I. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ

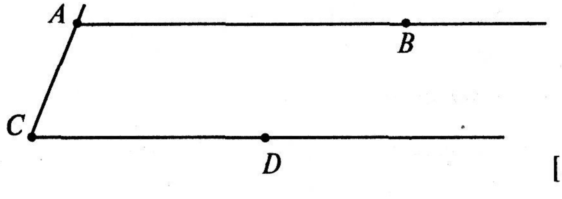
§ 1. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ

1. Напомним, что фигурой называется любое множество точек. Простейшими фигурами являются точки, прямые, лучи, отрезки, полуплоскости.

Лучи $[AB)$ и $[CD)$ (отрезки) называются *параллельными*, если прямые AB и CD параллельны.

Если $[AB) \parallel [CD)$, то они могут быть одинаково направлены (сонаправлены), либо противоположно направлены.

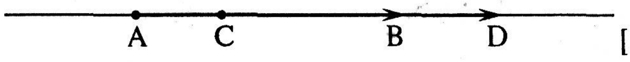
Определение. Параллельные лучи AB и CD называются ***одинаково направленными*** (***сонаправленными***), если они лежат в одной полуплоскости с границей AC (рис. 1.).



$[AB) \uparrow\uparrow [CD)$

Рис. 1

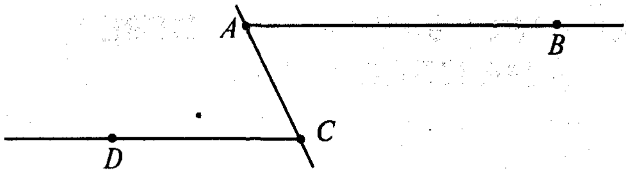
Определение. Лучи, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными***, если один из них содержит другой (рис. 2).



$[AB) \uparrow\uparrow [CD)$

Рис. 2

Определение. Если два луча лежат на параллельных прямых или на одной прямой, но не одинаково направлены, то они называются ***противоположно-направленными***.



$[AB) \downarrow\uparrow [CD)$

Рис. 3

Множество *всех* сонаправленных лучей на прямой, на плоскости или в пространстве, называется *направлением* соответственно на прямой, на плоскости или в пространстве. Если на прямой одно из возможных направлений выбрано в качестве положительного, то прямая называется *направленной*.

2. Отрезок называется *направленным*, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы. Пусть задан отрезок с концами в точках A и B. Если A – первая точка (начало), а B – вторая точка (конец), то *направленный* отрезок обозначается так:. $\overline{AB}$.

$$A \longrightarrow B$$

На рисунке $\overline{AB}$ отмечается стрелкой, обращенной к его концу. В целях общности изложения удобнее рассматривать каждую точку как частный случай направленного отрезка, начало и конец которого совпадают.

$\overline{AA}$ – *нулевой направленный отрезок.*

Определение. ***Длиной ненулевого отрезка*** $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB (обозначается отрезок так: $[AB]$).

Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом $|\overline{AB}|$ или просто AB.

Длина *нулевого отрезка считается равной нулю.*

Ненулевые отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково (противоположно) направленными*, если одинаково (противоположно) направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$, т.е.

$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, если $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$;

$\overline{AB} \downarrow\uparrow \overline{CD}$, если $[AB) \downarrow\uparrow [CD)$.

Нулевой направленный отрезок считается одинаково направленным с любым направленным отрезком.

Нулевой отрезок $\overline{AA}$ не определяет никакого направления. Ненулевой отрезок $\overline{AB}$ определяет направление, а именно то направление, которому принадлежит луч $[AB)$.

3. Определение. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются ***эквивалентными*** (или ***эквиполлентными***), если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Обозначение: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

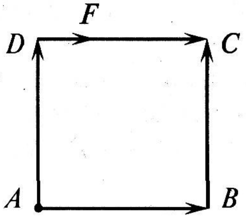


Рис. 4

$\overline{AB} \sim \overline{DC}$; $\overline{AD} \sim \overline{BC}$;

$\overline{AB}$ и $\overline{DF}$ — не эквивалентны;
$\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ — не эквивалентны.

Любые два нулевые направленные отрезка эквивалентны.

Лемма 1. (Признак эквивалентных отрезков). Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

□ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. Докажем, что середины отрезков AD и BC совпадают.

а) Пусть отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на параллельных (различных) прямых (рис. 5).

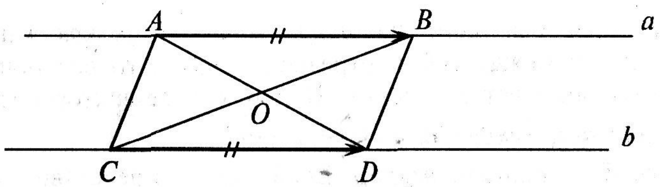


Рис. 5

Тогда четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм (по признаку: две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны). Следовательно, диагонали AD и CB параллелограмма точкой O делятся пополам.

б) Пусть AB и CD лежат на одной прямой (рис. 6).

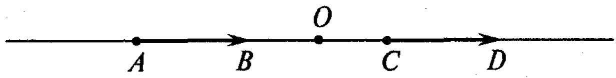


Рис. 6

$AB = CD$ и пусть O – середина отрезка BC. Докажем, что O – середина и отрезка AD. Имеем $AB + BO = OC + CD \Leftrightarrow AO = OD$, т.е. середины отрезков AD и BC совпадают.

Достаточность. Пусть середины отрезков AD и BC совпадают. Докажем, что $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. В случае а) по признаку параллелограмма (если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм) следует, что $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. В случае б) имеем: $AO = OD$ и $BO = OC$. Значит, $AO - BO = DO - OC \Leftrightarrow AB = CD$, т.е. $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. ■

§ 2. ВЕКТОРЫ

1. Пусть W – множество всех направленных отрезков пространства.

Определение. ***Вектор*** – это множество всех направленных отрезков, *любые два* из которых эквивалентны.

Определение. ***Вектор*** – это множество всех сонаправленных отрезков, равных по длине.

Определение. Каждый класс эквивалентных между собой направленных отрезков в множестве W называется ***вектором*** (или *свободным вектором*).

Если хотя бы один из *направленных отрезков* множества эквивалентных между собой отрезков *нулевой*, то все направленные отрезки множества нулевые. В этом случае вектор называется *нулевым* или *нуль-вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Пусть $\vec{a}$ – данный вектор. Если $\overline{AB}$ – представитель этого класса (т.е. $\overline{AB} \in \vec{a}$), то $\overline{AB}$ определяет весь класс эквивалентности, т.е. вектор $\vec{a}$. В этом случае вектор $\vec{a}$ обозначается $\overrightarrow{AB}$ и на рисунке изображается в виде направленного отрезка $\overline{AB}$: $A \xrightarrow{\vec{a}} B$. Заметим, что запись $\vec{a} = \vec{b}$ означает, что *множество* $\vec{a}$ *совпадает с множеством* $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — один и тот же вектор, но по-разному обозначенный.

В частности, запись $\vec{AB} = \vec{CD}$ означает, что $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ — один и тот же вектор, т.е. отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквивалентны. Верно и обратное, т.е. $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$.

Имеет место следующая *лемма о равенстве векторов.*

Лемма 2. Если $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{AC} = \vec{BD}$.

□ По условию леммы $\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{CD}$. По признаку эквивалентных направленных отрезков (по лемме 1) середины отрезков AD и CB совпадают (рис. 7).

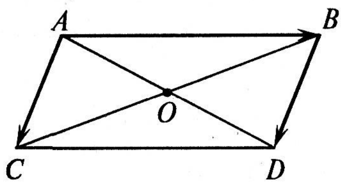


Рис. 7

Рассмотрим отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Так как середины отрезков AD и CB совпадают (точка O), то по лемме 1 $\overline{AC} \sim \overline{BD} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$. ■

2. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор, а O — некоторая точка пространства. Докажем, что существует одна и только одна точка M такая, что $\vec{OM} = \vec{a}$.

Действительно, допустим, что $\overline{AB} \in \vec{a}$. Рассмотрим середину C отрезка OB (этот отрезок может быть и нулевым) и возьмем точку M, симметричную точке A относительно точки C (рис. 8).

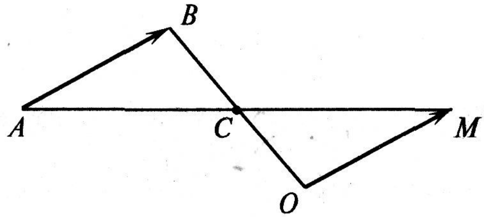


Рис. 8

По признаку эквивалентности двух направленных отрезков $\overline{OM} \sim \overline{AB}$, поэтому $\vec{OM} = \vec{a}$.

2 Зак. 13039

□ Докажем теперь, что M — единственная точка такая, что $\vec{OM} = \vec{a}$. Допустим противное: $\vec{OM'} = \vec{a}$. Тогда $\vec{OM} = \vec{OM'}$. По лемме 2 получаем, что $\vec{OO} = \vec{MM'} \Rightarrow |\vec{OO}| = |\vec{MM'}| \Rightarrow 0 = |\vec{MM'}| \Rightarrow$ $\Rightarrow M = M'$.

Итак, если даны произвольный вектор $\vec{a}$ и некоторая точка O, то существует одна и только одна точка M такая, что $\vec{OM} = \vec{a}$. ■

Построение точки M условимся называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки O.*

3. Определение. Говорят, что вектор $\vec{a}$ ***параллелен прямой l***, если какой-нибудь (любой) его представитель *параллелен этой прямой или лежит на ней.*

Нулевой вектор считается параллельным любой прямой. Очевидно, если вектор $\vec{a} \parallel l$, то он параллелен любой прямой, параллельной прямой l.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если существует прямая, которой они *параллельны*, т.е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если $\vec{a} \parallel l$ и $\vec{b} \parallel l$.

Отметим, что если из двух векторов по крайней мере один нулевой, то эти векторы коллинеарны.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы, а $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — какие-то представители этих векторов: $\overline{AB} \in \vec{a}$; $\overline{CD} \in \vec{b}$. По определению коллинеарности векторов отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ параллельны или лежат на одной прямой, т.е.

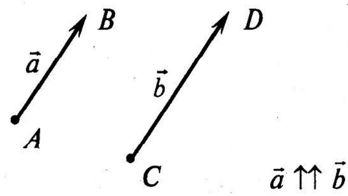
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \text{ где } \overline{AB} \in \vec{a}, \overline{CD} \in \vec{b}.$$

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***одинаково направленными***, если одинаково направлены отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, и ***противоположно направленными***, если противоположно направлены эти отрезки.

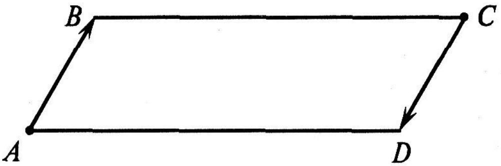
Ясно, что свойство двух векторов быть одинаково (противоположно) направленными не зависит от выбора представителей этих векторов.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$.

$\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$, если $\vec{AB} \downarrow\uparrow \vec{CD}$.



4. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ и от какой-нибудь точки A отложим $\vec{AB} = \vec{a}$. Вектор $\vec{BA}$ называется *вектором, противоположным вектору* $\vec{a}$, и обозначается через $-\vec{a}$.



$\vec{CD} \downarrow\uparrow \vec{AB}$, так как

$\vec{CD} = \vec{BA}$.

Вектором, противоположным вектору $\vec{BA}$, является вектор $\vec{AB}$, поэтому $-(-\vec{a}\,) = \vec{a}$. Вектором, противоположным нуль-вектору, является нуль-вектор.

Определение. ***Длиной*** вектора называется длина любого представителя этого вектора.

Длина нулевого вектора равна нулю.

Длина векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AB}$ обозначаются так: $|\vec{a}\,|$, $|\vec{b}\,|$, $|\vec{AB}|$,

$|\vec{AB}| = AB$.

Определение. Вектор называется ***единичным***, если его длина равна единице.

5. В математике и ее приложениях (в механике, физике и т.д.), кроме свободных векторов, используют и так называемые *скользящие* и *связанные* (или приложенные) векторы.

Скользящий вектор — это множество одинаково направленных отрезков одной прямой, имеющих равные длины. Таким вектором можно представить силу, приложенную к абсолютно твердому телу.

Связанный вектор — это направленный отрезок. Если $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ — связанные векторы, то $\vec{AB} = \vec{CD}$ тогда и только тогда, когда совпадают точки A и C, а также точки B и D. Связанным вектором представляют, например, вектор скорости частиц жидкости, движущейся с завихрениями; здесь каждая частица имеет свой вектор скорости, который не является вектором скорости для соседней частицы.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От какой-нибудь точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Вектор $\vec{AC} = \vec{c}$ называется ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 9).

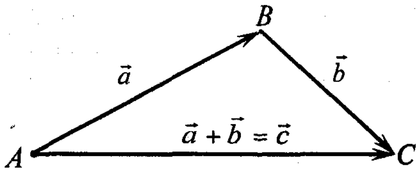


Рис. 9

□ Покажем, что вектор $\vec{c}$ определяется с помощью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно, независимо от выбора точки A, от которой откладывается вектор $\vec{a}$. Пусть вместо точки A взята другая точка A_1 и выполнено аналогичное построение: $\vec{A_1B_1} = \vec{a}$, $\vec{B_1C_1} = \vec{b}$. Докажем, что $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$. Так как $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ и $\vec{BC} = \vec{B_1C_1}$, то по лемме о равенстве векторов (лемма 2) имеем $\vec{AA_1} = \vec{BB_1}$ и $\vec{BB_1} = \vec{CC_1}$, т.е. $\vec{AA_1} = \vec{CC_1} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{A_1C_1}$ (по лемме 2).■

Итак, определение корректно.

Заметим, что для нахождения суммы двух *неколлинеарных* векторов приходится строить треугольник (ΔABC). Поэтому указанное здесь правило сложения векторов и в общем случае называется ***правилом треугольника***. Это правило можно сформулировать так:

для любых точек A, B, C справедливо равенство

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \qquad (1)$$

а) Применим это правило к точкам A, B, A, получим:

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} \Leftrightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \qquad (2)$$

б) Аналогично, для трех точек A, B, B:

$$\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \qquad (3)$$

в) Правило треугольника применим к точкам A, A, B:

$$\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}\,. \qquad (4)$$

Если слагаемые векторы *не коллинеарны*, то для построения их суммы можно пользоваться другим способом – ***правилом параллелограмма*** (рис. 10).

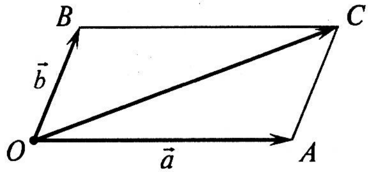


Рис. 10

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}\,.$$

Теорема 1. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство или свойство коммутативности);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство или свойство ассоциативности).

□ 1) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. От какой-нибудь точки A отложим векторы $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{AD} = \vec{b}$, а затем от точки B отложим вектор $\vec{BC} = \vec{b}$ (рис. 11).

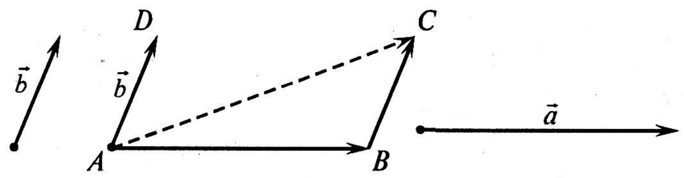


Рис. 11

По построению $\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ (по лемме 2), т.е. $\vec{DC} = \vec{a}$. По правилу треугольника $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ и $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$, т.е. $\left(\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC},\ \vec{b} + \vec{a} = \vec{AC}\right) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы. Возьмем какую-нибудь точку A и отложим последовательно векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$ (рис. 12).

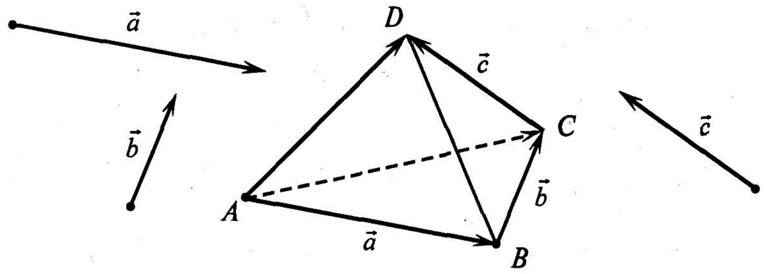


Рис. 12

По правилу треугольника находим

$$\left.\begin{matrix} \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC},\ \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}, \\ \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD},\ \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (\vec a + \vec b) + \vec c = \vec{AD}, \\ \vec a + (\vec b + \vec c) = \vec{AD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$.■

Правило многоугольника: Пусть даны n ($n \geq 3$) векторов $\vec a_1$, $\vec a_2$, ..., $\vec a_n$. От произвольной точки O плоскости отложим последовательно векторы $\vec{OA_1} = \vec a_1$; $\vec{A_1A_2} = \vec a_2$, ..., $\vec{A_{n-1}A_n} = \vec a_n$. Вектор $\vec{OA_n} = \vec p$ называется суммой векторов $\vec a_1$, $\vec a_2$, ..., $\vec a_n$ и обозначается $\vec p = \vec a_1 + \vec a_2 + ... + \vec a_n$.

Построение при $n = 6$ (рис. 13).

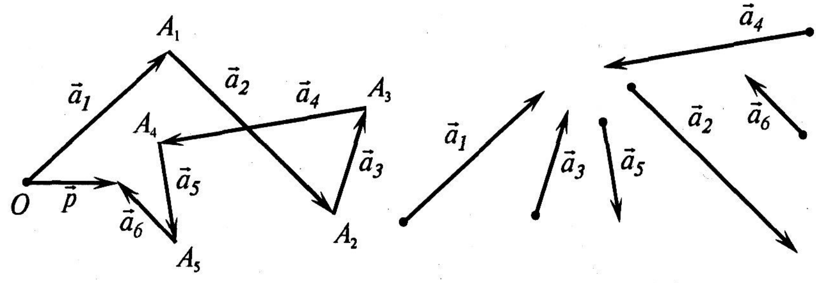


Рис. 13

Определение. ***Разностью векторов*** $\vec a$ и $\vec b$ называется такой вектор $\vec x$, что

$$\vec b + \vec x = \vec a. \tag{5}$$

Докажем, что разность любых векторов $\vec a$ и $\vec b$ *существует* и *определяется однозначно.*

□ 1) Составим (построим) вектор $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Докажем, что вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$ удовлетворяет уравнению (5):

$$\vec{b} + \left(\vec{a} + (-\vec{b})\right) = \vec{b} + \left((-\vec{b}) + \vec{a}\right) = \left(\vec{b} + (-\vec{b})\right) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

2) Теперь докажем, что вектор $\vec{x}$ определяется однозначно. Допустим, что существует $\vec{y}$ такой, что

$$\vec{b} + \vec{y} = \vec{a}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{y}. \tag{7}$$

Прибавим к обеим частям равенства (7) вектор $(-\vec{b})$, получим

$$(-\vec{b}) + (\vec{b} + \vec{x}) = (-\vec{b}) + (\vec{b} + \vec{y}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((-\vec{b}) + \vec{b}\right) + \vec{x} = \left((-\vec{b}) + \vec{b}\right) + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{0} + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}. \blacksquare$$

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

Тогда
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \tag{8}$$

Из формулы (1) в силу определения (5) имеем

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}. \tag{9}$$

Правило вычитания векторов: "Для любых трех точек A, B, C плоскости выполняется равенство (9)".

Из формул (1) и (9) следует *правило: "Слагаемое в векторном равенстве можно переносить из одной части равенства в другую, меняя его знак на противоположный"*.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Определение. ***Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ*** называется вектор $\vec{p}$, который удовлетворяет условиям:

а) $|\vec{p}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, где $|\lambda|$ — модуль числа λ.

б) $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda \geq 0$,

$\vec{p} \downarrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{p} = \lambda\vec{a}$.

Из условия а) определения следует, что $\vec{p} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, т.е.

$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Лемма 3. Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k $\triangle OAB$ переходит в $\triangle OA'B'$, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

□ По определению гомотетии $OA' = |k|OA$; $OB' = |k|OB$, поэтому $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$ (рис. 14).

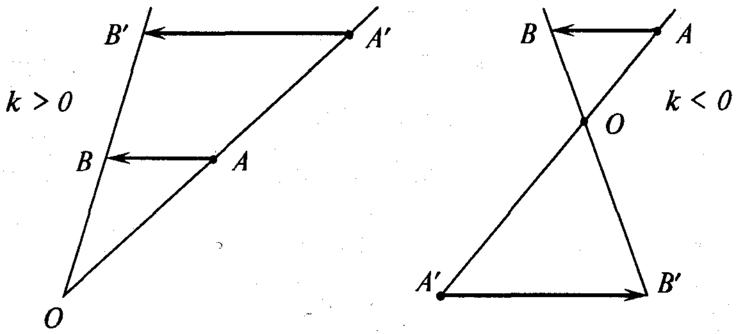


Рис. 14

Отсюда следует, что $A'B' = |k|AB$ и $A'B' \parallel AB$.

Если $k > 0$, то точки B и B' лежат в одной полуплоскости с границей OA, поэтому $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$. Следовательно, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Если $k < 0$, то точки B и B' лежат в разных полуплоскостях с границей (OA), поэтому $\overrightarrow{A'B'} \downarrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, т.е. и в этом случае $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.■

Для произвольных чисел α, β и векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы следующие свойства:

1°) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

2°) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$, (ассоциативный закон);

3°) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (I распределительный закон относительно сложения векторов);

4°) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (II распределительный закон относительно сложения чисел или II *дистрибутивный* закон).

1) □ Свойство 1°) непосредственно следует из данного выше определения произведения вектора на число.■

Если хотя бы одно из чисел α, β равно нулю или хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость остальных свойств очевидна. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$.

2) □ Докажем свойство 2°). Пусть $\vec{p} = \alpha\,(\beta\vec{a})$; $\vec{q} = (\alpha\beta)\,\vec{a}$. По определению произведения вектора на число:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{p}| = |\alpha|\cdot|\beta\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|, \\ |\vec{q}| = |\alpha\beta|\cdot|\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}| \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{p}| = |\vec{q}|.$$

Докажем, что $\vec{p} \parallel \vec{q}$. Возможны два случая: $\alpha\beta > 0$ и $\alpha\beta < 0$.

$$\text{а) } \left.\begin{array}{l} \alpha\beta > 0,\ \vec{q} = (\alpha\beta)\,\vec{a} \Rightarrow \vec{q} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ \qquad\qquad \vec{p} = \alpha\,(\beta\vec{a}) \Rightarrow \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a} \end{array} \text{(в силу определения)} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{q} \uparrow\uparrow \vec{p}$.

б) $\alpha\beta < 0$, то

$$\left.\begin{array}{l} \vec{q} = (\alpha\beta)\,\vec{a} \Rightarrow \vec{q} \downarrow\uparrow \vec{a}, \\ \vec{p} = \alpha(\beta\vec{a}) \Rightarrow \vec{p} \downarrow\uparrow \vec{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{q} \uparrow\uparrow \vec{p}.$$

Итак, имеем

$$\left(|\vec{p}| = |\vec{q}|,\ \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}\right) \Rightarrow \vec{p} = \vec{q} \Leftrightarrow \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a}. \blacksquare$$

3) □ Докажем свойство 3°). От какой-нибудь точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, а затем от точки B – вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. *По правилу треугольника:* $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Рассмотрим гомотетию с коэффициентом α и с центром в некоторой точке O, не лежащей на прямых AB, BC и AC. Пусть A', B' и C' образы точек A, B и C (рис. 15).

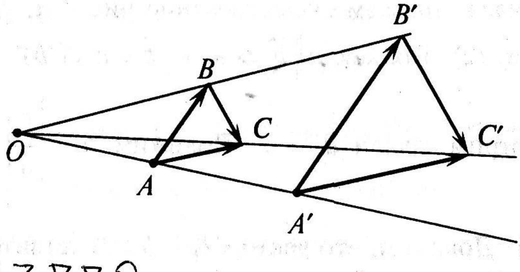


Рис. 15

3 Зак. 13039

По лемме 3 $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{AC}$

или $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\vec{a}$; $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\vec{b}$; $\overrightarrow{A'C'} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$.

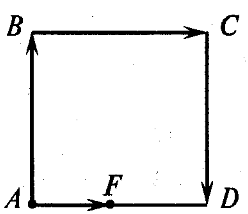
С другой стороны, по правилу треугольника

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\ .\blacksquare$$

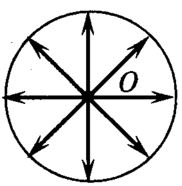
§ 5. ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD, \\ \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|, \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}. \end{cases} \tag{1}$$

Из соотношения (1) следует *признак равенства векторов: "Векторы равны тогда и только тогда, когда они равны по длине и сонаправлены".*



$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AF}$.



Нет равных векторов

Рис. 16

Теорема 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны* и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует единственное число α такое, что

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}\ . \tag{2}$$

☐ I. Сначала докажем существование числа α, удовлетворяющего равенству (2). Так как $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \vee \vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b})$.

1) Рассмотрим случай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Положим $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, введем вектор $\vec{b}_1 = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Докажем, что вектор $\vec{b}_1 = \vec{b}$. Действительно, имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)} & \left|\vec{b}_1\right| = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|, \\ \text{б)} & \left(\vec{b}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{b}_1 \uparrow\uparrow \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b}_1 = \vec{b}$$ (по признаку равенства векторов). Значит, число α удовлетворяет равенству (2).

2) Пусть теперь $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$. Рассмотрим число $\alpha = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ и вектор $\vec{b}_2 = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$. Имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)} & \left|\vec{b}_2\right| = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|, \\ \text{б)} & \left(\vec{b}_2 \downarrow\uparrow \vec{a}, \vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{b}_2 \uparrow\uparrow \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b}_2 = \vec{b},$$ т.е. число $\alpha = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ удовлетворяет равенству (2).

