Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1.1. Событие как результат испытания

Теория вероятностей, как и любая другая математическая дисциплина, начинает с неопределяемых событий. В теории вероятностей это понятие испытания (употребляемыми синонимами также является опыт, эксперимент и пр.) и элементарные события.

Определение 1.1. Под ***испытанием*** понимают выполнение некоторого комплекса условий в результате которого наступает ровно одно элементарное событие из общей их совокупности пространства элементарных событий

Например, стрельба из лука, подбрасывание монеты.

Определение 1.2. Множество всех исходов, соответствующих испытанию, образует ***пространство элементарных исходов*** и обозначают Ω.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\},$$

где ω_i – элементарные исходы $i = \overline{1, n}$.

Пример 1.1. Испытание – подбрасывание игрального кубика. Тогда $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2, ..., \omega_6 = 6$.

В зависимости от числа элементарных событий в пространстве, мы будем различать конечное, счетное и несчетное пространство элементарных событий. Конечное пространство содержит конечное число элементарных исходов, счетное – бесконечное число, однако такое, которое можно перенумеровать. Несчетное пространство содержит бесконечное число элементарных исходов, не поддающихся нумерации.

Различают неслучайные и случайные испытания.

Определение 1.3. ***Неслучайным (детерминированным) испытанием*** называется испытание, исход которого можно предугадать, или говорят: испытание с одним исходом.

Например, физические законы (при подбрасывании предмета: один исход – падение на землю), математические формулы.

Определение 1.4. ***Случайным (стохастическим) испытанием*** называется испытание, исход которого нельзя предугадать, или говорят испытание с двумя и более исходами.

Пример 1.2. Подбрасывание игрального кубика. (Заранее нельзя сказать, какая грань выпадет).

Из определений следует, что каждому испытанию в соответствие можно поставить исходы.

Определение 1.5. ***Событием*** называется подмножество пространства элементарных событий. Говорят, что событие наступило в результате испытания, если наступило одно из элементарных событий, входящих в данное событие.

Пример 1.3. Испытание – стрельба по мишени. Событие – поражение или не поражение мишени.

Пример 1.4. Испытание – игра в шахматы. Событие – выигрыш, ничейный исход или проигрыш.

События обозначаются большими буквами латинского или греческого алфавита A, B, C, Ω и так далее.

Как и ранее для пространства Ω, событие $\grave{A}$ описывается с помощью фигурных скобок, внутри которых указываются элементарные события, например $\grave{A}=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$.

Определение 1.6. Событие называется ***случайным***, если оно может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

Пример 1.5. Завтра днем ясная погода. Наступление дня является испытанием. «В течение дня наблюдалась ясная погода» – событие.

Пример 1.6. Подбрасывание монеты – испытание. Событие – выпадение «герба».

Различают совместные и несовместные события.

Определение 1.7. События A, B, C называются ***несовместными***, если в условиях испытания каждый раз возможно только одно из этих событий.

Все вышеизложенные события являются несовместными.

Определение 1.8. События A, B, C называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из событий не исключает появление другого.

Пример 1.7. В аудиторию вошел человек. События «В аудиторию вошел человек младше 20 лет» и «В аудиторию вошел парень» – совместные, поскольку в аудиторию может войти парень младше 20 лет.

Определение 1.9. Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания. Обозначается Ω.

Пример 1.8. Наступление ночи по прошествии дня – достоверное событие.

Определение 1.10. Событие называется ***невозможным***, если оно не может наступить в условиях данного эксперимента. Обозначается $\varnothing$.

Пример 1.9. Выпадение цифры «2» при бросании 10-копеечной монеты – невозможное событие.

Определение 1.11. События называются ***равновозможными***, если по условию испытаний нет оснований считать одно более возможным, чем любое другое.

Пример 1.10. В урне 10 одинаковых шаров: 5 белых и 5 черных. Наудачу извлекается шар. Здесь события «появится белый шар» и «появится черный шар» равновозможны.

Важным понятием является ***полная группа событий***. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Пример 1.11. Стрелок произвел выстрел по мишени. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Если события, образующие полную группу попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из них.

§ 1.2. Операции над событиями

Операции над событиями аналогичны операциям над множествами и вводятся в теории вероятностей для того, чтобы упростить форму записи, а иногда и логическое построение задачи.

Определение 1.12. ***Суммой нескольких событий*** называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Сумму событий будем обозначать знаком «+». Этот знак заменяет союз «или».

Пример 1.12. Турист хочет и имеет возможность посетить 2 города. Обозначим события: A = {турист посетил город А}, B = {турист посетил город В}. Событие $A+B$ заключается в том, что турист посетил только один из городов А и В или он посетил их оба.

Операции над событиями имеют геометрическую интерпретацию в виде диаграмм Вьена. События обозначаются кругами.

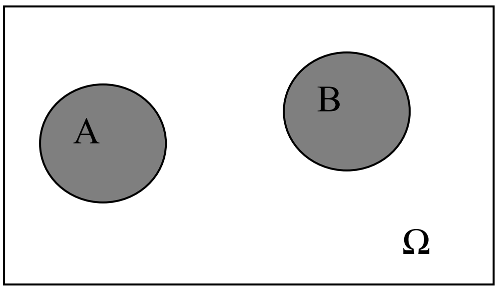

Рис. 1.1

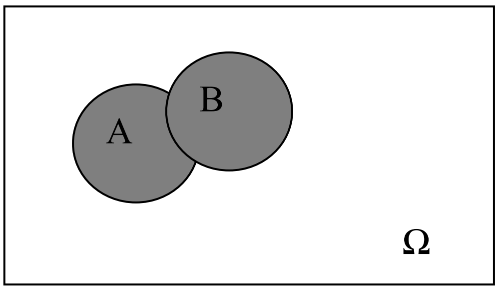

Рис. 1.2

$A+B$ или $A \bigcup B$

Сумме событий соответствует заштрихованная область (рис. 1.1 и 1.2)

Определение 1.13. ***Произведением нескольких событий*** называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Произведение обозначают знаком «$\cdot$» или «$\bigcap$». Этот знак заменяет союз «и».

Пример 1.13. Пусть имеются следующие события: A = {из колоды карт вынута дама}, B ={из колоды карт вынута карта бубновой масти}. Очевидно, $A \cdot B$ есть событие {вынута дама бубновой масти} (рис 1.3).

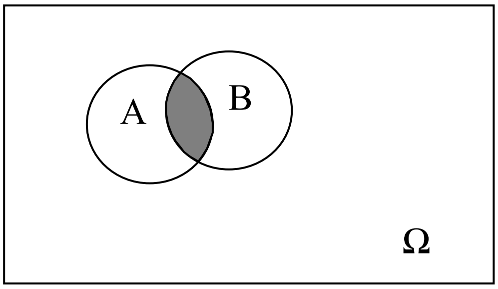

Рис. 1.3
$A \cdot B$ или $A \bigcap B$.

