Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский государственный университет нефти и газа

(национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина

Кафедра Автоматизированных систем управления

Отчет по домашней работе No 3
дисциплины

Системный анализ и теория принятия решений

Моделирование функционирования производственной системы на базе Марковских случайных процессов

Выполнил:
студент группы АС-19-05 _________ Макаров А. В.

Проверил(а):
д.т.н., Профессор ___________ Степин Ю.П.

2022 г.

Постановка задачи:

1. Самостоятельно (под контролем преподавателя) содержательно определить моделируемый бизнес-процесс.

2. Для утвержденного бизнес-процесса:

- составить граф состояний;
- матрицы: вероятностей переходов и интенсивностей переходов (для однородного и неоднородного процессов; численные значения матриц задать самостоятельно)

3. Составить соответствующие системы уравнений Колмогорова-Чепмена (для дискретного и непрерывного времени).

4. Рассчитать вероятности пребывания моделируемой системы в своих состояниях (считая процесс однородным) как для дискретного, так и непрерывного времени; в нестационарном и стационарном режимах функционирования.

Для полученных решений построить графики.

Выполнение работы:

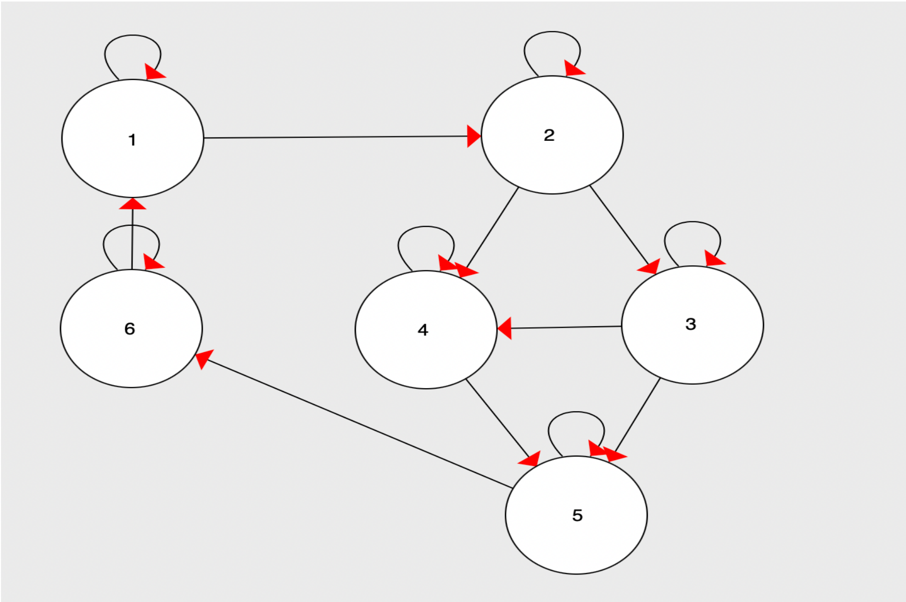
Сформулируем бизнес-модель:

Программный комплекс по на предприятие состоит из множества программных модулей. Раз в день производится тестирование каждого из модулей.

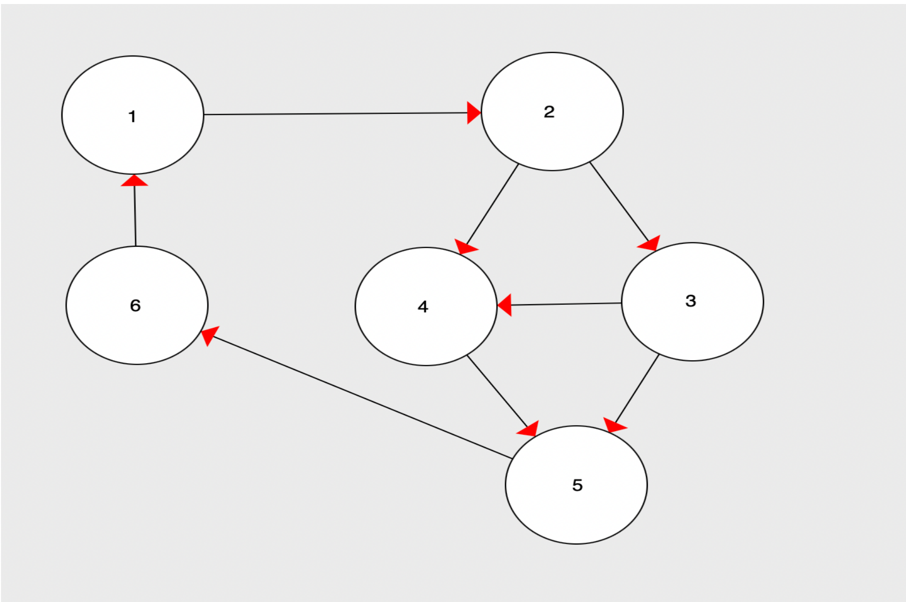
Модуль может находиться в следующих состояниях:

