Ответы на вопросы по Высшей математике:

1. Матрица – это упорядоченная таблица числе, состоящая из строк и столбцов. Количество строк и столбцов задают размеры матрицы. Операции с матрицами:
    a. Сложения и вычитания
    b. Умножения
    c. Транспонирования
    d. Возведения в степень
2. Транспонирование матрицы – это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами. Обратная матрица – это матрица, произведение которой на исходную матрицу равно единичной матрице.
3. Определитель – это число, записанное в виде квадратной таблицы, имеющей строк и столбцов, которая раскрывается по определенному правилу. Способы вычисления определителей:
    a. Вычисление определителя матрицы 1×1
    b. Вычисление определителя матрицы 2×2
    c. Вычисление определителя матрицы 3×3
        i. Правило треугольника для вычисления определителя матрицы 3-тего порядка
        ii. Правило Саррюса для вычисления определителя матрицы 3-тего порядка
    d. Вычисление определителя матрицы произвольного размера
        i. Разложение определителя по строке или столбцу
        ii. Приведение определителя к треугольному виду
        iii. Теорема Лапласа
4. Система линейных алгебраических уравнений – это такой набор чисел, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений системы обращается в тождество. Виды систем линейных уравнений:
    a. Совместной или несовместной
    b. Однородной или не однородной
    c. Определенной или неопределенной
5. Метод Крамера – это метод решения систем линейных уравнений. Он применяется только к системам линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель отличен от нуля. Любая крамеровская система уравнений имеет единственное решение, которое определяется формулами: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$
6. Метод Гаусса – это методика эквивалентного преобразования исходной системы линейных уравнений в систему, решаемую существенно проще, чем исходный вариант.

7. Метод обратной матрицы — это метод, использующийся при решении системы линейных алгебраических уравнений в том случае, если число неизвестных равняется числу уравнений.
8. Комплексное число – это выражение вида a+ib, где a, b – действительные числа, i – мнимая единица. Действия над комплексными числами:
    a. Сумма и разность
    b. Произведение
    c. Деление
9. Модуль комплексного числа – это выражение $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ или квадратный корень из суммы квадратов действительной и мнимой частей комплексного числа. Геометрическое изображение комплексного

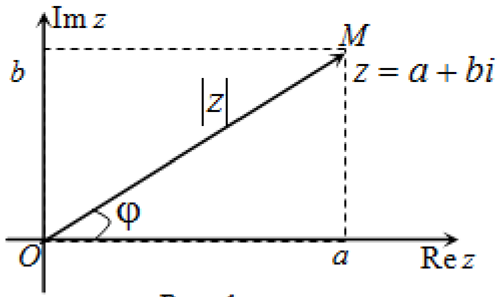


Рис. 1

числа:
10. Запись комплексного числа в виде a+ib, где a и b - действительные числа, называется алгебраической формой комплексного числа. Если $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа z=a+ib ,а ф - его аргумент, то тригонометрической формой комплексного числа z называется выражение: $z = r(\cos ф + i \sin ф)$

    Показательной формой комплексного числа z=a+ib называется выражение: $z = re^{iф}$
11. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

    1. Произведение комплексных чисел вычисляется по формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).$$

    a.

2. Частное комплексных чисел вычисляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2))=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\left(\sin\varphi_1-\varphi_2\right)\right).$$

b.

3. В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

$$z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Первая формула Муавра.

c.

4. Для извлечения корня $\boldsymbol{n}$-й степени из комплексного числа

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

используется вторая формула Муавра:

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень из модуля комплексного числа, $\boldsymbol{k}$=0, 1, 2,..., $\boldsymbol{n}$-1

d.

12. Производная функция – это предел отношения приращения функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует. Геометрический смысл производной: производная в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Физический смысл производной: если точка движется вдоль оси x и ее координаты изменяются по закону x(t), то мгновенная скорость точки: u(t) = x’(t), а ускорение: a(t) = u’(t) = x’’(t).