Определение 1.14. ***Разностью событий*** A и B называется событие, в котором в результате испытания наступает событие A, но не наступает событие B.

Разность обозначается знаком « – » или «/» (рис 1.4).

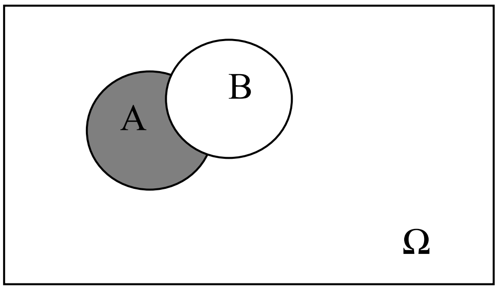

Рис. 1.4
$A - B$ или $A \setminus B$.

Определение 1.15. Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется ***противоположным событием*** к событию A (или дополнением) (рис. 1.5).

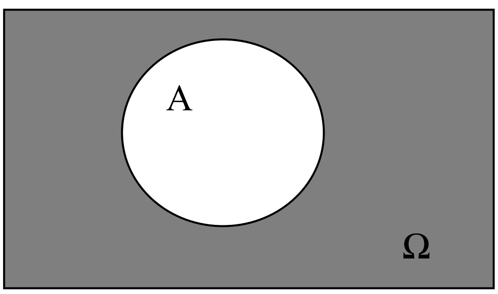

Рис. 1.5

Свойства противоположных событий

1. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$

2. $A + \overline{A} = \Omega$.

Пример 1.14. Бросают игральный кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть событие: A = {выпадет четная цифра}, а событие B = {выпадет цифра, больше 3}. Найти $\overline{A}, \overline{B}, A \cdot B, A + B, A \setminus B$.

Решение:

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 3\}$, $A \cdot B = \{4, 6\}$, $A + B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \setminus B = \{2\}$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу событий*** (или разбиение пространства Ω), если они попарно несовместны и в сумме дают все пространство элементарных исходов, то есть

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

§ 1.3. Вероятность события

В повседневной жизни в разговоре часто используется слово «вероятный». Например: «Вероятней всего он опоздает», «Вероятней всего завтра будет хорошая погода».

При употреблении этого слова интуитивно оценивается возможность наступления того или иного события.

Пример 1.15. В ящике находится 25 одинаковых по внешнему виду изделий, среди которых 2 изделия 3-го сорта, 15 – второго и 8 – первого сорта. Наудачу вынимают одно изделие. Разумно считать «вынуто изделие 2-го сорта» более возможным, так как изделий 2-го сорта значительно больше, чем изделий других сортов.

Однако в жизни чаще встречаются события, сравнить или оценить возможность появления которых, основываясь на чисто интуитивных соображениях, трудно. Поэтому вводится такое понятие, как вероятность события.

Определение 1.16. ***Вероятность события*** – это численная мера объективной возможности его появления.

Из определения следует, что событию можно поставить в соответствие определенное число – вероятность. Однако, это определение не дает формулу для нахождения вероятности.

Рассмотрим следующее понятие. Исход называется ***благоприятствующим*** некоторому событию, если появление этого исхода влечет за собой появление данного события.

Например, при подбрасывании игрального кубика для события A = «выпадение четной цифры» исход «выпадение цифры 2» является благоприятствующим.

1.3.1. Классическое определение вероятности и ее свойства

Пусть имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий. Вероятность $P(A)$ наступления события вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где $m-$ число благоприятствующих событию A исходов, а $n-$число всех исходов испытания.

Впервые определение вероятности события было дано в XVIII веке Лапласом. Из формулы (1.1) следует, что вероятность события является положительным числом и может меняться в пределах от 0 до 1 в зависимости от того, какую долю составляет благоприятствующее число исходов от общего числа исходов

$$0 \le m \le n, \quad 0 \le P(A) \le 1.$$

Свойства вероятности

1. Если все исходы являются благоприятствующими для события *A*, то это событие обязательно произойдет. Следовательно, рассматриваемое событие является достоверным, а вероятность его появления $P(A)=1$, так как в этом случае $m=n$:

$$P(A)=\frac{n}{n}=1.$$

2. Если нет ни одного исхода, благоприятствующего данному событию *A*, то это событие в результате опыта произойти не может. Следовательно, рассматриваемое событие является невозможным, а вероятность его появления $P(A)=0$, так как в этом случае $m=0$:

$$P(A)=\frac{0}{n}=0.$$

3. Вероятность случайного события *A* находится в пределах от 0 до единицы, так как в этом случае $0<m<n$:

$$0<P(A)<1.$$

Проиллюстрируем эти свойства на примерах.

Пример 1.16. Какова вероятность появления нечетного числа очков при одном бросании игральной кости?

Решение. Обозначим *A* = {выпадение нечетного числа очков}. Благоприятствующими исходами будут цифры $\{1, 3, 5\}$, $m=3$, ко всем исходам относятся цифры $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n=6$. Тогда искомая вероятность $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пример 1.17. Бросаются 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6?

Решение. Каждый кубик может упасть шестью различными способами. Тогда по правилу умножения два кубика могут упасть $n = 6 \cdot 6 = 36$ различными способами. В силу симметричности кубиков все эти события равновозможны и образуют полную группу несовместных событий. Выпишем исходы, благоприятствующие событию A:

$$(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1), \quad m = 5.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

Пример 1.18. Бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13?

Решение. Число n всех исходов испытания равно 36. Любой из этих исходов благоприятствует наступлению события A, заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13 (так как максимальная сумма очков равна 12 и она меньше 13). Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1.$$

Пример 1.19. На карточках написаны цифры 3, 4, 5, 6, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом вынимают 3 карточки подряд и кладут в ряд. Какова вероятность того, что число, составленное из трех цифр будет больше 654.

Решение. Очевидно, что благоприятствующее число исходов для события равно нулю, так как из данных карточек нельзя составить число, большее 654. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

$$0 < P(A) < 1.$$

1.3.2. Применение элементов комбинаторики к нахождению вероятностей

Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Как при решении задач с использованием классического определения вероятностей, так и в дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Основным принципом комбинаторики является теорема умножения.

Теорема 1.1. *Если выполнение некоторого эксперимента можно разбить на k шагов, причем первый шаг выполняется n_1 способами, второй шаг – n_2 и так до k –го шага, который можно выполнить n_k способами, то весь эксперимент можно выполнить $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Пример 1.20. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Первый мальчик может сесть на любое из четырех мест, второй – на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое из двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Тогда, согласно теореме умножения мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24 = 576$ способами.

Определение 1.17. ***Размещениями*** из n различных элементов по m элементов ($m \le n$) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо их порядком.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующие размещения:

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb.$$

Определим число A_n^m размещений из n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ по m.