II. Докажем теперь, что число α, удовлетворяющее условию (2), определяется однозначно. Предположим, что каким-то другим способом нашли число β такое, что

$$\vec{b} = \beta\vec{a}. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует, что

$$\alpha\vec{a} = \beta\vec{a} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta, \text{ (так как } \vec{a} \neq \vec{0}).\blacksquare$$

Нуль-вектор по определению считается коллинеарным любому вектору.

Теорема 3. (Признак коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует (единственное) число α такое, что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, т.е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \alpha\vec{a}. \tag{4}$$

□ Необходимость. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. По теореме 2 следует, что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ (причем α — единственное число).

Достаточность. Если $\vec{b} = \alpha\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ (по определению операции умножения вектора на число).■

§ 6. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Определение. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ ***параллелен плоскости*** ω, если он параллелен некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

Очевидно, если вектор $\vec{a} \parallel \omega$, то он параллелен любой плоскости, параллельной плоскости ω.

Определение. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

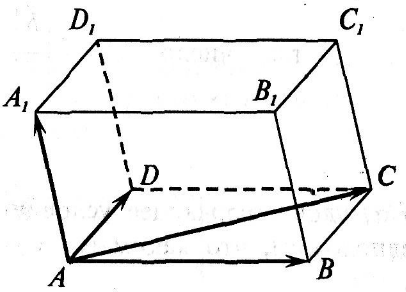


Рис. 17

$\vec{A_1B_1}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$ — компланарны,

$\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$ — не компланарны,

$\vec{A_1D_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ — компланарны (рис. 17).

З а м е ч а н и е. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. Так как векторы компланарны, то точки O, A, B и C лежат в одной плоскости. Это свойство поясняет термин "компланарные векторы" (рис. 18).

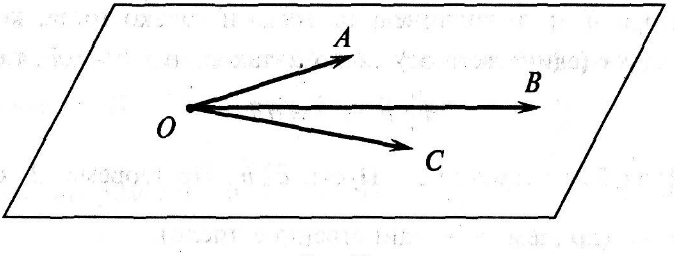


Рис. 18

Докажем теорему о компланарных векторах.

Теорема 4. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *не коллинеарны*, то существуют единственные числа α и β такие, что

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (1)$$

□ 1) Сначала докажем существование чисел α и β, удовлетворяющих равенству (1).

Отложим от некоторой точки O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. Эти векторы компланарны, поэтому точки O, A, B, C лежат в одной плоскости, причем точки O, A и B не лежат на одной прямой (векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ не коллинеарны).

Если точка C лежит на прямой OB, то векторы $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$ коллинеарны, поэтому по теореме о коллинеарных векторах существует такое число β, что $\vec{c} = \beta\vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Таким образом, имеет место равенство (1). Рассмотрим случай, когда точка C не лежит на прямой OB (рис. 19).

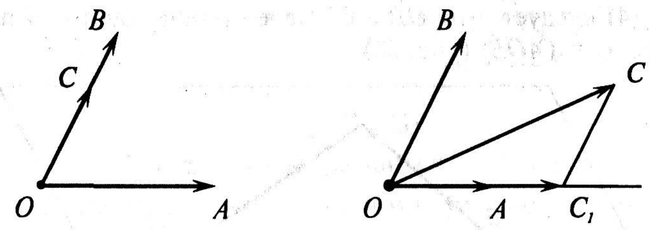


Рис. 19

Проведем прямую $CC_1 \parallel OB$, где C_1 — точка прямой OA. По правилу треугольника $\vec{OC} = \vec{OC_1} + \vec{C_1C}$. Но $\vec{OC_1} \parallel \vec{OA}$, $\vec{CC_1} \parallel \vec{OB}$, поэтому существуют числа α и β такие, что $\vec{OC_1} = \alpha\vec{a}$, $\vec{C_1C} = \beta\vec{b}$. Следовательно, $\vec{OC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т.е. имеет место равенство (1).

2) Докажем теперь, что числа α и β, удовлетворяющие уравнению (1), определяются однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли числа α_1 и β_1, такие, что

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}. \qquad (3)$$

Мы утверждаем, что $\alpha - \alpha_1 = 0$ и $\beta - \beta_1 = 0$. В самом деле, если, например, допустить, что $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, то из равенства (3) находим $\vec{a} = \dfrac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b}$, что невозможно, так как по условию теоремы $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.■

Верно и обратное утверждение.

Теорема 5. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (1), то они компланарны.

□ Отложим от некоторой точки O пространства вектор $\vec{OA} = \alpha\vec{a}$, затем от точки A вектор $\vec{AB} = \beta\vec{b}$. Так как $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, то

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{OB}. \qquad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что $\vec{OB} = \vec{c}$. Через точки O, A и B проходит плоскость $\omega = (AOB)$ (рис. 20).

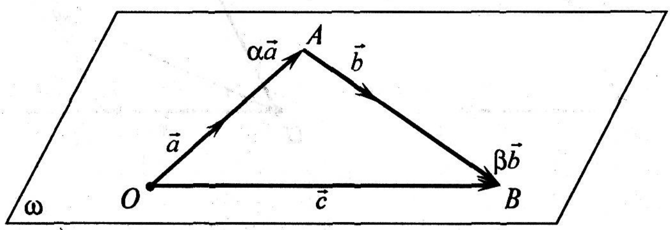


Рис. 20

Так как $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то из равенства $\vec{OA} = \alpha\vec{a}$, $\vec{AB} = \beta\vec{b}$, $\vec{OB} = \vec{c}$ *следует*, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ параллельны плоскости ω, поэтому они компланарны.■

Теоремы 4 и 5 определяют соответственно *необходимое и достаточное условие компланарности* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, среди которых, по крайней мере, два не коллинеарны.

Теорема 6. Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такие, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Для того, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1).

§ 7. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ

1. Предварительно докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема 7. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то для любого вектора $\vec{p}$ существуют единственные числа α, β, γ такие, что

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \qquad (1)$$

□ Докажем сначала существование чисел α, β и γ, удовлетворяющих равенству (1). Отложим от некоторой точки O пространства векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OP} = \vec{p}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости.

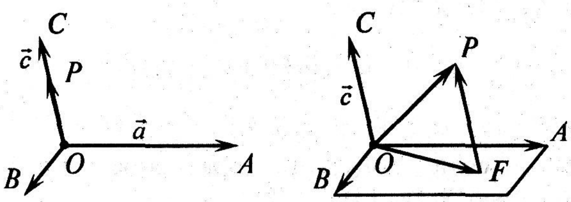


Рис. 21

а) Если точка P лежит на прямой OC, то векторы $\vec{OC} = \vec{c}$ и $\vec{OP} = \vec{p}$ коллинеарны (рис. 21), поэтому по теореме 3 о коллинеарных векторах $\vec{p} = \gamma\vec{c}$ или $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$.

Итак, мы получили равенство вида (1). Аналогично рассматриваются случаи, когда точка P лежит на прямой OB или на прямой OA.

б) Пусть точка P лежит, например, в плоскости AOC (аналогично доказываются случаи, когда точка P лежит в плоскости AOB или в плоскости BOC). Тогда векторы $\vec{OP} = \vec{p}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ компланарны. По теореме 4 о компланарных векторах

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \gamma\vec{c} \Leftrightarrow \vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$$

т.е. получаем равенство вида (1).

в) Наконец, рассмотрим случай, когда точка P не лежит ни в одной из плоскостей AOB, AOC, BOC (рис. 21). Проведем через точку P прямую $PF \parallel OC$, где F — точка пересечения этой прямой с плоскостью AOB. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{OF}$ компланарны, то по теореме 4 о компланарных векторах существуют числа α и β такие, что $\vec{OF} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. С другой стороны, векторы $\vec{FP}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, поэтому существует число γ такое, что $\vec{FP} = \gamma\vec{c}$. По правилу треугольника

$$\vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Докажем теперь, что числа α, β, γ удовлетворяющие равенству (1), определяются однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли числа α_1, β_1, γ_1 такие, что

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}. \qquad (3)$$

В равенстве (3) $\alpha - \alpha_1 = 0$; $\beta - \beta_1 = 0$; $\gamma - \gamma_1 = 0$. (*)
Действительно, если допустить противное, т.е., например, $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, то из равенства (3) следует

$$\vec{a} = \frac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b} + \frac{\gamma_1 - \gamma}{\alpha - \alpha_1}\vec{c}. \qquad (4)$$

Из равенства (4) в силу теоремы 6 следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Получили противоречие с условием. Итак, равенства (*) выполняются и, следовательно, единственность разложения (1) доказана.■

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется ***аффинным базисом*** векторов пространства. Упорядоченная тройка попарно перпендикулярных и единичных векторов (ортов) называется ***прямоугольным декартовым базисом*** векторов пространства.

Обозначение: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — аффинный базис;

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — прямоугольный декартов базис (рис. 22).

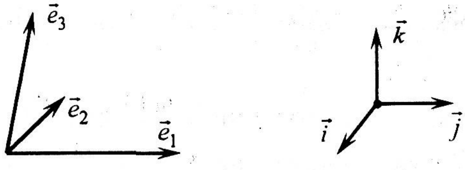


Рис. 22

Вектор, длина которого равна единице, называется *ортом*. В силу этого прямоугольный декартов базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *ортонормированным базисом.*

Введем понятие координат вектора в данном базисе. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — данный базис, $\vec{a}$ — произвольный вектор пространства. По теореме 7 существуют единственные числа x, y, z, такие что

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \qquad (5)$$

Если дано равенство (5), то говорят, что *вектор* $\vec{a}$ *разложен по векторам базиса* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Определение. Коэффициенты x, y, z в разложении вектора $\vec{a}$ по афинному базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются ***аффинными координатами вектора*** $\vec{a}$ в этом базисе (или относительно этого базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$). Число x называется ***первой координатой***, y — ***второй***, а z — ***третьей координатой*** вектора $\vec{a}$.

Коэффициенты x, y, z в разложении вектора $\vec{a}$ по ортонормированному базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (6)$$

называются декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Если вектор $\vec{a}$ в данном базисе имеет координаты x, y, z, то коротко это будем записывать так:

$$\vec{a} = (x, y, z) \text{ или } \vec{a}\,(x, y, z).$$

Отметим, что базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеют координаты: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

4 Зак. 13039

Ортонормированный базис $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ есть частный случай аффинного базиса $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

Аналогично вводятся координаты векторов на плоскости.

Определение. Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ называется аффинным базисом векторов плоскости.

Упорядоченная пара единичных и перпендикулярных векторов называется ***прямоугольным декартовым базисом*** или ***ортонормированным базисом*** векторов на плоскости.

Определение. Коэффициенты в разложении

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \ (\text{или } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}\,) \tag{7}$$

вектора $\vec{a}$ по аффинному базису (декартовому базису) называются соответственно ***аффинными (декартовыми) координатами вектора*** $\vec{a}$ в этом базисе.

Обозначение:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{a} = (x_1,x_2). \tag{8}$$

2. Рассмотрим систему векторов:

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n \tag{8'}$$

и зададим n действительных чисел α_1, α_2, ..., α_n. Вектор

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n \tag{9}$$

называется *линейной комбинацией* данных векторов (8′).

Говорят также, что вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$.

Теорема 8. Каждая координата линейной комбинации (9) векторов системы (8′) равна такой же линейной комбинации их соответствующих координат.

□ Пусть относительно базиса $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ заданы векторы $\vec{p} = (p_1,p_2,p_3)$, $\vec{a}_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, ..., $\vec{a}_n = (x_n,y_n,z_n)$ и задана линейная комбинация

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n\,. \tag{10}$$

Разложим векторы системы (8′) по базису и, подставив в равенство (10), получим

$$\vec{p} = \alpha_1(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) + \alpha_2(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) + \ldots + \\ + \alpha_n(x_n\vec{e}_1 + y_n\vec{e}_2 + z_n\vec{e}_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\vec{e}_1 + \\ + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n)\vec{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n)\vec{e}_3. \qquad (11)$$

С другой стороны

$$\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \qquad (12)$$

Сравнивая равенства (11) и (12) и учитывая, что разложение вектора $\vec{p}$ по базису однозначно (теорема 7), приходим к следующей системе

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, \\ y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n, \\ z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n. \end{cases} \qquad (13)$$

Из равенства (10) и (13) следует утверждение теоремы 8. ■

В частности, применив теорему 8 к векторам $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = \lambda\vec{c}$ убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

1°. Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.

2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

3°. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на то же число.

Сформулируем утверждение, в котором выражен признак коллинеарности векторов, заданных координатами.

Теорема 9. Для того чтобы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданные координатами в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

□ Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то утверждение очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. По теореме 3 о коллинеарных векторах и теореме 8 имеем

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda b_1, \\ a_2 = \lambda b_2, \\ a_3 = \lambda b_3. \end{cases} \blacksquare$$

3. Определение. На плоскости ***параллельной проекцией точки на ось*** l называется точка A_1 — точка пересечения оси l с прямой, проведенной через точку A параллельно вектору $\vec{a}$, задающему направление проектирования.

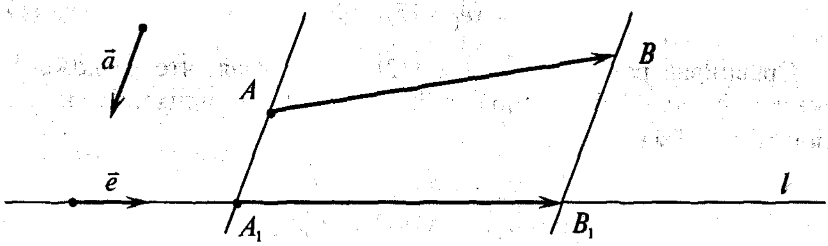


Рис. 23

Определение. ***Параллельной проекцией*** вектора AB на ось l называется координата вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ относительно базиса оси l, где точки A_1 и B_1 — параллельные проекции соответственно точек A и B на ось l (рис. 23).

Согласно определению имеем

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{e} \Leftrightarrow x = пр._l\, \overrightarrow{AB} = пр._{\vec{e}}\, \overrightarrow{AB}.$$

Определение. Если $\vec{a} \perp l$ и базис $\vec{e}$ оси l декартов, т.е. $|\vec{e}| = 1$, то ***проекция вектора*** $\overrightarrow{AB}$ на ось l ***называется ортогональной*** (рис. 24).

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\,\vec{i} \Leftrightarrow x = орт.пр._l\, \overrightarrow{AB}.$$

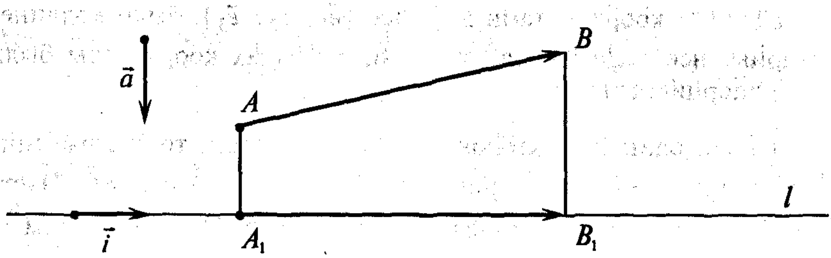


Рис. 24

В пространстве направление проектирования задается двумя неколлинеарными векторами (рис. 25).

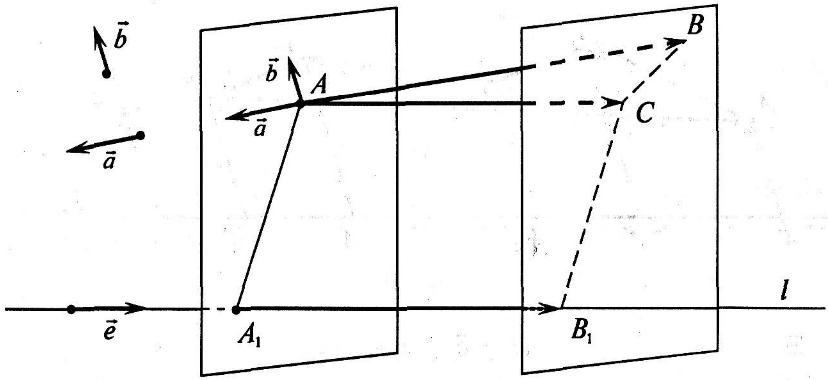


Рис. 25

Из определения проекции вектора на ось l вытекает, что каждая координата вектора есть проекция этого вектора на ось, определяемую соответствующим базисным вектором. При этом направление проектирования задается двумя другими базисными векторами, если проектирование ведется (рассматривается) в пространстве, или другим базисным вектором, если проектирование рассматривается на плоскости (рис. 26; рис. 27).

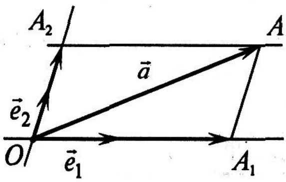


Рис. 26

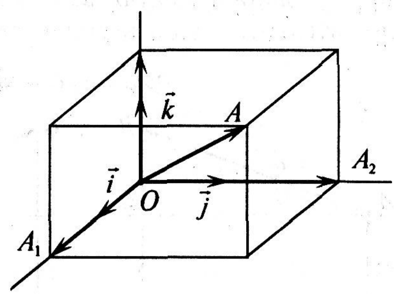


Рис. 27

$$\overrightarrow{OA_1} = x_1\vec{e}_1 \Leftrightarrow x_1 = \text{пр.}^{\|\vec{e}_2}{}_{\vec{e}_1}\, \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA_2} = x_2\vec{e}_2 \Leftrightarrow x_2 = \text{пр.}^{\|\vec{e}_1}{}_{\vec{e}_2}\, \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \Leftrightarrow x = \text{орт.пр.}_{\vec{i}}\, \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \Leftrightarrow y = \text{орт.пр.}_{\vec{j}}\, \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k} \Leftrightarrow z = \text{орт.пр.}_{\vec{k}}\, \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Теорема 10. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ось (рис. 28).

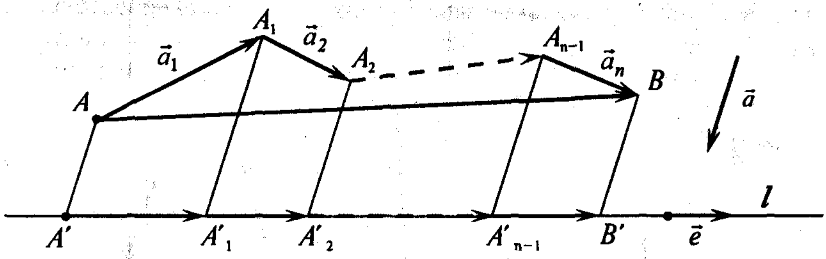


Рис. 28

□ $$\vec{AB} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n.$$

$$\vec{A'B'} = \vec{A'A'_1} + \vec{A'_1A'_2} + \ldots + \vec{A'_{n-1}B'}. \quad (14)$$

Разложим векторы $\vec{A'B'}, \vec{A'A'_1}, \vec{A'_1A'_2}, \ldots, \vec{A'_{n-1}B'}$ по базису $\vec{e}$ оси l и подставим эти разложения в равенство (14), получим

$$x\vec{e} = x_1\vec{e} + x_2\vec{e} + \ldots + x_n\vec{e} \Leftrightarrow x\vec{e} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\vec{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \Leftrightarrow np._l\, \vec{AB} = np._l\, \vec{a}_1 + np._l\, \vec{a}_2 + \ldots + np._l\, \vec{a}_n.$$ ■

Теорема 11. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла между положительным направлением оси l и $\vec{a}$ (рис. 29), т.е.

$$opm.np._l\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}). \quad (15)$$

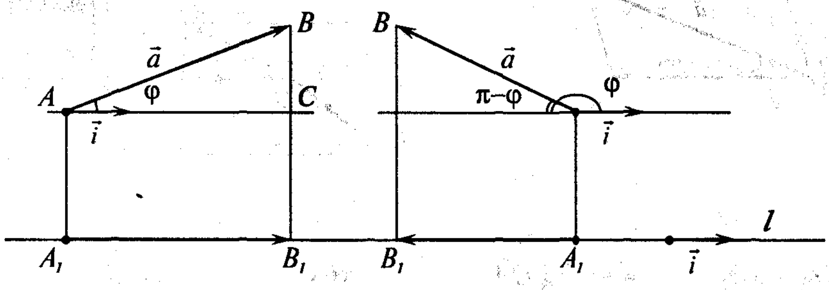


Рис. 29

□ $\vec{A_1B_1} = x\vec{i} \Rightarrow |\vec{A_1B_1}| = |x| \cdot |\vec{i}| = |x|$.

С другой стороны,

$$|x| = |opm.np._l\, \vec{AB}| = |\vec{A_1B_1}| = |AC|. \quad (16)$$

Из ΔACB находим

$$|AC| = |AB| \cdot |\cos B\hat{A}C| = |\vec{a}| \cdot |\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{c})|. \quad (17)$$

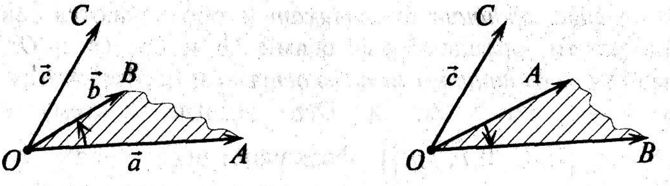
Подставим значение $|AC|$ в равенство (16), получим

$$|x| = |\vec{a}| \cdot \left|\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{i})\right|. \tag{18}$$

Так как числа x и $\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{i})$ одного знака в обоих рассматриваемых случаях $\big($a) $\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{i}) = \varphi$; b) $\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{i}) = \pi - \varphi\big)$, то из равенства (18) следует

$$x = \mathit{орт.пр.}_{l}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{i}). \blacksquare \tag{19}$$

4. Определение. Пусть дана упорядоченная тройка некомпланарных векторов: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Будем говорить, что эта тройка векторов ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) образует тройку векторов ***правой ориентации*** (левой ориентации), если кратчайший поворот от $\overrightarrow{OA}$ к $\overrightarrow{OB}$ в плоскости (AOB) совершается ***против часовой стрелки*** (по часовой стрелке) (предполагается, что мы смотрим на плоскость (AOB) из точки C) (рис. 30).



Правая тройка векторов Левая тройка векторов

Рис. 30

При циклической перестановке векторов данной тройки ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) ее ориентация не меняется: ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), ($\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$), ($\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$) — правые (левые) тройки векторов, если ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) — правая (левая) тройка векторов.

Геометрический образ, состоящий из фиксированной точки и аффинного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется *аффинной системой координат* $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *в пространстве*. Точка O называется *началом координат*, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — *координатными векторами* ($\vec{e}_1$ — первый координатный вектор; $\vec{e}_2$ — второй, а $\vec{e}_3$ — третий).

Прямоугольная декартова система координат $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ состоит из фиксированной точки O и ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Точка O — начало координат, векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — *координатные векторы* (рис. 31).

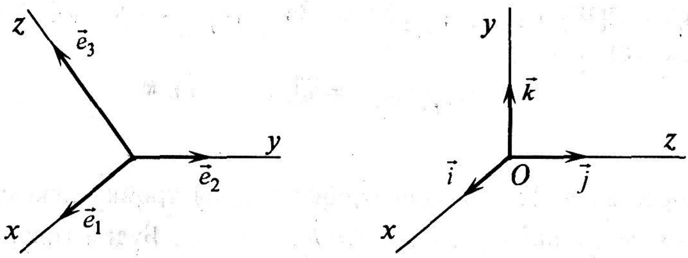


Рис. 31

Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, называются *координатными осями*. Положительные направления координатных осей определяются *координатными векторами*. Оси, параллельные векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (или векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), называются соответственно осями *абсцисс*, *ординат* и *аппликат* и обозначаются так: Ox, Oy, Oz. Плоскости, определяемые осями Ox и Oy; Ox и Oz; Oy и Oz называются *координатными плоскостями* и обозначаются соответственно через Oxy, Oxz и Oyz. Иногда систему координат $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\left(\text{или } \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\right)$ обозначают через $Oxyz$.

Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — аффинная система координат, а M — произвольная точка пространства. Вектор $\vec{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M.

Определение. Координаты x, y, z вектора $\vec{OM}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются ***координатами*** точки M в системе координат $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

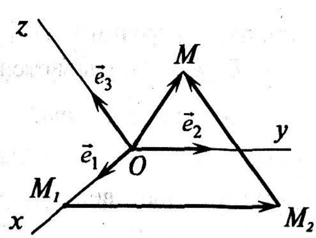


Рис. 32

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Leftrightarrow M(x, y, z) \quad (20)$$

Для построения точки M (x, y, z) по ее координатам в системе $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ воспользуемся формулой (20). От начала координат отложим вектор $\vec{OM}_1 = x\vec{e}_1$, затем от точки M_1 отложим вектор $\vec{OM}_1 = x\vec{e}_1$, и, наконец, от точки M_1 отложим вектор $\vec{M_1 M_2} = y\vec{e}_2$ (рис. 32). По правилу многоугольника $\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{M_1 M_2} + \vec{M_2 M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Таким образом, M — искомая точка. Ломаную OM_1M_2M называют *координатной ломаной* точки M. Итак, для построения точки M достаточно построить ее *координатную ломаную.*

§ 8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — нулевые векторы. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и рассмотрим лучи $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

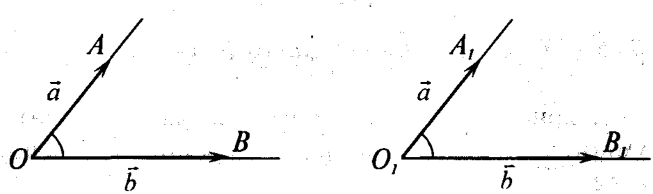


Рис. 33

Определение. ***Углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между лучами OA и OB, т.е. угол AOB, если эти лучи не совпадают. Если лучи OA и OB совпадают, то угол между ними считается равным нулю.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Так как два угла, стороны которых сонаправлены, равны, то *угол между данными векторами не зависит от выбора точки O* (рис. 33).

