Потенциал. Связь напряженности и потенциала

Основные теоретические сведения

Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

Напряженность электрического поля – величина, численно равная силе, действующей на заряд. Потенциал φ – величина, численно равная потенциальной энергии заряда. Таким образом, между этими величинами должна существовать связь, аналогичная связи между потенциальной энергией и силой (т.е. $f=-\frac{dW}{dx}$). Работа сил поля над зарядом q на отрезке пути dl может быть представлена как $dA=qE_l dl$, а убыль потенциальной энергии заряда, которая при этом будет возникать: $-dW=-d(q\varphi)=-qd\varphi$. Откуда из равенства $dA=-dW$ находим:

$$qE_l dl=-qd\varphi \text{ или } E_l=-\frac{d\varphi}{dl},$$

где через l обозначено произвольно выбранное направление.

Тогда,

$$E_x=-\frac{d\varphi}{dx},\ E_y=-\frac{d\varphi}{dy},\ E_z=-\frac{d\varphi}{dz},$$

Откуда

$$\vec{E}=\vec{i}\,E_x+\vec{j}\,E_y+\vec{k}\,E_z=-\left(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx}+\vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy}+\vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты координатных осей, т. е., единичные вектора. Вектор с компонентами $\frac{d\varphi}{dx},\frac{d\varphi}{dy},\frac{d\varphi}{dz}$, где φ – скалярная функция координат x,y,z называется градиентом функции φ и обозначается символом $grad\varphi$ (или $\nabla\varphi$, где ∇ – оператор набла). Таким образом, градиент потенциала:

$$\overrightarrow{grad}\varphi=\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx}+\vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy}+\vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}$$

и из (23) и (24) следует , что

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\varphi$$

Так как градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, то градиентом потенциала $\frac{d\vec{\varphi}}{dr}$ (где r–радиус-вектор) называется вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания потенциала, численно равный быстроте его изменения на единицу длины в этом направлении.

Поскольку $\vec{grad}\,\varphi$ – векторная величина, то его модуль выражается как:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2},$$

подобно тому, как модуль вектора $\vec{E}$:

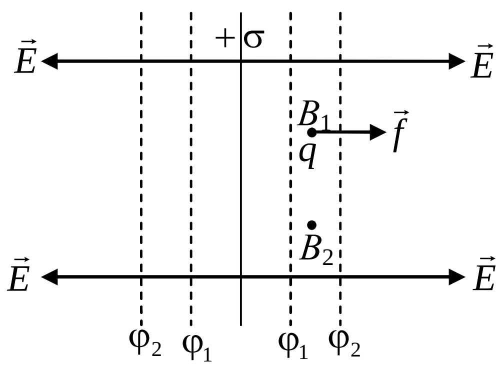
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

Знак "–" указывает на то, что напряженность $\vec{E}$ направлена в сторону убывания потенциала. Формула (25) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке или решить обратную задачу, т.е., по заданным значения $\vec{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

Эквипотенциальные поверхности

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке. Однако, во всяком реальном случае можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

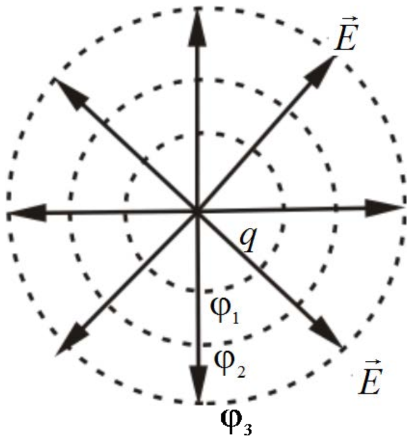


Возьмем равномерно заряженную бесконечную плоскость. Поле, создаваемое такой плоскостью однородно, а линии напряженности нормальны к плоскости. Отсюда следует, что работа перемещения заряда из некоторой точки B_1 в любую другую точку B_2, находящуюся на таком же расстоянии от заряженной поверхности, что и точка B_1 равна нулю. Действительно, при перемещении некоторого заряда q по прямой B_1B_2 сила, действующая на заряд со стороны поля, будет все время перпендикулярна к перемещению, а, следовательно, ее работа равна нулю. Но эта работа может быть представлена, с другой стороны, в виде:

$$A = q(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_2}) = 0, \qquad (28)$$

где φ_{B_1} и φ_{B_2} – соответственно потенциалы точек B_1 и B_2. Отсюда, так как $A = 0$, то $\varphi_{B_1} = \varphi_{B_2}$, т.е., потенциалы точек, равноудаленных от заряженной плоскости, одинаковы. Таким образом, поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) являются плоскостями, параллельными заряженной плоскости. Если плоскость заряжена положительно, то значение потенциала убывает по мере удаления от заряженной плоскости. Очевидно, что поверхности равного потенциала расположены симметрично по обе стороны от заряженной плоскости.

Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда это сферы с радиусом r , центр которых находится в центре точечного заряда, т.е. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.



На рисунке вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям.

Покажем, что вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности. Рассмотрим работу по перемещению заряда по поверхности равного потенциала на малом участке пути ΔS (рис. 3.7). При этом, работа электрической силы $\vec{f} = q\vec{E}$ на данном пути будет:

$$\Delta A = f\Delta S\cos\alpha = q\mathrm{E}\Delta S\cos\alpha, \tag{29}$$

где α – угол между направлением силы f и перемещением ΔS. С другой стороны, эта работа может быть выражена как произведение величины перемещающегося заряда на разность потенциалов в начальном и конечном положениях заряда, т.е. $\Delta A = q(\varphi_A - \varphi_B)$.

Так как перемещение идет по эквипотенциальной поверхности, то разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 0$ и $q\mathrm{E}\Delta S\cos\alpha = 0$, или cosα = 0, значит α = 90^0 т.е. угол между направлением силы $\vec{f}$ и перемещением ΔS равен 90^0. Но $\vec{f} = q\vec{E}$, т.е. направления $\vec{f}$ и $\vec{E}$ совпадают, поэтому угол между $\vec{E}$ и ΔS, α=90^0 т.е. *направление вектора напряженности электростатического поля всегда перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.*

Эквипотенциальных поверхностей вокруг заряженного тела можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине $\vec{\mathrm{E}}$, однако при условии, что разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{\mathrm{E}}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть, вычислена как:

$$A_{12} = q\int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}).$$

С другой стороны работу можно представить в виде:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ тогда } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, т.к. работа сил поля не зависит от пути.

При обходе по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ получим:

$\oint(\vec{\mathrm{E}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}) = 0,$

т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

Из обращения в нуль циркуляции вектора $\vec{\mathrm{E}}$ *следует, что линии* $\vec{\mathrm{E}}$ *электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах* (***истоки***) *и на отрицательных зарядах заканчиваются* (***стоки***) *или уходят в бесконечность.*

Обобщим теорему Гаусса и теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в вакууме. Так как $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$, а $\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, то $-\varepsilon_0 div(grad\varphi) = \rho$. Поскольку $div(grad\varphi) = \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$- оператор Лапласа), то для потенциала φ получим выражение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ или $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, которое называется *уравнением Пуассона*.

Это уравнение позволяет по известному распределению заряда $\rho = \rho(x, y, z)$ и заданным граничным условием для потенциала φ определить значения $\varphi = \varphi(x, y, z)$ во всех точках поля, а затем по формуле $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ найти напряженность $\vec{E}(x, y, z)$ поля, т.е. решить прямую задачу электростатики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Все задачи по данной теме можно условно разделить на два класса:

- по известному распределению заряда $\rho = \rho(x, y, z)$ и заданным граничным условием определить значения $E = E(x, y, z)$ во всех точках поля, а затем по формуле $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ найти напряженность $\varphi = \varphi(x, y, z)$ поля;
- по известному распределению заряда $\rho = \rho(x, y, z)$ и заданным граничным условием для потенциала φ определить значения $\varphi = \varphi(x, y, z)$ во всех точках поля, а затем по формуле $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ найти напряженность $\vec{E}(x, y, z)$ поля

Решая задачи удобно придерживаться следующего плана:

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.
2. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; выполните схематический чертеж.
3. определите по закону Кулона или по теореме Гаусса напряженность поля,
4. используя связь напряженности и потенциала, определите разность потенциалов друг точек поля

или

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.
2. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; выполните схематический чертеж.
3. определите потенциал поля, созданного системой зарядов
4. используя связь напряженности и потенциала, определите напряженность поля.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ.