Пусть $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, ..., a_{\alpha m}$ $(1 \le \alpha \le n;\ k = 1, ..., m)$ – всевозможные размещения, содержащие m элементов. Будем эти размещения строить последовательно. Сначала определим $a_{\alpha 1}$ – первый элемент размещения. Очевидно, из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента $a_{\alpha 1}$ для второго элемента $a_{\alpha 2}$ остается $(n-1)$ способов выбора и т.д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1). \qquad (1.2)$$

Пример 1.21. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Определение 1.18. ***Перестановками*** из n различных элементов называются различные комбинации, составленные из данных n элементов по n, отличающиеся только порядком элементов.

Как видно из определения 1.17, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n.$ Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (1.3)$$

Пример 1.22. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только 1 раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел:

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Определение 1.19. ***Сочетаниями*** из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Отметим разницу между сочетаниями и размещениями: в первых не учитывается порядок элементов.

Обозначим через C_n^m число сочетаний из n элементов по m.

Рассмотрим все допустимые сочетания наших элементов $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \ldots, a_{\alpha m}$. Делая в каждом из них $m!$ возможных перестановок их элементов, очевидно, получим все размещения из n элементов по m. Таким образом,

$$C_n^m \cdot m! = A_n^m,$$

отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}. \tag{1.4}$$

Формулу (1.4) можно также представить в виде:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Символ C_n^m обладает очевидным свойством:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \tag{1.6}$$

которое будет верно также и при $m = 0$, если принять $C_n^0 = 1$.

Этой особенностью удобно пользоваться, когда $m > \frac{n}{2}$.

Числа C_n^m являются коэффициентами в формуле ***бинома Ньютона***

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + q^n \tag{1.7}$$

и поэтому часто называются ***биномиальными коэффициентами.***

Пример 1.23. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов:

$$C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45.$$

Приведем, наконец, примеры применения формул комбинаторики к нахождению вероятности события.

Пример 1.24. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Две последние цифры можно набрать A_{10}^{2} способами, а благоприятствовать событию A={цифры набраны правильно} будет только один способ. Поэтому,

$$P(A)=\frac{1}{A_{10}^{2}}=\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{90}.$$

Пример 1.25. Партия из 10 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 5 деталей из этой партии все они будут стандартными (событие A)?

Решение. Всего способов выбрать из 10 деталей 5:

$n=C_{10}^{5}=\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{30\,240}{120}=252$, а число благоприятствующих событию A исходов $m=\tilde{N}_{1}^{0}\cdot C_{9}^{5}=1\cdot\dfrac{9!}{5!\cdot 4!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{3\,024}{24}=126$.

Тогда $P(A)=\dfrac{126}{252}=0,5.$

Пример 1.26. В классе 20 учащихся, из них 7 мальчиков, а остальные девочки. Для дежурства отобраны 3 человека. Какова вероятность того, что среди них 2 девочки?

Решение. Событие A = {выбраны 2 девочки и 1 мальчик}. Количество всех исходов равно числу способов выбрать 3 человек из 20 учащихся $n=C_{20}^{3}$. Число благоприятствующих исходов равно числу способов выбора двух девочек из 13 и одного мальчика из 7

$$m=C_{13}^{2}\cdot C_{7}^{1}.$$

Тогда $P(A)=\frac{C_{13}^{2}\cdot C_{7}^{1}}{C_{20}^{3}}=\frac{91}{190}$.

1.3.3. Статистическое определение вероятности и ее свойства

Классическое определение вероятности в применении имеет недостатки, так как оно применяется только к группе попарно несовместных и равновозможных событий. Однако на практике такую группу зачастую бывает выделить трудно. Например, любой полет в космос можно считать испытанием. Но вряд ли кто-то возьмет на себя смелость представить результат этого опыта в виде полной совокупности исходов.

Если в данном конкретном случае нельзя применить классическую формулу, то возникает вопрос, что считать вероятностью и как ее вычислять.

Пусть есть эксперимент Ω, в результате которого наступает событие A. На практике было замечено, что при многократном повторении эксперимента можно посчитать относительную частоту появления события A, причем эта частота стремится к ***устойчивости***. Условимся обозначать: n – число повторений эксперимента, $k(A)$ – число появления события A. Тогда под ***относительной частотой*** появления события A будем понимать отношение $\frac{k(A)}{n}$ и обозначим $p^{*}(A)$, где $0\le k(A)\le n$.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа экспериментов относительная частота появление события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном эксперименте.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=p^{*}(A).$$

Это положение носит название закона больших чисел, который будет рассматриваться в дальнейшем.

Указанную вероятность называют статистической вероятностью. Закон Я. Бернулли проверяли многие исследователи, например Дж. Керрих.

Дж. Керрих провел опыт с бросанием монеты. Он сделал 10 серий, каждая из которых содержала по 1000 бросков монеты. Оказалось, что «герб» выпал 502, 497, 511, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529,… раз. Как видно, ни в одной из серий относительная частота выпадения «герба» не равна 0,5, то есть, не совпадает с вероятностью выпадения герба при одном подбрасывании.

Свойства статистической вероятности

1. Пусть A– невозможное событие, тогда $k(\varnothing)=0$ и

$$p^*(\varnothing)=\frac{k(\varnothing)}{n}=\frac{0}{n}=0, \text{ то есть } p^*(\varnothing)=0.$$

2. Пусть $A=\Omega$ – достоверное событие, тогда $k(\Omega)=n$ и

$$p^*(\Omega)=\frac{k(\Omega)}{n}=\frac{n}{n}=1, \text{ то есть } p^*(\Omega)=1.$$

3. Если $A\subset\Omega$, то $0\le k(A)\le n$. Поделив почленно на n, получим

$$\frac{0}{n}\le\frac{k(A)}{n}\le\frac{n}{n} \text{ или } 0\le p^*(A)\le 1.$$

1.3.4. Геометрическое определение вероятности

Классическая формула вероятности применяется, когда эксперимент имеет конечное число исходов. Однако в жизни встречаются эксперименты, для которых число возможных исходов бесконечно. Например, при изготовлении на станке некоторой детали нужно выдержать определенный размер. Точность изготовления детали зависит от квалификации рабочего, точности измерительного прибора и т.д. Таким образом, можно получить деталь любого размера, сколь угодно близкого к требуемому. В данном примере испытание – изготовление детали. Этому испытанию соответствует бесконечное множество исходов.

Рассмотрим еще один пример. Пусть на плоскости имеется фигура *F*, которая содержит фигуру *f*. На эту фигуру бросается наугад точка, которая может оказаться в любой точке фигуры F. Очевидно, что исходов может быть бесконечное множество. Поставим вопрос – с какой вероятностью точка может попасть на фигуру f ? Естественно связать вероятность с площадями фигур F и f. Чем больше площадь f, тем больше вероятность попадания точки.