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *взаимно перпендикулярными*, если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$.

Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$. Условимся считать, что если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, нуль-вектор перпендикулярен любому вектору пространства. Итак, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем: $0 \le \left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right) \le \pi$.

2. Определение. ***Скалярным произведением*** двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается следующим образом: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Итак, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}). \tag{1}$$

Свойства скалярного произведения.

1°. Скалярное произведение коммутативно (переместительный закон), т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \tag{2}$$

□ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b} \hat{,} \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ■

2°. Скалярное произведение ассоциативно относительно операции умножения вектора на число (подчиняется сочетательному закону), т.е.

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{3}$$

□ а) Пусть $\lambda > 0$, тогда $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \hat{,} \vec{b})$, $|\lambda| = \lambda$.

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\lambda\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

б) Если $\lambda < 0$, то $|\lambda| = -\lambda$, $\lambda\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{a}$, $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \varphi$; $(\lambda\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \pi - \varphi$.

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos(\lambda\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= \lambda|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \ ■$$

3°. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т.е.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2. \tag{4}$$

☐ $\vec{a}^2 \stackrel{def}{=} \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.■

4°. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\,. \qquad (5)$$

☐ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.■

5°. Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на ортогональную проекцию другого на ось, определяемую первым выбранным вектором, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{b}}\,\vec{a})\,. \qquad (6)$$

☐ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\left\{|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{i})\right\} = |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{b})$.■

(т. 11)

6°. Скалярное произведение подчиняется дистрибутивному закону (распределительному закону), т.е.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\,. \qquad (7)$$

☐ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,(\vec{b}+\vec{c})) = |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{b} + орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{c}) =$

$= |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{b}) + |\vec{a}|\cdot(орт.\,пр._{\vec{a}}\,\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.■

Теорема 12. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3\,. \qquad (8)$$

☐ Так как векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно перпендикулярны, то

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0\,. \qquad (9)$$

Учитывая (9) и свойства 2°, 3°, 6° скалярного произведения векторов, получим

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$

$$= a_1b_1\vec{i}^{\,2} + a_2b_2\vec{j}^{\,2} + a_3b_3\vec{k}^{\,2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\ ■$$

С л е д с т в и е 1. $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\,. \qquad (10)$

□ $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.■

Следствие 2. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданными в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \qquad (11)$$

Действительно, по формуле (1) находим $\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Подставив сюда значения $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ из формул (8) и (10) получим (11).

Скалярное произведение двух векторов находит широкое применение в различных разделах физики, в частности, в механике. Рассмотрим следующий пример. Пусть материальная точка M под действием силы $\vec{F}$ переместилась из точки M_1 в точку M_2 по прямолинейному пути (рис. 34).

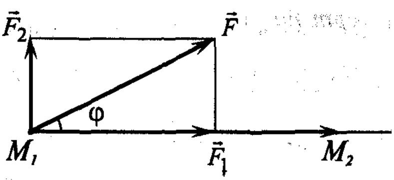


Рис. 34

Как известно из физики, работа силы $\vec{F}$ при перемещении на величину $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = |\vec{s}|$ по прямолинейному пути вычисляется по формуле

$$A = |\vec{F}_1|\cdot|\vec{s}| = \left(|\vec{F}|\cdot\cos(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{s})\right)\cdot|\vec{s}| = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{s}) = \vec{F}\cdot\vec{s} .$$

Следовательно, работа постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку при прямолинейном перемещении $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{s}$, равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $\vec{s}$.

II. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

§ 9. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ ВЕКТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Пример 1. Пусть O — произвольная точка пространства, а

а) M — середина отрезка AB,

б) M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$,

тогда выполняются соответственно равенства

а) $$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}), \qquad (1)$$

б) $$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}). \qquad (2)$$

Решение. □ а) Если M — середина отрезка AB, то $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$ (рис. 35).

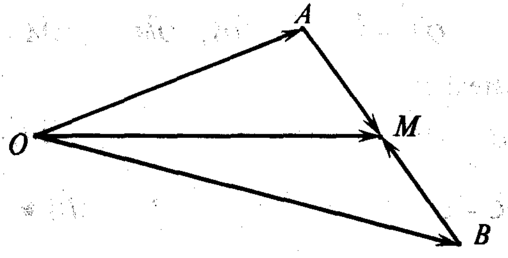


Рис. 35

По правилу треугольника сложения векторов

$$+\begin{array}{l} \vec{OM} + \vec{MA} = \vec{OA}, \\ \vec{OM} + \vec{MB} = \vec{OB}. \end{array}$$

$$\overline{\qquad 2\vec{OM} + \vec{0} = \vec{OA} + \vec{OB}, \qquad}$$

откуда

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \blacksquare$$

б) Если M — точка пересечения медиан ΔABC, то

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}.$$

По правилу треугольника сложения векторов

$$\begin{aligned} &\vec{OM} + \vec{MA} = \vec{OA}, \\ + &\vec{OM} + \vec{MB} = \vec{OB}, \\ &\vec{OM} + \vec{MC} = \vec{OC}. \end{aligned}$$

$$3\vec{OM} + \vec{0} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

откуда $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$. ■

Пример 2. Доказать, что в любом четырехугольнике $ABCD$ имеет место соотношение

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD}),$$

где M и N — середины отрезков AB и CD соответственно.

Решение. □ Пусть O — произвольная точка пространства. Поскольку M и N — середины отрезков AB и CD, то в силу формулы (1) для середины отрезка имеем

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}); \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

Следовательно,

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\vec{OC} - \vec{OB}) + (\vec{OD} - \vec{OA})\right] = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD}). \blacksquare$$

Пример 3. Пусть M — точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и O — произвольная точка пространства. Доказать, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

Решение. □ Пусть SQ и PF — средние линии четырехугольника $ABCD$. По свойствам средней линии треугольника имеем $SF = PQ = \frac{1}{2}AC$ и $SF \| AC \| PQ$, т.е. $PQFS$ — параллелограмм (рис. 36).

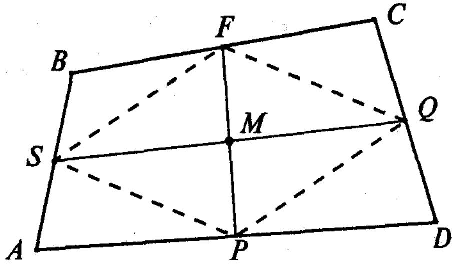


Рис. 36

Поэтому $PM = MF$ и $SM = MQ$. По формуле (1) для середины отрезка имеем

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(OP + OF)\,;\ \vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})\,;\ \vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})\,.$$

Отсюда

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})\,.\blacksquare$$

Пример 4. Точки K, L, M, N — середины сторон BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q — середины отрезков KM и LN. Доказать, что отрезки PQ и AB параллельны, и найти отношение их длин (рис. 37).

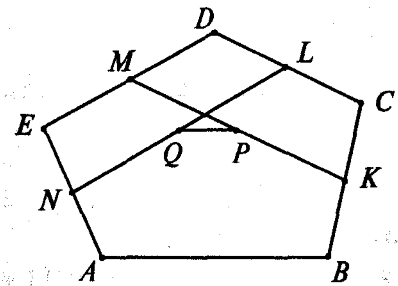


Рис. 37

Решение. □ Используя формулу (1), находим

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{ON}) - \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OE}) - \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{OA} - \vec{OB}) = -\frac{1}{4}\vec{AB}.$$

Итак,

$$\vec{PQ} = -\frac{1}{4}\vec{AB} \Rightarrow \left([PQ] \| [AB];\ PQ : AB = 1:4\right). \blacksquare$$

Пример 5. В треугольнике ABC вычислить длину медианы m_a, зная угол A и две стороны: $|AB| = c$, $|AC| = b$.

Решение. □ Пусть M — середина стороны BC. По формуле (1) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right)$. Возведя в квадрат это равенство, получим:

$$\vec{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{AB}^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AC}^2\right) \Leftrightarrow m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2 + 2bc\cos A\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}. \blacksquare$$

Пример 6. Доказать обратную теорему Пифагора: треугольник является прямоугольным с прямым углом A, если

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2.$$

Решение.

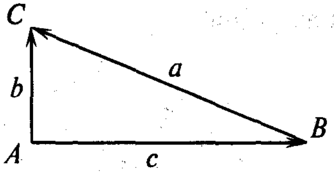


Рис. 38

□ По правилу вычитания векторов $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ (рис. 38). Возведем в квадрат это равенство:

$$\vec{BC}^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}^2 \Leftrightarrow \vec{AC}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \vec{AC}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{2}\left(|AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2\right)$. Так как по условию задачи $|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2 = 0$, то $\vec{AC}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{AC} \perp \vec{AB}$, т.е. $\angle A$ прямой. $\blacksquare$

Пример 7. Даны три попарно перпендикулярных луча OA, OB, OC с общим началом O. Найти угол между биссектрисами углов AOB и BOC (рис. 39).

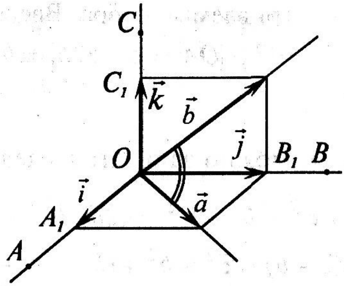


Рис. 39

Решение. □ Отложим от точки O векторы $\vec{OA_1} = \vec{i}$, $\vec{OB_1} = \vec{j}$, $\vec{OC_1} = \vec{k}$. Направление биссектрисы $\angle AOB$ определяется вектором $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, а направление биссектрисы $\angle BOC$ — вектором $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, причем векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ образуют ортонормированный базис. Задача свелась к нахождению угла между векторами $\vec{a} = (1;1;0)$ и $\vec{b} = (0;1;1)$. По формуле (11) из § 8 находим:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos M\hat{O}N = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}. \blacksquare$$

Пример 8. Доказать, что угол φ между противолежащими ребрами тетраэдра вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2\right|}{2aa'}, \qquad (3)$$

где a, a' — длины рассматриваемых ребер; b и b'; c и c' — длины двух других пар противоположных ребер.

Решение. □ Пусть $OABC$ — данный тетраэдр (рис. 40).

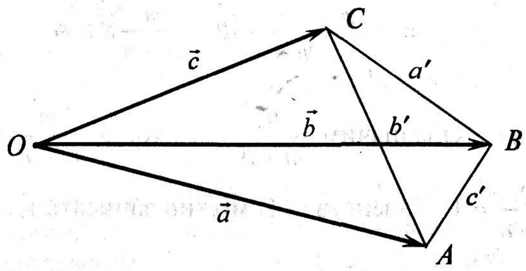


Рис. 40

OA и BC — рассматриваемые ребра. Введем обозначения: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$, $|BC| = a'$, $|AC| = b'$, $|AB| = c'$.

Тогда формулу (3) можно записать в следующем виде:

$$2aa' \cos\varphi = c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2 \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{BC} = \vec{c}^2 - \vec{b}^2 + \vec{AB} - \vec{AC}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{c}^2 - \vec{b}^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2 - (\vec{c} - \vec{a})^2.$$

Последнее равенство является тождеством, в чем нетрудно убедиться, если раскрыть скобки. Следовательно, справедлива и формула (3).■

Теорема 13. (О делении отрезка в данном отношении). Для того, чтобы точка C делила отрезок $[AB]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n},$$

необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки пространства выполнялось равенство

$$\vec{SC} = \frac{n}{m+n}\vec{SA} + \frac{m}{m+n}\vec{SB}. \qquad (4)$$

□ $\frac{|AC|}{m} = \frac{|CB|}{n}$. Следовательно, $\frac{1}{m}\vec{AC} = \frac{1}{n}\vec{CB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m}(\vec{SC} - \vec{SA}) = \frac{1}{n}(\vec{SB} - \vec{SC}) \Leftrightarrow \vec{SC}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\vec{SB} + \frac{1}{m}\vec{SA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{SC} = \frac{n}{m+n}\vec{SB} + \frac{m}{m+n}\vec{SA}.■$$

Замечание. Обозначим $\frac{n}{m+n} = k$, тогда $\frac{m}{m+n} = 1 - k$, так как $\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1$. Равенство (4) можно записать в виде

$$\vec{SC} = k\vec{SA} + (1-k)\vec{SB}. \qquad (5)$$

Пример 9. В $\triangle ABC$ отрезок $[AD]$ делит сторону BC треугольника в отношении $|BD|:|DC| = 2 : 1$. В каком отношении медиана CF делит отрезок $[AD]$ (рис. 41)?

Решение. □ Пусть $\vec{BC} = \vec{c}$, $\vec{BA} = \vec{a}$, $\dfrac{|AO|}{|AD|} = x$, $\dfrac{|OF|}{|FC|} = y$,

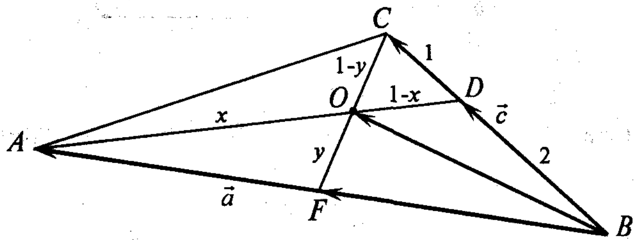


Рис. 41

тогда $\dfrac{|OD|}{|AD|} = 1 - x$, $\dfrac{|OC|}{|CF|} = 1 - y$. Используя формулу (5), находим

$$\vec{BO} = (1 - x)\vec{BA} + x\vec{BD} = (1 - x)\vec{a} + x \cdot \frac{2}{3}\vec{c}. \qquad (6)$$

С другой стороны, имеем

$$\vec{BO} = y\vec{c} + \frac{1}{2}(1 - y)\vec{a} = y\vec{BC} + (1 - y)\vec{BF}. \qquad (7)$$

Из равенств (6) и (7) в силу единственности разложения вектора по базису получим

$$\begin{cases} 1 - x = \frac{1}{2}(1 - y), \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x, \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $|AO|:|AD| = 3 : 4$, следовательно, $|AO|:|OD| = 3 : 1$.■

Пример 10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребра M проведена прямая, пересекающая прямые AC_1 и DD_1, соответственно в точках N и P. Найти отношение $|MN|:|NP|$ (рис. 42).

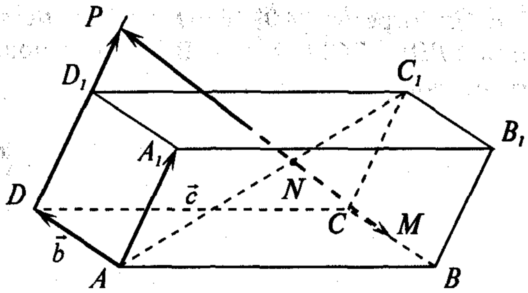


Рис. 42

Решение. □ 1) Так как точки N, M, P лежат на одной прямой, то

$$\vec{NM} = \lambda \vec{NP}. \tag{8}$$

Пусть $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$. Векторы $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ некомпланарны и, следовательно, образуют аффинный базис. Разложим векторы $\vec{NM}$ и $\vec{NP}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Для этого предварительно по правилу многоугольника сложения векторов находим:

$$\begin{aligned} \vec{NM} &= \vec{NA} + \vec{AB} + \vec{BM}, \\ \vec{NP} &= \vec{NA} + \vec{AD} + \vec{DP}. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь векторы в правых частях равенства (9) представим в виде *линейных комбинаций* векторов базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Имеем $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BM} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Остается выразить векторы $\vec{DP}$ и $\vec{NA}$ через векторы базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

2) Точка $P \in (DD_1)$ по условию и, следовательно, $\vec{DP} \parallel \vec{DD_1} \Leftrightarrow \vec{DP} = x\vec{c}$. С другой стороны, точка $N \in (AC_1)$, поэтому $\vec{NA} \parallel \vec{AC_1} \Leftrightarrow \vec{NP} = y\vec{AC_1}$. По «правилу параллелепипеда» (или по правилу многоугольника) сложения векторов находим $\vec{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Итак, $\vec{NA} = y(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

3) Подставим найденные разложения векторов в равенства (9), а затем векторы $\vec{NM}$ и $\vec{NP}$ в (8), получим

$$y(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\lambda(y(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}+x\vec{c})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+y)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+y\right)\vec{b}+y\vec{c}=\lambda y\vec{a}+\lambda(1+y)\vec{b}+\lambda(x+y)\vec{c}.$$

Последнее векторное равенство в силу *единственности разложения вектора по базису* равносильно системе:

$$\begin{cases} 1+y=\lambda y, \\ \dfrac{1}{2}+y=\lambda(1+y), \\ y=\lambda(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1+y}{y}, \\ \dfrac{1+2y}{2}=\dfrac{(1+y)^2}{y}, \\ y=\dfrac{(x+y)(1+y)}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{2}{3}, \\ x=2. \end{cases}$$

Таким образом, $\vec{NM}=-\frac{1}{2}\vec{NP}\Rightarrow|NM|=\frac{1}{2}|NP|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |NM|:|NP|=1:2$. ■

Пример 11. Через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Определить, в каком отношении она делит диагональ параллелепипеда, выходящую из той же вершины (рис. 43).

Решение.

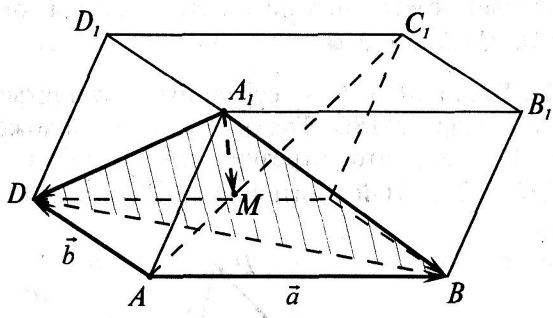


Рис. 43

□ Пусть $M=[AC_1]\cap(DA_1B)$. Для того, чтобы точки A_1, D, M, B лежали в одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{A_1D}$, $\vec{A_1M}$, $\vec{A_1B}$ были компланарны, т.е. чтобы существовали числа α и β такие, что

$$\vec{A_1M}=\alpha\vec{A_1D}+\beta\vec{A_1B}. \qquad (10)$$

Пусть $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{AD} = \vec{b}$; $\vec{AA_1} = \vec{c}$. Эти векторы некомпланарны, следовательно, образуют *аффинный базис* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Разложим векторы в равенстве (10) по этому базису. Имеем $\vec{A_1B} = \vec{a} - \vec{c}$, $\vec{A_1D} = \vec{b} - \vec{c}$. Далее, $\vec{A_1M} = \vec{A_1A} + \vec{AM}$ (по правилу треугольника), но $\vec{AM} \| \vec{AC_1} \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AC_1} = x(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), \vec{A_1A} = -\vec{c}$. Значит, $\vec{A_1M} = x\vec{a} + x\vec{b} + (x-1)\vec{c}$. Подставляя найденные разложения векторов $\vec{A_1M}$, $\vec{A_1D}$, $\vec{A_1B}$ в равенство (10), получим

$$x\vec{a} + x\vec{b} + (x-1)\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - (\alpha + \beta)\vec{c} . \qquad (11)$$

Так как разложение вектора по базису однозначно, то из (11) следует

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ x = \beta, \\ x - 1 = -\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ \alpha = \dfrac{1}{3}, \\ \beta = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AC_1} \Rightarrow |AM| = \frac{1}{3}|AC|$, т.е. плоскость (A_1DB) отсекает треть диагонали AC_1, считая от вершины A. Отсюда $|AM|:|MC_1| = 1:2$. ■

Пример 12. Точки M и N — середины соответственно ребер AB и CD тетраэдра $DABC$. Точки P и Q расположены на ребрах AD и BC так, что отрезки MN и PQ пересекаются, а $|AP|:|AD| = 2:3$. Найти отношение $|BQ|:|BC|$ (рис. 44).

Р е ш е н и е.

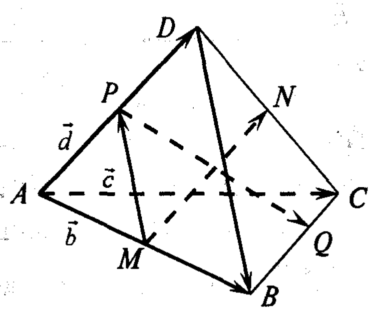


Рис. 44

□ Для того чтобы прямые MN и PQ пересекались, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α и β, чтобы

$$\vec{MP} = \alpha\vec{MN} + \beta\vec{PQ}. \tag{12}$$

Разложим векторы $\vec{MN}$, $\vec{PQ}$ и $\vec{MP}$ по базису $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$.

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{d}) = \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}, \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим $|BQ| : |BC| = x$. Тогда $\vec{BQ} = x(\vec{c} - \vec{b})$,

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BQ} = -\frac{2}{3}\vec{d} + \vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b}) = \\ &= (1 - x)\vec{b} + x\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{d}. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AP} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}. \tag{15}$$

Подставляя (13)—(15) в равенство (12), получим

$$-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} = \left(\beta(1 - x) - \frac{\alpha}{2}\right)\vec{b} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta x\right)\vec{c} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\beta\right)\vec{d}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \beta(1 - x) - \dfrac{\alpha}{2}, \\ 0 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta x, \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{2}{3}\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \\ \alpha = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Rightarrow |BQ| : |BC| = 2:3. \ \blacksquare$$

Отметим, что при решении аффинных задач (примеры 9—12) используются предложения:

I. *Необходимое и достаточное условие принадлежности трех точек прямой*, а именно условие $A \in (BC)$ может быть записано в виде одного из равенств:

а) $\vec{BC} = \alpha\vec{BA}$;

б) $\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + (1 - \alpha)\vec{OB}$; (16)

в) $\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, где $\alpha + \beta = 1$.

6.	$ABCD$ — параллелограмм.	$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \nparallel \vec{AD}$.
7.	Прямые a, b, c лежат в одной плоскости.	$\vec{m} = \alpha\vec{n} + \beta\vec{p}$, где $\vec{m}(a) = a;\ \vec{n}(b) = b;\ \vec{p}(c) = c$
8.	M — середина $[AB]$.	а) $\vec{MA} = -\vec{MB}$; б) $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, где O — произвольная точка пространства.
9.	M — точка пересечения медиан ΔABC (центроид ΔABC).	а) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$, б) $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, где O — произвольная точка пространства.
10.	$\|AB\| = a$.	$\sqrt{\vec{AB}^2} = a$.
11.	$(AB) \perp (CD)$.	$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.
12.	$\cos A\hat{B}C$.	$\dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|}$.

§ 10. АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИМЕТРИИ

Пример 13. В треугольнике ABC точка N делит сторону AB пополам, а точка M делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B. $(NM) \cap (AC) = D$. Доказать, что $AC = CD$ (рис. 45).

II. *Необходимое и достаточное условие принадлежности четырех точек одной плоскости*, т.е. $D \in (ABC)$ можно записать в виде одного из равенств:

а) $\vec{CD} = \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB}$;

$$\text{б) } \vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + (1 - \alpha - \beta)\vec{OC}; \tag{17}$$

в) $\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Решения задач, в которых используются предложения I и II, можно осуществлять по следующему плану:

1) В силу условия задачи, записываем равенство, выражающее необходимое и достаточное условие принадлежности интересующей нас точки прямой или плоскости в виде одного из только что рассмотренных равенств (16), (17).

2) Вводим базис, состоящий из двух неколлинеарных векторов на плоскости или трех некомпланарных векторов в пространстве.

Выполняем разложение каждого вектора, входящего в равенство, записанное в первом пункте, по введенному базису.

3) Исходя из единственности разложения вектора по данному базису, приравниваем коэффициенты разложения при одних и тех же базисных векторах, стоящих в левой и правой части равенства. В результате получаем систему двух или трех линейных уравнений с двумя или тремя переменными, решая которую, находим ответ на вопрос задачи.

В заключение приведем несколько примеров одного и того же утверждения на геометрическом и векторном языках:

	Геометрические соотношения	Те же геометрические соотношения на языке векторов
1.	$M \in (AB)$.	$\vec{AM} = \alpha\vec{AB}$.
2.	$M \in [AB]$.	$\vec{AM} = \alpha\vec{AB}$, $0 \le \alpha \le 1$.
3.	$M \in [AB)$.	$\vec{AM} = \alpha\vec{AB}$, $\alpha \ge 0$.
4.	$M \in (ABC)$.	$\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$, $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$.
5.	$(AB) \parallel (CD)$.	$\vec{AB} = \alpha\vec{CD}$.

Решение.

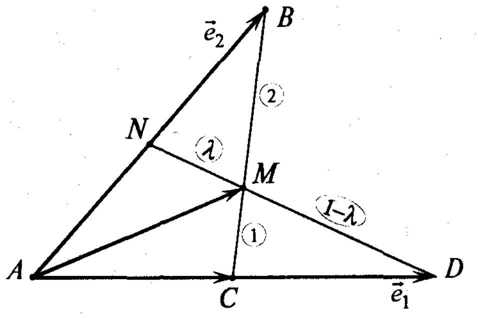


Рис. 45

☐ Пусть $\vec{AD} = \vec{e}_1$, $\vec{AB} = \vec{e}_2$. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — базис плоскости. Пусть $NM : ND = \lambda$, тогда $MD : ND = 1 - \lambda$. По формуле 5 (§ 9) имеем

$$\vec{AM} = \lambda\vec{AD} + (1-\lambda)\vec{AN} \Leftrightarrow \vec{AM} = \lambda\vec{e}_1 + (1-\lambda)\cdot\frac{1}{2}\vec{e}_2. \qquad (1)$$

Точки A, C, D лежат на одной прямой. Поэтому

$$\vec{AC} = x\vec{AD}. \qquad (2)$$

Так как точка M делит отрезок BC в отношении $2 : 1 = BM : MC$, то в силу формулы 5 (§ 9) имеем

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{2}{3}x\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{e}_2 = \frac{2}{3}x\cdot\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует

$$\lambda\vec{e}_1 + \frac{1}{2}(1-\lambda)\vec{e}_2 = \frac{2}{3}x\cdot\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2.$$

Отсюда на основании единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ получаем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x = \lambda, \\ \frac{1}{2}(1-\lambda) = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, (2) $\Leftrightarrow \vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AD} \Rightarrow AC = \frac{1}{2}AD$. ■

Пример 14. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $AD : BC = 3 : 2$. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, S — точка пересечения продолжений боковых сторон. Представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{AD}$ и $\vec{AB}$: а) вектор $\vec{AC}$; б) вектор $\vec{AO}$; в) вектор $\vec{AS}$ (рис. 46).