1. Модуль исправен
2. В модуле обнаружен баг, модуль вышел из строя
3. Программный модуль отправлен на доработку
4. В модуле обнаружена критическая ошибка, модуль подлежит замене
5. Исправленный модуль проходит процесс тестирования
6. Модуль исправлен и ожидает ввода в программный комплекс

<u>Граф состояний для дискретной модели</u>



<u>Граф состояний для непрерывной модели</u>



Составим матрицы вероятностей и интенсивностей переходов для однородного процесса

Матрица вероятностей

Вершины	1	2	3	4	5	6
1	0,83	0,17	0	0	0	0
2	0	0,10	0,80	0,1	0	0
3	0	0	0,3	0,05	0,65	0
4	0	0	0	0,2	0,8	0
5	0	0	0	0	0,7	0,3
6	0,9	0	0	0	0	0,1

Матрица интенсивностей переходов

Вершины	1	2	3	4	5	6
1	0	0,5	0	0	0	0
2	0	0	1	3	0	0
3	0	0	0	2	1	0
4	0	0	0	0	5	0
5	0	0	0	0	0	1
6	3	0	0	0	0	0

Составим матрицу вероятностей перехода для неоднородного процесса

В	1	2	3	4	5	6	В	1	2	3	4	5	6
1	0,83	0,17	0	0	0	0	**1**	0,78	0,22	0	0	0	0
2	0	0,10	0,80	0,10	0	0	**2**	0	0,14	0,77	0,09	0	0
3	0	0	0,30	0,05	0,65	0	**3**	0	0	0,27	0,13	0,60	0
4	0	0	0	0,2	0,80	0	**4**	0	0	0	0,25	0,75	0
5	0	0	0	0	0,70	0,30	**5**	0	0	0	0	0,65	0,35
6	0,90	0	0	0	0	0,10	**6**	0,85	0	0	0	0	0,15
В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**В**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0,73	0,27	0	0	0	0	**1**	0,68	0,32	0	0	0	0
2	0	0,06	0,74	0,20	0	0	**2**	0	0,04	0,91	0,01	0	0
3	0	0	0,24	0,21	0,55	0	**3**	0	0	0,21	0,09	0,70	0
4	0	0	0	0,30	0,70	0	**4**	0	0	0	0,35	0,65	0
5	0	0	0	0	0,60	0,40	**5**	0	0	0	0	0,55	0,45
6	0,80	0	0	0	0	0,20	**6**	0,75	0	0	0	0	0,25

Составим систему уравнений Колмогорова-Чепмена для дискретного времени:

$$\frac{dP1}{dt} = p11 * P1 + p61 * P6 - p12 * P1$$

$$\frac{dP2}{dt} = p22 * P2 + p12 * P1 - p23 * P2 - p24 * P2$$

$$\frac{dP3}{dt} = p33 * P3 + p23 * P2 - p34 * P3 - p35 * P3$$

$$\frac{dP4}{dt} = p44 * P4 - p45 * P4 + p24 * P2 + p34 * P3$$

$$\frac{dP5}{dt} = p55 * P5 - p56 * P5 + p45 * P4 + p35 * P3$$

$$\frac{dP6}{dt} = p66 * P6 - p61 * P6 + p56 * P5$$

$$\mathrm{P1} + \mathrm{P2} + \mathrm{P3} + \mathrm{P4} + \mathrm{P5} + \mathrm{P6} = 1$$

Составим систему уравнений Колмогорова-Чепмена для непрерывного времени:

