Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных неопределенных интегралов. Свойства неопределенных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям. Определенный интеграл. Геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям. Приложения определенного интеграла.

Определение

Первообразная функция

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для данной функции $f(x)$, если для любого x из области определения $f(x)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Первообразная функция

1) Если две функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются друг от друга на постоянную величину, то производные или дифференциалы этих функций равны, т.е., если $F(x) = \Phi(x) + C$, то $F'(x) = \Phi'(x)$ или $F'(x)dx = \Phi'(x)dx$.

2) Если две функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеют одну и ту же производную или один и тот же дифференциал, то они отличаются друг от друга на постоянную величину, т.е., если $F'(x) = \Phi'(x)$, то $F(x) = \Phi(x) + C$.

Первообразной функции $f(x) = \cos 2x$ является функция $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Так как $\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$ *или* $d\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos 2x dx$

Если в формуле $y = F(x) + C$ придавать постоянной C все возможные значения, то получим все возможные первообразные для функции $f(x)$.

Определение

Неопределенный интеграл от функции f (x)

Множество $F(x) + C$ всех первообразных для данной функции $f(x)$, где C принимает все возможные числовые значения, называется ***неопределенным интегралом от функции*** $\boldsymbol{f(x)}$

Обозначение: $\boxed{\int f(x)dx}$

Определение

Интегрирование

Нахождение первообразной по данной функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** и является действием, обратным дифференцированию.

Таблица интегралов элементарных функций

№ п/п	Интеграл $\int f(x)dx$	Первообразная $F(x)+C$
1	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n \neq -1$
2	$\int \frac{1}{x}dx$	$\ln\lvert x\rvert + C, x \neq 0$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
4	$\int e^x dx$	$e^x + C$
5	$\int \cos(x)dx$	$\sin(x)+C$
6	$\int \sin(x)dx$	$-\cos(x)+C$
7	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$tg(x)+C$

Таблица интегралов элементарных функций

№ п/п	Интеграл $\int f(x)dx$	Первообразная $F(x)+C$
8	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctg(x)+C$
9	$\int tg(x)dx$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$
10	$\int ctg(x)dx$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert+C$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
12	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$	$\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}dx$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$
14	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

Пример

Найти $\int x^2 dx$.

Решение:

По формуле 1 таблицы 2 : $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Проверим это.

От правой части возьмем производную $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)'$.

По формуле 2 таблицы 1 : $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$

Так как получили подынтегральную функцию, то можем сделать вывод о правильности нашего решения.

Пример

Найти $\int \frac{1}{x^2} dx$

Решение:

1. Перепишем дробь, представим ее в виде степени: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
2. Получим интеграл $\int x^{-2} dx$, который решается по таблице 2:

$$\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2} + C$$

Пример

Найти $\int dx$.

Решение:

В данном интеграле перед дифференциалом стоит 1, а это не что иное, как x^0 , следовательно, наш интеграл примет вид $\int x^0 dx$.

По таблице видим, что ответ будет:

$$\boxed{\frac{x^1}{1} + C = x + C}$$

Пример

Найти $\int \frac{1}{x} dx$.

Решение:

Данный интеграл особо выделен в таблице, так как решить его, используя формулу 1 таблицы 2, не представляется возможным. Покажем это. По аналогии с предыдущими примерами представим дробь как степенную функцию: $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Применив формулу 1, получим: $\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C$

В знаменателе стоит 0, а на 0, как известно, делить нельзя. Поэтому данный интеграл решается по формуле 2 таблицы 2 и равен:

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$$

Пример «Метод внесения под знак дифференциала»

Найти $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$.

Решение:

В числителе подынтегральной функции стоит выражение *cos xdx* .

Внесем *cos x* под знак дифференциала и получим, что *cos xdx = d(sin x)* .

Интеграл примет вид: $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

Применив формулу 2 таблицы 2, получим ответ:

$$\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Свойства неопределенных интегралов

1. Операция нахождения интеграла является операцией, обратной к нахождению производной, то есть:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Свойства неопределенных интегралов

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$dx\int f(x)dx = f(x)dx$$

Свойства неопределенных интегралов

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс C:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойства неопределенных интегралов

- 4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

a – константа

Свойства неопределенных интегралов

5. Неопределенный интеграл от суммы/разности равен сумме/разности интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Пример

Найти $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)dx$.