Решение.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, определяется по формуле $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Используем связь напряженности и потенциала $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\varphi$. Так как поле везде постоянно, и не зависит от расстояния, то $E = -\frac{d\varphi}{dx}$. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна

$$d\varphi = -Edx,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1).$$

Задача 2. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с поверхностной плотностью заряда +σ и -σ.

Решение.

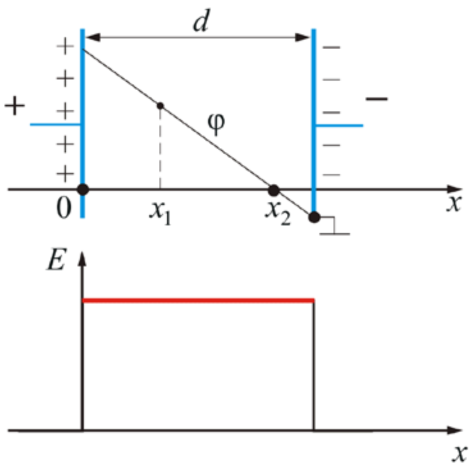
Напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда. Так как напряженность связана с потенциалом $E = -\frac{d\varphi}{dx}$, то

$$d\varphi = -Edx. \quad (1)$$

Теперь, чтобы получить выражение для разности потенциалов между любыми двумя точками, находящимися на расстояниях x_1 и x_2 между плоскостями, проинтегрируем выражение (1):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1) \text{ **или** } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1).$$



При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$, разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

Задача 3. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда τ.

Решение.

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что напряженность поля равна

$$E=\begin{cases}0\ -\ \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов,}\\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\quad \text{или}\quad \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl}\ \text{на поверхности цилиндра,}\\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad \text{или}\quad \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl}\ \text{вне цилиндра,}\end{cases}$$

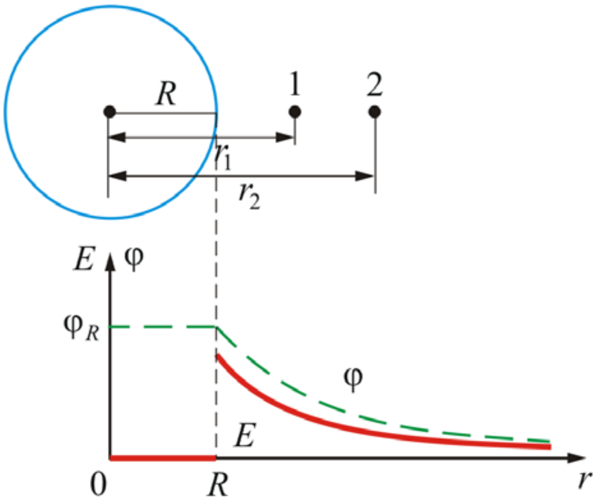
где $\tau=\dfrac{q}{l}$ – линейная плотность заряда.

Тогда, т.к. $d\varphi=-Edr$; $\int_1^2 d\varphi=-\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\dfrac{dr}{r}$, отсюда следует разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R}=\text{const}-\ \text{внутри и на поверхности цилиндра } (r\le R),\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}\quad -\ \text{вне цилиндра}\ (r>R).\end{cases}$$

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r. (Здесь и далее E – изображена сплошной линией, а φ – пунктирной).



Задача 4. Определить разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $+\tau$ и $-\tau$.

Решение.

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что напряженность поля равна

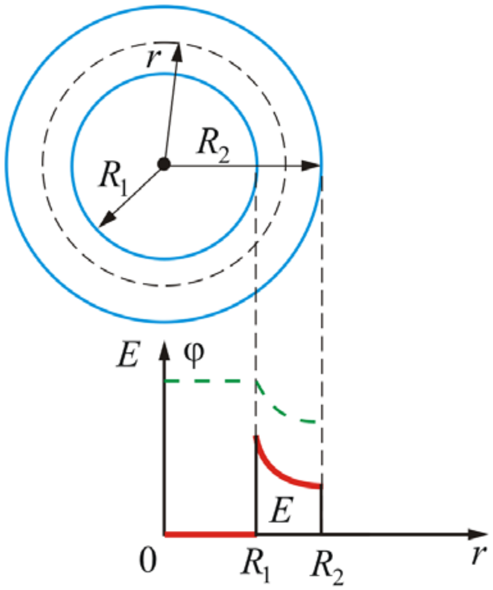
$$E=\begin{cases}0\ -\ \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет,}\\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}-\text{между цилиндрами, когда } R_1<r<R_2.\end{cases}$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае (см. задача 12), разность потенциалов будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \mathrm{const} - \text{внутри меньшего цилиндра} \quad (r < R_1) \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами} \quad (R_1 < r < R_2) \\ 0 \quad - \quad \text{вне} \quad \text{цилиндров.} \end{cases}$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем $\varphi = \mathrm{const}$, $E = 0$, между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю. На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r.