Тогда под вероятностью события A будем понимать отношение данных площадей, то есть

$$P(A) = \frac{S_f}{S_F}$$

В приведенном примере рассматривались двумерные области, мерами которых были соответствующие площади. Но область может быть одномерной (прямая, отрезок), тогда ее мерой является длина. Область также может быть и трехмерной (некоторое тело в пространстве), мерой ее является объем. Исходя из этого дадим геометрическое определение вероятности.

Определение 1.20. ***Геометрической вероятностью*** события называется отношение меры области благоприятствующей появлению события к мере всей области:

$$P(A) = \frac{S_f}{S_F}.$$

Геометрическая вероятность обладает теми же свойствами, что и классическая вероятность.

Пример 1.27. На плоскость нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность того, что брошенный на плоскость круг $R = 1$см не пересечет ни одной стороны квадрата.

Решение. При бросании круга его центр может попасть в любой из квадратов, начерченных на плоскости (рис1.6).

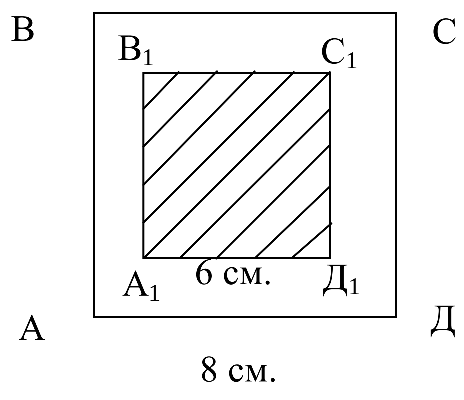

Рис 1.6

Сторона заштрихованного квадрата равна 6 см., а ширина рамки 1 см. Если центр круга попадет в «рамку», то он обязательно пересечет сторону квадрата со стороной 8 см. Если же центр круга попадет в заштрихованный квадрат со стороной 6 см., то он не пересечет границу квадрата со стороной 8 см. Поэтому заштрихованный квадрат является «благоприятствующей областью» наступления события A, вероятность которого следует найти. Таким образом,

$$P(A) = \frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{11}.$$

1.3.5 Аксиоматическое определение вероятности

Аксиоматическое построение теории вероятностей создано в начале 30-х годов академиком А.Н. Колмогоровым. Пусть Ω – пространство элементарных событий для некоторого испытания, S – алгебра событий (совокупность S подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполнены следующие условия: а) S содержит невозможное и достоверное события; б) если события $H_1, H_2, ..., H_n$ принадлежат S, то S принадлежат сумма, произведение и дополнение этих событий).

Вероятностью называется функция $P(A)$, определенная на алгебре событий S, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим аксиомам.

Аксиома неотрицательности: вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, то есть

$$P(A) \geq 0.$$

Аксиома нормированости: вероятность достоверного события равна единице, то есть

$$P(\Omega)=1.$$

Аксиома аддитивности: вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть если $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то

$$P\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k P(A_k).$$

Совокупность объектов (Ω, S, P), где Ω – пространство элементарных исходов, S – алгебра событий, P – числовая функция, удовлетворяющая выше указанным аксиомам, называется вероятностным пространством случайного испытания.

§ 1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Их следствия

1.4.1. Теорема сложения вероятностей событий

Пусть события *A* и *B* – совместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит событие *A*, либо событие *B*? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.2. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \quad (1.8)$$

Доказательство. Рассмотрим операцию сложения на диаграмме Вьена (рис 1.7):

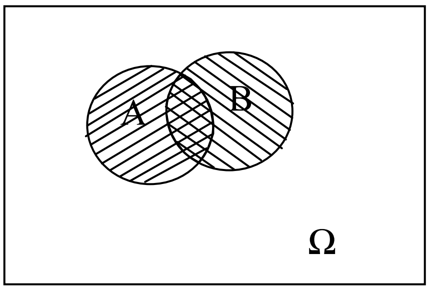

Рис. 1.7

$$P(A+B)=\frac{|A+B|}{|\Omega|}. \quad |A+B|=|A|+|B|-|A\cdot B|.$$

Поделим обе части на n

$$\frac{A+B}{\Omega}=\frac{A}{\Omega}+\frac{B}{\Omega}-\frac{A\cdot B}{\Omega} \Rightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример 1.28. В электрическую цепь последовательно включены две лампочки. Вероятность того, что лампочки перегорят, если напряжение в сети превысит номинальное, соответственно равны 0,4 и 0,7. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Решение. Событие {тока в цепи не будет} является суммой событий A= {перегорит первая лампочка}, B = {перегорит вторая лампочка}. По теореме вероятности суммы $P(A+B)=0,4+0,7=1,1$.

Однако ответ неверный, так как $0 \le p \le 1$. Ошибка состоит в том, что события A и B являются совместными (могут перегореть обе лампочки). По теореме сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B)=0,4+0,7-0,4\cdot 0,7=0,82.$$

Определение 1.21. Два события называются ***противоположными***, если они несовместны и образуют полную группу. Иначе говоря, в результате испытания произойдет только одно из них.

Пример 1.29. Выпадение герба или цифры при одном бросании монеты.

Если одно из противоположных событий обозначить через A, то второе принято обозначать $\overline{A}$.

Следствие 1.1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1. \tag{1.9}$$

Если вероятность события A обозначить через p, то вероятность противоположного $\overline{A}$ принято обозначать через q. Таким образом $p+q=1$.

При решении многих задач часто бывает легче найти вероятность противоположного события $\overline{A}$. После этого вероятность события A находится легко:

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{1.10}$$

Теорема 1.3. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.11}$$

Доказательство. Если события A и B несовместны, то их произведение $A\cdot B=\varnothing$, а вероятность $P(A\cdot B)=P(\varnothing)=0$. Подставляя это значение в формулу (1.8), получим: $P(A+B)=P(A)+P(B)-0=P(A)+P(B)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1.2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно несовместные события, то вероятность появления одного из них (безразлично какого) равна:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{1.12}$$

Следствие 1.3. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{1.13}$$

Пример 1.30. В лотерее 10 000 билетов, из которых 10 билетов выигрывают по 200 грн., 100 – по 100 грн., 500 – по 25 грн., 1000 – по 5 грн. Остальные билеты не выигрывают. Куплен один билет. Какова вероятность, что на него придется выигрыш не менее 25 грн.

Решение. Выиграть не менее 25 грн. (событие A) означает выиграть 25 грн. (событие A_1), или выиграть 100 грн. (событие A_2), или выиграть 200 грн. (событие A_3). На основании определения суммы событий имеем: $A=A_1+A_2+A_3$. Так как куплен один билет, то события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. На основании следствия 1.2. получим:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Очевидно, что $P(A_1)=0,05;\ P(A_2)=0,01; P(A_3)=0,001,$ поэтому

$$P(A)=0,05+0,01+0,001=0,061.$$

1.4.2. Независимые и зависимые события

Определение 1.22. Два события называются ***независимыми***, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Пример 1.31. Монета брошена два раза. Вероятность появления герба в первом испытании (событие A) не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании (событие $\hat{A}$). В свою очередь выпадение герба во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Таким образом события A и B – независимые.

