

Практическая работа № 3

Определение результатов косвенных измерений и оценивание их погрешностей

Цель работы. Ознакомление с методикой выполнения косвенных измерений. Получение навыков определения результатов косвенных измерений, оценивания их погрешностей и представления результатов измерений.

4.1. Основные сведения.

4.1.1. Искомое значение физической величины Y при косвенном измерении находят на основании результатов измерений аргументов X_1, X_2, \dots, X_m , связанных с искомой величиной уравнением

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4.1)$$

Функция f должна быть известна из теоретических предпосылок или установлена экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь.

Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных или совместных измерений. Сведения об аргументах могут быть взяты из справочной литературы или технической документации.

4.1.2. Так как каждый аргумент функции (4.1) может быть измерен с соответствующей погрешностью, то задача расчета погрешности косвенного измерения сводится к суммированию погрешностей ΔX_i результатов прямых измерений. При этом нужно учитывать, что доля отдельных погрешностей в результирующей погрешности может быть различной в зависимости от вида функции и соотношения аргументов X_i .

При оценке погрешностей необходимо иметь в виду, что аргументы X_1, X_2, \dots, X_n могут быть взаимонезависимыми и взаимозависимыми.

4.1.3. При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95 или 0,99. Использование других вероятностей должно быть обосновано.

4.1.4. При оценивании косвенно измеряемой величины и погрешностей результата измерения рассматриваются три возможности:

- линейная зависимость и отсутствие корреляции между погрешностями измерений аргументов;
- нелинейная зависимость и отсутствие корреляции между погрешностями измерения аргументов;
- наличие корреляции между погрешностями измерения аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

4.1.5. При условии, что распределение случайных погрешностей результатов измерения аргументов не противоречит нормальному распределению, критерий отсутствия корреляционной связи между погрешностями результатов измерений аргументов является выполнение неравенства

$$\left| \frac{\tilde{r} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \right| < t_q, \quad (4.2)$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости q и числу степеней свободы $k = n - 2$, а оценка коэффициента корреляции \tilde{r} между погрешностями аргументов X_h и X_j вычисляется по формуле

$$\tilde{r} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{hi} - \tilde{X}_h)(X_{ji} - \tilde{X}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{hi} - \tilde{X}_h)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (X_{ji} - \tilde{X}_j)^2}}, \quad (4.3)$$

где X_{hi} , X_{ji} – результаты i -го и j -го аргументов; $n_j = n_h = n$ – число измерений каждого из аргументов.

4.2. Косвенные измерения при линейной зависимости

4.2.1. При линейной зависимости искомое значение Y связано с m измеряемыми аргументами X_1, X_2, \dots, X_m уравнением

$$Y = b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \dots + b_m \cdot X_m, \quad (4.3)$$

где b_1, b_2, \dots, b_m – постоянные коэффициенты при аргументах X_1, X_2, \dots, X_m соответственно.

4.2.2. При отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов результат косвенного измерения \tilde{Y} вычисляют по формуле

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^m b_i \cdot \tilde{X}_i, \quad (4.4)$$

где \tilde{X}_i – результат измерения аргумента X_i ; m – число аргументов.

4.2.3. Среднее квадратическое отклонение результата косвенного измерения $s(\tilde{Y})$ вычисляют по формуле

$$s(\tilde{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot s^2(\tilde{X}_i)}, \quad (4.5)$$

где $s(\tilde{X}_i)$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения аргумента X_i .

4.2.4. Доверительные границы случайной погрешности результата косвенного измерения при условии, что распределения погрешностей результатов измерений аргументов не противоречат нормальным распределениям, вычисляют (без учета знака) по формуле

$$\varepsilon(p) = t_q \cdot s(\tilde{Y}), \quad (4.6)$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности $P = 1 - q$ и числу степеней свободы $k_{\text{эфф.}}$, вычисляемому по формуле

$$k_{\text{эфф.}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot s^2(\tilde{X}_i) \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^m \frac{b_i^4 \cdot s^4(\tilde{X}_i)}{n_i + 1}}{\sum_{i=1}^m \frac{b_i^4 \cdot s^4(\tilde{X}_i)}{n_i + 1}}, \quad (4.7)$$

где n_i – число измерений при определении аргумента X_i .

4.2.5. Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения вычисляют следующим образом.

4.2.5.1 Если неисключенные систематические погрешности результатов измерений аргументов заданы границами θ_i , то доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения $\theta(P)$ (без учета знака) при вероятности P вычисляют по формуле

$$\theta(P) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot \theta_i^2}, \quad (4.8)$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом m составляющих θ_i .

При доверительной вероятности $P=0,95$ поправочный коэффициент k принимают равным 1,1.

4.2.5.2. Если границы неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов заданы доверительными границами, соответствующими вероятностям P_i , то границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения для вероятности P вычисляют (без учета знака) по формуле

$$\theta(P) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot \frac{\theta_i^2(P)}{k_i^2}}. \quad (4.9)$$

Для вероятности $P=0,95$ $k_i = 1,1$.