Решение:

1. Разложим искомый интеграл на несколько интегралов:

$$\int \left(x^2 - 2x + 1\right)dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + \int dx$$

2. Получили три табличных интеграла, находим их по таблице 2.

Ответ: $\boxed{\int \left(x^2 - 2x + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C}$

Пример

Найти $\int (x-3)^2 dx$.

Решение:

1. Раскрываем скобки по формуле сокращенного умножения:

$$\int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9) dx$$

2. Раскладываем интеграл на слагаемые.

Ответ: $\int x^2 dx - 6\int x dx + 9\int dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 9x + C$

Замена переменной в неопределенном интеграле и интегрирование по частям

Метод замены переменных

Применение: используют тогда, когда искомый интеграл не является табличным, но путем ряда элементарных преобразований он может быть сведен к таковому.

Метод основан на применении следующей формулы:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Сущность применения формулы:

$$\int f(x)dx$$

В данном интеграле переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \phi(t)$ и, следовательно, dx произведением $\phi'(t)dt$.

Пример

Найти $\int x^2 e^{x^3} dx$.

Решение:

1. Произведем замену переменных:

   $x^3 = t,\ dt = 3x^2 dx.$

2. Выражение $3x^2$ входит в подынтегральное выражение, только без тройки.

3. Чтобы все преобразования были тождественны, нужно разделить на 3.

4. Получим табличный интеграл: $\frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C$

5. Со старыми обозначениями: $\frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{e^{x^3}} + C$

Метод интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Формула, по которой осуществляется данный метод.

Эта формула является следствием правила дифференцирования произведения функций

$$duv = udv + vdu$$

Метод интегрирования по частям

Случаи применения данного способа интегрирования:

1) подынтегральная функция содержит произведение многочлена от x на показательную функцию от x или произведение многочлена от x на sin(x) или cos(x), или произведение многочлена от x на ln(x);
2) подынтегральная функция представляет собой одну из обратных тригонометрических функций arcsin(x), arccos(x) и т.д.;
3) подынтегральная функция есть произведение показательной функции на sin(x) или cos(x).

Пример «Интегрирование по частям»

Найти $\int x \cdot \sin x dx$.

Решение:

1. $x = u, \sin x dx = dv$.
2. Найдем du и v из найденных выше равенств: $dx = du, -\cos x = v$.
3. Все составляющие формулы известны, подставляем их:

$$\int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

4. Полученный интеграл табличный:

$$x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

Определение

Интегрируемая функция

Если определенный интеграл существует, то функция $f(x)$ называется ***интегрируемой на отрезке*** $[a;b]$ *,* числа a и b – соответственно нижним и верхним пределом интегрирования.

Определенный интеграл

- Функция *f (x)* задана на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей точками $x_0, x_1, \dots, x_n$ таким образом, чтобы выполнялось: $x_0=a$, $x_0<x_1<\dots<x_{i-}$

Точки x_i , $i=1,\dots,n$ разделяющие отрезок $[a;b]$ на частичные отрезки длиной $\Delta x_i= x_i - x_{i-1}$, будем называть точками разбиения.

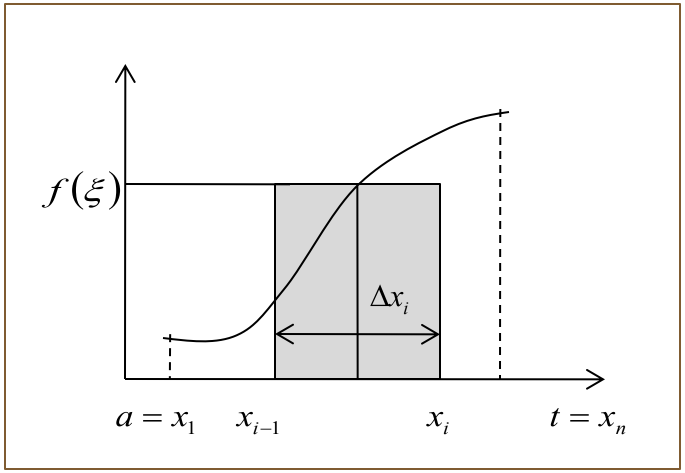

Рис.1. Построение интегральных сумм

- Выберем в каждом из частичных отрезков произвольную точку ξ_i. Составим сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Эту сумму будем называть интегральной суммой для функции *f (x)* на отрезке $[a;b]$.