Определение 1.23. Два события называются ***зависимыми***, если вероятность появления одного из них зависит от наступлении или ненаступления другого события.

Пример 1.32. В ящике 100 деталей: 80 стандартных и 20 нестандартных. Наудачу берут одну деталь, не возвращая ее в ящик. Пусть событие C={При втором испытании извлечена стандартная деталь}. Если первой была извлечена стандартная деталь, то извлечение стандартной детали при втором испытании $P(C) = \frac{79}{99}$, если же в первом испытании вынута нестандартная деталь, то вероятность $P(C) = \frac{80}{99}$.

Таким образом, вероятность появления стандартной детали во втором испытании зависит от появления или непоявления стандартной детали в первом испытании.

1.4.3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Определение 1.24. ***Условной вероятностью*** $P(B/A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(\grave{A})}. \tag{1.14}$$

Событие A называется условием. Аналогично определяется вероятность события A при условии, что произошло событие B:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Пример 1.33. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Наудачу вынимают один за другим два шара, причем первый шар, который оказался белого цвета, в урну не возвращается. Найти вероятность того, что второй шар тоже белого цвета.

Решение. Пусть событие A = {первый шар – белый}, событие B = {второй шар – белый}. Вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. Так, если первым вынут белый шар, то в урне осталось 9 шаров, среди которых 5 белых, поэтому

$$P(B/A)=\frac{5}{9}.$$

Теорема 1.4. *Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(A\cdot B)=P(A/B)\cdot P(B)=P(\hat{A}/\grave{A})\cdot P(\grave{A}). \tag{1.15}$$

Доказательство. По определению условной вероятности

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow P(AB)=P(A/B)P(B).$$

Пример 1.34. По данным предыдущего примера найдем вероятность появления двух белых шаров.

Решение. $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$

1.4.4. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Теорема 1.5. *Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \qquad (1.16)$$

Доказательство. Пусть события A и B независимы, тогда должно выполнятся равенство: $P(B/A)=P(B)$. Подставим это равенство в формулу $P(A\cdot B)=P(\grave{A})\cdot P(\hat{A}/\grave{A})$, получим $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$, что и требовалось доказать.

Пример 1.35. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, а во втором 6 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение. Событие A = {из первого ящика вынута стандартная деталь}, вероятность этого события $P(A)=0,8$. Событие B = {из второго ящика вынута стандартная деталь}, $P(B)=0,6$. Так как события A и B – независимые, то искомая вероятность

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0,8\cdot 0,6=0,48.$$

Пример 1.36. Произведен залп из трех орудий. Вероятности попадания в цель для каждого равны соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе из всех орудий будет а) три попадания; б) только одно попадание.

Решение. Обозначим A_1 = {попадание первого орудия}, A_2 = {попадание второго орудия}, A_3 = {попадание третьего орудия}. По условию задачи $P(A_1)=0,8;$ $P(A_2)=0,7;$ $P(A_3)=0,9.$ Тогда

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-0,8=0,2,$$
$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0,7=0,3,$$
$$P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-0,9=0,1.$$

а) Пусть событие $C=$ {три попадания при одном залпе}. Тогда $C=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, так как события $A_1,\ A_2,\ A_3$ независимы, то согласно теореме 1.5 умножения для независимых событий имеем:

$P(C)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$

б) Пусть событие $D=$ {только одно попадание при залпе}.

$D=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$. Используя теорему сложения для несовместных и теорему умножения для независимых событий, получаем:

$$P(D)=P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}092.$$

1.4.5. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания может появиться *n* событий независимых в совокупности, либо некоторые из них, причем вероятность каждого из событий известна. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема*:*

Теорема 1.6. *Вероятность появления хотя бы одного из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ *:*

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots q_n,\quad q_i=1-p_i. \qquad (1.17)$$

Замечание 1.1*:* Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

$$P(A)=1-q^n. \qquad (1.18)$$

Пример 1.37. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0,8;\ p_2 = 0,7;\ p_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятности попадания в цель каждого из орудий не зависят от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 = {попадание первого орудия}, A_2= {попадание второго орудия}, A_3 = {попадание третьего орудия} независимы в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3, то есть, вероятности промахов:

$$P(\overline{A_2}) = q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$
$$P(\overline{A_1}) = q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$
$$P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Тогда искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

1.4.6. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности является простым следствием теорем сложения и умножения вероятностей. Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют ***гипотезами***. Вероятность появления события A определяется с помощью следующей теоремы:

Теорема 1.7. *Вероятность события A, которое может наступить вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n). \qquad (1.19)$$

Пример 1.38. В первом ящике содержится 5 деталей, из которых 3 детали стандартные, во втором – 6 деталей, из которых 5 – стандартные. Из наудачу взятого ящика берут деталь. Какова вероятность, что эта деталь – стандартная?

Решение. Пусть событие A = {вынута стандартная деталь}. Возможны две гипотезы: $H_1 =$ {выбран первый ящик}, $H_2 =$ {выбран второй ящик}.

Так как выбор каждого ящика – события равновозможные, то

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Найдем условные вероятности события A при наступлении каждой из гипотез:

$$P(A/H_1) = \frac{3}{5},\ P(A/H_2) = \frac{5}{6}.$$

По формуле полной вероятности: $P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{43}{60}.$

1.4.7. Формула Байеса

Если в результате испытания событие A, вероятность которого была вычислена по формуле полной вероятности, наступило, то вероятности гипотез можно переоценить по формуле Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \qquad (1.20)$$

где $P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n)\cdot P(A/H_n)$.

Вероятности $P(H_i)$ называют априорными (доопытными), а вероятности $P(H_i / A)$ – апостериорными (послеопытными) вероятностями гипотез.

Пример 1.39. Детали изготавливаются двумя рабочими, причем производительность первого в два раза больше второго. Вероятность того, что первый рабочий изготовит бракованную деталь равна 0,01, второй – 0,1. Для контроля берется одна деталь, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена вторым рабочим.

Решение. Событие A = {контрольная деталь - бракованная} может произойти лишь вместе с одним из двух несовместных событий (гипотез): H_1 – {деталь изготовлена первым рабочим} и H_2 – {деталь изготовлена вторым рабочим}. Найдем вероятности гипотез: $P(H_1)=\frac{2}{3}$; $P(H_2)=\frac{1}{3}$. Кроме того, известны условные вероятности: $P_{_1}(A/H)=0{,}01$; $P\,(A/H_2)=0{,}1$.