$$\frac{dP1}{dt} = -\lambda 12 * P1 + \lambda 61 * P6$$

$$\frac{dP2}{dt} = \lambda 12 * P1 - \lambda 23 * P2 - \lambda 24 * P2$$

$$\frac{dP3}{dt} = -\lambda 34 * P3 + \lambda 23 * P2 - \lambda 35 * P3$$

$$\frac{dP4}{dt} = \lambda 24 * P2 + \lambda 34 * P3 - \lambda 45 * P4$$

$$\frac{dP5}{dt} = \lambda 45 * P4 + \lambda 35 * P3 - \lambda 56 * P5$$

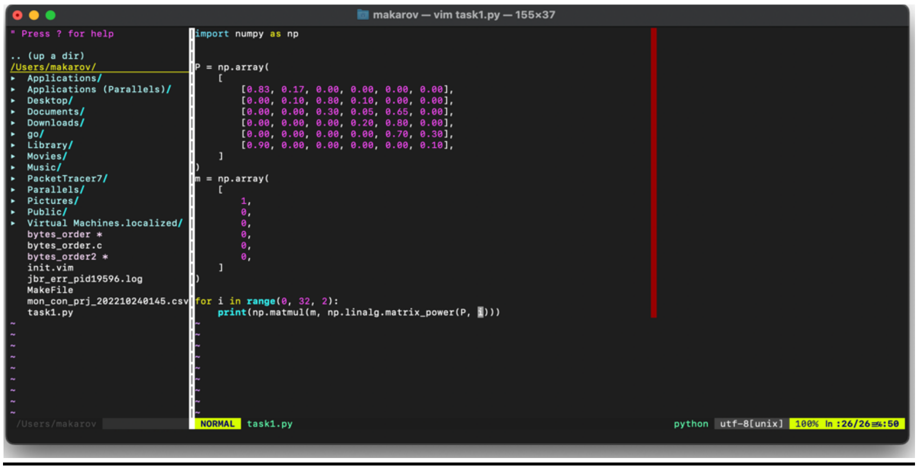
$$\frac{dP6}{dt} = \lambda 56 * P5 - \lambda 61 * P6$$

P1 + P2 + P3 + P4 + P5 + P6 = 1

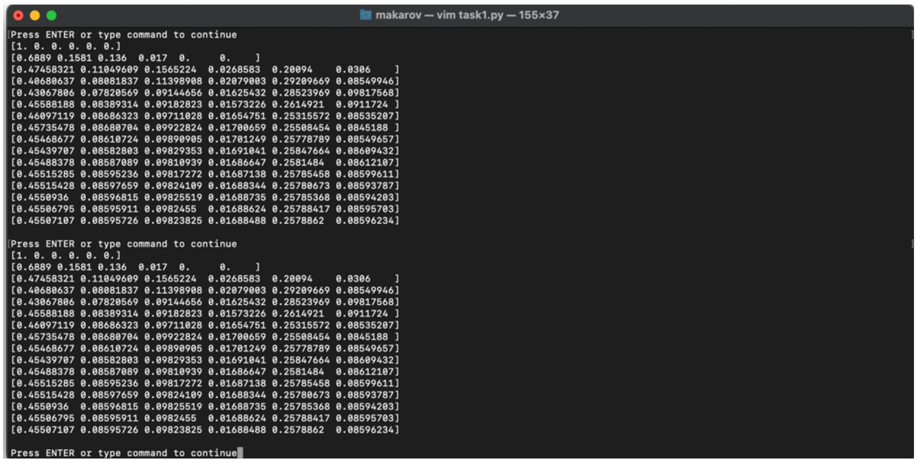
На основе данных систем уравнений мы можем перейти к расчёту вероятности пребывания моделируемой системы в своих состояниях для дискретного однородного процесса

В нулевой момент система находится в первом состоянии. Формула для расчета состояния: $Pn = Po * P^{n}$.

Расчет вероятностей пребывания для дискретной системы



Код программы на Python3 для выполнения вычисления



Результат выполнения кода (расчет вероятностей пребывания для дискретной системы)

Как видно из выполненных расчётов вероятности стремятся к вектору значений (0.455, 0.085, 0.098, 0.0169, 0.258, 0.0860)P33