Введем еще одну величину: обозначим через $\lambda= \lambda_n$ длину максимального частичного отрезка данного разбиения, то есть:

$$\lambda_n = \max_{i=1,\dots,n}(\Delta x_i)$$

Определение

Определенный интеграл

Конечный предел I интегральной суммы σ_n при $\lambda_n \to 0, n \to \infty$, если он существует и не зависит от выбранного разбиения, называется ***определенным интегралом от функции f (x)*** по отрезку $[a;b]$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Обозначение:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Определенный интеграл на отрезке $[a,b]$ от неотрицательной функции $f(x) \geq 0$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

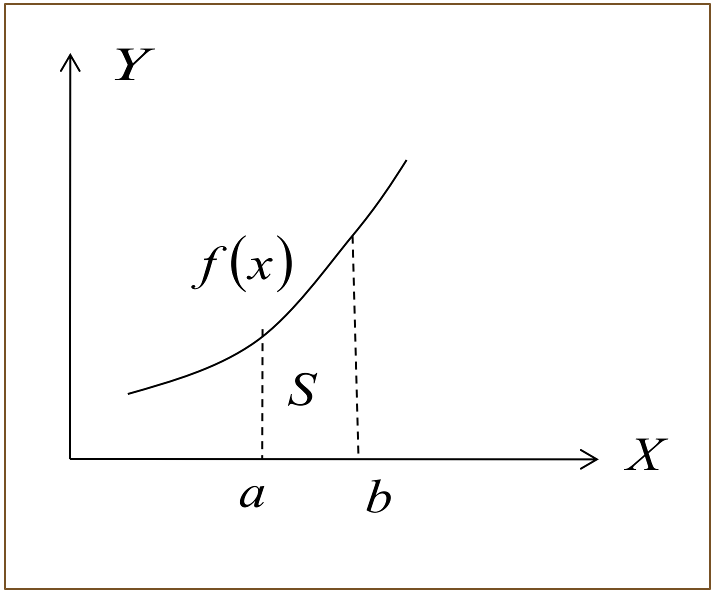

Рис.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими основными свойствами:

1. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad при\ a < c < b$$

2. $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

3. $$\int_a^b [f(x) \pm \phi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \phi(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Формула остается справедливой для произвольной интегрируемой функции $f(x)$, независимо от ее знака, и для произвольной первообразной $F(x)$, не обязательно совпадающей с площадью $S(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница

- Формула Ньютона-Лейбница устанавливает взаимную связь между неопределенным интегрированием, вводимым как операция, обратная дифференцированию, и определенным интегрированием, вводимым как операция вычисления площади криволинейной трапеции. Для разности первообразных принято использовать обозначение:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Пример

Найти $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos dx$

Решение:

1. Сначала решаем этот интеграл так, если бы он был неопределенным:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

2. По формуле Ньютона-Лейбница подставляем значения и получаем ответ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Замена переменной в определенном интеграле и интегрирование по частям

- Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в неопределенном, только в данном случае нужно еще пересчитать пределы интегрирования.
- Интегрирование по частям определенных интегралов осуществляется аналогично интегрированию по частям для неопределенных интегралов с добавлением пределов интегрирования.

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Пример

Найти $\int_1^3 x^2 e^{x^3} dx$

Решение:

1. Пересчитаем пределы интегрирования. Нижний предел интегрирования = 1. В уравнение замены $x^3 = t$ вместо x подставляем 1 и находим t.

   Получаем $1^3 = t,\ t = 1$.

2. Находим верхним предел интегрирования: $3^3 = t,\ t = 27$.

$$\frac{1}{3}\int_1^{27} e^t dt$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(e^{27} - e^1\right)$

Площадь области, ограниченной кривыми

- Если фигура ограничена сверху графиком функции $f(x)$, снизу графиком функции $g(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, то ее площадь равна:

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$

Вычисление длины кривой

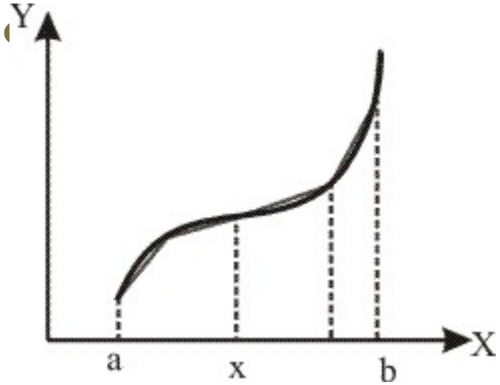

Рис. 3. График кривой.