4.2.6. Погрешность результата косвенного измерения оценивают на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей.

4.2.6.1. Если $\theta(P)/s(\tilde{Y}) > 8$, то за погрешность результата косвенного измерения принимают неисключенную систематическую составляющую погрешности измерения и ее границы вычисляют в соответствии с п. 4.2.5.

4.2.6.2. Если $\theta(P)/s(\tilde{Y}) < 0,8$, то за погрешность результата косвенного измерения принимают случайную составляющую погрешности измерения и ее границы вычисляют в соответствии с п. 4.2.4.

4.2.6.3. Если $0,8 \leq \theta(P)/s(\tilde{Y}) \leq 8$, то доверительную границу погрешности результата косвенного измерения $\Delta(P)$ вычисляют (без учета знака) по формуле

$$\Delta(P) = K \cdot (\varepsilon(P) + \theta(P)), \quad (4.10)$$

где K – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности и от отношения $\theta(P)/s(\tilde{Y})$.

Значения коэффициента K в зависимости от отношения $\theta(P)/s(\tilde{Y})$ для вероятности $P=0,95$ приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

$\frac{\theta(P)}{s(\tilde{Y})}$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
K	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81

4.3. Косвенные измерения при нелинейной зависимости

4.3.1. Для косвенных измерений при нелинейных зависимостях и некоррелированных погрешностях измерений аргументов используют метод линеаризации.

4.3.2. Метод линеаризации предполагает разложение нелинейной функции в ряд Тейлора:

$$f(X_1, \dots, X_m) = f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i + Q, \quad (4.11)$$

где $f(X_1, \dots, X_m)$ – нелинейная функциональная зависимость измеряемой величины \tilde{Y} от измеряемых аргументов X_i ; $\partial f / \partial X_i$ – первая производная от функции f по аргументу X_i , вычисленная в точке $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$; ΔX_i – отклонение результата измерения аргумента X_i от его среднего арифметического; Q – остаточный член.

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом Q .

4.3.3. Остаточным членом

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \Delta X_i \Delta X_j \quad (4.12)$$

пренебрегают, если

$$Q < 0,8 \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2} \cdot s^2(\tilde{X}_i), \quad (4.13)$$

где $s(\tilde{X}_i)$ – среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата измерения X_i – го аргумента.

Отклонения ΔX_i при этом должны быть взяты из полученных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали выражение для остаточного члена Q .

4.3.4. Результат измерения \tilde{Y} вычисляют по формуле

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m). \quad (4.14)$$

4.3.5. Среднее квадратическое отклонение случайной погрешности результата косвенного измерения $s(\tilde{Y})$ вычисляют по формуле

$$s(\tilde{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2} \cdot s^2(\tilde{X}_i). \quad (4.15)$$

4.3.6. Доверительные границы случайной погрешности результата косвенного измерения при условии, что распределение погрешностей результатов измерения аргументов не противоречат нормальным распределениям, вычисляют в соответствии с п. 4.2.4, подставляя вместо коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_m первые производные $\partial f / \partial X_1, \partial f / \partial X_2, \dots, \partial f / \partial X_m$, соответственно.

4.3.7. Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения вычисляют в соответствии с п. 4.2.5, подставляя вместо коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_m первые производные $\partial f / \partial X_1, \partial f / \partial X_2, \dots, \partial f / \partial X_m$, соответственно.

4.3.8. Погрешность результата косвенного измерения оценивают в соответствии с п. 4.2.6.

4.4. Косвенные измерения при наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов

4.4.1. При наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов для определения результатов косвенного измерения и его погрешности используют **метод приведения**, который предполагает наличие ряда отдельных значений измеряемых аргументов, полученных в результате многократных измерений, Этот метод можно также применять при неизвестных распределениях погрешностей аргументов.

4.4.2. Метод основан на приведении ряда отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду прямых измерений. Получаемые сочетания отдельных результатов измерений аргументов подставляют в формулу (4.1) и вычисляют отдельные значения измеряемой величины $Y : Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_L$.

4.4.3. Результат косвенного измерения \tilde{Y} вычисляют по формуле

$$\tilde{Y} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_j, \quad (4.16)$$

4.4.4. Среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$s(\tilde{Y}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^L (Y_j - \tilde{Y})^2}{L(L-1)}}. \quad (4.17)$$

4.4.5. Доверительные границы случайной погрешности для результата измерения вычисляют по формуле

$$\Delta = T \cdot s(\tilde{Y}), \quad (4.18)$$

где T – коэффициент, зависящий от вида распределения отдельных значений измеряемой величины Y и выбранной доверительной вероятности.

При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы случайных погрешностей вычисляют в соответствии с ГОСТ 8.207 – 76. (см. практическую работу № 2).