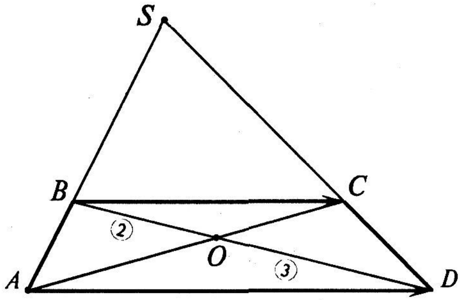


Рис. 46

Решение.

а) □ Векторы $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$ сонаправлены, причем $AD : BC = 3 : 2$. Поэтому $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AD}$, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AB}$.■

б) □ *Первый вариант решения:*

$\triangle AOD \backsim \triangle BOC$. Отсюда следует, что

$$AO : OC = AD : BC = 3 : 2$$

и поэтому $$AO : AC = 3 : 5.$$

Значит,

$$\vec{AO} = \frac{3}{5}\vec{AC} = \frac{2}{5}\vec{AD} + \frac{3}{5}\vec{AB}.$$

Приведем *другой вариант решения* примера 14 б).

$$(\triangle AOD \backsim \triangle BOC) \Rightarrow BO : OD = BC : AD = 2 : 3. \qquad (4)$$

В силу отношения (4) по формуле 5 (§ 9) деления отрезка в данном отношении имеем

$$\vec{AO} = \frac{2}{5}\vec{AD} + \frac{3}{5}\vec{AB}.■$$

в) □ $(\triangle SBC \backsim \triangle SAD) \Rightarrow BS : AS = BC : AD = 2 : 3$.

Значит, $AB : AS = 1 : 3$. Так как $\vec{AS} \uparrow\uparrow \vec{AB}$, то $\vec{AS} = 3\vec{AB} = 0 \cdot \vec{AD} + 3 \cdot \vec{AB}$, т.е. вектор $\vec{AS}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{AD}$ и $\vec{AB}$ с коэффициентами 0 и 3.■

Пример 15. Доказать, что биссектриса угла треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам (рис. 47).

Решение.

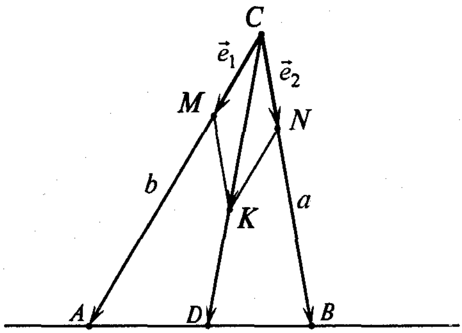


Рис. 47

☐ Введем обозначения: $\vec{CM} = \vec{e}_1$, $\vec{CN} = \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 1$, $CA = b$, $CB = a$. Надо доказать, что $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{b}{a}$.

Четырехугольник $CNKM$ — параллелограмм, а так как $CM = CN$, то это ромб. Поэтому $\vec{CK} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ параллелен биссектрисе CD угла C. Значит,

$$\vec{CD} = x\vec{CK} = x(\vec{e}_1 + \vec{e}_2). \tag{5}$$

Пусть $AD : AB = k$, тогда $DB : AB = 1 - k$.

По формуле (5) (§ 9) находим, что

$$\vec{CD} = k\vec{CB} + (1-k)\vec{CA} = k \cdot a\vec{e}_2 + (1-k)b\vec{e}_1. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует

$$x\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 = k \cdot a\vec{e}_2 + (1-k)b\vec{e}_1. \tag{7}$$

Отсюда из единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ получаем систему

$$\begin{cases} x = (1-k)b, \\ x = ka \end{cases} \Rightarrow ka = b(1-k) \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{k}{1-k} = \frac{AD}{DB}. \blacksquare$$

Пример 16. В параллелограмме $ABCD$ точки K и M — середины сторон BC и CD соответственно. Представить вектор $\vec{AD}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{AK}$ и $\vec{AM}$ (рис. 48).

Решение.

□ *1 способ.*

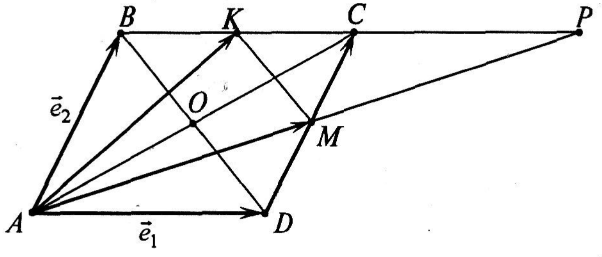


Рис. 48

Пусть P — точка пересечения прямых AM и BC. $\triangle ABP \backsim \triangle MCP$. Отсюда следует, что

$$\vec{AD} = \vec{CP} = \frac{2}{3}\vec{KP} = \frac{2}{3}(\vec{AP} - \vec{AK}) = \frac{2}{3}(2\vec{AM} - \vec{AK}) =$$
$$= -\frac{2}{3}\vec{AK} + \frac{4}{3}\vec{AM}.$$

2 способ. Приведем стандартное решение этой задачи, основанное на понятии разложения вектора по базису, т.е. на введении аффинных координат вектора.

Введем на плоскости базис $\left\{\vec{AD} = \vec{e}_1; \vec{AB} = \vec{e}_2\right\}$. В этом базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ имеем $\vec{AD} = (1;0)$; $\vec{AK} = \left(\frac{1}{2};1\right)$; $\vec{AM} = \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Тогда $\vec{AD} = x\vec{AK} + y\vec{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1, \\ x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ y = \frac{4}{3}. \end{cases}$

Итак, $\vec{AD} = -\frac{2}{3}\vec{AK} + \frac{4}{3}\vec{AM}$. ■

Пример 17. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (рис. 49).

Решение.

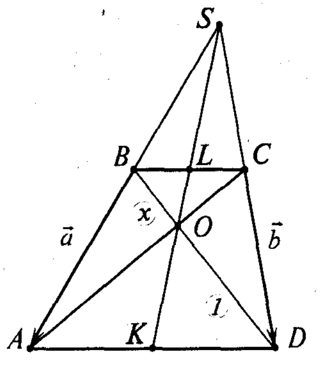


Рис. 49

□ Обозначим середины оснований AD и BC трапеции соответственно через K и L, точку пересечения диагоналей через O, точку пересечения продолжений боковых сторон, через S. Введем на плоскости базис $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SD} = \vec{b}$. $\Delta SAD \backsim \Delta SBC$ (т.к. $BC \parallel AD$). Пусть $SB : SA = SC : SD = x$. Тогда $\vec{SB} = x\vec{SA} = x\vec{a}$; $\vec{SC} = x\vec{SD} = x\vec{b}$. Применяя подобие ΔBOC и ΔAOD, а затем подобие ΔSBC и ΔSAD, имеем

$$BO : OD = BC : AD = SB : SA = x : 1.$$

По формуле деления отрезка в данном отношении [(4) §9] находим:

$$\vec{SO} = \frac{1}{1+x}\vec{SB} + \frac{x}{1+x}\vec{SD} = \frac{x}{1+x}(\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\vec{SK} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\vec{SL} = \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{SC}) = \frac{x}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Сравнивая эти разложения векторов $\vec{SO}$, $\vec{SK}$, $\vec{SL}$ по базису $\{\vec{a}; \vec{b}\}$, убеждаемся, что эти векторы коллинеарны, т.е. точки S, O, K, L лежат на одной прямой.■

Пример 18. Доказать, что если длины двух медиан в треугольнике равны, то этот треугольник равнобедренный (рис. 50).

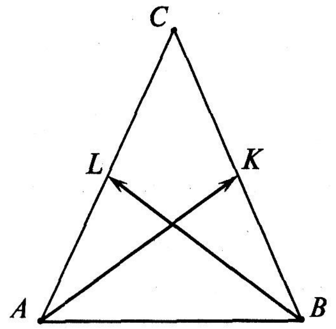


Рис. 50

Решение. □ Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC, L — середина стороны AC. Тогда

$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{CB} - \vec{CA} - \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CA}. \qquad (7)$$

Аналогично находим, что

$$\vec{BL} = \frac{1}{2}\vec{CA} - \vec{CB}. \qquad (8)$$

По условию

$$\left|\vec{AK}\right| = \left|\vec{BL}\right|. \qquad (9)$$

Учитывая (7) и (8), из равенства (9) получим

$$(6) \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CA}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\vec{CA} - \vec{CB}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left|\vec{CB}\right|^2 - \vec{CA}\cdot\vec{CB} + \left|\vec{CA}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\vec{CA}\right|^2 - \vec{CA}\cdot\vec{CB} + \left|\vec{CB}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left|\vec{CA}\right|^2 = \frac{3}{4}\left|\vec{CB}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{CA}\right| = \left|\vec{CB}\right|,$$

т.е. ΔABC — равнобедренный.■

Пример 19. Прямая AK проходит через вершину A прямоугольника $ABCD$ и через точку K, лежащую на стороне BC. Найти отношение $BK : KC$, если известно, что прямые AK и BD перпендикулярны, а $AD = 3\ AB$ (рис. 51).

Решение. □ Введем на плоскости прямоугольный базис $\left\{\vec{a}; \vec{b}\right\}$ такой, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{AD}$; $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{AB}$.

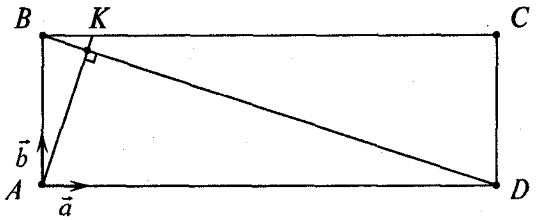


Рис. 51

Пусть длина отрезка AB равна m, т.е. $AB = m$. Тогда $\vec{AB} = m\vec{b}$, $\vec{AD} = 3m\vec{a}$. Пусть $\vec{BK} = x \cdot \vec{BC}$. Так как

$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{AB} + x\vec{BC} = 3mx\vec{a} + m\vec{b},$$

$$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = 3m\vec{a} - m\vec{b},$$

то условие $AK \perp BD \Leftrightarrow \vec{AK} \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3mx \cdot 3m - m \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{9}.$$

Значит, $BK = \frac{1}{9}BC$, т.е. $BK : KC = 1 : 8$.■

В примере 19 мы существенно воспользовались тем, что базис $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ — прямоугольный декартовый. Однако чаще удобнее вводить аффинный базис.

Пример 20. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка K — середина отрезка AD, точка P — середина отрезка OD, точка Q лежит на диагонали AC. Найти длину отрезка PQ, если известно, что прямые PQ и KB параллельны, $AD = 2$; $AB = \sqrt{2}$; $\angle BAD = 135°$ (рис. 52).

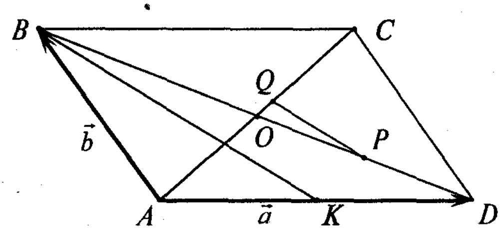


Рис. 52

Р е ш е н и е. □ Введем на плоскости аффинный базис $\{\vec{a} = \vec{AD}; \vec{b} = \vec{AB}\}$. Имеем

$$|\vec{a}| = 2\,,\ |\vec{b}| = \sqrt{2}\,,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 135^\circ = -2\,.$$

Так как $PQ \parallel KB$, то $\vec{PQ} = y\vec{KB}$, где y — неизвестное число. Аналогично, $OQ \parallel AC \Leftrightarrow \vec{OQ} = x\vec{AC}$. Для нахождения неизвестных x и y распишем векторное равенство $\vec{PQ} = y\vec{KB}$ в координатах.

Последовательно находим:

$$\vec{KB} = \vec{KA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\,;\ \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}\,;$$

$$\vec{OQ} = x(\vec{a} + \vec{b})\,;\ \vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}\,;$$

$$\vec{PO} = \frac{1}{2}\vec{DO} = \frac{1}{4}\vec{DB} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})\,,$$

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) + x(\vec{a} + \vec{b}) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(x + \frac{1}{4}\right)\vec{b}\,,$$

$$y\vec{KB} = -\frac{1}{2}y\vec{a} + y\vec{b}\,.$$

Сравнивая коэффициенты в равенстве

$$\vec{PQ} = y\vec{KB}$$

при векторах базиса $\{\vec{a};\vec{b}\}$, получим

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}y, \\ x + \dfrac{1}{4} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{12}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Итак, $$PQ = \frac{1}{3}KB\,.$$

Найдем длину отрезка KB. Так как $\vec{KB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, то

$$|\vec{KB}|^2 = \left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)^2 = |\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + 2 = 5.$$

Откуда следует $KB = \sqrt{5}$ и $PQ = \frac{1}{3}KB = \frac{1}{3}\sqrt{5}$. ■

Пример 21. Существует ли в плоскости треугольника ABC такая точка H, чтобы $\vec{HA} + 3\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$ (рис. 53)?

Решение.

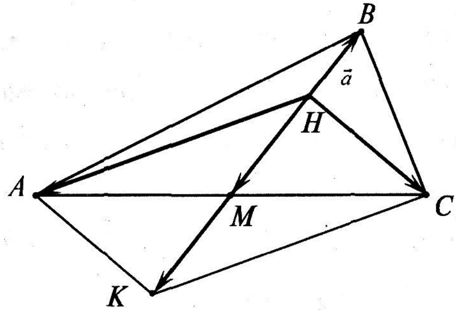


Рис. 53

□ В $\triangle ABC$ проведем медиану $[BM]$ и разделим $[BM]$ в отношении $1 : 3/2 = BH : HM$. Пусть $\vec{HB} = \vec{a}$, тогда $\vec{HM} = -\frac{3}{2}\vec{a}$, $\vec{HA} + \vec{HC} = \vec{HK} = -3\vec{a}$ (по формуле середины отрезка). Имеем $\vec{HA} + 3\vec{HB} + \vec{HC} = (\vec{HA} + \vec{HC}) + 3\vec{HB} = -3\vec{a} + 3\vec{a} = \vec{0}$. Точка H для любого $\triangle ABC$ существует и единственна, что непосредственно следует из построения точки H.■

Пример 22. Внутри $\triangle ABC$ взята точка O. Докажите, что для того, чтобы $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ были равновелики, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ (рис. 54).

Решение.

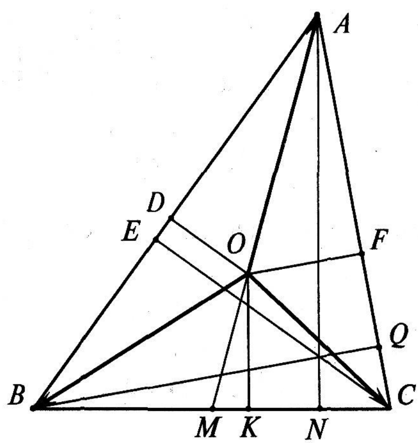


Рис. 54

□ Достаточность. Пусть $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$. (10)

Докажем, что $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OBC} = S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3}S$, где $S = S_{\Delta ABC}$.

Пусть $[OK] \perp [BC]$, $[AN] \perp [BC]$. $(\Delta MKO \sim \Delta MNA) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{OK}{AN} = \frac{OM}{MA} = \frac{1}{3}$ в силу свойства (10).

Значит, $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}OK \cdot BC = \frac{1}{6}AN \cdot BC = \frac{1}{3}S$.

Аналогично находим, что

$S_{\Delta OBA} = \frac{1}{3}S$; $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{3}S$.

Необходимость. Пусть $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OBC} = S_{\Delta OAC} = \frac{1}{3}S$.

Так как ΔBOC и ΔABC имеют одно и тоже основание BC, то $\left(S_{\Delta BOC} = \frac{1}{3}S;\ S_{\Delta ABC} = S\right) \Rightarrow OK = \frac{1}{3}AN$. Аналогично находим $OF = \frac{1}{3}BQ$, где $BQ \perp AC$; $OD = \frac{1}{3}CE$, где $CE \perp AB$.
Следовательно, точка O есть точка пересечения медиан ΔABC, т.е. выполняется соотношение (10).■

Пример 23. Пусть точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M_1, M_2, M_3, M_4 — центры масс треугольников OAB, OBC, OCD, ODA. Докажите, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм (рис. 55).

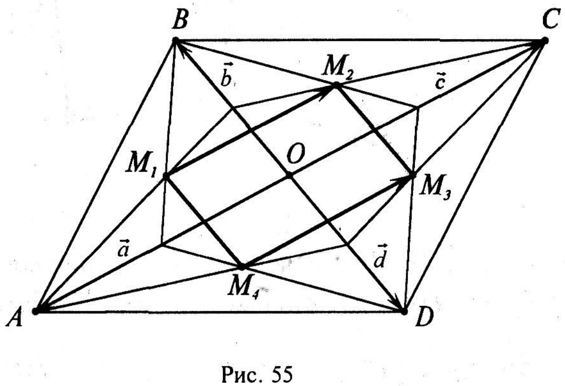


Рис. 55

Решение. □ Пусть $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$. Так как M_1 и M_2 соответственно центры масс ΔAOB и ΔBOC, то

$$\left(\vec{OM_1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}), \vec{OM_2} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right) \Rightarrow \vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = \\ = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}). \tag{11}$$

Аналогично, $\vec{OM_4} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d})$, $\vec{OM_3} = \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{c})$ и

$$\vec{M_4M_3} = \vec{OM_3} - \vec{OM_4} = \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d}) = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}). \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) следует $\vec{M_1M_2} = \vec{M_4M_3}$. Итак, $\left(\vec{M_1M_2} \nparallel \vec{M_1M_4};\ \vec{M_1M_2} = \vec{M_4M_3}\right)$ $\Rightarrow$ ($M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм).■

Пример 24. Точка M — середина отрезка $[AB]$, точка M' — середина $[A'B']$. Докажите, что середины отрезков $[AA']$, $[BB']$, $[MM']$ расположены на одной прямой (рис. 56).

Решение.

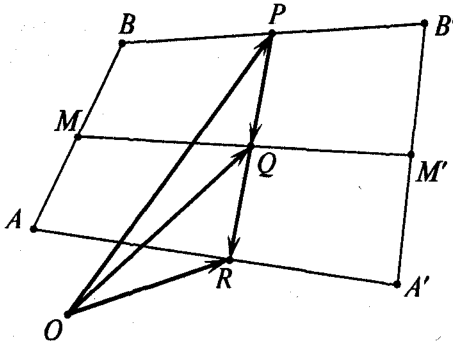


Рис 56

□ Пусть точка O — произвольная точка плоскости и $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OA'} = \vec{a}'$, $\vec{OB'} = \vec{b}'$. По свойству середины отрезка имеем

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b}'), \vec{OR} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}'),\ \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),\ \vec{OM}' = \frac{1}{2}(\vec{a}' + \vec{b}').$$

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM}') = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a}' + \vec{b}').$$

Учитывая эти равенства, находим

$$\vec{QR} = \vec{OR} - \vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}\,') - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a}\,' + \vec{b}\,') =$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{a}\,') - \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{b}\,'). \qquad (13)$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a}\,' + \vec{b}\,') - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b}\,') =$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{a}\,') - \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{b}\,'). \qquad (14)$$

Из равенств (13) и (14) следует, что $\vec{QR} \uparrow\uparrow \vec{PQ}$, т.е. точки P, Q, R лежат на одной прямой.■

§ 11. УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка K — середина стороны CD; прямые BC и DE пересекаются в точке M. Представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AF}$: а) вектор $\vec{AK}$; б) вектор $\vec{FM}$; в) вектор $\vec{CE}$.

№ 2. Вектор $\vec{a}$ имеет в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ координаты (7; 2), $\vec{b} = (4; 1)$, $\vec{c} = (1; 3)$. Доказать, что векторы $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ образуют базис. Найти координаты вектора $2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$ в базисе $\{\vec{b}; \vec{a}\}$.

№ 3. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $AD : BC = 3 : 1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, S — точка пересечения продолжений боковых сторон, M — середина стороны CD. Найти координаты $\vec{AO}$ в базисе $\{\vec{OS}; \vec{OM}\}$.

№ 4. Дан ΔABC. Доказать, что если для некоторой точки M выполняется равенство $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$, то точка M — точка пересечения медиан ΔABC.

№ 5. Точка K лежит на стороне BC ΔABC, точка L — на стороне AC, причем $KB : KC = 1 : 3$, $CL : LA = 2 : 1$. Прямые AK и BL

пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезки AK и BL?

№ 6. Точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC ΔABC, причем $AK : KB = BL : LC = CM : MA$. Доказать, что точки пересечения медиан ΔABC и ΔKML совпадают.

№ 7. Треугольник ABC пересекается прямыми, параллельными стороне BC. Доказать, что точки пересечения диагоналей всех образовавшихся при этом трапеций лежат на медиане треугольника, проходящей через вершину A.

№ 8. Длины сторон ΔABC равны: $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 3$. Вычислить скалярные произведения $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ и $\vec{AC} \cdot \vec{BK}$, где K — точка на отрезке AC такая, что $AK : KC = 2 : 1$.

№ 9. Точки K и L лежат на катете AC прямоугольного ΔABC с прямым углом C, а точка D — на гипотенузе AB, причем $AC = 3BC$, $BC = CK = LA$, $\angle KDL$ — прямой. В каком отношении делит точка D гипотенузу AB ?

№10. Точки K и L лежат соответственно на сторонах AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$, а точка M — на стороне EF. Известно, что $EM : MF = 4 : 9$, $KL = AB$, а прямые KL и BM перпендикулярны. Найти отношения $AK : KB$ и $BL : LC$.

№ 11. В ΔABC точка H делит сторону AB пополам, а точка M делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. $(HM) \cap (AC) = D$. Доказать, что $AC = CD$.

№ 12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Доказать, что $CE = FA$.

№ 13. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

№ 14. Зная длины a и b сторон прямоугольника, найти косинус угла между диагоналями.

№ 15. На стороне AD и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

№ 16. Точка M — середина отрезка AB, точка M' — середина отрезка $A'B'$. Докажите, что середины отрезков AA', BB' и MM' расположены на одной прямой.

№ 17. В каком отношении делятся отрезки BN и CM точкой их пересечения, если $ABCD$ — параллелограмм и $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 1$.

№ 18. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания. Какую часть площади треугольника составляет каждая из 6 частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?

№ 19. Найти длину медианы треугольника, зная длины его сторон.

№ 20. Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

№ 21. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ обозначим M и N середины сторон CD и DE соответственно. Под каким углом пересекаются прямые AM и BN?

№ 22. В прямоугольнике треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. В каком отношении делится отрезок AB точкой H. (Выразить $\vec{CH}$ через $\vec{a} = \vec{CB}$ и $\vec{b} = \vec{CA}$. Выразить CH через a и b).

ВВЕДЕНИЕ

Успешное решение задачи в значительной степени зависит от выбора метода ее решения, поэтому любой студент должен иметь представление о том, каким методом решить ту или иную задачу, какие направления рассуждений в большей степени использовать.

Пособие состоит из введения, трех глав и списка литературы и посвящено векторно-координатному методу решения стереометрических задач.

Векторная алгебра и координатный метод, рассматриваемые в аналитической геометрии, являются мощным аппаратом для решения многих геометрических задач и особенно геометрических задач метрического характера (метрические задачи). Метрические задачи — это задачи, связанные с измерением, метрикой и, следовательно, с применением свойств скалярного произведения векторов.

При решении метрических задач мы применяем свойства проекции вектора на ось (первая глава), специальным образом подобранную (удобную для решения задач) аффинную систему координат (вторая глава) и четыре основных векторных соотношения (третья глава). Эти методы сводят геометрическую задачу к алгебраической, решить которую значительно легче, чем исходную геометрическую.

В пособии дана методика и практикум по решению стереометрических задач (приведены решения 52 задач) и 247 задач с ответами даны для самостоятельного решения.

Глава I

ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Векторная алгебра и координатный метод являются основными (базовыми) методами для решения многих геометрических задач и особенно геометрических задач метрического характера (метрические задачи). Эти методы сводят геометрическую задачу к алгебраической, решить которую значительно проще, чем исходную геометрическую.

Предварительно введем в рассмотрение одно из основных (фундаментальных) понятий векторной алгебры — проекции вектора на ось (на вектор), что позволяет:

1) дать новые способы решения метрических задач по сравнению с традиционными [8; 16; 36].

2) убедиться, что с помощью понятия проекции вектора на ось решения ряда основных метрических задач приобретают более рациональный и общий вид.

§ 1.1. Проекция вектора на ось

Определение 1. На плоскости параллельной проекцией точки A на ось l называется точка A_1 — точка пересечения оси l с прямой, проведенной через точку A параллельно вектору $\vec{a}$, задающему направление проектирования.

Определение 2. Параллельной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l (на вектор $\vec{e}$) называется координата вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ относительно базиса $\vec{e}$ оси l, где точки A_1 и B_1 — параллельные проекции соответственно точек A и B на ось l (рис. 1.1).