13. Таблица производных элементарных функций:

$$(C)' = 0;$$

$$(x^a)' = ax^{a-1};$$

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \left(x^{m/n}\right)' = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}; \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

14. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (u \cdot v)' = u'v + uv', \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (1)$$

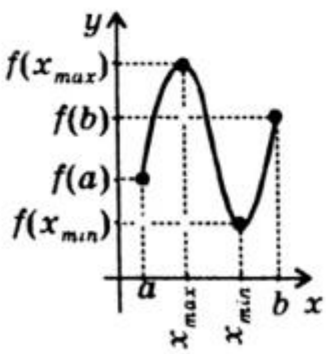
15. Если функции y = f (u) и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ равна производной от функции y по промежуточному аргументу u, умноженной на производную от промежуточного аргумента u по независимой переменной x. То есть, $y'_x = f'_u u'_x$. Под производной высших порядков понимают дифференцирования функции более одного раза. Если производную $y'(x)$ повторно дифференцировать, то получим производную второго порядка, или вторую производную функции $y = f(x)$, и она обозначается: $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$. Производная третьего порядка будет иметь вид: $y''' = (y'')' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$.
16. Функция f (x) называется возрастающей на промежутке (a, b), если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции. Функция f (x) называется убывающей на промежутке (a, b), если большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции. Экстремумы функции – это точки, имеющие максимальные или минимальные значения функции на определенных участках.
17. Точка перегиба – это точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх. Кривая y = f (x) называется выпуклой в точке, если в окрестности этой точки кривая находится под касательной к кривой, проведенной в этой точке. Кривая y = f (x) называется вогнутой в точке, если в окрестности этой точки кривая находится над касательной к кривой, проведенной в этой точке.

18.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

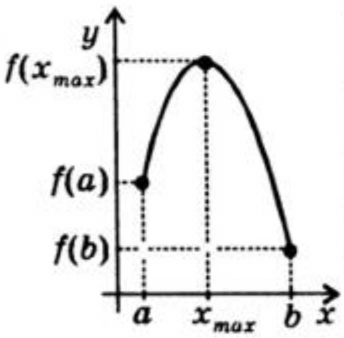
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:



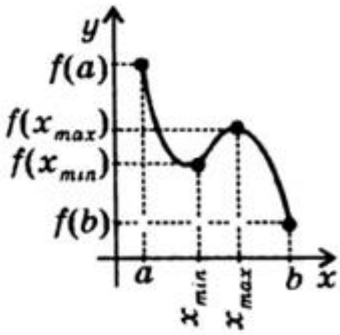
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$



$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$

СХЕМА НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0) = 5$; $f(3) = -76$; $f(4) = -59$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(3) = -76$

19. Первообразная функции - такая функция, производная которой соответствует исходной функции. Таблица первообразных:

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x) = k$	$F(x) = kx$	7) $f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
2) $f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	8) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$	9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
4) $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
5) $f(x) = a^x$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$
6) $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$		

Множество всех первообразных функции называют неопределенным интегралом от функции и обозначают: $\int f(x)dx$

Свойства неопределенного интеграла:

a. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределённого интеграла равный подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

b. Неопределённый интеграл от дифференциала функции равный этой функции: $\int dF(x) = F(x) + C.$

c. Постоянный множитель можно вынести за знак интервала:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

d. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функции равный такой же самой алгебраической сумме неопределённых интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

e. Если функция F(x) является первоначальной для f(x), где k и b произвольные числа ($k \neq 0$), то $\int f(kx+b)dx = \dfrac{F(kx+b)}{k} + C$.

20.

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
16. $\int shx\,dx = chx + C$
17. $\int chx\,dx = shx + C$
18. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$
19. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$

21. Метод непосредственного интегрирования:

Непосредственное интегрирование – метод интегрирования, при котором подынтегральная функция путем тождественных преобразований и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

22. Методы замены переменной:

Метод замены переменной заключается в том, что мы от исходной переменной интегрирования, пусть это будет x, переходим к другой переменной, которую обозначим как t.