4.4.6. Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенных измерений при линейной зависимости вычисляют в соответствии с п. 4.2.5, при нелинейной зависимости – в соответствии с п. 4.3.7.

4.4.7. Доверительные границы погрешности результата косвенного измерения вычисляют в соответствии с п. 4.2.6.

4.5. Формы представления результата измерения

4.5.1. Если границы погрешности результата измерения симметричны, то результат измерения и его погрешность представляют в виде

$$\tilde{Y} \pm \Delta(P). \quad (4.19)$$

4.5.2. Если предполагают исследование и сопоставление результатов измерений или анализ погрешностей, то результат измерения и его погрешность представляют в виде

$$\tilde{Y}, s(\tilde{Y}), n, \theta(P), \quad (4.20)$$

где n – число измерений того аргумента, при измерении которого выполнено минимальное число измерений.

4.6. Методика выполнения практической работы (задание 1)

4.6.1. Косвенно измеряемой величиной в данном задании практической работы является удельное сопротивление ρ некоторых металлов и сплавов.

Значение удельного сопротивления находится по формуле

$$\rho = R \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot L}, \quad (4.21)$$

где R – сопротивление проводника; d и L – диаметр проводника и его длина.

4.6.2. Для нахождения удельного сопротивления получите у преподавателя исходные данные по проводнику круглого сечения с известной длиной L , измеренной с известной погрешностью.

4.6.3. Ознакомьтесь с документацией на омметр (исходя из своего варианта), которым измерялось сопротивление проводника. Его тип и класс точности занесите в отчет.

4.6.4. Ознакомьтесь с документацией на микрометр, применяемый для измерения диаметра проводника. Изучите методику измерения линейных размеров с помощью микрометра. Его тип и класс точности занесите в отчет.

4.6.5. Занесите в отчет однократные измерения сопротивления проводника и его диаметра (из исходных данных, согласно своему варианту).

4.6.6. Для получения результата косвенного измерения удельного сопротивления и его погрешности выполните необходимые расчеты, руководствуясь блок-диаграммой, представленной на рис. 4.1.

4.6.7. Необходимые расчеты и формулы занесите в отчет. Для записи результатов вычислений используйте таблицу 4.2.

4.7. Методика выполнения практической работы (задание 2)

4.7.1. Косвенно измеряемой величиной в этом задании практической работы является плотность μ твердого тела.

Значение плотности твердого тела находится по формуле

$$\mu = \frac{m}{V}, \quad (4.22)$$

где m – масса тела, а V его объем.

Таблица 4.2.

№	Характеристики измеряемых величин	Изменяемые величины			
		R	d	L	ρ
1	Измеренные значения аргументов	▼	▼	▼	
2	Границы неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов	▼	▼	▼	
3	Вычисленное значение результата косвенного измерения удельного сопротивления				▼
4	Линеаризация уравнения				$\frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial d}, \frac{\partial f}{\partial L}$
5	Проверка остаточного члена				Q
6	Вычисление границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения				▼
7	Вычисление погрешности результата косвенного измерения				▼
8	Представление результата косвенного измерения				▼

4.7.2. Для нахождения плотности твердого тела используются результаты многократных измерений аргументов функции (4.22) (по вариантам).

4.7.3. Руководствуясь блок-диаграммой на рис. 4.1 выполните необходимые расчеты для получения значения плотности твердого тела и оценки погрешностей косвенного измерения.

4.7.4. Необходимые расчеты и формулы занесите в отчет. Для записи результатов вычислений используйте таблицу 4.3.

Таблица 4.3

Масса тела $m_i \cdot 10^{-3}, \text{ кг}$	$(m_i - \tilde{m}) \cdot 10^{-3}, \text{ кг}$	<i>Здесь, при необходимости, промежуточные вычисления</i>	<i>Здесь, при необходимости, промежуточные вычисления</i>	...	Объем тела

4.8 Требования к отчету.

Исходные данные предоставляются в отдельном файле (файлах).

Отчет должен содержать:

- сведения о цели и порядке выполнения работы;
- сведения об использованных методах измерений;
- сведения о характеристиках использованных средств измерений;
- экспериментальные данные (из таблиц с исходными данными по своему варианту);
- полностью заполненные таблицы по рекомендованной форме, а также расчеты, выполнявшиеся при заполнении таблиц;
- ответы на контрольные вопросы (рукописно - отсканировано или сфотографировано).

4.8. Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются косвенными?
2. Как оцениваются погрешности косвенных измерений при линейной зависимости между косвенно-измеряемой величиной и величинами, измеряемыми прямым методом?

3. Как оцениваются погрешности косвенных измерений при нелинейной зависимости между косвенно-измеряемой величиной и величинами, измеряемыми прямым методом?
4. Как оцениваются погрешности косвенных измерений при наличии корреляции между погрешностями измерений?