Согласно определению имеем

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{e} \Leftrightarrow x = пр_l \overrightarrow{AB} = пр_{\vec{e}} \overrightarrow{AB}.$$

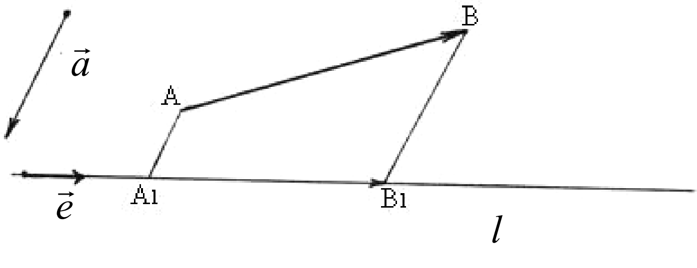


Рис. 1.1

Определение 3. Если $\vec{a} \perp l$ *и базис* $\vec{e}$ *оси l декартов, то есть* $|\vec{e}| = 1$*, то проекция вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l *называется ортогональной* (рис. 1.2).

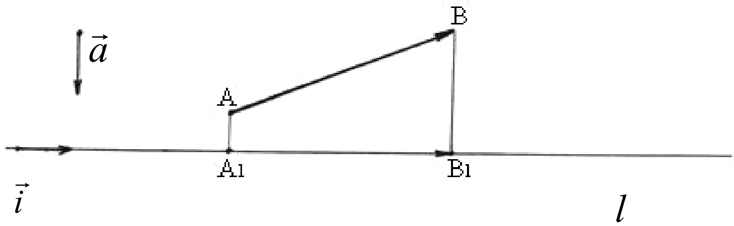


Рис. 1.2

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{i} \Leftrightarrow x = орт.пр_l \overrightarrow{AB} = орт.пр_{\vec{i}} \overrightarrow{AB}.$$

В пространстве определение 2 проекции вектора на ось остается в силе, только направление проектирования задается двумя неколлинеарными векторами (рис. 1.3).

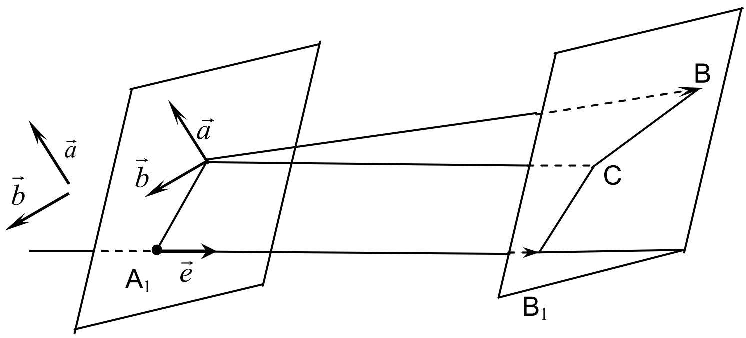


Рис. 1.3

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{e} \Leftrightarrow x = пр_{\vec{e}} \overrightarrow{AB} = пр_l \overrightarrow{AB}.$$

Из определения проекции вектора на ось вытекает, что каждая координата вектора есть проекция этого вектора на ось, определяемую соответствующим базисным вектором. При этом направление проектирования задается двумя другими базисными векторами, если проектирование ведется (рассматривается) в пространстве, или другим базисным вектором, если проектирование рассматривается на плоскости (рис. 1.4).

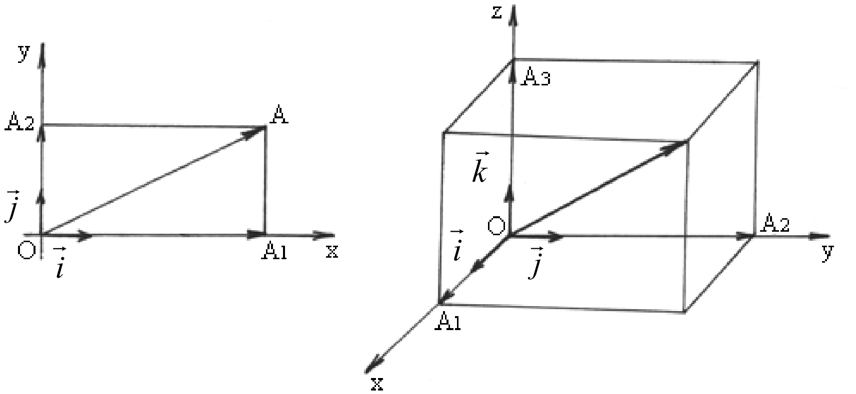


Рис. 1.4

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}_1 \Leftrightarrow x = opm.np_{\vec{i}}\overrightarrow{OA} = opm.np_{\vec{i}}\vec{a}\ ,$$

$$\overrightarrow{OA_2} = y\vec{e}_2 \Leftrightarrow y = opm.np_{\vec{j}}\overrightarrow{OA} = opm.np_{\vec{j}}\vec{a}\ ,$$

$$\overrightarrow{OA_3} = z\vec{e}_3 \Leftrightarrow z = opm.np_{\vec{k}}\overrightarrow{OA} = opm.np_{\vec{k}}\vec{a}\ .$$

Т е о р е м а 2. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла между положительным направлением оси l и $\vec{a}$, т. е.

$$opm.np_l\vec{a} = opm.np_{\vec{i}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}\right). \qquad (1)$$

$$\circ\ \overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{i} \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |x| \cdot |\vec{i}| = |x|.$$

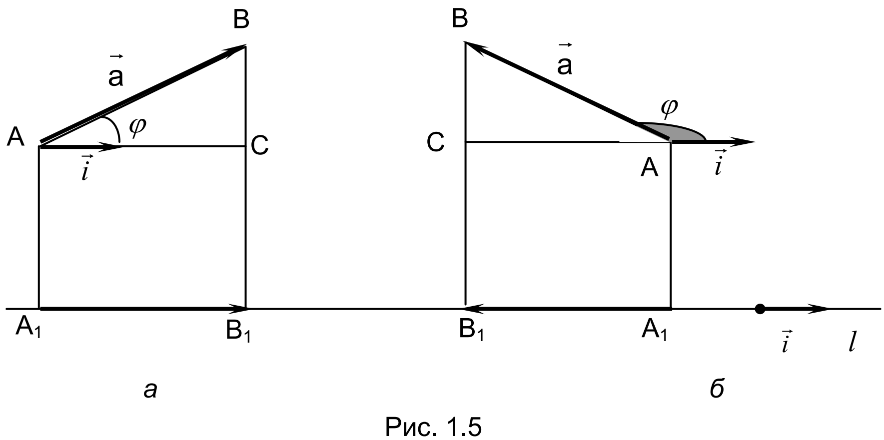


Рис. 1.5

С другой стороны,

$$\left|x\right| = \left|opm.np_l\,\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = AC\,. \tag{2}$$

Из Δ ACB находим

$$AC = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\cos\widehat{BAC}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right)\right|. \tag{3}$$

Подставим значение *AC* в равенство (2), получим

$$\left|x\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right)\right|. \tag{4}$$

Так как числа x и $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right)$ одного знака в обоих рассматриваемых случаях ((рис. 1.5, *а*) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right) = \varphi$; (рис. 1.5, *б*) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right) = \pi - \varphi$), то из равенства (4) следует

$$x = opm.np_l\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right). \bullet \tag{5}$$

З а м е ч а н и е . В дальнейшем мы будем рассматривать только ортогональную проекцию вектора на ось и поэтому слово «орт» (ортогональная) в обозначении проекции будем опускать.

Приведем ряд формул, которые используются в дальнейшем при решении задач.

а) Проекция вектора на ось.

Если $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{e}}\right)$, то ортогональная проекция $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{e}$ согласно формуле (5) имеет вид

$$np._{\vec{e}}\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi\,. \tag{6}$$

б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Поэтому

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|},\ np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}. \tag{7}$$

в) Расстояние от точки до плоскости.

Пусть α — данная плоскость с нормальным вектором $\vec{n}$, M — данная точка, d — расстояние от точки M до плоскости α (рис. 1.6).

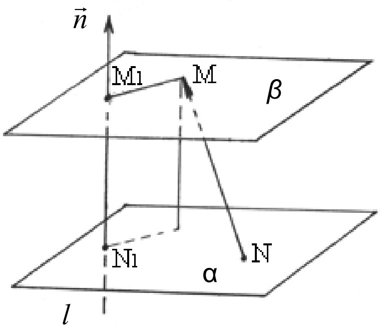


Рис. 1.6

Если N — произвольная точка плоскости α, а M_1 и N_1 — проекции точек M и N на ось $l \parallel \vec{n}$, то

$$d = M_1 N_1 = \left| np_{\vec{n}} \overline{NM} \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overline{NM} \right|}{\left| \vec{n} \right|}. \tag{8}$$

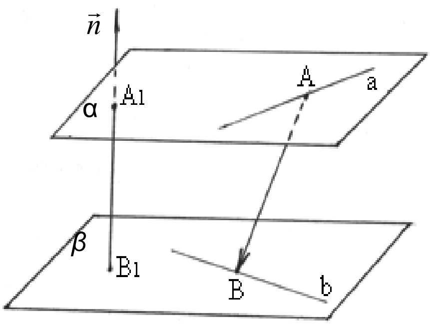


Рис. 1.7

г) Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые, $\vec{n}$ — перпендикулярный им вектор, A и B — произвольные точки прямых a и b соответственно (рис. 1.7), A_1 и B_1 — проекции точек A и B на $\vec{n}$, тогда

$$d = A_1 B_1 = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{AB} \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \vec{n} \right|}. \tag{9}$$

д) Расстояние от точки до прямой.

Пусть l — данная прямая с направляющим вектором $\vec{p}$, M — данная точка, N — ее проекция на прямую l, тогда $d = MN$ — искомое расстояние (рис. 1.8).

Если A — произвольная точка прямой l, то в прямоугольном треугольнике MNA гипотенуза MA и катет $AN = \left| np_{\vec{p}} \overrightarrow{MA} \right|$ могут быть найдены. Значит,

$$MN = \sqrt{MA^2 - AN^2}.$$

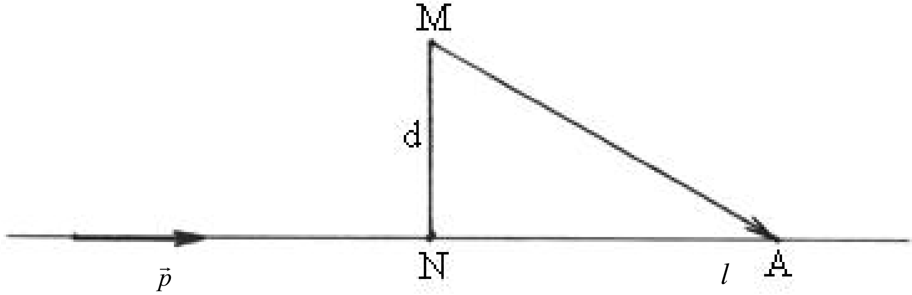


Рис. 1.8

е) Угол между прямой и плоскостью.

Пусть $\vec{p}$ — направляющий вектор данной прямой l, $\vec{n}$ — нормальный вектор данной плоскости α, l_1 — проекция прямой l на плоскость α (рис. 1.9).

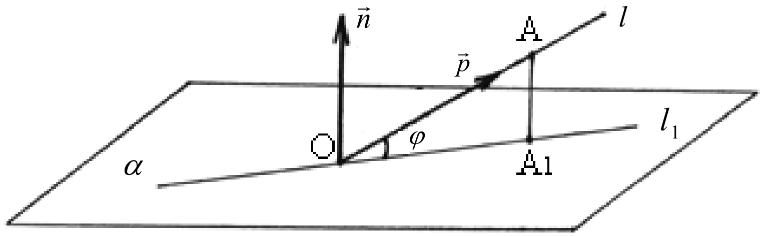


Рис. 1.9

Как известно, угол φ между прямой l и ее проекцией l_1 на плоскость α называется углом между прямой и плоскостью. Имеем

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right| = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n}|}. \qquad (10)$$

Приведем примеры решения метрических задач векторно-координатным методом.

§ 1.2. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Задача 1.1. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 4. Точки M и N соответственно середины ребер B_1C_1 и A_1B_1. Найти: расстояние от точки M до прямой AN; расстояние от точки M до плоскости, проходящей через прямую AN и параллельной прямой BD.**

○ Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.10.

Относительно выбранной системы координат имеем:

B (0; 0; 0), A (4; 0; 0), D (4; 4; 0), N (2; 0; 4), M (0; 2; 4),

$$\overrightarrow{AN} = (-2; 0; 4), \quad \overrightarrow{AM} = (-4; 2; 4), \quad \overrightarrow{BD} = (4; 4; 0).$$

○ **1-й способ.** Найдем расстояние от точки M до прямой AN.

Пусть M_1 ортогональная проекция точки M на прямую AN. Тогда

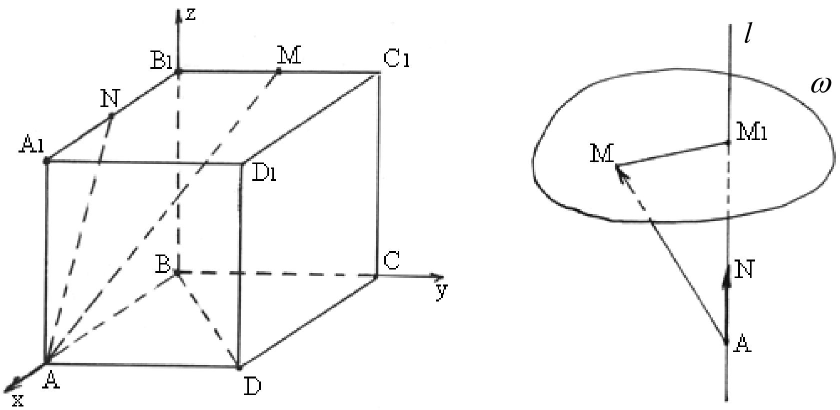


Рис. 1.10

$$AM_1 = \left|np_{\overrightarrow{AN}}\overrightarrow{AM}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\overrightarrow{AN}\right|} = \frac{|8+0+16|}{\sqrt{4+0+16}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Длина отрезка

$$AM = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{16+4+16} = 6.$$

По теореме Пифагора из ΔAM_1M находим

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{36 - \frac{144}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

○ **2-й способ.** Проведем через точку M плоскость $\omega \perp (AN)$ (как известно, такая плоскость единственная) и пусть $M_1 = (AN) \cap \omega$ (рис. 1.10).

а) Так как $(AN) \perp \omega \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \perp \omega$, то $\overrightarrow{AN}$ — нормальный вектор плоскости ω. Уравнение плоскости ω получим по ее нормальному вектору $\overrightarrow{AN}$ и точке M:

$$\omega\colon\ -2(x-0)+4(z-4)=0 \Leftrightarrow x-2z+8=0. \tag{11}$$

б) Теперь найдем координаты точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ Действительно,

$$\overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AM_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_2} = t\cdot\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-4=-2t, \\ y_1-0=0, \\ z_1=4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2t+4, \\ y_1=0, \\ z_1=4t. \end{cases} \tag{12}$$

Параметр t определим из условия, что точка $M_1 \in \omega$. Подставляя координаты точки M_1 (12) в уравнение (11), получим $t=\frac{6}{5}$. Отсюда, в силу равенств (12), имеем $M_1\left(\frac{8}{5}; 0; \frac{24}{5}\right)$.

в) Поскольку $\big((AN) \perp \omega; (MM_1) \subset \omega\big) \Rightarrow (MM_1) \perp (AN)$, то MM_1 — искомое расстояние. По координатам точек M_1 и M вычисляем расстояние от точки M до прямой AN:

$$\overrightarrow{MM_1} = \left(\frac{8}{5}; -2; \frac{4}{5}\right),$$

$$MM_1 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{\frac{64}{25}+4+\frac{16}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}. \ \bullet$$

○ **1-й способ.** Перейдем к нахождению расстояния от точки M до плоскости α, где $\alpha \parallel (BN)$; $(AN) \subset \alpha$.

а) Пусть $\vec{n} = (x; y; z)$ — нормальный вектор плоскости α, т. е.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=0, \\ -2x+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ z=\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(2;-2;1).$$

б) Расстояние $\rho(M\,;\alpha)$ от точки М до плоскости α вычислим по формуле (8). Для этого нужно знать координаты какой-нибудь точки плоскости α.

Нам известны две точки $A(4;0;0)$ и $N(2;0;4)$ на прямой $AN \subset \alpha$.

Итак, если взять точку $A \in \alpha$, то

$$\rho(M\,;\alpha) = \left|np_{\vec{n}}\,\overrightarrow{AM}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|-8-4+4|}{\sqrt{4+4+1}} = 2\frac{2}{3}.$$

Аналогичный результат получим, если на плоскости взять точку N или, вообще, любую иную точку плоскости α. Действительно, $\overrightarrow{NM} = (-2;\,2;\,0)$ и поэтому

$$\rho(M\,;\alpha) = \left|np_{\vec{n}}\,\overrightarrow{NM}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{NM}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}\cdot|-4-4+0| = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.\ \bullet$$

В качестве упражнения (задачи) можно вывести формулу расстояния от точки до плоскости, используя свойства скалярного умножения векторов.

Дано: $A(x_0, y_0, z_0)$, ω: $ax + by + cz + d = 0$.

Найти: $\rho(A,\omega)$ ***— расстояние от точки А до плоскости ω.***

○ Пусть $\rho(A,\omega) = AB$, где $B(x_1, y_1, z_1)$ — ортогональная проекция точки А на плоскость ω (рис. 1.11.)

Имеем: 1) $\vec{n} = (a, b, c)$ — нормальный вектор плоскости ω.

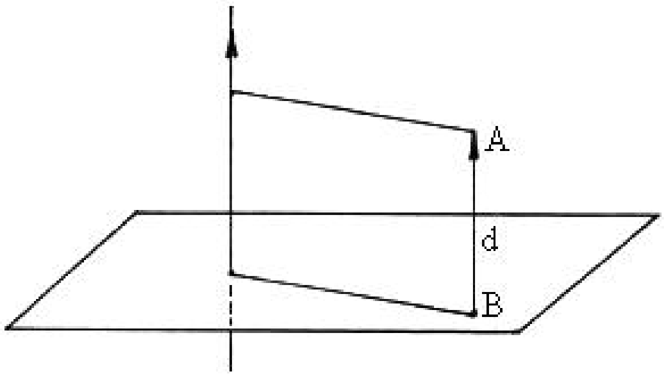


Рис. 1.11

$$\overrightarrow{BA} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1),\ \vec{n}\,||\,\overrightarrow{BA}\,.$$

По определению скалярного произведения векторов находим:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = \left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{BA}}\right) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\rho\cdot(\pm 1), \qquad (13)$$

причем знак «плюс» берется, когда $\vec{n}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BA}$, а знак «минус», когда $\vec{n}\downarrow\uparrow\overrightarrow{BA}$.

2) $B\in\omega \Leftrightarrow ax_1+by_1+cz_1+d=0 \Leftrightarrow d=-ax_1-by_1-cz_1.$ (14)

3) Теперь выразим скалярное произведение $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ через координаты, учитывая равенство (14):

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1) = ax_0+by_0+cz_0+d\,. \qquad (15)$$

Берем по модулю обе части в равенствах (13) и (15) и, приравнивая правые части, получим:

$$\rho = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (16)$$

○ **2-й способ.** Сначала найдем уравнение плоскости α по ее нормальному вектору $\vec{n}=(2;-2;1)$ и начальной точке A(4; 0; 0):

$$\alpha:\ 4(x-2)-2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-2y+z-8=0.$$

По формуле (16) вычисляем расстояние от точки M(0; 2; 4) до плоскости α:

$$\rho(M;\alpha) = \frac{\left|4\cdot 0-2\cdot 2+4-8\right|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: 1) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$; 2) $2\frac{2}{3}$. ●

Задача 1.2. **Дан прямоугольный параллелепипед** $ABCDA_1B_1C_1D_1$, **у которого** $AB=3a,\ AA_1=AD=a.$ **Точка M — середина ребра** D_1C_1. **Найдите расстояние от точки C до прямой BM** (рис. 1.12).

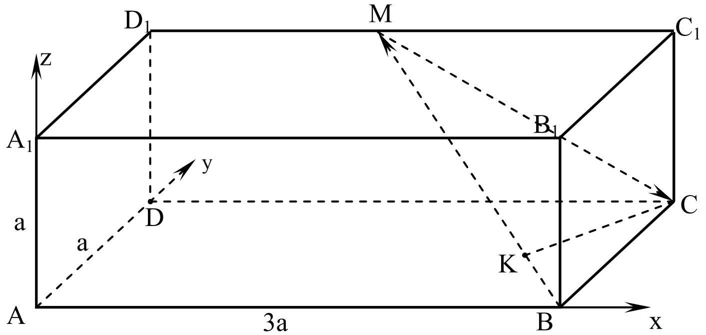


Рис. 1.12

○ 1. Выберем систему координат так, как указано на рис. 1.12. Найдем координаты точек и векторов относительно выбранной системы координат: $C(3a;a;o)$, $M\left(\frac{3a}{2};a;a\right)$, $B(3a;o;o)$,

$$\overrightarrow{BM} \overset{\text{def}}{=} \vec{p} = \left(-\frac{3a}{2};a;a\right),\ \overrightarrow{MC} \overset{\text{def}}{=} \vec{m} = \left(\frac{3a}{2};0;-a\right).$$

2. Пусть K основание перпендикуляра, проведенного из точки C на прямую BM, т. е. KC = h — расстояние от точки C до прямой (BM). Далее вычисляем последовательно:

a) $MK = \left|\text{орт.пр}_{\vec{p}}\vec{m}\right| = \dfrac{|\vec{p}\cdot\vec{m}|}{|\vec{p}|} = \dfrac{\left|-\frac{9a^2}{4}-a^2\right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+a^2+a^2}} = \dfrac{13a}{2\sqrt{17}}$;

b) длину отрезка $MC = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4}+a^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$;

c) по теореме Пифагора находим

$$h = KC = \sqrt{MC^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{4} - \frac{169a^2}{4\cdot 17}} = \frac{\sqrt{221}a}{17}. \bullet$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{221}a}{17}$.

Задача 1.3. **На ребре правильного тетраэдра MABC взята точка K — середина этого ребра, а на ребре MB взята точка P. Считая ребро тетраэдра равным a, найдите расстояние от точки P до прямой CK, если MP : MB = 1:4** (рис. 1.13).

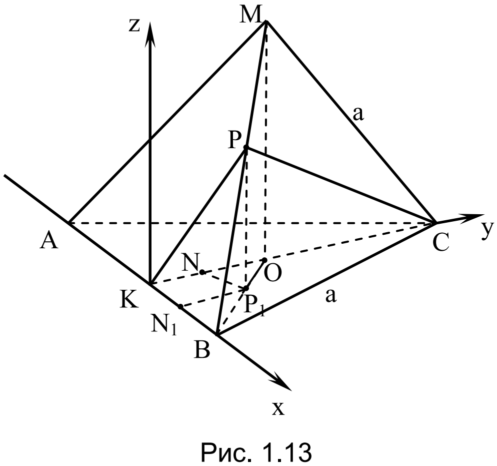


Рис. 1.13

1. Произведем предварительные вычисления:

a) $\triangle CKB:\ KC=\sqrt{CB^2-KB^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OC=\frac{2}{3}KC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (по свойству медиан правильного треугольника ABC).

b) $\triangle MOC:\ MO=\sqrt{MC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$

c) Пусть PP_1 — перпендикуляр к плоскости (ABC), т. е. $(PP_1)\parallel OM;$ $(\triangle PP_1B\subset\cap\triangle BOM)\Rightarrow OP_1:P_1B=1:3\Rightarrow KN_1:N_1B=1:3$ и $NO:NK=1:3.$ Отсюда получаем, что $KN_1=\frac{1}{4}\cdot KB=\frac{a}{8}$ и $NK=\frac{3}{4}KO=\frac{3}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{8}$ (рис. 2.14). Кроме того, $PP_1=\frac{3}{4}OM=\frac{3}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$

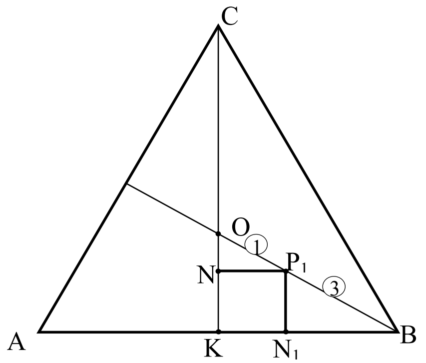


Рис. 1.14

2. Выберем систему координат так, как указано на рис. 1.13. Относительно выбранной системы координат имеем:

$$K(o;o;o;),\ C\left(o;\frac{a\sqrt{3}}{2};o\right),\ P\left(\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{3}}{8};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right),$$

$$\overrightarrow{KP}=\left(\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{3}}{8};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right);\ \overrightarrow{KC}=\left(o;\frac{a\sqrt{3}}{2};o\right).$$

3. Пусть точка F — проекция точки P на прямую KC (рис. 1.15). Тогда $KF=\left|\text{орт.пр}_{\overline{KC}}\overrightarrow{KP}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KC}\right|}{\left|\overrightarrow{KC}\right|}=\frac{3a^2}{16\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}a}{8}.$

$$KP = \left|\overrightarrow{KP}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{64} + \frac{3a^2}{64} + \frac{6a^2}{16}} = \frac{2\sqrt{7}a}{8}.$$

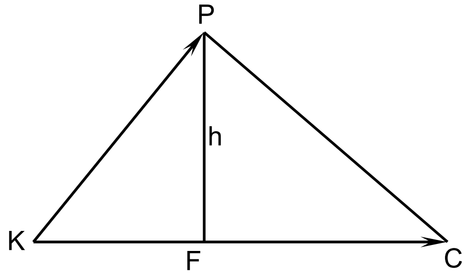


Рис. 1.15

7. Из прямоугольного треугольника KFP находим расстояние от точки P до прямой KC:

$$h = PF = \sqrt{KP^2 - KF^2} = \sqrt{\frac{28a^2}{64} - \frac{3a^2}{64}} = \frac{5a}{8}. \bullet$$

Ответ: $\frac{5a}{8}$.

Задача 1.4. **Точка O — центроид грани CC_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки D до прямой ℓ, проходящей через вершину B_1 параллельно прямой BO** (рис. 1.16).