Линейные подстановки – это замена переменной вида t = ax + b, где a и b – постоянные. При такой замене дифференциалы связаны соотношением

$$dt = (ax+b)'\,dx = a\,dx; \quad dx = \frac{1}{a}\,dt.$$

23. Интегрирование по частям – метод для решения интегралов от произведения двух элементарных функций. Одна из них легко дифференцируема, а другая интегрируема. Формула:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

24. -25 -26

Определенный интеграл.

Теорема. Формула Ньютона – Лейбница.

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная для f(x).

Чаще всего встречается вот такая форма записи формулы:

Из теоремы следуют два важных свойства.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойство1. Интеграл от суммы функции равен сумме интегралов функций.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Свойство2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Определение:

Фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке [a; b] функции y=f (x), осью Ox и прямыми x = a и x = b , называется криволинейной трапецией.

27. -28 -29

Разбивают отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей длиной $h=(b-a)/n$ и используют одну из следующих формул:

1) формула прямоугольников

$$\int_a^b y\,dx \simeq h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1});$$

2) формула трапеций

$$\int_a^b y\,dx \simeq h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right);$$

3) формула парабол (Симпсона) (n — четное)

$$\int_a^b y\,dx \simeq \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

(чем больше n, тем точнее результат вычисления определенного интеграла).

30. Дифференциальное уравнение - это уравнение, которое связывает независимую переменную x, искомую функцию y = f (x) и ее производные или дифференциалы разных порядков, то есть уравнение

$$F(x, y, y', y''\ldots, y^{(n)})=0$$

31.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение вида

$$F(x,\ y,\ y')=0 \qquad (1)$$

где $y=y(x)$ – неизвестная, непрерывная и дифференцируемая на некотором промежутке $(a;\ b)$ функция.

32.

$$y(x_0)=y_0, \quad \text{где} \quad (x_0,y_0)\in D. \qquad (0.6)$$

Условие (0.6) называется *начальным условием*, а сама поставленная задача — *задачей Коши*. Любое решение $y=\varphi(x)$ уравнения (0.2) определяет на множестве D некоторую кривую, которую называют *интегральной кривой* уравнения. Поэтому, геометрический смысл задачи Коши состоит в том, чтобы найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку $(x_0,y_0)\in D$. Чтобы решить задачу Коши, нужно подставить начальное условие (0.6) в (0.4) или (0.5) и определить оттуда значение $C=C_0$, при котором точка (x_0,y_0) лежит на искомой интегральной кривой. Тогда решение задачи Коши запишется в виде $y=\varphi(x,C_0)$ или $\Phi(x,y,C_0)=0$.

33.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (2)$$

где коэффициенты a_1, a_2 – постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение (2) называется однородным. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (2) называется неоднородным.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (3)$$