Кривая задана графиком функции $y=f(x)$, определенной и непрерывной на $x \in [a;b]$

По теореме Пифагора длина отрезка $\cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x))^2 (\Delta x)^2}$

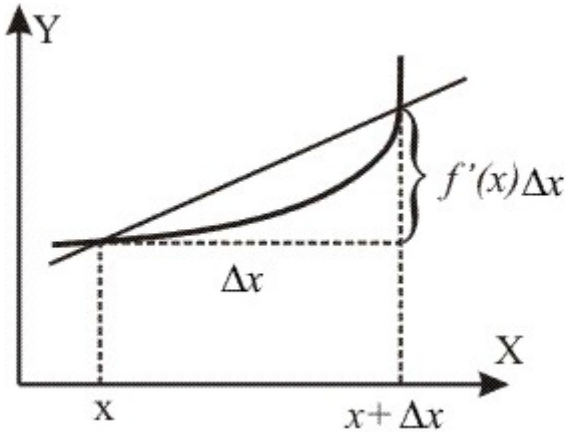

Рис. 4. Кривая на $[x;x+\Delta x]$

Вычисление длины кривой

- Сумма длин всех отрезков кривой приблизительно равна

$$\sum \sqrt{1+\left(f^{'}\right)^{2}}\Delta x.$$

Это интегральная сумма для определенного интеграла

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f^{'}(x)\right)^{2}}dx$$

- Следовательно, длина кривой вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f^{'}(x)\right)^{2}}dx$$

Пример «Метод замены переменных»

Найти длину отрезка параболы y = x2 от точки А(0;0) до точки В(2;4) .

Решение:

Находим производную от y = x2 ⇒ y′ = 2x , а 0 ≤ x ≤ 2.

Подставляем найденные величины в формулу: $L = \int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$

Данный интеграл решается методом замены переменных. Делаем замену t = 2x . Так как интеграл определенный, то пересчитываем пределы интегрирования:

Нижний – x = 0 ⇒ t = 2 · 0 = 0 , верхний – x = 2 ⇒ t = 2 · 2 = 4 . Получаем интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{1+t^2dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_0^4$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(4\sqrt{17}+\ln\left|4+\sqrt{17}\right|\right)$

Вычисление объема тела методом поперечных сечений

- Пусть тело объемом V расположено в пространстве между плоскостями x = a и x = b, и для любого x известна площадь его поперечного сечения S = S(x). Требуется определить объём этого тела. Объем вычисляется по формуле:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

Пример «Метод поперечных сечений»

Найти объем, ограниченный поверхностями

x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z =1.

Решение:

1.Найдем площадь сечения фигуры плоскостью *x = const* .
Это сечение будет равнобедренным прямоугольным треугольником. Его площадь вычисляется по формуле: $S = \frac{x^2}{2}$, где *x* – сторона этого треугольника.

Объем равен: $\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$

2.По формуле Ньютона-Лейбница получаем ответ: $V = \frac{1}{6}$

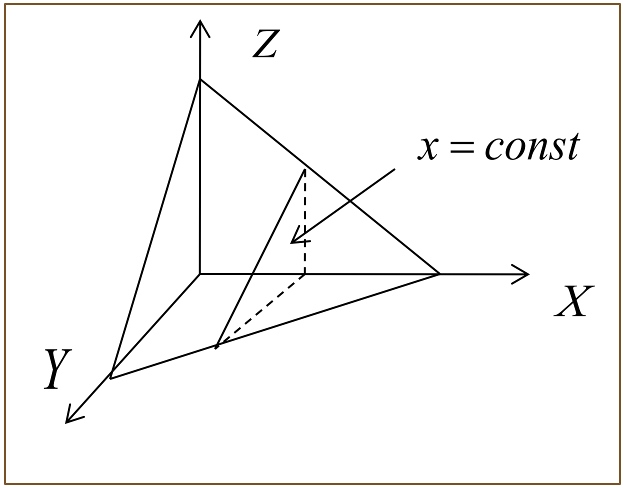

Рис.5. Метод поперечных сечений