По формуле полной вероятности найдем:

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}01+\frac{1}{3}\cdot 0{,}1=0{,}04.$$

Переоценим гипотезу H_2, с учетом результата испытания по формуле Байеса: $P\,(H_2\,/\,A)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}1}{0{,}04}=\dfrac{5}{6}$. Как видим, вероятность того, что контрольная бракованная деталь изготовлена вторым рабочим, велика, несмотря на то, что доля деталей, изготовленных им, в два раза меньше доли первого рабочего. Такой результат объясняется тем, что брак значительной части партии был по вине второго рабочего.

§ 1.5. Схема Бернулли

1.5.1. Формула Бернулли

Определение 1.25. Если производится несколько испытаний, то есть опыт выполняется при данном комплекте условий многократно (такое явление называют последовательностью испытаний), причем вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются ***независимыми***.

Примеры независимых испытаний.

1. Несколько подбрасываний монеты.

2. Стрельба по мишени без поправок на ранее допущенную ошибку при новом выстреле.

3. Определение числа бракованных изделий в партии товара.

Пусть проводится конечное число n последовательных испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может наступить либо не наступить, причем эти испытания удовлетворяют следующим условиям:

– каждое испытание случайно относительно события A, то есть до проведения испытания нельзя сказать, появится A или нет;

– испытания проводятся в одинаковых, с вероятностной точки зрения, условиях, то есть вероятность успеха в каждом отдельно взятом испытании одинакова и не меняется от испытания к испытанию;

– испытания независимы.

Определение 1.26. Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют ***успехом***) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют ***неудачей***) с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$, называется ***схемой Бернулли,*** а сами испытания – ***испытаниями Бернулли***.

Обозначим $P(\overline{A}) = 1 - p = q$, тогда $p + q = 1$.

В каждом испытании пространство элементарных исходов состоит из двух элементов, то есть $\Omega = \left\{A;\ \overline{A}\right\}$. Для n испытаний пространство элементарных исходов будет состоять из 2^n элементов. Например, при $n = 2$, (то есть опыт повторяется 2 раза), пространство элементарных исходов имеет вид:

$$\Omega = \left\{(A, A);\ (A, \overline{A});\ (\overline{A}, A);\ (\overline{A}, \overline{A})\right\}.$$

В теории вероятностей особый интерес представляет случай, когда в n испытаниях событие A произойдет k раз $(0 \le k \le n)$. Вероятность этого события обозначают $P_n(k)$.

Пример 1.40. Игральный кубик подбрасывают 3 раза. Найти вероятность того, что цифра «1» выпадет 2 раза.

Решение. Введем событие A={выпадет цифра 1}. Нужно найти $P_3(2)-$ вероятность того, что в трех испытаниях событие A произойдет 2 раза. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, можем найти искомую вероятность $P_3(2)$. В одном испытании $P(A)=\frac{1}{6}=p$. Тогда $P(\overline{A})=\frac{5}{6}=q$. Тогда

$$P_3(2)=P\left\{A\cdot A\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{A}\cdot A+\overline{A}\cdot A\cdot A\right\}=p^2\cdot q+p\cdot q\cdot p+q\cdot p^2=$$

$$=3p^2q=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}\approx 0,069.$$

В общем случае $P_n(k)$ можно искать, как в предыдущем примере. Однако при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи, который был реализован в формуле Бернулли.

Теорема 1.8. *Если производится* n *независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна* p*, а вероятность его непоявления равна* $q=1-p$*, то вероятность того, что событие А произойдет* k *раз определяется формулой Бернулли:*

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n. \tag{1.21}$$

Пример 1.41. Контрольный тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на два и четыре вопроса теста для неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).

Решение. Вероятность события A={правильный ответ} в каждом испытании равна $p=\frac{1}{4}$, тогда $q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Отсюда

1) $n=4,\ k=2.$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,21.$$

2) $n = 4,\ k = 4.$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0,004.$$

Замечание 1.2. Для вероятностей $P_n(k),\ k = 0,1,\ldots,n$ выполняется равенство:

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n) = 1. \qquad (1.22)$$

Замечание 1.3. Вероятность того, что в результате n независимых испытаний событие *A* появится от k_1 до k_2 раз вычисляется по формуле:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \qquad (1.23)$$

Пример 1.42. Монету подбрасывают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: 1) не менее двух раз; 2) от трех до пяти раз.

Решение. Вероятность выпадения герба в одном испытании $p = 0,5$, тогда $q = 0,5$.

1) $n = 6$. Найдем $P_6(2 \le k \le 6)$. Используя формулу (1.22), получим

$$P_6(2 \le k \le 6) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - C_6^0 \cdot 0,5^6 - C_6^1 \cdot 0,5^6 = 1 - 0,5^6 \cdot 7 = 0,89.$$

2) Найдем $P_6(3 \le k \le 5)$.

$$P_6(3 \le k \le 5) = C_6^3 \cdot 0,5^6 + C_6^4 \cdot 0,5^6 + C_6^6 \cdot 0,5^6 = 0,5^6(20 + 15 + 6) = 0,64.$$

1.5.2. Наивероятнейшее число появления случайного события

Определение 1.27. ***Наивероятнейшим числом*** появления случайного события *A* в результате n независимых испытаний по схеме Бернулли называется такое число k_0, для вероятности которого выполняется неравенство

$$P_n(k_0) \ge P_n(k) \text{ для всех } k \ne k_0.$$

Пример 1.43. Производится три независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0,9$. Вычислить вероятности попадания для $k=0,1,2,3$ и найти наивероятнейшее число появления этого события.

Решение. Здесь $n=3,\ p=0,9;\ q=0,1.$ Значения вычисленных вероятностей запишем в таблицу. Используя формулу (1.21), найдем:

1) $P_3(0)=C_3^0\cdot 0,9^0\cdot 0,1^3=0,001$ – вероятность трех промахов;

2) $P_3(1)=C_3^1\cdot 0,9^1\cdot 0,1^2=0,027$ – вероятность одного попадания;

3) $P_3(2)=C_3^2\cdot 0,9^2\cdot 0,1^1=0,234$ – вероятность двух попаданий;

4) $P_3(3)=C_3^3\cdot 0,9^3\cdot 0,1^0=0,729$ – вероятность трех попаданий.

k	0	1	2	3
$P_3(k)$	0,001	0,027	0,243	0,729

Из таблицы видим, что при $k=3$ вероятность будет наибольшей, именно $P_3(3)=0,729$, следовательно, наивероятнейшим числом попадания при трех выстрелах будет $k_0=3$.

Замечание 1.4. Для определения наивероятнейшего числа нет необходимости вычислять вероятности для всех возможных значений $k\ \ (0\le k\le n)$. Это число определяется из системы неравенств:

$$np-q\le k_0\le np+p. \tag{1.24}$$

Число k_0 также называют ***модой***.