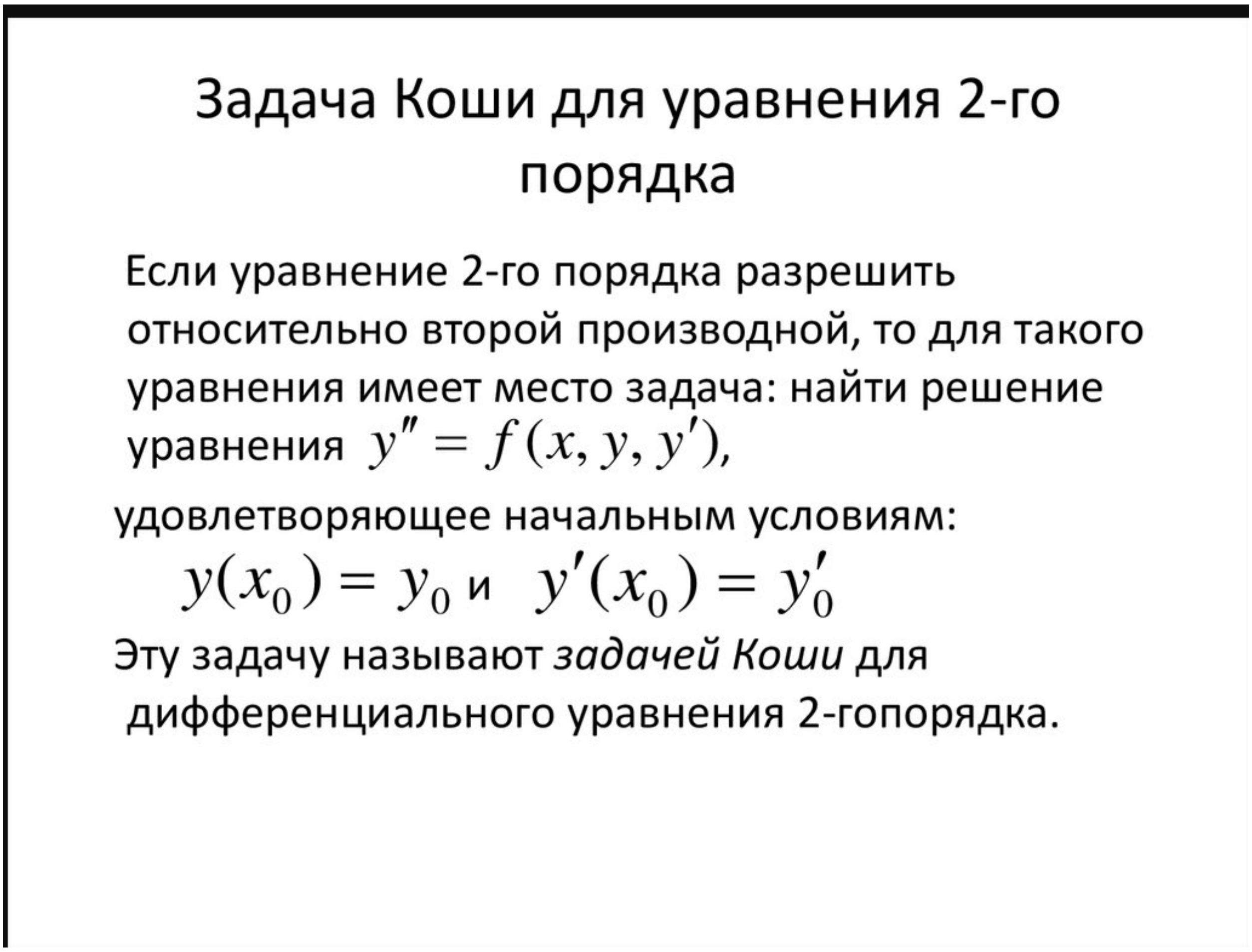
Общим решением уравнения (3) является функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (4)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3),

C_1, C_2 – произвольные постоянные.

34.



35. Последовательность – это функция, заданную на множестве всех или первых n натуральных чисел.

Ряды

Рядом в математике называют выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где $a_1, a_2, a_3 \ldots$ – члены некоторой бесконечной последовательности. Член a_n называют общим членом ряда.

Числовой ряд – это сумма членов числовой последовательности. Сумма ряда имеет вида: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ называются частичными суммами ряда. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ –в этом случае указанный предел — это сумма ряда.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Сумма п первых членов ряда S_n называется n-й частичной суммой ряда.

36.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ является **сходящимся** тогда, когда последовательность обладает конечным пределом $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Если предела нет или последовательность бесконечна, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **расходящимся.**

37. Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными числами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = j$. Тогда, если j <1, то данный ряд сходится, а если j> 1, то – расходится. Если j = 1, то ряд может сходиться или расходиться.

38. Признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными числами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = j$. Тогда если j <1, то данный ряд сходится. Если же j> 1, то расходится.

Интегральный признак сходимости

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными числами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке [1; +∞] функции f(x) такая, что $f(n) = a_n,\ n = 1,2, \ldots$ Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(a)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

39. Знакопеременные ряды – это ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены. Признак Лейбница:

В том случае, когда ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$, где $a_n > 0$, то его называют знакочередующийся. Знаки элементов такого ряда строго чередуются: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$

40.