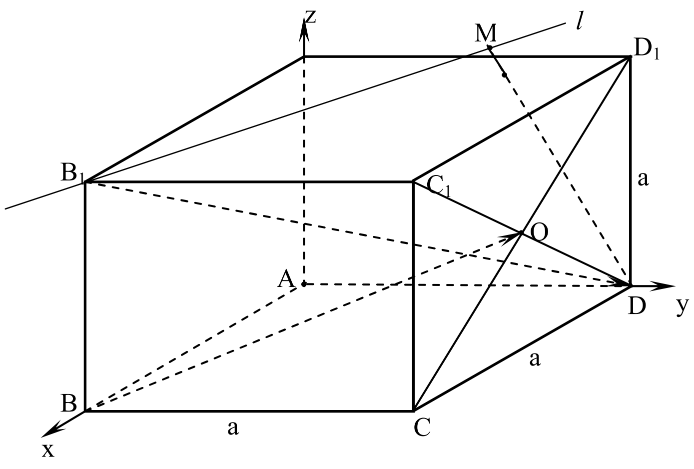


Рис. 1.16

○ 1. По условию $\ell \parallel (BO)$ и $\overrightarrow{BO} \parallel (BO)$. Следовательно, $\overrightarrow{BO} \overset{\text{def}}{=} \vec{p}$ — направляющий вектор прямой ℓ. Выберем декартову систему координат так, как указано на рис. 1.16. и найдем координаты следующих точек и векторов в этой системе координат:

$$B_1(a;o;a),\ D(o;a;o),\ B(a;o;o),\ O\left(\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{B_1D} = (-a;a;-a),\ \overrightarrow{BO} = \left(-\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}\right) \overset{\text{def}}{=} \vec{p}.$$

2. Пусть DM — это перпендикуляр к прямой l, тогда

$$B_1M = \left|\text{орт.пр}_{\vec{p}}\overrightarrow{B_1D}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{B_1D}\cdot\vec{p}\right|}{|\vec{p}|} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$B_1D = \left|\overrightarrow{B_1D}\right| = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора из $\triangle B_1MD$ находим $DM = \sqrt{B_1D^2 - B_1M^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$. •

Ответ: $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Задача 1.5. **Основание пирамиды MABC является правильный треугольник, ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, и MC = AB. Считая AB = a, найдите расстояние от точки** $P \in MA$ **до плоскости** ω**, проходящей через точку A перпендикулярно ребру MB, если** $MP : PA = 1 : 3$ (рис. 1.17).

○ 1. В выбранной системе координат (см. рис. 1.17) находим координаты следующих точек и векторов:

$$B\left(\frac{a}{2};o;o\right);\ A\left(-\frac{a}{2};o;o\right),\ M\left(o;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right),\ P\left(-\frac{a}{8};\frac{3\sqrt{3}a}{8};\frac{3}{4}a\right)$$

$\overrightarrow{BM} \overset{\text{def}}{=} \vec{n} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$ — нормальный вектор плоскости ω (из условия).

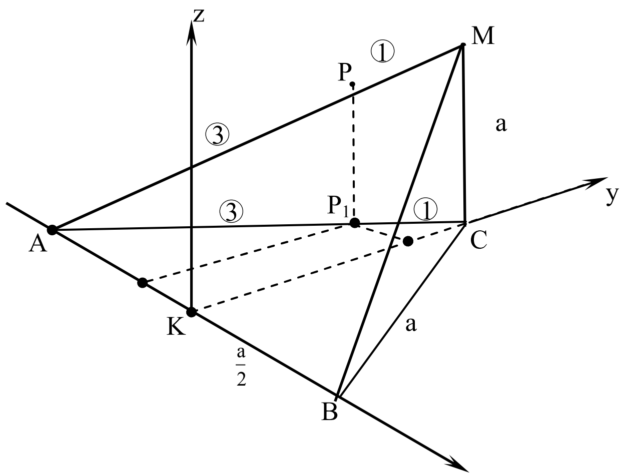


Рис. 1.17

2. Найдем уравнение плоскости ω по точке A и нормальному вектору $\vec{n}$:

$$\omega: -\frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)+\frac{a\sqrt{3}y}{2}+az=0 \Leftrightarrow 2x-2\sqrt{3}y-4z+a=0.$$

Расстояние от точки P до плоскости ω найдем по формуле (16) (§ 1.2):

$$\rho(P;\omega)=\frac{\left|-\frac{2a}{8}-\frac{3\sqrt{3a}}{8}\cdot 2\sqrt{3}-4\cdot\frac{3}{4}a+a\right|}{\sqrt{4+12+16}}=\frac{9a}{2\sqrt{32}}=\frac{9\sqrt{2}a}{16}. \bullet$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}a}{16}$.

Задача 1.6. **В правильной пирамиде MABCD высота MO в два раз больше стороны основания. Считая AB = a, найдите расстояние от точки M до плоскости, проходящей через прямую AD перпендикулярно плоскости MBC (рис. 1.18).**

○ 1. В системе координат, указанной на рис. 1.18, найдем координаты следующих точек и векторов:

$$M(o;o;2a),\ P\left(o;\frac{a}{2};o\right),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};o\right),\ N\left(o;-\frac{a}{2};o\right),$$

$$\overrightarrow{MB}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-2a\right);\ \overrightarrow{PB}=\left(\frac{a}{2};o;o\right),\ \overrightarrow{NA}=\overrightarrow{PB}=\left(\frac{a}{2};o;o\right),\ \overrightarrow{NM}=\left(o;\frac{a}{2};2a\right).$$

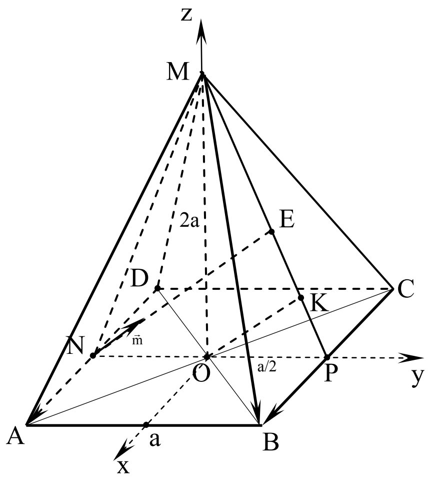


Рис. 1.18

2. Пусть ω — плоскость, проходящая через прямую AD, и $\omega \perp \gamma$, где $\gamma = (MBC)$. Обозначим через $\vec{m} = (x;y;z)$ — нормальный вектор плоскости γ, тогда $\vec{m} \perp \overrightarrow{MB}$, $\vec{m} \perp \overrightarrow{PB}$:

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}y - 2az = 0, \\ \frac{a}{2}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 4z \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = \left(0;4;1\right).$$

3. Так как $(\vec{m} \perp \gamma, \omega \perp \gamma) \Rightarrow \vec{m} \parallel \omega$. обозначим через $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ — нормальный вектор плоскости ω:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{m}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{NA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y_1 + z_1 = 0, \\ \frac{a}{2}x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ z_1 = -4y_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(0;-1;4\right).$$

4. Пусть $\rho(M,\omega)$ — расстояние от точки M до плоскости ω, которое найдем по формуле (8) (§ 1.1).

$$\rho(M,\omega) = \left|\text{орт.пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{NM}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|-\frac{a}{2} + 8a\right|}{\sqrt{17}} = \frac{15\sqrt{17}a}{34}. \bullet$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{17}a}{34}$.

§ 1.3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

З а д а ч а 1.7. **В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный ΔABC со стороной, равной 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и SA = 1. Точки P и Q соответственно середины ребер SB и CB. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CP и AQ.**

○ Построим прямоугольную систему координат так, как указано на рисунке 1.19.

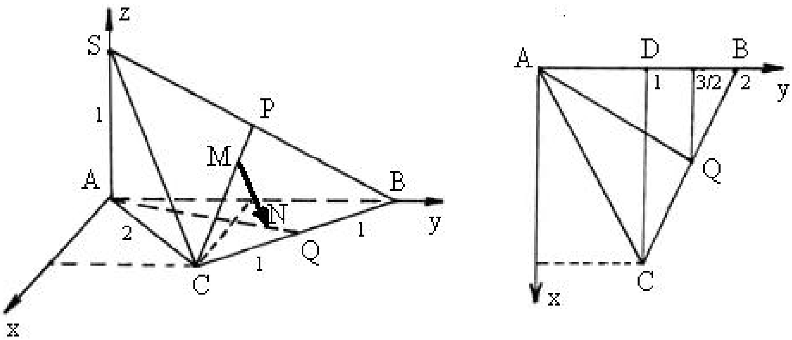


Рис. 1.19

○ **1-й способ.**

а) В этой системе координат находим:

$$A(0;0;0),\ B(0;2;0),\ C(\sqrt{3};\,;1;0),\ S(0;0;1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3};\,1;\,0),\ \overrightarrow{AB} = (0;\,2;\,0),\ \overrightarrow{CS} = (-\sqrt{3};\,-1;\,1),\ \overrightarrow{CB} = (-\sqrt{3};\,1;\,0).$$

Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{3}{2};\,0\right),\ \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CB}\right) = \left(-\sqrt{3};\,0;\,\frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2};\,0\right).$$

б) Пусть [MN] — общий перпендикуляр прямых CP и AQ (рис. 1.19). По правилу многоугольника сложения векторов:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QN}.$$

Учитывая, что

$$\overrightarrow{MC} \parallel \overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = x \cdot \overrightarrow{CP} = \left(-\sqrt{3}x;\, 0;\, \frac{1}{2}x \right),$$

$$\overrightarrow{QN} \parallel \overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{QN} = y \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y;\, \frac{3}{2}y;\, 0 \right),$$

получим

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2};\, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y;\, \frac{1}{2}x \right). \qquad (17)$$

в) По свойству общего перпендикуляра прямых:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{3}{2}y = 0, \\ 12x + 6 - 6y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 13x - 6y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{6}{10}, \\ y = -\dfrac{3}{10}. \end{cases} \qquad (18)$$

Из (17), в силу соотношений (18), окончательно имеем

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{20}; \frac{1}{20}; -\frac{6}{20} \right).$$

Отсюда $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{1}{20} \cdot \sqrt{3 + 1 + 36} = \dfrac{\sqrt{40}}{20} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ●

○ **2-й способ.**

Известно, что скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях. Пусть $(CP) \subset \alpha$, а $(AQ) \subset \beta$ (рис. 1.20). Тогда расстояние $d = MN$ между плоскостями и есть расстояние между скрещивающимися прямыми CP и AQ.

а) Вводим систему координат так же, как и в пункте 1 а), и находим

$$\overrightarrow{CP} = \left(-\sqrt{3};\, 0;\, \frac{1}{2} \right),\ \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0 \right), \overrightarrow{CQ} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right).$$

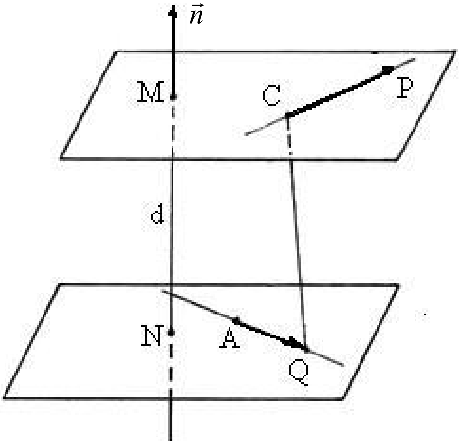


Рис. 1.20

б) Пусть $\vec{n}=(x;y;z)$ — нормальный вектор плоскостей α и β. В силу этого имеем

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}z=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2\sqrt{3}x,\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left(\sqrt{3};-1;6\right).$$

в) Берем любые две точки на скрещивающихся прямых, например $C\in(CP), Q\in(AQ)$, и по формуле (9) вычисляем расстояние между этими прямыми:

$$d=\left|\text{орт.пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{CQ}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CQ}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}+0\right|}{\sqrt{3+1+36}}=\frac{2}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.\ \bullet$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Задача 1.8. **В основании пирамиды MABC лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Боковая грань MAB перпендикулярна плоскости основания, и в** $\triangle MAB: MA = MB$. **На ребре BM взята точка P — середина этого ребра, а в грани MAC взята точка Q — центроид этой грани. Найдите расстояние между прямыми AB и PQ, если BC = a и** $\cos\widehat{AMB}=\dfrac{1}{2}$ (рис. 1.21).

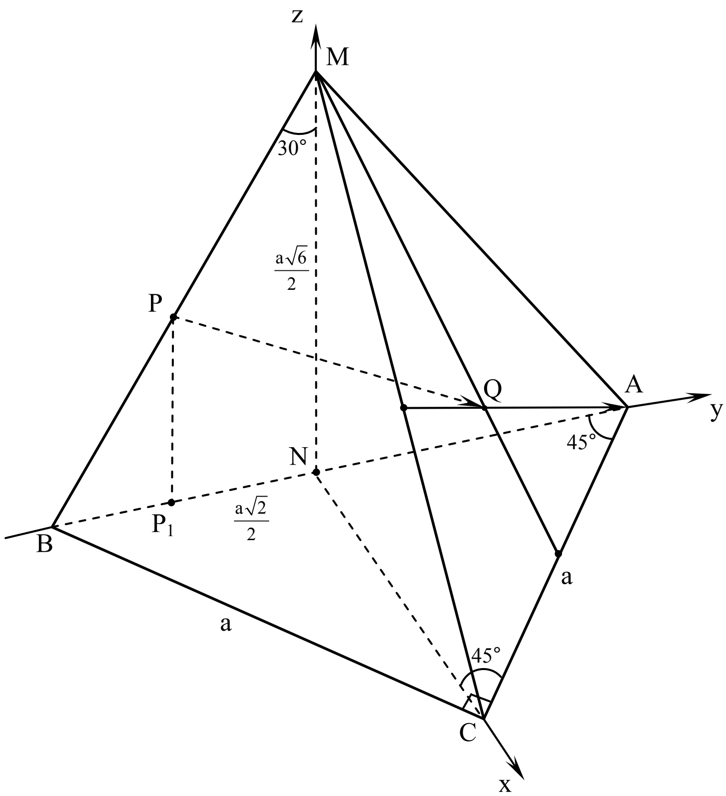


Рис. 1.21

○ **1.** a) $\cos\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMB} = 60° \Rightarrow \widehat{NMA} = \widehat{BMN} = 30°\,(MA = MB).$

b) $\triangle CAB : BC = AC = a,\quad AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$ Так как $\triangle AMB$ — равнобедренный $(MA = MB)$, то $BN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

c) $\triangle BNM : \widehat{BMN} = 30°,$ то $BM = a\sqrt{2};$ по теореме Пифагора имеем $MN = \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

e) CN — медиана равнобедренного $\triangle CBA,$ значит, она является и биссектрисой $\widehat{BCA} = 90°,$ т. е. $\widehat{NCA} = 45°.$ Отсюда следует, что $\triangle ANC$ — равнобедренный, т. е. $NC = NA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

2. Относительно выбранной системы координат (рис. 1.21) найдем координаты следующих точек и векторов:

$$B\left(o;-\frac{a\sqrt{2}}{2};o\right),\ A=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),\ \overrightarrow{BA}=\left(0;a\sqrt{2};0\right),$$

$$P\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right);\ M\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{2}\right);\ C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$$

Так как Q — центроид грани MAC, то

$$Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right);\ \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{2}{3}a\sqrt{2};-\frac{a\sqrt{6}}{12}\right),\ \overrightarrow{AP}=\left(0;-a\sqrt{2};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right).$$

3. Пусть скрещивающиеся прямые PQ и BA лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (см. рис. 1.22).

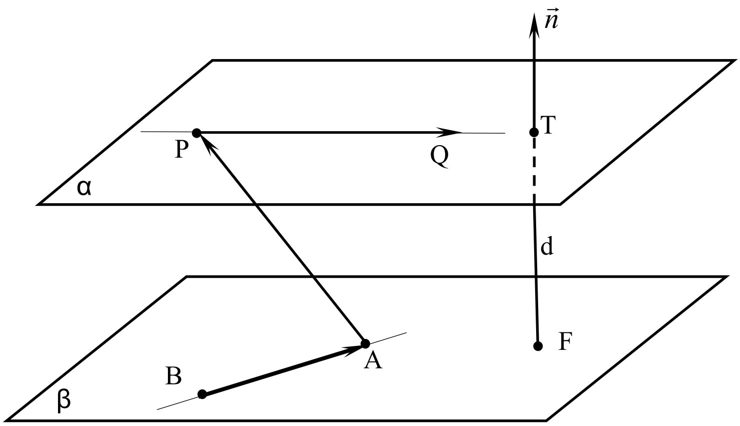


Рис. 1.22

Расстояние $TF=d$ между плоскостями α и β — есть расстояние между скрещивающимися прямыми PQ и BA.

Найдем нормальный вектор $\vec{n}=(x;y;z)$ плоскостей α и β:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{BA}\end{cases},\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\end{cases},\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{2}}{6}x+\dfrac{2}{3}a\sqrt{2}y-\dfrac{a\sqrt{6}}{12}z=0\\ a\sqrt{2}y=0\end{cases},\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\end{cases},\Leftrightarrow\vec{n}=\left(\sqrt{3};0;2\right).$$

Расстояние $TF = d$ найдем по формуле

$$d = \left|\text{орт.пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\vec{n}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{3+4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{14}. \bullet$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.

Задача 1.9. **В основании правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной a, а боковое ребро призмы равно b. На ребрах AD, DD_1 и BB_1 взяты соответственно точки P, Q и R — середины этик ребер. Найдите расстояние между прямыми AR и** A_1Q (рис. 1.23).

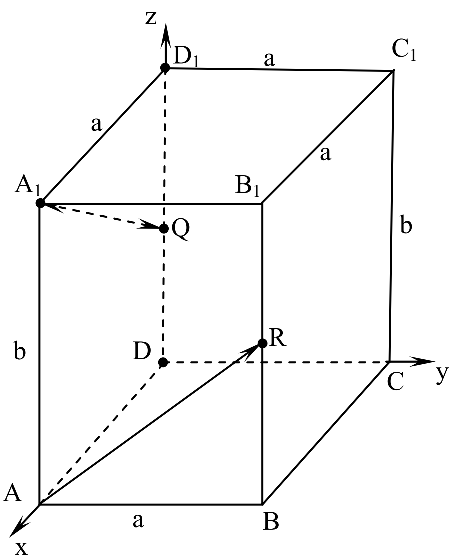


Рис. 1.23

○ 1. Относительно выбранной системы координат (рис. 1.23) находим координаты векторов и точек:

$$A_1(a;o;b),\ Q\left(o;o;\frac{b}{2}\right),\ A(a;o;o),\ R\left(a;a;\frac{b}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{QA_1} = \left(a;o;\frac{b}{2}\right),\ \overrightarrow{AR} = \left(o;a;\frac{b}{2}\right),\ \overrightarrow{AQ} = \left(-a;o;\frac{b}{2}\right).$$

2. Пусть α и β — параллельные плоскости, в которых лежат соответственно прямые A_1Q и AR (рис. 1.24). Найдем нормальный вектор $\vec{n} = (x; y; z)$ этих плоскостей

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{QA_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AR} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{QA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + \dfrac{b}{2}z = 0 \\ ay + \dfrac{b}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a}z \\ y = -\dfrac{b}{2a}z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = (b; b; -2a).$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми A_1Q и AR есть расстояние между параллельными плоскостями α и β. Искомое расстояние d найдем по формуле (9) (§ 1.1):

$$MN = d = \rho(\alpha, \beta) = \left|\text{орт.пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{AQ}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ}\right|}{(\vec{n})} =$$

$$= \frac{|-ab - ab|}{\sqrt{2b^2 + 4a^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 + 2b^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}}. \bullet$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$.

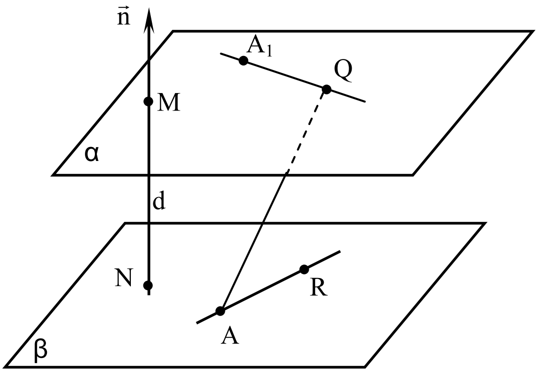


Рис. 1.24

§ 1.4. Угол между прямыми

Задача 1.10. **Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α, точка К — середина ребра BS. Найти угол φ между прямыми AK и SC.**

○ Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.25.

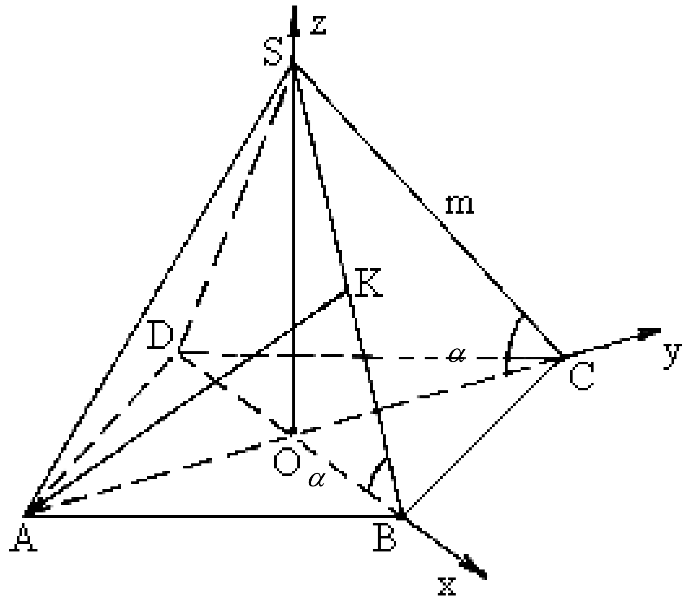


Рис. 1.25

а) Пусть $SC = m$, тогда из прямоугольного треугольника SOC:

$$SO = m \cdot \sin\alpha,\ OB = OA = OC = m \cdot \cos\alpha\ .$$

Относительно выбранной системы координат определим координаты точек A, B, S, C:

$$A(0; -m \cdot \cos\alpha; 0),\ C(0; m \cdot \cos\alpha; 0),$$

$$S(0; 0; m \cdot \sin\alpha),\ B(m \cdot \cos\alpha; 0; 0).$$

б) Угол между прямыми AK и SC найдем, если будем знать векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{SC}$ — направляющие векторы этих прямых.

Координаты вектора $\overrightarrow{SC}$ вычисляем по координатам точек S, C:

$$\overrightarrow{SC} = (0; m\cos\alpha; -m\sin\alpha)\cdot$$

По теореме о середине отрезка (центроида отрезка)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right).$$

Так как $\overrightarrow{AS}=(0;m\cos\alpha;m\sin\alpha)$, $\overrightarrow{AB}=(m\cos\alpha;m\cos\alpha;0)$, то

$$\overrightarrow{AK}=\left(\frac{1}{2}m\cos\alpha;m\cos\alpha;\frac{1}{2}m\sin\alpha\right).$$

Пусть φ — величина угла между прямыми AK и SC. Тогда

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{SC}}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\overrightarrow{AK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|}=\frac{\left|m^2\cos^2\alpha-\frac{1}{2}m^2\sin^2\alpha\right|}{m\sqrt{\frac{1}{4}m^2+m^2\cos^2\alpha}\cdot}=$$

$$=\frac{\left|1-3\cos^2\alpha\right|}{\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{\left|1-3\cos^2\alpha\right|}{\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}.\quad\bullet$$

Ответ: $\arccos\dfrac{\left|1-3\cos^2\alpha\right|}{\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}$.

Задача 1.11. **На ребрах BB_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q такие, что BP: $BB_1=2:3$, $C_1D_1:C_1Q=4:1$. Плоскость, проходящая через точки A, P и Q, пересекает прямые DD_1 и B_1C_1 соответственно в точках E и F. Найти угол между прямыми EF и A_1C.**

○ При гомотетии величины углов между геометрическими объектами (между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью) не меняются. Поэтому куб можно взять произвольного размера.

Так как по условию ребро куба делится точкой P в отношении $2:1$, точкой Q в отношении $1:3$, то удобно, например, длину ребра куба взять равную 12 (единицам).

а) Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.26. Относительно выбранной системы координат найдем координаты точек и векторов:

$$A(12;0;0),\quad P(0;0;8),\quad Q(3;12;12),\quad A_1(12;0;12),\quad C(0;12;0),$$

$$\overrightarrow{AP}=(-12;0;8),\quad \overrightarrow{AQ}=(-9;12;12),\quad \overrightarrow{A_1C}=(-12;12;-12).$$

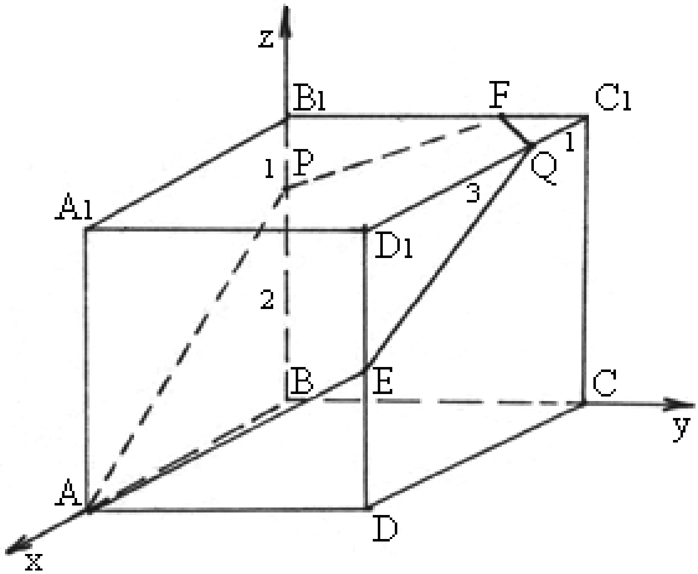


Рис. 1.26

б) Уравнение плоскости $\omega = (APQ)$ определим по ее нормальному вектору $\vec{n} = (x; y; z)$ и начальной точке. За начальную точку плоскости ω можно взять любую из точек A, P, Q, а нормальный вектор $\vec{n} = (x; y; z)$ найдем из условий:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 8z = 0, \\ -9x + 12y + 12z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}z, \\ y = -\dfrac{1}{2}z \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (4; -3; 6).$$

Уравнение плоскости ω имеет вид

$$4(x - 12) - 3(y - 0) + 6(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6z - 48 = 0. \qquad (19)$$

в) Вычислим координаты точек E и F. Поскольку точка $E \in (DD_1)$, , то две ее координаты известны: $x = 12$; $y = 12$, так как $(DD_1) \perp (ABC)$.