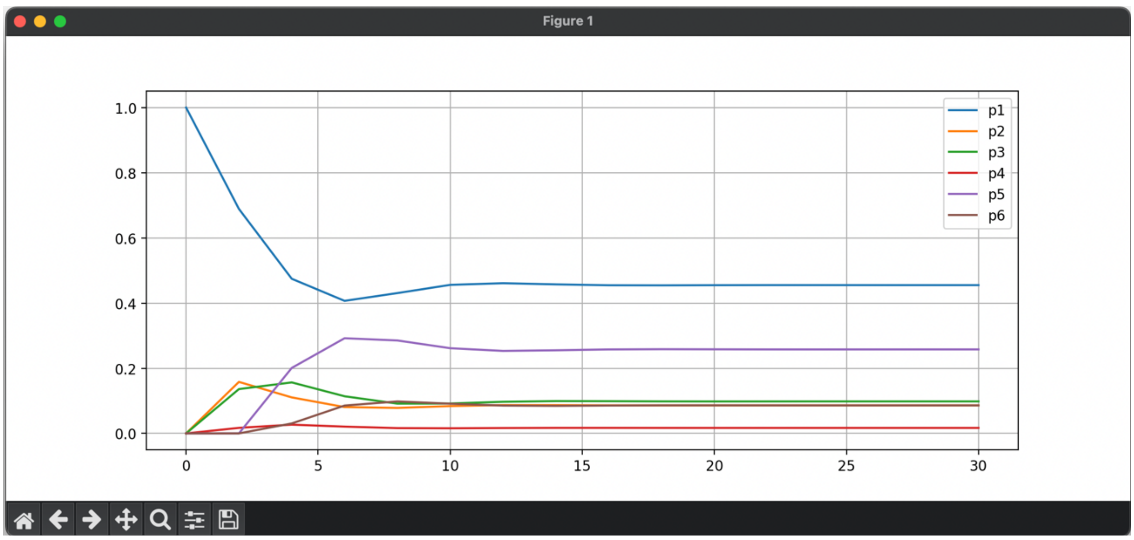


График динамики вероятностей для дискретной системы

Расчет вероятностей пребывания для непрерывного однородного процесса

Рассчитаем вероятности пребывания моделируемой системы в своих состояниях для непрерывного однородного процесса. Построим график.

Расчет вероятности производится по системе Колмогорова-Чепмена с помощью функции rkfixed, позволяющей найти решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

$$\lambda := \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$ss(t,p) := \begin{pmatrix} -p_0 \lambda_{0,1} + p_5 \cdot \lambda_{5,0} \\ \lambda_{0,1} \cdot p_0 - \lambda_{1,2} \cdot p_1 - \lambda_{1,3} \cdot p_1 \\ -\lambda_{2,3} \cdot p_2 + \lambda_{1,2} \cdot p_1 - \lambda_{2,4} \cdot p_2 \\ \lambda_{1,3} \cdot p_1 + \lambda_{2,3} \cdot p_2 - \lambda_{3,4} \cdot p_3 \\ \lambda_{3,4} \cdot p_3 + \lambda_{2,4} \cdot p_2 - \lambda_{4,5} \cdot p_4 \\ \lambda_{4,5} \cdot p_4 - \lambda_{5,0} \cdot p_5 \end{pmatrix}$$

$$P := \text{rkfixed}(P0, 0, 10, 1000, ss)$$

P =

	0	1	2	3	4	5	6	7
992	9.92	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
993	9.93	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
994	9.94	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
995	9.95	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
996	9.96	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
997	9.97	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
998	9.98	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
999	9.99	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	0.087	
1000	10	0.519	0.065	0.022	0.048	0.26	...	

Расчет вероятностей пребывания для непрерывной системы

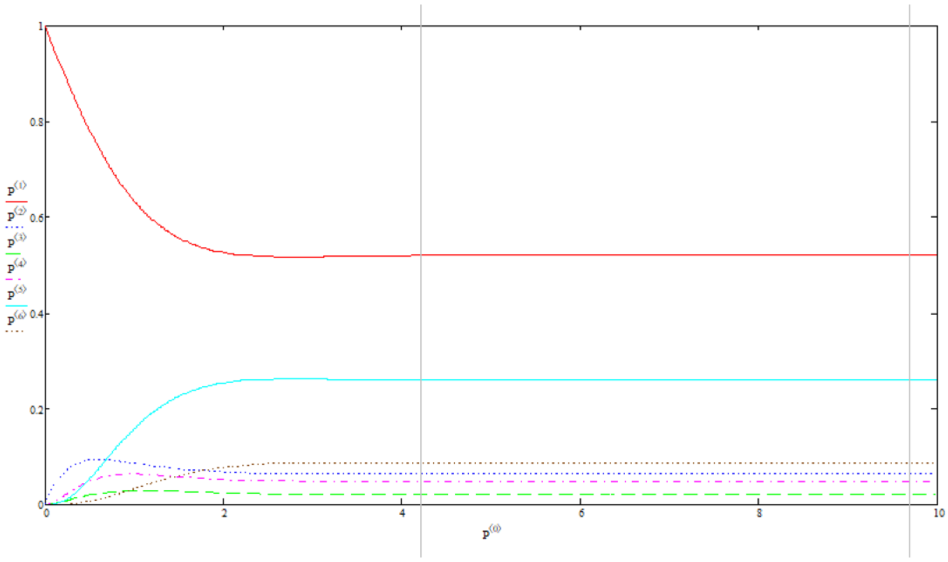


График динамики вероятностей для непрерывной системы

Расчет вероятностей пребывания для неоднородного процесса

Формула для расчета вероятностей пребывания на шаге k:

$P\,(k) = \sum^{n} P\,(k-1)P\,(k)$

$$p1 := \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.80 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.30 & 0.05 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70 & 0.30 \\ 0.90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 \end{pmatrix} \qquad p2 := \begin{pmatrix} 0.78 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0.77 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27 & 0.13 & 0.60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0.35 \\ 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}$$

$$p3 := \begin{pmatrix} 0.73 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0.74 & 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.24 & 0.21 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0.40 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 \end{pmatrix} \qquad p4 := \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.91 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.21 & 0.09 & 0.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$P0 := (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^{T}$$

$$j := 0..5$$

$$k := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^{T}$$

$$A1_j := \sum_{i=0}^{5} \left(P0_i \cdot p1_{i,j}\right)$$

$$A2_j := \sum_{i=0}^{5} \left(A1_i \cdot p2_{i,j}\right)$$

$$A3_j := \sum_{i=0}^{5} \left(A2_i \cdot p3_{i,j}\right)$$

$$A4_j := \sum_{i=0}^{5} \left(A3_i \cdot p4_{i,j}\right)$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 0.647 \\ 0.206 \\ 0.131 \\ 0.015 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A3 = \begin{pmatrix} 0.473 \\ 0.187 \\ 0.184 \\ 0.073 \\ 0.083 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A4 = \begin{pmatrix} 0.321 \\ 0.159 \\ 0.209 \\ 0.044 \\ 0.222 \\ 0.037 \end{pmatrix}$$

Расчет вероятностей пребывания системы в неоднородном состоянии

$$G1 := \left(A1_0 \;\; A2_0 \;\; A3_0 \;\; A4_0\right)^T$$

$$G2 := \left(A1_1 \;\; A2_1 \;\; A3_1 \;\; A4_1\right)^T$$

$$G3 := \left(A1_2 \;\; A2_2 \;\; A3_2 \;\; A4_2\right)^T$$

$$G4 := \left(A1_3 \;\; A2_3 \;\; A3_3 \;\; A4_3\right)^T$$

$$G5 := \left(A1_4 \;\; A2_4 \;\; A3_4 \;\; A4_4\right)^T$$

$$G6 := \left(A1_5 \;\; A2_5 \;\; A3_5 \;\; A4_5\right)^T$$

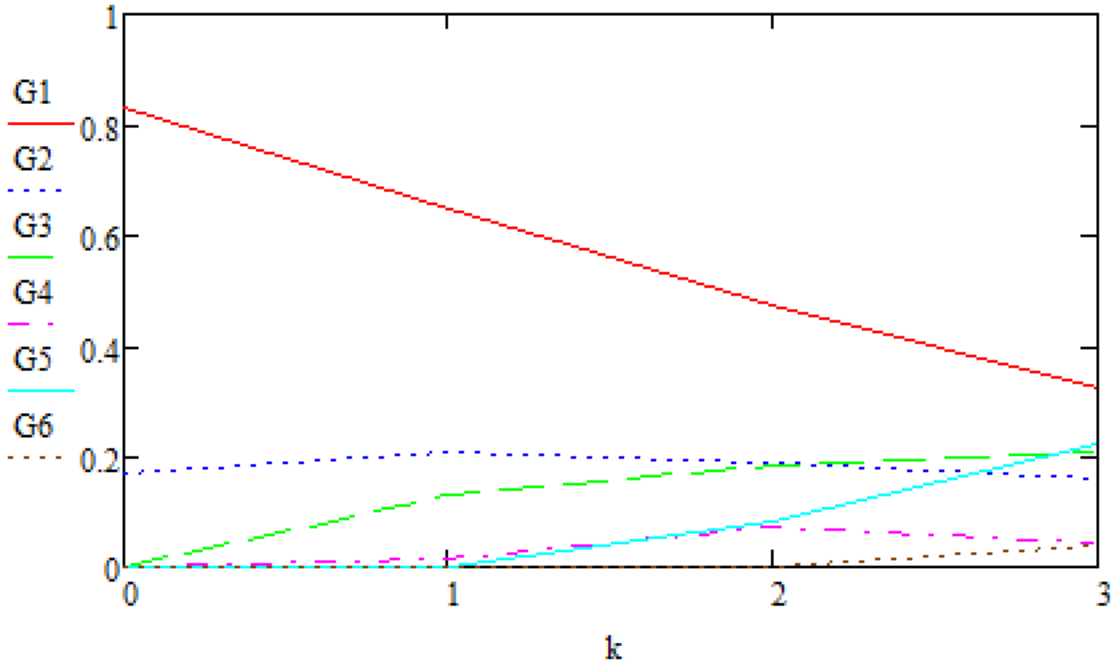


График динамики вероятностей для неоднородной системы