Функциональным рядом **называется ряд**

$$\boxed{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),} \qquad (1)$$

членами которого являются функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определенные на некотором множестве E числовой оси. Например, члены ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

определены на интервале $-\infty < x < +\infty$, а члены ряда

$$1 + \arcsin x + \arcsin^2 x + \ldots$$

определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Функциональный ряд (1) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Если ряд (1) сходится в каждой точке x множества $D \subseteq E$ и расходится в каждой точке, множеству D не принадлежащей, то говорят, что ряд *сходится на множестве* D, и называют D *областью сходимости* ряда.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся на множестве* D, если на этом множестве сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

В случае сходимости ряда (1) на множестве D его сумма S будет являться функцией, определенной на D,

$$S = S(x), \quad x \in D.$$

Область сходимости некоторых функциональных рядов можно найти с помощью известных достаточных признаков, установленных для рядов с положительными членами, например, признака Даламбера, признака Коши.

41. Декартовая система координат – это система координат на плоскости или в пространстве, обычно с взаимно перпендикулярными осями и одинаковыми масштабами по осям прямоугольные декартовы координаты. Прямоугольная декартова система координат на плоскости имеет две оси, а прямоугольная декартова система координат в пространстве - три оси. Каждая точка на плоскости или в пространстве определяется упорядоченным набором координат - чисел в соответствии единице длины системы координат.

42. Расстояние между двумя точками на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координаты середины отрезка:

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Деление отрезка:

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ $\lambda = \frac{AM}{MB}$

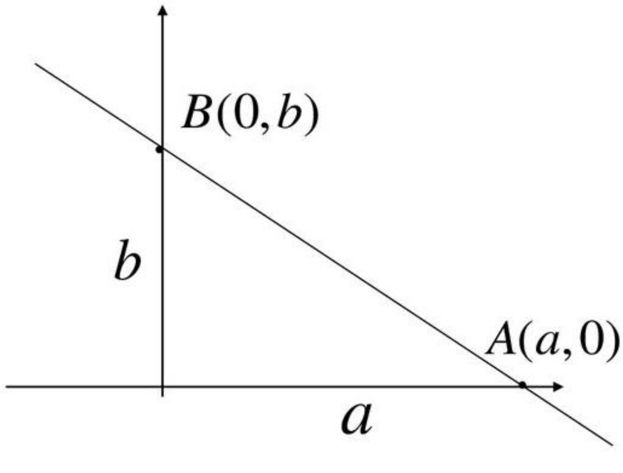
43. Уравнение прямой:

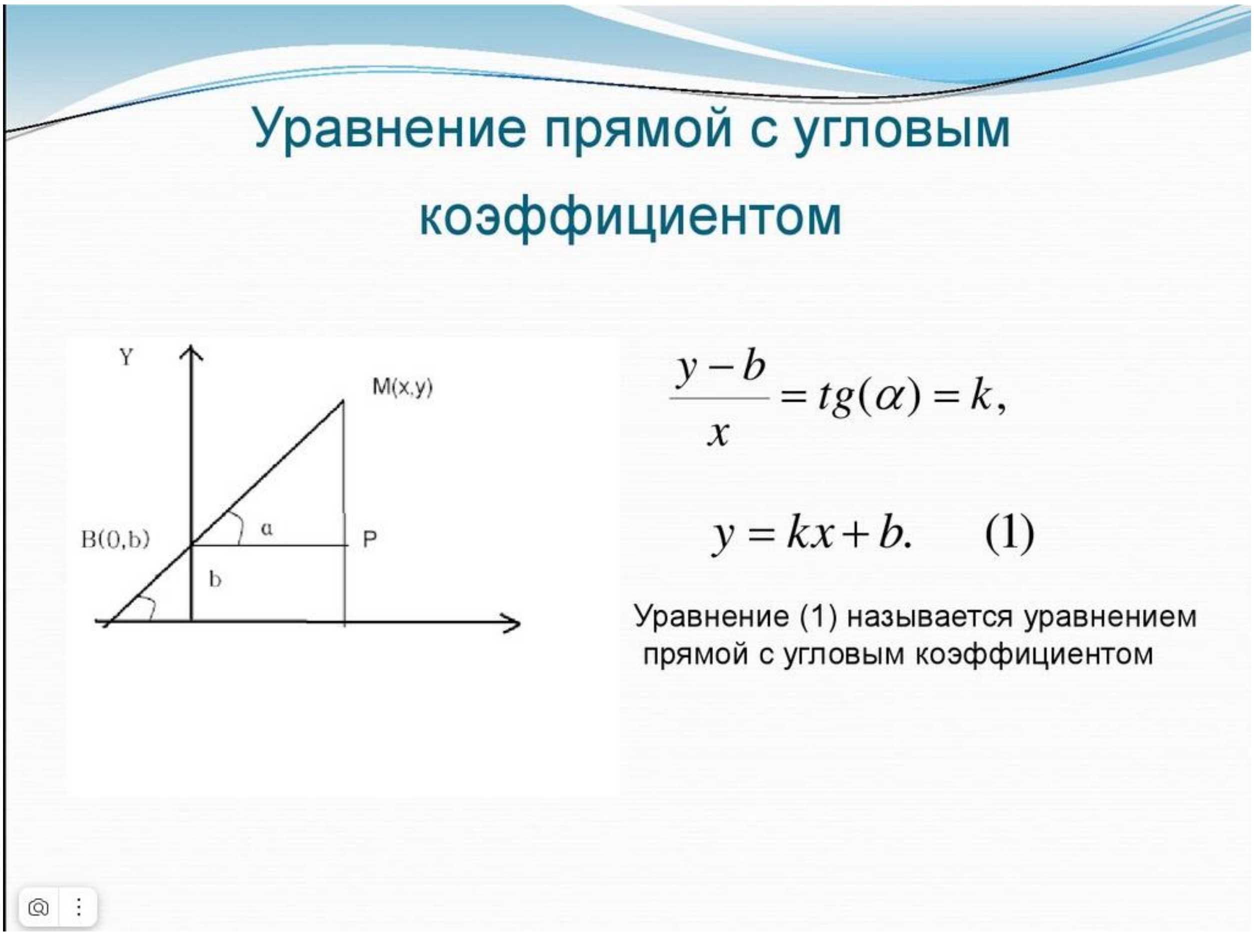
$$Ax + By + C = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение **(1.2)** называют ***общим уравнением прямой на плоскости.***

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$





44. Уравнение плоскости:

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ (1)$$

коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно.

Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Нормальным уравнением плоскости называется её уравнение, записанное в виде

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$,

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали плоскости, p - расстояние от начала координат до плоскости.

Определение 1

Уравнение вида $\cos\ \alpha \cdot x + \cos\ \beta \cdot y - p = 0$ называется нормальным уравнением прямой или нормированным уравнением прямой. Иначе говоря, уравнение прямой в нормальном виде.

45. Кривые второго порядка – это линия на плоскости, описываемая уравнением второй степени относительно переменных x и y

1. Общее уравнение кривых второго порядка:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (1)$$

46.

1. Окружность

- Каноническое уравнение окружности с центром в точке $P_0(x_0; y_0)$ и радиуса R имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Если центр окружности расположен в начале координат, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2$$

47.

Уравнение эллипса

Каноническое уравнение эллипса:

Уравнение описывает эллипс в декартовой системе координат. Если центр эллипса O в начале системы координат, а большая ось лежит на абсциссе, то эллипса описывается уравнением:

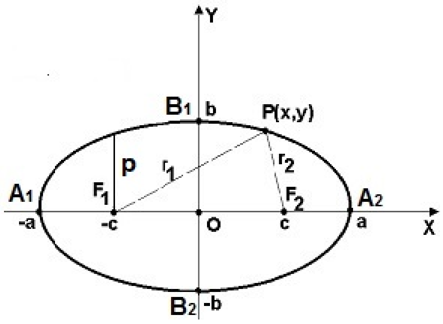
$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Если центр эллипса O смещен в точку с координатами (x_o, y_o), то уравнение:

$$1=\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}$$

48.

