2} \sin(x^3)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} x^5 e^{x^2}\,dx = 0$ – под интегралами нечётные функции.

Упражнение. С помощью подстановки $x = 3\,\mathrm{tg}\,t$ вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

5. Интегрирование по частям в определённом интеграле. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными u', v' на промежутке $[a,b]$. Тождество $uv' = (uv)' - vu'$ проинтегрируем по этому промежутку и учтём, что в силу формулы Ньютона–Лейбница $\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$. Получим *формулу интегрирования по частям* $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Пример.

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi} x\,d(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

§ 9.4. Дополнительные замечания

1. Понятие определённого интеграла вводилось 1) для конечных промежутков $[a,b]$ и 2) для ограниченных функций $f(x)$. В таком случае не существуют (лишены смысла) следующие образования (символы):

а) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$, $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^1 \ln x\,dx$, $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$, $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{e^{x}}{x}dx$.

(А что будет, если некоторые из них попытаться вычислить по формуле Ньютона–Лейбница?)

Однако указанные условия 1) и 2) для многих теоретических и прикладных задач весьма обременительны, и, например, для интегралов группы *а*) от них можно отказаться, расширив понятие интеграла.

2. Понятие несобственных интегралов. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $a \le x < \infty$ и $F(x)$ – её первообразная. Тогда $\forall B > a$

$$\int_a^B f(x)\,dx = F(B) - F(a).$$

Предел этого интеграла при $B \to +\infty$ называется несобственным интегралом (первого рода) от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ и записывается символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^{+\infty}, \tag{9.18}$$

где обозначено $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Если существует конечный предел, то говорят, что интеграл (9.18) существует, или сходится, в противном случае – расходится (не существует). Если $f(x) \ge 0$, то геометрически интеграл (9.18) выражает площадь неограниченной криволинейной трапеции, заключённой между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс. Например, площадь трапеции, ограниченной кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и осями Ox и Oy, найдётся так:

$$P = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь пусть данная функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $a \le x < b$ и не ограничена при приближении к точке b. Для любого $\varepsilon > 0$ существует

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Предел этого интеграла при $\varepsilon \to +0$ называется несобственным интегралом (второго рода) от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b)$ и записывается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b, \tag{9.19}$$

где обозначено $F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$. Если существует конечный предел, то интеграл называется сходящимся (существует), в противном случае – расходящимся (не существует).

Понятно, как определить интеграл по промежуткам $-\infty < x \le b$ и $a < x \le b$. Подробнее и точнее обо всём сказанном – позднее. Отметим только: если $\left|f(x)\right| \le \frac{M}{x^{\mu}}$, $\forall x \ge x_0 \ge a \ (\exists x_0)$, то при $\mu > 1$ интеграл (9.18) сходится, и если $\left|f(x)\right| \le \frac{M}{(b-x)^{\lambda}}$ (вблизи точки b), то при $\lambda < 1$ сходится интеграл (9.19) ($M = \mathrm{const} > 0$).

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx = [u = \ln x, dv = dx] = x\ln x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx = -1$; при вычислении учли, что $\ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$.

3. В конце § 8.1 указаны некоторые «неберущиеся» интегралы. Соответствующие им первообразные в форме интегралов с переменным верхним пределом имеем (возможно, после некоторых преобразований) среди следующих функций:

$F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{u^2}du$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ – интеграл вероятности,

$\mathrm{Erf}(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ – функция ошибок (две последние функции связаны с именами Лапласа и Гаусса),

$S(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}dt$ и $C(x) = \int\limits_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}dt$ – интегралы Френеля, или дифракции,

$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ – интегральный синус,

$\mathrm{Ci}(x) = \int\limits_{+\infty}^x \frac{\cos t}{t}dt$ – интегральный косинус,

$\mathrm{Ei}(x) = \int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt$ – интегральная показательная функция,

$\mathrm{li}(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\ln t} dt$ – интегральный логарифм.

Они относятся к разряду так называемых «специальных функций» и играют существенную роль во многих вопросах математики, физики, техники, в частности, радиотехники и так далее. Составлены подробные таблицы их значений, построены графики, установлены всевозможные тождества.

4. Как вычислить определённый интеграл, если он «не берётся»? Или, даже если записано равенство (9.15), то может быть затруднительным отыскание *численных значений* величин $F(a)$ и $F(b)$. В этих случаях применяются различные *методы приближённых вычислений* определённых интегралов. При этом можно интеграл $J \equiv \int\limits_a^b f(x)\,dx$ вычислить приближённо с помощью какой-нибудь интегральной суммы $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, $J \approx \sigma$. Разобьём промежуток $[a,b]$ $(a < b)$ на n равных частей $[x_{k-1}, x_k]$, так что $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \equiv h$ (это – *шаг* разбиения), обозначим $f(x_k) = y_k$ $(k = 0,1,...,n)$ и возьмём $\xi_k = x_{k-1}$ или $\xi_k = x_k$. Получим две приближённые формулы:

$$J \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \equiv \sigma_1 , \ J \approx h(y_1 + y_2 + ... + y_n) \equiv \sigma_2 .$$

Это есть *формулы прямоугольников*. Если функция $f(x)$ монотонна, то абсолютная погрешность этих равенств есть $R_n = |\sigma_2 - \sigma_1| = = h \cdot |f(b) - f(a)|$, она тем меньше, чем меньше шаг h, то есть чем больше число делений n .

Если взять полусумму чисел σ_1 и σ_2, то получим более точную *формулу трапеций*: $J \approx h \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$. Ещё более точным является *метод парабол* (формула Симпсона). Имеются формулы для погрешностей указанных равенств, они выражаются через производные функции $f(x)$. Все эти вопросы рассматриваются в курсах приближённых вычислений. Отметим, что с помощью таких методов можно вычислять, например, значения логарифма $\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}$, в частности, найти $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. (Геометрический смысл формул прямоугольников и трапеций легко усмотреть из рис. 9.1.)