Свойства наивероятнейшего числа k_0.

1. k_0 – целое число, которое находится в отрезке $[np-q;\ np+p]$.

2. Разность между правым и левым концами этого отрезка всегда равна 1, так как $np+p-(np-q)=p+q=1$.

3. Если $(np-q)$ – дробное число, то k_0 – единственное.

4. Если $(np-q)$ – целое число, то получим два наивероятнейших числа: $k_0^{/}=np-q,\ \ k_0^{//}=np+p.$

Пример 1.44. Вероятность того, что студент сдаст экзамен по математике, есть величина постоянная и равная в среднем 0,8. Найти наивероятнейшее число студентов группы из 8 человек, которые сдадут экзамен по математике и вычислить соответствующую вероятность.

Решение. По условию задачи $n=8,\ p=0,8;\ q=0,2$. Составим систему неравенств, используя формулу (1.24):

$$8\cdot 0,8-0,2\le k_0\le 8\cdot 0,8+0,8.$$

$$6,2\le k_0\le 7,2.$$

Отсюда видим, что наивероятнейшее число студентов, которые сдадут экзамен, равно $k_0=7$. Вычислим соответствующую вероятность:

$$P_8(7)=C_8^7\cdot 0,8^7\cdot 0,2=0,524288\approx 0,5.$$

§ 1.6. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли (1.21) при больших значениях n и k вызывает большие трудности, так как это связано с громоздкими вычислениями. Такие затруднения вызывает вычисления $P_n(k)$ при малых значениях p. Поэтому возникает необходимость в отыскании приближенных формул для вычисления $P_n(k)$, обеспечивающих необходимую точность. Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при большом количестве испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность.

1.6.1. Формула Пуассона

Теорема 1.9 (Теорема Пуассона). *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p\to 0$) и число испытаний неограниченно увеличивается ($n\to\infty$), но так, что их произведение np является постоянной величиной ($np=const$), то вероятность появления* *события A k раз* ($0 \le k \le n$) *может быть вычислена по приближенной формуле:*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np, \tag{1.25}$$

которая называется ***асимптотической формулой Пуассона.***

Доказательство. Преобразуем формулу Бернулли (1.21) с учетом того, что $p = \dfrac{\lambda}{n}$:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ (II замечательный предел), получим формулу:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np, \ k = 0,1,2,\ldots$$

Замечание 1.5. Формулу (1.25) применяют, когда вероятность p успеха крайне мала, то есть появление события A является ***редким событием***, но количество n испытаний велико. Обычно ее используют, когда $n \ge 50$, а $np \le 10$.

Замечание 1.6. Функцию $P_n(k)$ можно получить из таблицы, в приложении по данному значению k и вычисленному значению $\lambda = np$.

Пример 1.45 Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Решение. Среднее число позвонивших в течение часа абонентов равно $2000 \cdot 0,003 = 6$ $(\lambda = np)$. Следовательно $p_5 = \dfrac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0,13.$

Пример 1.46. На факультете учится 1460 студентов. Какова вероятность того, что 10 февраля является днем рождения одновременно 5 студентов?

Решение. Вероятность того, что день рождения студента 10 февраля равна $p = \dfrac{1}{365}$**.** Так как $\lambda = np = 1460 \cdot \dfrac{1}{365} = 4 < 10$, вероятность p мала, а $n = 1460 > 50$ – велико, то используем формулу Пуассона: $P_{1460}(5) \approx \dfrac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0,1563.$

1.6.2. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда вероятность p не близка к нулю ($p \neq 0,\ p \neq 1$), а число испытаний n велико, для вычисления вероятностей используют теоремы Муавра-Лапласса.

Теорема 1.10 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет k раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n может быть вычислена по приближенной формуле:*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.26)$$

Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1.27)$$

называется ***функцией Гаусса,*** а ее график – кривой вероятностей (см. рис. 1.8)

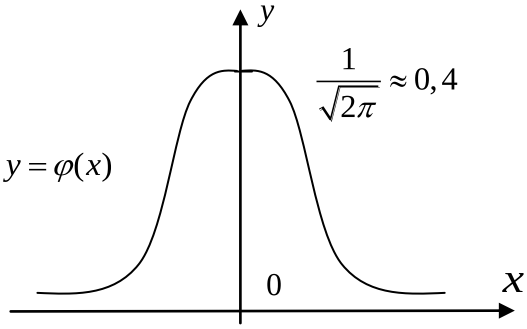

Рис. 1.8

Равенство (1.26) можно переписать в виде

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.28)$$

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы значений (приложение 1).

Свойства функции Гаусса:

1. Функция Гаусса четная, то есть $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

2. Функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая при $x>0$, причем $\varphi(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. При $x\geq 4$ можно считать, что $\varphi(x)=0$.

Замечание 1.7. Приближенные значения вероятности $P_n(k)$, вычисленные по формуле (1.26), на практике используются как точные при условии $npq\geq 20$.

Пример 1.47. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8. Найти вероятность того, что при 400 выстрелах мишень будет поражена 310 раз.

Решение. Здесь $n=400,\ p=0{,}8, q=0{,}2,\ k=310$. Применим формулу (1.28). Имеем: $\sqrt{npq}=\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=\sqrt{64}=8$, следовательно,

$x = \frac{310 - 400 \cdot 0,8}{8} = -\frac{10}{8} = -1,25$. Учитывая, что $\varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1827$, получаем $P_{400}(310) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,1827 = 0,0228.$

1.6.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В случае, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, то есть $P_n(k_1 \le k \le k_2)$, используют интегральную теорему Муавра-Лапласса (является частным случаем более общей теоремы – центральной предельной теоремы).

Теорема 1.11 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ может быть найдена по приближенной формуле:*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.29)$$

Используя функцию Гаусса (1.28), равенство (1.29) можно записать в виде:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt.$$

Однако для упрощения вычислений, при использовании формулы (1.29) вводят специальную функцию

$$\Phi_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (1.30)$$

называемую ***нормированной функцией Лапласа.***

Выразим правую часть равенства (1.29) через функцию Лапласа (1.30):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Равенство (1.29) принимает вид:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.31}$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Эту формулу обычно используют на практике.

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. Функция Лапласа (1.30) нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$**.**

Доказательство.

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \begin{Bmatrix} t = -z \\ dt = -dz \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = -\Phi(x).$$

2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает, причем $\Phi(x) \to 0{,}5$ при $x \to +\infty$. Практически можно считать что $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \ge 5$.

Доказательство. Так как $\Phi^{/}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\Phi^{/}(x) > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, то $\Phi(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой,

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left\{ z = \frac{t}{\sqrt{2}},\ dt = \sqrt{2}dz \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\sqrt{2}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz.$$

Здесь использовали свойство интеграла от четной функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 2\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz.$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$ (интеграл Эйлера-Пуассона), получим

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 0{,}5.$$

График функции $\Phi(x)$ приведен на рис 1.9.