Координату z точки E найдем из условия, что точка $E \in \omega : z = 6$. Итак, E(12; 12; 6).

Аналогично, $F \in (B_1C_1)$, а $(B_1C_1) \perp (ABB_1)$. Отсюда следует, что $x = 0$; $z = 12$. Подставляя координаты точки F в уравнение плоскости ω (19), получим $y = 8$. Значит, F(0; 8; 12).

Вектор $\overrightarrow{EF} = (-12;-4;6)$ и $\overrightarrow{A_1C}$ — направляющие векторы соответственно прямых EF и A_1C. Пусть φ — величина угла между прямыми EF и A_1C.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A_1C}\right|}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C}\right|} = \frac{|144-48-72|}{\sqrt{144+16+36}\cdot 12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{21}.$$

Отсюда следует, что $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{21}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{21}$. ●

Задача 1.12. **В основании пирамиды лежит прямоугольник с отношением сторон** $AB:AD = 1:3$. **Высота MO пирамиды равна стороне AD и проектируется в точку O, лежащую на прямой AB такую, что** $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AO} = 1:2$. **На ребрах MB и MC взяты соответственно точки F и E — середины этих ребер. Найдите углы, которые образует прямая OF с прямыми AC и DE** (рис. 1.27).

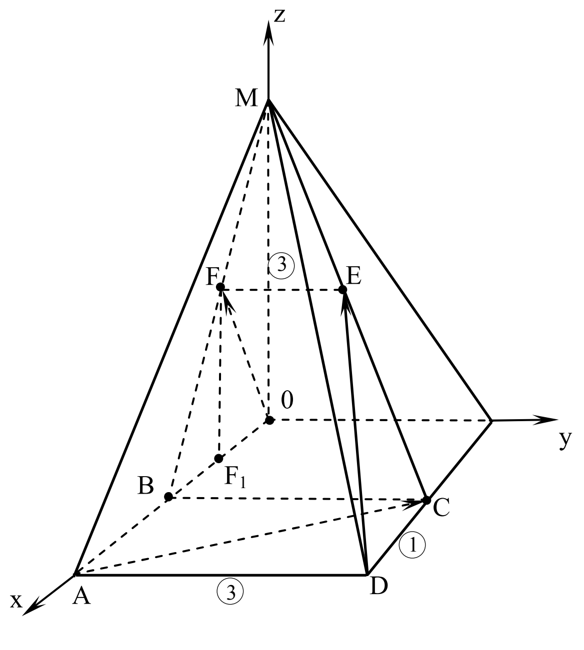


Рис. 1.27

○ 1. Пусть DC = a, тогда AD = 3a; OM = 3a; AO = 2a.

Выберем систему координат так, как указано на рис. 1.27. Относительно выбранной системы координат найдем координаты векторов и точек:

$$O(o;o;o;),\ F\left(\frac{a}{2};o;\frac{3a}{2}\right),$$

где F — середина BM; FF_1 — средняя линия $\triangle BOM$; $A(2a;0;0)$,

$$C(a;3a;0),\ \overrightarrow{OF}=\left(\frac{a}{2};0;\frac{3a}{2}\right),\ \overrightarrow{AC}=(-a;3a;0);$$

$$D(2a;3a;0),\ E\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};\frac{3a}{2}\right),\quad \overrightarrow{DE}=\left(-\frac{3a}{2};-\frac{3a}{2};\frac{3a}{2}\right).$$

2. Пусть φ — угол между прямыми (OF) и (AC), а α — угол между прямыми (OF) и (DE), тогда

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{OF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left|-\frac{a^2}{2}\right|}{\sqrt{a^2+9a^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}}=\frac{1}{10}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{1}{10},$$

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{DE}\right|}{\left|\overrightarrow{OF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DE}\right|}=\frac{\left|-\frac{3a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}\right|}{\frac{\sqrt{10a^2}}{2}\cdot\sqrt{3\cdot\frac{9a^2}{4}}}=\frac{\sqrt{30}}{15}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{\sqrt{30}}{15}.\bullet$$

Ответ: $(\widehat{OF,AC})=\arccos\frac{1}{10};\ (\widehat{OF,DE})=\arccos\frac{\sqrt{30}}{15}.$

Задача 1.13. **В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ с отношением ребер $AB:AA_1=1:\sqrt{3}$ точка P — середина ребра AC. Найдите угол, который образует прямая B_1P с прямой CA_1** (рис. 1.28).

○ 1. Так как при центральной симметрии (гомотетии) углы между прямыми (плоскостями) не меняются, поэтому примем CB = 1, тогда в силу условия $AA_1=\sqrt{3}$. Из $\triangle CPB$ (прямоугольный Δ) находим $PB=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Относительно выбранной системы координат (рис. 1.28) находим координаты следующих точек и векторов:

$$P(0;0;0),\ B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{PB_1}=\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right),$$

$$C\left(\frac{1}{2};0;0\right),\ A_1\left(-\frac{1}{2};0;\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{CA_1}=\left(-1;0;\sqrt{3}\right).$$

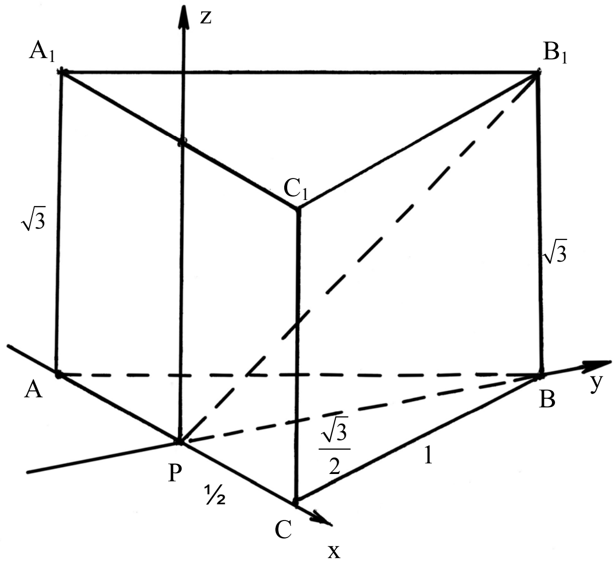


Рис. 1.28

$\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{CA_1}$ соответственно направляющие векторы прямых PB_1 и CA_1.

Пусть φ — величина угла между скрещивающимися прямыми PB_1 и CA_1.

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{PB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\frac{3}{\sqrt{\frac{3}{4}+3}\cdot\sqrt{1+3}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot 2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}.\bullet$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 1.5. Угол между прямой и плоскостью

Задача 1.14. **Дан правильный тетраэдр SABC. M, N — середины соответственно ребер AB и SC. Найти угол между прямой AB и плоскостью, параллельной прямым SM и BN.**

а) Плоскостей, параллельных прямым SM и BN, можно провести (существует) бесконечное множество. Нетрудно показать, что прямая AB пересекает все эти параллельные плоскости под одним и тем же углом.

Пусть плоскость ω — одна из этих плоскостей и пусть AB образует с плоскостью ω угол φ. Для вычисления угла φ, как следует из формулы (10) (§ 1.1), достаточно знать направляющий вектор прямой AB и нормальный вектор плоскости ω. Кстати, нормальный вектор плоскости ω является нормальным вектором каждой из плоскостей, параллельных плоскости ω.

б) Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.29. При гомотетии угол между прямой и плоскостью не меняется. Поэтому длину ребра тетраэдра можно выбрать произвольно.

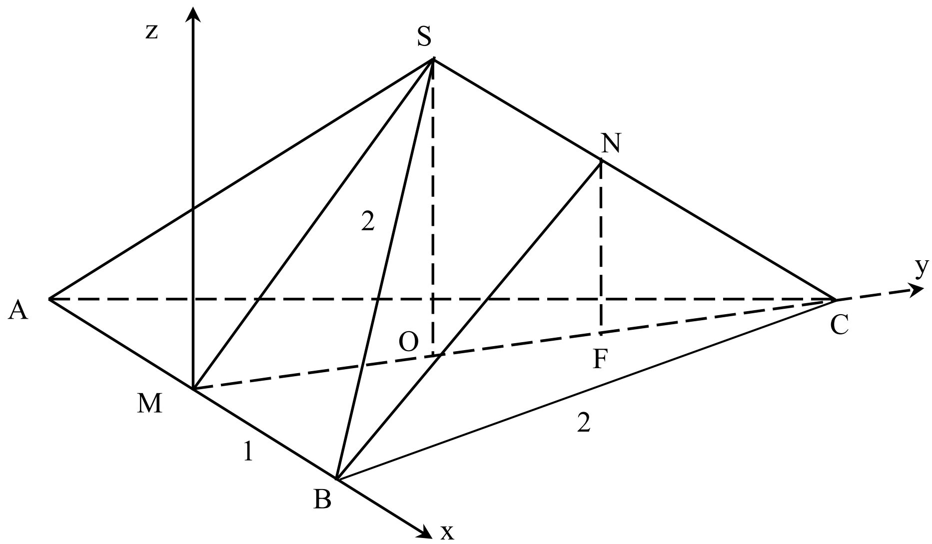


Рис. 1.29

Пусть $AB = 2$. Выполним предварительно некоторые вычисления:

1) Из ΔSMB находим $MS = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{3}$.

Отсюда $MC = MS = \sqrt{3}$.

Учитывая, что ΔABC — правильный и точка O — точка пересечения медиан ΔABC, имеем $MO = \frac{1}{3}MC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) По теореме Пифагора из ΔMOS:

$$SO = \sqrt{MS^2 - MO^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

3) NF — средняя линия ΔSOC, поэтому $NF = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Относительно выбранной системы координат теперь можем найти координаты точек и векторов:

$$M(0;0;0),\ B(1;0;0),\ A(-1;0;0),\ S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),\ N\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{MS} = \left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),\ \overrightarrow{BN} = \left(-1;\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \ \overrightarrow{AB} = (2;0;0).$$

в) Нормальный вектор $\vec{n} = (x;y;z)$ плоскости ω найдем из условий:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MS} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BN} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MS} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{6}}{3}z = 0, \\ -x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{2}z, \\ x = -\sqrt{6}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(-6;-4\sqrt{3};\sqrt{6}\right).$$

$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (2;0;0)$ — направляющий вектор прямой AB.

г) В силу формулы (10) (§ 1.1) имеем:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{12}{2\cdot\sqrt{36+48+6}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Следовательно, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$. ●

Задача 1.15. **Высота МО правильной пирамиды МАВС равна стороне ее основания. Найдите угол прямой МС и плоскостью МАК, где К — середина ребра ВС** (рис. 1.30).

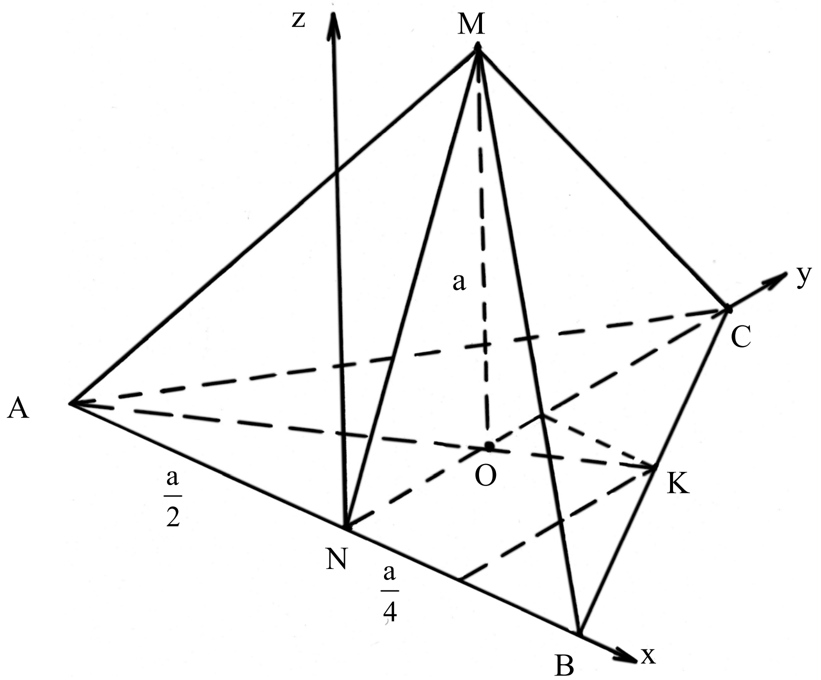


Рис. 1.30

○ 1. Относительно выбранной системы координат (рис. 1.30) найдем координаты следующих векторов и точек:

$$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right);\ M\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};a\right),\ \overrightarrow{CM}=\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{3};a\right)$$

$$O\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right),\ K\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right),\ \overrightarrow{OK}=\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12};0\right),$$

$$\overrightarrow{OM}=(0;0;a).$$

2. Пусть $\vec{n}=(x;y;z)$ — нормальный вектор плоскости AMK, тогда

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{OK}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{OM}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OK}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{4}x+\dfrac{a\sqrt{3}}{12}y=0\\ az=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left(1;-\sqrt{3};0\right).$$

3. Пусть φ — величина угла между прямой CM и плоскостью AMK, тогда

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CM}\right| \cdot |\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{9} + a^2} \cdot \sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}. \bullet$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 1.16. **Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна 4, а высота равна 6. Найти угол между плоскостью ω, которая параллельна прямым (MN) и (A_1B_1), и прямой KB_1, где M, N, K — середины соответственно сторон** AA_1, CB, AC (рис. 1.31).

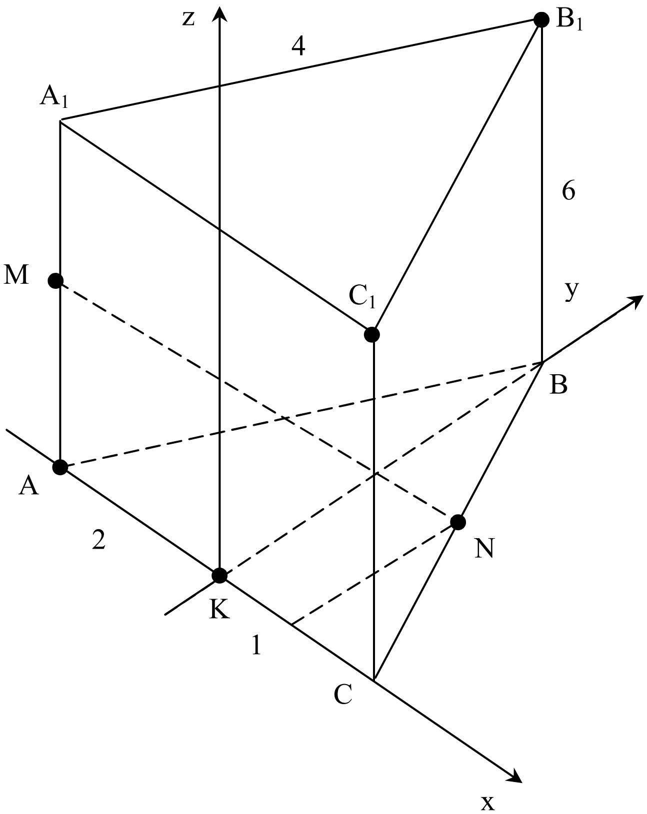


Рис. 1.31

○ 1. Из $\triangle BKC$ найдем $KB = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

В декартовой системе координат, указанной на рис. 1.31 найдем координаты следующих точек и векторов:

$$K(0;0;0),\ B_1(0;2\sqrt{3};6),\ M(-2;0;3),\ N\left(1;\sqrt{3};0\right), A_1(-2;0;6),$$

$$\overrightarrow{KB_1} \stackrel{def}{=} \vec{p} = (0;2\sqrt{3};6),\ \vec{m} \stackrel{def}{=} \overrightarrow{MN} = (3;\sqrt{3};-3),\ \vec{q} \stackrel{def}{=} \overrightarrow{A_1B_1} = \left(2;2\sqrt{3};0\right)$$

2. Пусть ω — плоскость, которая параллельна (A_1B_1) и (MN), т.е. $\omega \parallel \vec{m}$, $\omega \parallel \vec{q}$ и пусть $\vec{n} = (x;y;z)$ — нормальный вектор этой плоскости, тогда

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{m} = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y - 3z = 0 \\ 2x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}y \\ z = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(3;-\sqrt{3};-2\right).$$

Вектор $\vec{p} = (0;2\sqrt{3};6)$ — это направляющий вектор прямой KB_1, т.е. $(KB_1) \parallel \vec{p}$

Пусть φ — величина угла между прямой KB_1 и плоскостью ω, тогда

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{|-6-12|}{\sqrt{16}-\sqrt{48}} = \frac{5\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{5\sqrt{3}}{16}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$.

§ 1.6. Угол между плоскостями

Задача 1.17. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N, P — середины соответственно ребер AA_1, AB, BC. Найти угол между плоскостями (MNP) и (MD_1C_1).**

а) Введем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.32. Длину ребра куба можно выбрать произвольно, поскольку при гомотетии величина угла между плоскостями не меняется. Удобно, например, взять длину ребра куба, равную 2.

Относительно выбранной системы координат найдем координаты точек и векторов:

$$M(2;0;1),\quad N(2;1;0),\quad P(1;2;0),\quad D_1(0;0;2),\quad C_1(0;2;2),$$

$$\overrightarrow{MN} = (0;1;-1),\quad \overrightarrow{MP} = (-1;2;-1),\quad \overrightarrow{D_1M} = (2;0;-1),\quad \overrightarrow{D_1C_1} = (0;2;0).$$

б) Пусть $\vec{n}_\alpha = (x; y; z)$ — нормальный вектор плоскости $\alpha = (MNP)$. В этом случае выполняются условия

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ \vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0, \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z, \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1;1;1).$$

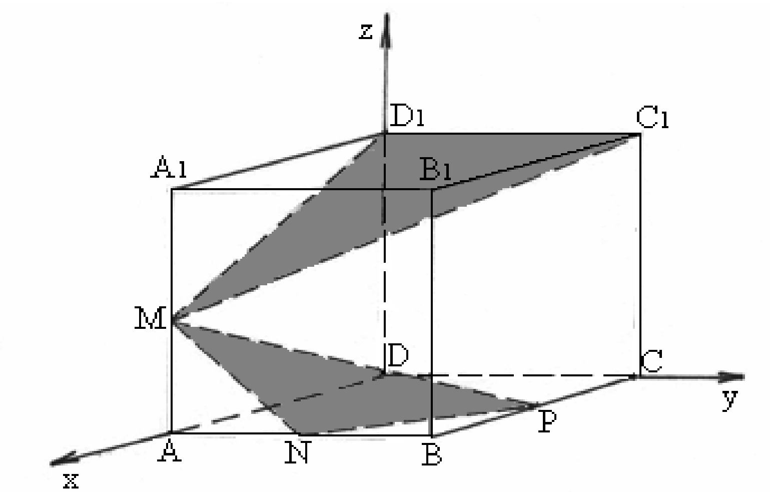


Рис. 1.32

Аналогично, если $\vec{n}_\beta = (a; b; c)$ — нормальный вектор плоскости $\beta = (MD_1C_1)$, тогда

$$\begin{cases} \vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{D_1M} = 0, \\ \vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{D_1C_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = 0, \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a, \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\beta = (1; 0; 2).$$

в) Если $\varphi = \left(\widehat{\alpha, \beta}\right)$, то

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|} = \frac{|1 + 0 + 2|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+0+4}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Откуда

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{15}}{5}. \bullet$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задача 1.18. **В основании правильной треугольной пирамиды SABC лежит правильный ΔABC со стороной, равной 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и $SA = 1$. Точки P, Q соответственно середины ребер SB, CB. Плоскость α параллельна прямым SC и AB, а плоскость β параллельна прямым AQ и CP. Определить величину угла между плоскостями α и β.**

а) Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке 1.33. В выбранной системе координат имеем:

$$A(0;0;0),\ B(0;2;0),\ C\left(\sqrt{3};1;0\right),\ S(0;0;1),\ Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right),\ P\left(0;1;\frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{SC}=\left(\sqrt{3};1;-1\right),\quad \overrightarrow{AB}=(0;2;0),\quad \overrightarrow{AQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right),\quad \overrightarrow{CP}=\left(-\sqrt{3};0;\frac{1}{2}\right).$$

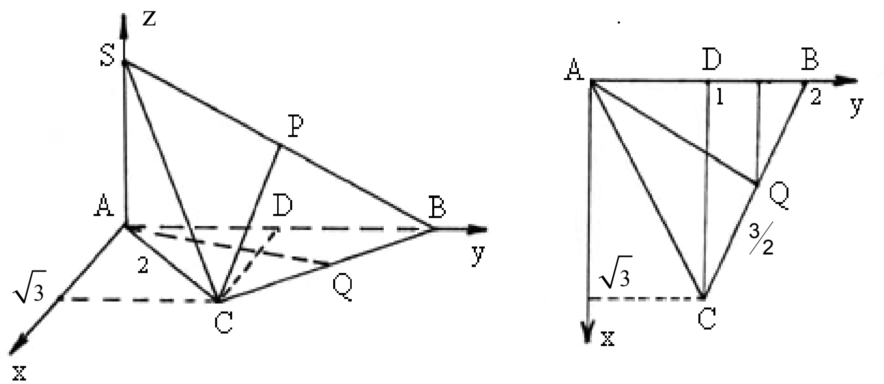


Рис. 1.33

б) Пусть $\vec{m}=(x;y;z)$ — нормальный вектор плоскости α, параллельной прямым SC и AB. Тогда выполняются условия:

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{SC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x+y-z=0,\\ 2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\sqrt{3}x,\\ y=0\end{cases}\Rightarrow \vec{m}=\left(1;0;\sqrt{3}\right).$$

в) Обозначим через β плоскость, которая параллельна прямым AQ и CP, а через $\vec{n}=(a;b;c)$ — ее нормальный вектор. В этом случае получаем систему вида

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{3}{2}b=0,\\ -\sqrt{3}a+\dfrac{1}{2}c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\\ c=2\sqrt{3}a\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=\left(\sqrt{3};-1;6\right).$$

г) Если $\varphi = \left(\widehat{\alpha,\beta}\right)$, то

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\left|\sqrt{3}+6\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{3+1+36}} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{40}} = \frac{7\sqrt{30}}{40}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{7\sqrt{30}}{40}$. ●

Ответ: $\arccos\frac{7\sqrt{30}}{40}$.

Задача 1.19. **Дана треугольная прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании каждой лежит равнобедренный $\triangle ABC$. Сторона основания AB $\triangle ABC$ равна высоте. Определить угол между плоскостями $\alpha = (KMC)$ и $\beta = (ACC_1)$, если $AA_1 : AB = 3:1$, а K и M соответственно середины ребер A_1A и AB** (рис. 1.34).