Эллипс



Элементы:

- F_1 , F_2 – **фокусы** . F_1 = (c ; 0); F_2 (- c ; 0)
- A_1 A_2 - **большая ось;**
- B_1 B_2 - **малая ось;**
- O - **центр эллипса** (пересечения малой и большой осей);
- A_1, A_2, B_1, B_2 - **вершины эллипса;**
- **Диаметр эллипса** - отрезок, соединяющий две точки эллипса и проходящий через O;
- c – **фокусное расстояние**, половина расстояния между F_1 и F_2;
- a – **большая полуось эллипса;**
- b – **малая полуось;**
- r_1 и r_2 - **фокальные радиусы эллипса;**
- если a > b, то уравнения директрис эллипса x=-a/e, x=a/e;
- если a < b, уравнения директрис y = -b/e, y = b/e;
- **Фокальный параметр p** = b^2/a - отрезок, который соединяет фокус фигуры и точку на кривой, перпендикулярен ее большей оси.

49.

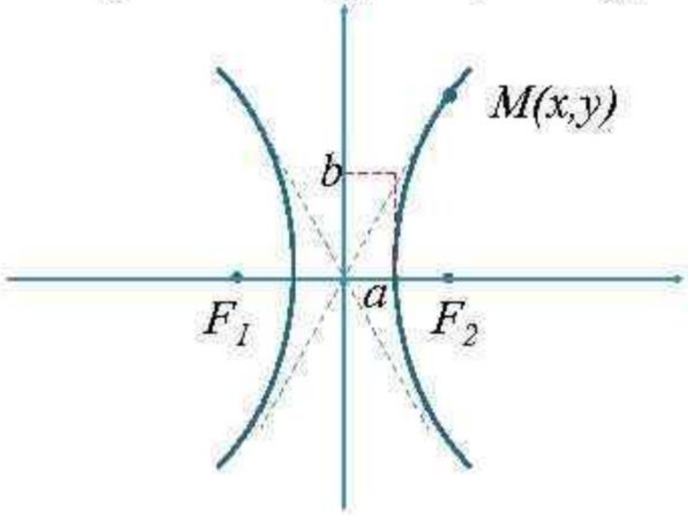
Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

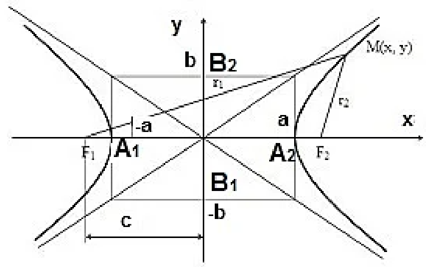
a и b – полуоси гиперболы, $c^2=a^2+b^2$.

Фокусы гиперболы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.



50.

Гипербола



Элементы:

- гипербола состоит из двух симметричных ветвей левой и правой;
- r_1 и r_2 **фокальные радиусы гиперболы**: r_1= ex+a, r_2= ex-a для правой ветви, r_1=-ex-a, r_2=-ex+a для левой, e = c/a эксцентриситет;
- A_1 и A_2 **вершины гиперболы**, расстояние между ними 2a;
- множество точек (геометрическое место) на плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний $| r_1 - r_2 | = 2a$ (**фокальное свойство гиперболы**);
- точки F_1 (-c; 0), F_2(c; 0) – называют фокусами гиперболы, где $c^2=a^2+b^2$;
- **фокусное расстояние гиперболы** $F_1F_2 = 2c$;
- середина отрезка F_1F_2 точка O - **центр гиперболы**;
- расстояние от центра O до одного из фокусов называется **фокальным расстоянием** c;
- отрезок A_1A_2 называется **действительной осью**;
- отрезок от центра до одной из вершин называется **действительной полуосью**, равен a;
- отрезок B_1B_2 называется мнимой осью, ее половина **мнимая полуось**, равна b;
- отрезок между фокусом и гиперболой, перпендикулярный её действительной оси, называется **фокальный параметр** $p=b^2/a$.