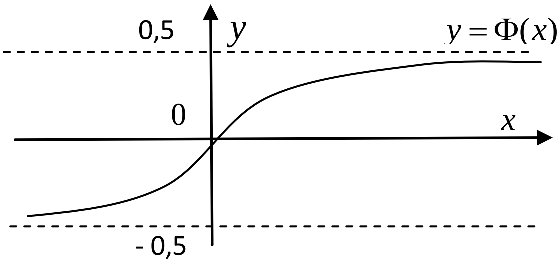

Рис. 1.9

Пример 1.48. Проверкой установлено, что цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. На базе приемщик проверяет 200 изделий этого цеха. Если среди них окажется более 10 изделий не высшего сорта, то вся партия бракуется, то есть возвращается в цех. Какова вероятность, что партия будет принята?

Решение. Здесь $n = 200,\ p = 0{,}04$ (вероятность бракованного изделия), $q = 0{,}96$. Вероятность принятия всей партии, т.е. $P_{200}(0 \le m \le 10)$, можно найти по формуле (1.31). Здесь $k_1 = 0,\ k_2 = 10$. Находим, что

$$x_1 = \frac{0 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx -2{,}89,\ x_{10} = \frac{10 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx 0{,}72.$$

$$P_{200}(0 \le m \le 10) = \Phi(0{,}72) - \Phi(-2{,}89) = 0{,}26424 + 0{,}49807 = 0{,}7623.$$

1.6.4. Следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Следствие 1.4. *Если вероятность* p *наступления события* A *в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то при достаточно большом числе* n *независимых испытаний вероятность того, что:*

а) отклонение относительной частоты $\frac{k}{n}$ *от вероятности* p *в* n *независимых испытаниях не превосходит числа* $\varepsilon > 0$ *равна:*

$$P_n\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.32}$$

б) число k *наступления события А отличается от произведения* np *не более, чем на величину* $\varepsilon > 0$ *по абсолютной величине равна*

$$P_n\left(\left|k-np\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \qquad (1.33)$$

в) относительная частота $\frac{k}{n}$ *события А заключена в пределах от* α *до* β*, равна*

$$P_n\left(\alpha \le \frac{k}{n} \le \beta\right) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \qquad (1.34)$$

где

$$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}},\ z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}}. \qquad (1.35)$$

Доказательство. а). Из неравенства $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon$ следует: $-\varepsilon \le \frac{k}{n} - p \le \varepsilon,\ np - n\varepsilon \le nk \le np + n\varepsilon$. По формуле (1.29) получаем:

$$P_n\left\{np - n\varepsilon \le k \le np + n\varepsilon\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

то есть

$$P_n\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

б) Неравенство $\left|k - np\right| \le \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $np - \varepsilon \le k \le np + \varepsilon$. Поэтому по интегральной формуле (1.31).

$$P_n\left(\left|k-np\right| \le \varepsilon\right) = P_n(np - \varepsilon \le k \le np + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{np + \varepsilon - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np - \varepsilon - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

б) Неравенство $\alpha \le \frac{k}{n} \le \beta$ равносильно неравенству $k_1 \le k \le k_2$ при $k_1 = n\alpha$ и $k_2 = n\beta$. Заменяя в формуле (1.31) величины k_1 и k_2 полученными выражениями, получим доказываемые формулы (1.33) и (1.34)

Пример 1.49. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,02. Найти вероятность того, что при $n = 98$ произведенных изделий отклонение относительной частоты от вероятности по модулю не превышает $\varepsilon = 0,05$.

Решение.

$$P_{98}\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,02\right| \le 0,05\right\} = 2\Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{98}{0,02 \cdot 0,98}}\right) = 2\Phi(3,54) = 0,9996.$$

Пример 1.50. В некотором городе из каждых 100 семей 80 имеют автомобиль. Вычислить вероятность того, что среди 400 выбранных семей от 280 до 360 имеют автомобиль.

Решение. Вычислить вероятность $P_{400}(280 \le k \le 360)$ можно по основной формуле (1.31). Но проще это сделать, если заметить, что границы интервала 280 и 360 симметричны относительно величины $np = 320$. Тогда по формуле (1.33):

$$P_{400}(280 \le k \le 360) = P_{400}(-40 \le k - 320 \le 40) = P_{400}(|k - 320| \le 40) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(5,0) \approx 1.$$

Пример 1.51. По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет.

1. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет: а) заключена в пределах от 0,9 до 0,95; б) отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).

2. При каком числе новорожденных с надежностью 0,95 доля доживших до 50 лет будет заключена в границах от 0,86 до 0,88?

Решение. 1. а) Вероятность p того, что новорожденный доживет до 50 лет, равна 0,87. Так как $n=1000$ велико (условие $npq=1000\cdot 0,87\cdot 0,13=113,1\geq 20$ выполнено), то используем следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Вначале определим по (1.35) $z_1=\dfrac{0,9-0,87}{\sqrt{0,87\cdot 0,13/1000}}=2,82,\ z_2=\dfrac{0,95-0,87}{\sqrt{0,87\cdot 0,13/1000}}=7,52.$

Теперь по формуле (1.34)

$$P_{1000}\left(0,9\leq\frac{k}{n}\leq 0,95\right)\approx\Phi(7,52)-\Phi(2,82)=0,5-0,4976=0,0024.$$

б) По формуле (1.32)

$$P_{1000}\left(\left|\frac{k}{n}-0,87\right|\leq 0,04\right)\approx 2\Phi\left(\frac{0,04\cdot\sqrt{1000}}{\sqrt{0,87\cdot 0,13}}\right)=2\Phi(3,76)=0,9998.$$

Так как неравенство $\left|\dfrac{k}{n}-0,87\right|\leq 0,04$ равносильно неравенству $0,83\leq\dfrac{k}{n}\leq 0,91$, полученный результат означает, что практически достоверно, что от 830 до 910 новорожденных из 1000 доживут до 50 лет.

2. По условию $P_n\left(0,86\leq\dfrac{k}{n}\leq 0,88\right)=0,95$

или $P_n\left(-0,01\leq\dfrac{k}{n}-0,87\leq 0,01\right)=P_n\left(\left|\dfrac{k}{n}-0,87\right|\leq 0,01\right)=0,95$.

По формуле (1.32) при $\varepsilon=0,01$ получим $2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=0,95$, то есть

$2\Phi(t)=0,95$ при $t=1,96$.

Следовательно $\varepsilon\cdot\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=t$, откуда $n=\dfrac{t^2pq}{\varepsilon^2}=\dfrac{1,96^2\cdot 0,87\cdot 0,13}{0,01^2}=4345,$ то есть соответствующее условие может быть гарантировано при существенном увеличении числа рассматриваемых новорожденных до $n=4345$.