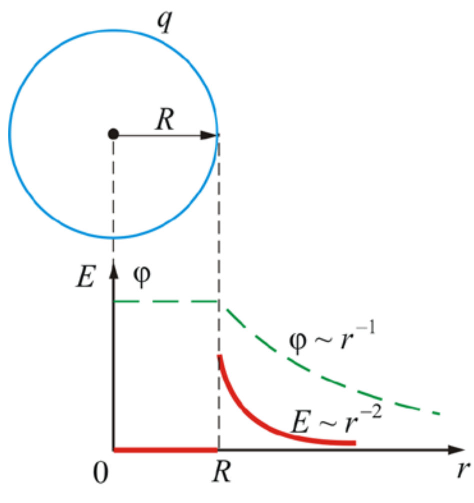
Задача 5. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ.

Решение.

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса, мы нашли, что напряженность поля сферы определяется формулой: $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

А т.к. $d\varphi = -E dr$, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$



Если принять $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$**, так как напряженность поля внутри сферической поверхности равна нулю. Отсюда имеем**

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности сферы } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$

Задача 6. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ радиуса *R*.

Решение.

Имеем шар радиусом *R* с общим зарядом *q*, т.е. заряженный с объемной плотностью $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$. Напряженность поля объемно заряженного шара радиусом *R*, с общим зарядом *q*, вне шара ($r>R$) вычисляется по формуле $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$), определяется формулой

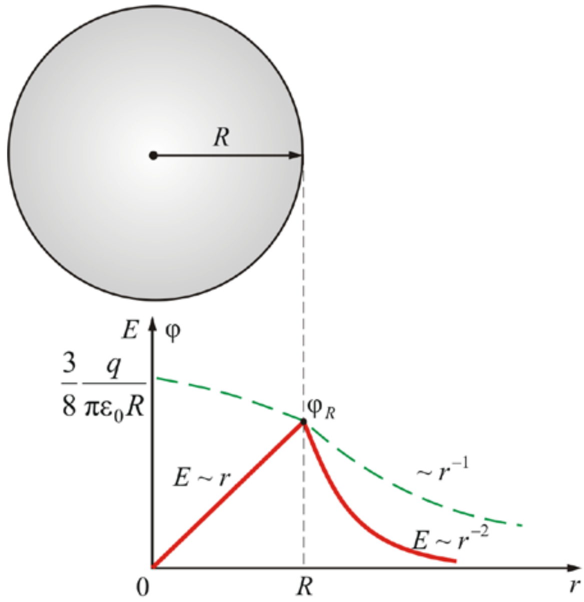
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Если принять, что $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. В частности, при $r = R$, потенциал поверхности сферы, относительно точки с нулевым потенциалом равен $\varphi(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ (нулевой уровень потенциала нами выбран для точки $r_2=\infty$).

В любой точке, находящейся внутри шара на расстоянии r' от его центра ($r'<R$), напряженность поля определяется формулой $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}r'$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1' и r_2' от центра шара равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1^1}^{r_2^1} E_r dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[(r_1^1)^2 - (r_2^1)^2\right].$$

С учетом выбора нулевого уровня потенциала в точке $r_2=\infty$ потенциал любой точки внутри заряженного шара можно найти следующим образом:



$$\varphi = \varphi(R) - \int_R^r E_r dr\,.$$

После интегрирования, получим

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)\,.$$

Если учесть, что $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$, то

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r=0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара } (r \ge R). \end{cases}$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие выводы:

- *с помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*
- *напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *потенциал поля –* ***всегда непрерывная функция*** *координат.*