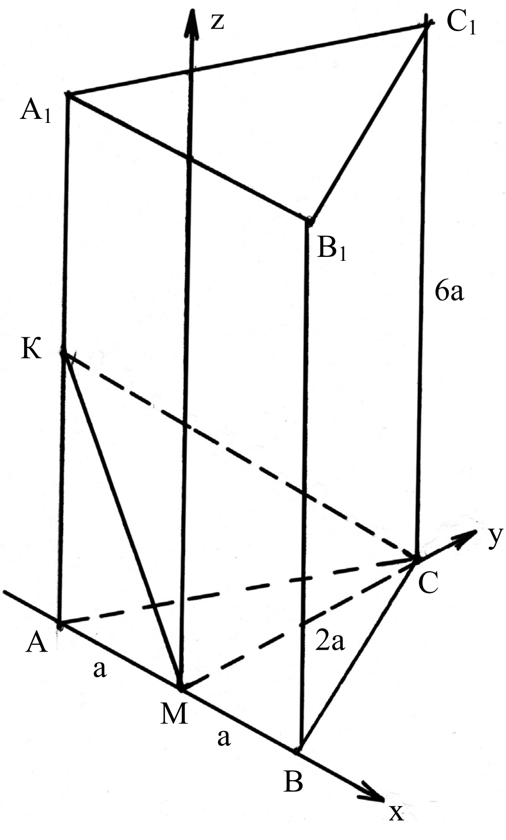


Рис. 1.34

○ 1. Пусть $AB = 2a$, тогда по условию $MC = AB = 2a;\ A_1A = 6a.$ Относительно выбранной системы координат (рис. 1.34) находим:

$$M(0;0;0),\ C(0;2a;0),\ \overrightarrow{MC} = (0;2a;0),\ K(-a;0;3a),$$

$$\overrightarrow{MK} = (-a;0;3a),\ A\left(-a;0;0\right),\ \ \overrightarrow{AC} = (a;2a;0),\ \overrightarrow{AA} \parallel \vec{k} = \left(0;0;1\right).$$

2. Пусть $\vec{n} = \left(x;y;z\right)$ нормальный вектор плоскости $\alpha = \left(KMC\right)$:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MK}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax + 3az = 0, \\ 2ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(3;0;1\right).$$

3. Обозначим через $\vec{m} = \left(x_1;y_1;z_1\right)$ — нормальный вектор плоскости $\beta = \left(ACC_1\right)$. Имеем

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \vec{k}, \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{k} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0, \\ ax_1 + 2ay_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0, \\ x_1 = -2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{m} = \left(2;-1;0\right).$$

4. Пусть $\varphi = \left(\widehat{\alpha_1\beta}\right)$ — угол между плоскостями α и β, тогда

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}. \bullet$$

Ответ: $\arccos\frac{3\sqrt{2}}{5}.$

Задача 1.20. **Дана треугольная пирамида** $SABC$**, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC, причем** $AB : MC = 2 : 3,$ **M — середина AB. Известно, что AB:SC = 1:2, SP:PC = 1:3. Найти угол между плоскостями** $\alpha = (ABP),\ \beta = (SBC)$ (рис. 1.35)**, если MO:OC = 1:2, а точка O — проекция вершины S пирамиды.**

○ 1. Как известно, при центральной симметрии (гомотетии) углы между прямыми и плоскостями не меняются. Поэтому выбор длины отрезка, например, AB произвольный. Поэтому пусть AB = 2, тогда MB = 1, MC = 3, SC = 4, SP = 1, PC = 3, MO = 1, OC = 2. по теореме Пифагора из $\triangle SOC$ находим: $SO = 2\sqrt{3}.$

$$(\triangle SOC \backsim \triangle PP_1C) \Rightarrow PP_1 = \frac{3}{4}2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

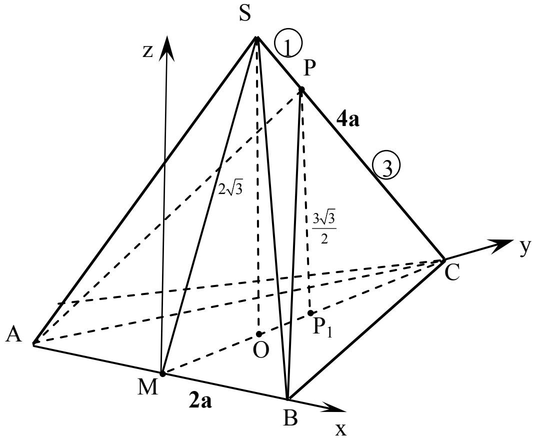


Рис. 1.35

2. Относительно выбранной системы координат (рис. 1.35) находим: $A(-1;0;0)$; $B(1;0;0)$; $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$; $P\left(0;\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{BP}=\left(-1;\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};\right);\ S(0;1;2\sqrt{3});\ \overrightarrow{BC}=(-1;1;2\sqrt{3});$$

$$C\left(0;3;0\right);\ \overrightarrow{BC}=(-1;3;0).$$

3. Пусть $\vec{n}=(x;y;z)$ – нормальный вектор плоскости α. Тогда

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=0\\ -x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=-\sqrt{3}z\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(0;-\sqrt{3};1).$$

4. Аналогично, если $\vec{m}=(x;y;z)$ – нормальный вектор плоскости β, то

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BS}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1+y_1+2\sqrt{3}z=0\\ -x_1+3y_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2y_1+2\sqrt{3}z_1=0\\ x_1=3y_1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3y_1\\ z_1=\dfrac{y_1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(3\sqrt{3};\sqrt{3};1).$$

5. Обозначим через φ — величину угла между плоскостями α и β. Значит,

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|-3+1|}{\sqrt{27+3+1}\cdot\sqrt{3+1}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{31}}{31} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{31}}{31}.\bullet$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{31}}{31}$.

Упражнения

1.1. Через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Найдите, в каком отношении она делит диагональ параллелепипеда, выходящую из той же вершины.

1.2. Точки M и N — середины соответственно ребер AB и DC тетраэдра DABC, точки P и Q расположены на ребрах AD и BC так, что отрезки MN и PQ пересекаются, а $AP:AD=2:3$. Найдите отношение $BQ:BC$.

1.3. Точки P и M — середины ребер A_1B_1 и DA параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка Q лежит на ребре C_1C, причем $CQ=\frac{1}{4}C_1C$. Найдите, в каком отношении плоскость α разделит диагональ D_1B параллелепипеда.

1.4. Каждое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней призмы взяты соответственно точки M и N так, что $(MN)\perp(AB)$, $|MN|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. В каком отношении точки M и N делят отрезки AB_1 и BC_1?

1.5. Через вершину C тетраэдра ABCD и середины ребер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит отрезок MN, где M и N — соответственно середины ребер AB и CD?

1.6. На ребрах A_1B_1, AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $A_1M{:}\ A_1B_1=BN{:}\ BA=C_1P{:}\ C_1C=1:2$. Постройте точку Q пересечения плоскости (MNP) с прямой B_1C_1 и найдите отношение $C_1Q{:}\ B_1C_1$.

1.7. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — соответственно середины боковых ребер BB_1 и CC_1. Через точку O пересечения медиан ΔABC проведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 соответственно в точках P и Q. Найдите отношение $PQ:OQ$.

1.8. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины соответственно ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1, точка Q — центр грани

CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен к ней. Найдите длину этого отрезка.

1.9. Дана правильная четырехугольная пирамида PABCD с вершиной P. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $AK:KP=1:3$, $CM=PM$. Найдите отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проходящей через D, K, M.

1.10. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра ABCD. Точка P делит ребро AD в отношении $AP:AD=2:3$. Точка Q так расположена на ребре BC, что отрезки MN и PQ пересекаются. Найдите отношение $BQ:QC$.

1.11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональная плоскость AA_1C_1C. Точка M делит ребро DC так, что $DM:MC=1:1$. Точка N делит ребро B_1A_1 в отношении $B_1N:NA_1=1:3$. Прямая MN пересекает диагональную плоскость в точке K. Найдите отношение $NK:KM$.

1.12. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD двугранный угол при основании равен 60°. Точки M и N — середины боковых ребер SB и SC. Найдите угол между прямыми AM и BN.

1.13. Основанием прямой призмы служит ромб, длина стороны которого равна *a*. Боковое ребро имеет длину *3a*. Середина M диагонали A_1B боковой грани соединены с точкой K на диагонали B_1D_1 верхнего основания. Найдите длину отрезка MK, если он параллелен плоскости A_1D_1D.

1.14. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна a. Точки K и Q — середины сторон основания DC и AB соответственно. Найдите длину отрезка, один конец которого лежит на QK, а другой на ребре DS и при этом делит его в отношении $SM:SD=2:3$. Угол наклона бокового ребра к основанию равен φ.

1.15. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях D_1A и A_1B лежат соответственно точки M и K так, что $D_1M:D_1A=KB:A_1B=$ $=1:3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MK.

1.16. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна a. Точка F — середина ребра SA, а точка E лежит на SC, причем $\overrightarrow{SE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$. Отрезок MN с концами на прямых AB и CK пересекает FE и перпендикулярен к ней. Найдите его длину.

1.17. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды SABCD имеет длину l, а плоский угол при вершине равен 60°. Точка E — середина ребра SC, а точка F делит ребро SA в отношении $SF:SA=1:3$. Найдите длину отрезка MN, перпендикулярного прямой FE, если точка M лежит на ребре SB, а точка N принадлежит высоте пирамиды SO.

1.18. В тетраэдре DABC с вершиной в точке D проведен отрезок KM, один конец которого лежит в точке пересечения медианы и стороны основания, к которой она проведена, а другой конец M лежит на медиане DO тетраэдра и делит ее в отношении $DM : MO = p : q$. Найдите длину KM.

1.19. Высота тетраэдра SABC имеет длину h, CF — медиана ΔABC, SF — медиана ΔABS. Найдите длину отрезка M_1M_2, если M_1 и M_2 — точки пересечения медиан в треугольниках ABC и ABS.

1.20. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M — середина ребра AA_1. Найдите величину угла между плоскостями (MB_1C) и (AA_1D).

1.21. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите длину общего перпендикуляра прямых AC_1 и A_1D, если $AB = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 2$.

1.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M — середина ребра BB_1, N — центр грани DD_1C_1C. Найдите величину угла между плоскостями (MNC_1) и (AMC).

1.23. Найдите расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*.

1.24. На ребрах DA, DB, DC треугольной пирамиды DABC взяты точки M, N, K так, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Точка Q — точка пересечения медиан ΔABC. В каком отношении плоскость (MNK) делит отрезок DQ?

1.25. Дан тетраэдр SABC. Известно, что $AB^2 + BC^2 + AC^2 = a^2$, $SA^2 + SB^2 + SC^2 = b^2$. Найдите SO, где O — точка пересечения медиан ΔABC.

1.26. В правильном тетраэдре DABC отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD, а отрезок QP соединяет середину ребра CD с центром грани ABC. Найдите угол между отрезками MN и PQ.

1.27. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что N — точка пересечения диагоналей грани ABCD, $M \in A_1D_1$ и $A_1M : MD_1 = 1 : 4$. Вычислите угол между прямой MN и плоскостью грани ABCD.

1.28. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AA_1, L — середина ребра AD, M — центр грани DD_1C_1C. Докажите, что прямые KM и B_1L взаимно перпендикулярны.

1.29. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Плоскость проходит через точку D и отсекает от боковых ребер SA и SC отрезки, длины которых равны: $SK = \frac{2}{3}SC$, $SM = \frac{1}{3}SA$. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найдите длину отрезка SN, где $N \in SB$.

1.30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через точки D, C_1 и середину $[A_1B_1]$, делит диагональ D_1B?

1.31. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P и Q — середины соответственно ребер AD и C_1D_1. Длина ребра куба равна 4. Найдите угол между плоскостями (ABC) и (CPQ).

1.32. В основании пирамиды MABC лежит треугольник с прямым углом при вершине C и $AC=a$, $BC=2a$. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и $MC=BC$. Точки P, Q и R — середины соответственно ребер AB, BC и MB. Найдите расстояние между прямыми AR и PQ.

1.33. Сторона основания ABCD правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро имеет длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B. Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1, такую, что $|AM|:|AD_1|=2:3$. Найдите длину этого отрезка.

1.34. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найдите угол между диагональю BD_1 призмы и плоскостью (BC_1D).

1.35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра AA_1, а точка F делит ребро B_1C_1 в отношении 3 : 1. Найдите угол между плоскостями (MB_1D) и (FAD).

1.36. Дан правильный тетраэдр DABC. Точки K и L — середины соответственно ребер AD и BC. CC_1 — высота ΔABC. Найдите угол между прямыми KL и CC_1.

1.37. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью (BC_1D).

1.38. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD величина двугранного угла при основании равна 30°. Точки M, N, P, Q — середины соответственно ребер AB, BC, CD и DA. Точка E лежит на ребре AB, F принадлежит (SC). Известно, что углы, образованные прямой EF с плоскостями (SMP) и (SBA), а также угол между прямой DF и плоскостью (SNQ), равны. Найдите величину этих углов.

1.39. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на ребре AA_1 таким образом, что $AM:MA_1=3:1$. Точка N — середина BC. Найдите угол между прямыми MN и BD.

1.40. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P и Q — середины соответственно ребер A_1B_1 и DD_1. Найдите угол, который образует прямая B_1D с плоскостью α, проходящей через вершину C_1 перпендикулярно прямой PQ.

1.41. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Стороны основания $AB=3$, $AD=5$, длина бокового ребра равна 1. Точки P и Q —

середины соответственно ребер A_1B_1 и B_1C_1. Найдите расстояние между точкой Q и плоскостью, проходящей через прямую BP и параллельной прямой AD.

1.42. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Точка M принадлежит прямой SC и делит ее пополам. Найдите угол между прямыми DC и AM, если SB = AB.

1.43. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Точки M, N, P и Q — середины соответственно ребер A_1B_1, CC_1, AB и A_1C_1. Найдите угол между прямыми MN и PQ.

1.44. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором ребра равны 2, 4, 6. Точки K, L и M — середины соответственно ребер CC_1, BC и AB. Найдите угол между плоскостями (A_1KD_1) и (KLM).

1.45. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, основание которой правильный треугольник со стороной, равной 4. Точка M — середина стороны AB. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AB_1, если $AA_1 = 6$.

1.46. В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной, равной 4, ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно 5. Точки L и K — середины соответственно ребер AS и CD. Найдите угол между прямой AB и плоскостью, параллельной прямым LD и BK.

1.47. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ребро куба равно 1. Найдите расстояние между диагональю DB_1 и скрещивающимися с ней диагоналями граней этого куба.

1.48. В основании пирамиды MABC лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. На ребре MB взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол между прямой AK и плоскостью (MBC).

1.49. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD длина каждого ребра равна a. Точка M принадлежит прямой SC и $SM : MC = 2 : 1$. Найдите угол между прямыми DC и AM.

1.50. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания. На ребре MC взята точка P — середина этого ребра. $AB = 1$, $MB = 2$, $BC = 3$. Точка O — точка пересечения диагоналей основания. Найдите расстояние от точки D до прямой OP.

1.51. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1 = \sqrt{2}AB$. Найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.

1.52. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD, основанием которой является квадрат со стороной, равной 2. Высота пирамиды SO равна 4. Точки M и N — середины соответственно ребер AB и SC, а точка P делит SO в отношении 3 : 1, считая от вершины. Найдите угол между AD и плоскостью, параллельной прямым MP и BN.

1.53. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N и P — середины соответственно ребер AA_1, AB и A_1B_1. Найдите расстояние от точки P до плоскости (MNC_1).

1.54. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB:AD:AA_1=1:2:3$. На ребрах A_1D_1 и B_1C_1 взяты соответственно точки P и Q такие, что $A_1P:A_1D_1=C_1Q:C_1B_1=1:3$. Считая $AB=1$, найдите расстояние от точки B до плоскости (DPQ).

1.55. В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро MA перпендикулярно плоскости основания и $MA=AC=AB$. На ребрах MA, MB и MC взяты соответственно точки D, E, F — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми BD и CE.

1.56. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом 45°. Точка K — середина ребра BS. SH — медиана боковой грани. Найти угол между прямыми DK и SH, SD и AC.

1.57. Дана прямоугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами основания 2 и 4 и высотой 6. Точка Q — середина ребра AA_1, а точка P делит BB_1 в отношении $B_1P:B_1B=2:3$. Найдите угол между плоскостями (B_1C_1Q) и (CDP)

1.58. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P и Q — середины соответственно ребер D_1C_1 и DC. Найдите угол между плоскостями (AA_1Q) и (BC_1P).

1.59. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину *a*. Найдите угол между прямыми AD_1 и DC_1.

1.60. Сторона основания ABCD правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину *2a*, боковое ребро имеет длину *a*. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B. Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

1.61. На ребрах AA_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Считая ребро куба равным 1, найдите расстояние до плоскости (B_1PQ) от точки A_1.

1.62. В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро MA перпендикулярно плоскости основания и $MA=AC=AB$. На ребрах MA, MB и MC взяты соответственно точки D, E, F — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми CE и AF.

1.63. В основании пирамиды лежит квадрат ABCD, а ее вершина M проектируется в точку B, и $MB=AB$. На ребре MD взяты точки K_1,K_2 и K_3, такие, что $DK_1=K_1K_2=K_2K_3=K_3M$. Найдите угол, который образует с плоскостью (MAD) прямая CK_1.

1.64. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка К — середина этого ребра. Найдите угол, который образует плоскость (BDK) с плоскостью (AB_1C_1).

1.65. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C и отношением катетов $BC : AC = 1 : 2$. Боковое ребро призмы равно гипотенузе треугольника ABC. На ребре AA_1 призмы взята точка P — середина этого ребра. Считая $BC = 1$, найдите расстояние от точки B_1 до плоскости (BC_1P).

1.66. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания и $MB = AB$. На ребре MC взята точка P — середина этого ребра. Найдите угол, который образуют прямые DP и AC.

1.67. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. На ребре MC взяты точки F_1, F_2 и F_3 такие, что $CF_1 = F_1F_2 = F_2F_3 = F_3M$. Найдите угол между прямой DF_1 и плоскостью (MAB).

1.68. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AA_1 = 3 : 4$. Найдите угол между плоскостями (AB_1C) и (A_1B_1C).

1.69. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На ее ребре CC_1 взята точка P — середина этого ребра, а на прямых BB_1 и BA взяты соответственно точки Q и R, такие, что $\overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BR} : \overrightarrow{BA} = 3 : 2$. Считая $AB = 1$, найдите расстояние от точки C_1 до плоскости (PQR).

1.70. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Высота MO пирамиды равна диагонали основания и проектируется в точку пересечения диагоналей. На ребрах MC и MB пирамиды взяты соответственно точки K и L — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми DK и MA.

1.71. Диагональ A_1C правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образует с плоскостью ее основания угол, равный $45°$. Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью (AB_1D_1).

1.72. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. На стороне AC взяты точки K_1 и K_2, такие, что $CK_1 = K_1K_2 = K_2A$. Найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (A_1BK_1).

1.73. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Высота пирамиды проектируется в точку O — центр основания и равна большей стороне основания. На ребрах MA и MC пирамиды взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Точка N — середина ребра AB. Считая $AB = 2$, найдите расстояние от точки N до плоскости (DPQ).

1.74. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Высота MO пирамиды проектируется в точку O — середину ребра BC, и $MO = AB$. На ребре MA взята точка P — середина этого ребра. Найдите угол между прямыми DP и MC.

1.75. Отношение высоты MO правильной пирамиды MABCD к стороне ее основания равно $\sqrt{14}:2$. Через диагональ BD основания и точку K — середину ребра MC проведена плоскость. Найдите угол между прямой MC и плоскостью (BDK).

1.76. Точка K — середина ребра AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне ее основания. Найдите угол между плоскостями (BKC_1) и (ACB_1).

1.77. На ребре MB правильной пирамиды MABC, высота которой равна стороне основания, взята точка P — середина этого ребра, а на прямых AB и BC взяты соответственно точки Q и R, такие, что $\overrightarrow{BQ}:\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BR}:\overrightarrow{BC}=3:2$. Считая $AB=2$, найдите расстояние от точки A до плоскости (PQR).

1.78. На прямой, проходящей через вершины A_1 и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, взята точка P, такая, что $\overrightarrow{A_1P}:\overrightarrow{A_1C_1}=2:1$, а на прямой B_1D взята точка Q, такая, что $\overrightarrow{B_1Q}:\overrightarrow{B_1D}=3:2$. Найдите угол между прямыми C_1Q и BP.

1.79. На ребрах BB_1, DD_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R — середины этих ребер. Найдите угол между прямой A_1D и плоскостью (PQR).

1.80. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC=BC$. Известно также, что $AA_1=AC$. На ребрах A_1C_1 и AA_1 взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер и через точку C_1 проведена плоскость α, параллельная прямым AP и B_1Q. Найдите угол, который образует плоскость α с плоскостью (ABC).

1.81. В основании пирамиды MABC лежит треугольник с прямым углом при вершине C, и $AC=BC$. Ребро MA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, и $MA=AB$. Через точку K — середину ребра AC перпендикулярно прямой MB проведена плоскость α. Считая $AC=1$, найдите расстояние от точки B до плоскости α.

1.82. Боковое ребро призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, лежащего в основании призмы. На ребрах AB и BB_1 призмы взяты соответственно точки K и L — середины этих ребер, а на прямых CL и C_1K взяты соответственно точки P и Q, такие, что $\overrightarrow{CP}:\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{C_1Q}:\overrightarrow{C_1K}=3:2$. Найдите угол между прямыми C_1P и CQ.

1.83. Высота MO правильной пирамиды MABC равна стороне ее основания. На отрезке OB взята точка P — середина этого отрезка. Найдите угол между прямой MP и плоскостью (MAB).

1.84. Высота MO правильной пирамиды MABCD равна диагонали основания. Найдите угол, который образует плоскость, проходящая через прямую AB перпендикулярно плоскости (MCD), с плоскостью (ABC).

1.85. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом 45°, и $AB_1 = CB_1$. Через вершины A, B_1 и C проведена плоскость α. Считая $AB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α.

1.86. На ребрах AB, AC правильной пирамиды MABC, все плоские углы при вершине M которой прямые, взяты соответственно точки D, F — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми BF и MD.

1.87. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 3$. Высота MO пирамиды в два раза больше стороны AB и проектируется в точку пересечения диагоналей основания. На ребре MB пирамиды взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол, который образует прямая OK с плоскостью (MBC).

1.88. Высота MO пирамиды MABCD проектируется в точку пересечения диагоналей основания, которым является прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$ и $MO = AD$. На ребре MC взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол между плоскостями (ABC) и (BDK).

1.89. На ребрах AA_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Считая ребро куба равным 1, найдите расстояние от точки D до плоскости (B_1PQ).

1.90. В основании пирамиды MABC лежит правильный треугольник ABC, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и $MB = AB$. Точка D — середина ребра MC. Найдите угол между прямыми MA и BD.

1.91. В правильной пирамиде MABCD $AB : MA = 1 : 2$. На ребре MA взята точка K — середина этого ребра. Найти угол между прямой DK и плоскостью (MCD).

1.92. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол, который образует плоскость (BDK) с плоскостью (A_1BC).

1.93. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C и отношением катетов $BC : AC = 1 : 2$. Боковое ребро призмы равно гипотенузе треугольника ABC. На ребре AA_1 призмы взята точка P — середина этого ребра. Считая $BC = 1$, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости (BC_1P).

1.94. В диагональном сечении MAC пирамиды MABCD, основанием которой является ромб, угол при вершине M равен 90°, а в сечении MDB — 60°. Высота пирамиды проектируется в точку O — точку пересечения диагоналей основания. На ребре MC взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол между прямыми AC и DK.

1.95. Основанием пирамиды MABCD является прямоугольник, а ее вершина M проектируется в точку O — середину ребра AB, и $AB:AD:MO=4:1:1$. Найдите угол между прямой MD и плоскостью (MBC).

1.96. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB:AA_1=$ $=3:4$. Найдите угол между плоскостями (AB_1C) и (AB_1C_1).

1.97. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На ее ребре CC_1 взята точка P — середина этого ребра, а на прямых BB_1 и BA взяты соответственно точки Q и R, такие, что $\overrightarrow{BQ}:\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BR}:\overrightarrow{BA}=$ $=3:2$. Считая $AB=1$, найдите расстояние от точки O — центра тяжести треугольника ABC до плоскости (PQR).

1.98. В основании пирамиды MABCD лежит параллелограмм ABCD, у которого $AB:AD=1:2$ и $\angle BAD=60^\circ$. Грань MAB является правильным треугольником, медиана MK которого перпендикулярна плоскости основания. На ребре MA взята точка E — середина этого ребра. Найдите угол между прямыми MK и DE.

1.99. На ребрах BB_1, C_1D_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R, такие, что $BP:BB_1=1:2$, $C_1Q:C_1D_1=1:3$ и $AR:AD=3:4$. Постройте сечение куба плоскостью (PQR) и найдите угол, который образует с этой плоскостью прямая AB.

1.100. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (A_1BC).

Глава II

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ОСНОВАНО НА СВОЙСТВАХ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Метрические задачи — это задачи, связанные с измерением, метрикой и, следовательно, с применением свойств скалярного произведения векторов. При решении метрических задач стереометрии будем применять или только свойства скалярного произведения, или, кроме того, вводить в рассмотрение специальным образом подобранную (удобную для решения задачи) прямоугольную декартову систему координат (аффинную систему координат).

Векторный аппарат и координатный метод, содержащийся в программе курса аналитической геометрии, являются основным математическим аппаратом для решения многих геометрических задач и прежде всего поэтому, что они не требуют рассмотрения сложных геометрических конфигураций. Эти методы сводят геометрическую задачу к алгебраической, решить которую обычно легче, чем исходную геометрическую.

Рассмотрим решение метрических задач с использованием скалярного произведения и его свойств.

Приведем план решения задач:

а) Выбираем аффинный (произвольный) базис пространства таким образом, чтобы длины векторов базиса и углы между ними были известны или, по крайне мере, согласно условию задачи, могли быть найдены.

б) Составляем таблицу скалярных произведений векторов базиса (таблицу умножения) и находим разложения по выбранному базису тех векторов, с помощью которых удается найти искомые расстояния и углы.

в) Учитывая таблицу умножения, вычисляем длины рассматриваемых векторов, их скалярные произведения, углы между ними и затем находим искомые расстояния и углы.

Рассмотрим теперь на примерах основные типы задач на вычисление расстояний и углов.

§ 2.1. Вычисление длины отрезка

Задача 2.1. **Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $BA = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABB_1 = \beta$, $\angle CBB_1 = \gamma$. Найти длины диагоналей параллелепипеда BD_1 и AC_1.**

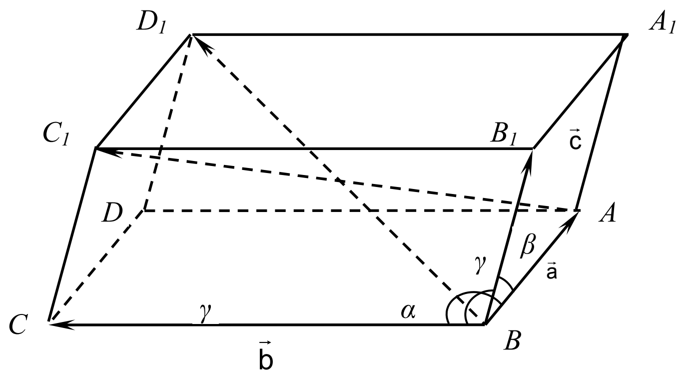


Рис. 2.1

а) Выберем аффинный базис $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Таблица скалярных произведений векторов базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ имеет следующий вид:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	a^2	$ab\cos\alpha$	$ac\cos\beta$
$\vec{b}$	$ab\cos\alpha$	b^2	$cb\cos\gamma$
$\vec{c}$	$ac\cos\beta$	$cb\cos\gamma$	c^2

(1)

б) По правилу многоугольника сложения векторов находим

$$\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,,\ \overrightarrow{AC_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,.$$

в) Вычислим длины диагоналей параллелепипеда, учитывая таблицу умножения (1).

$$BD_1 = \left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma};$$

$$AC_1 = \left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma}.$$

Ответ:

$$BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma},$$

$$AC_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma}. \bullet$$

§ 2.2. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

Задачи этого типа решаются по следующей схеме:

Задача 2.2. **Дано $l_1 \dotplus l_2$; прямая l_1 задана начальной точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}_1$; прямая l_2 задана начальной точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{p}_2$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{m}$. Найти расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2.** (рис. 2.2).

○ Косинус угла между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}.$$

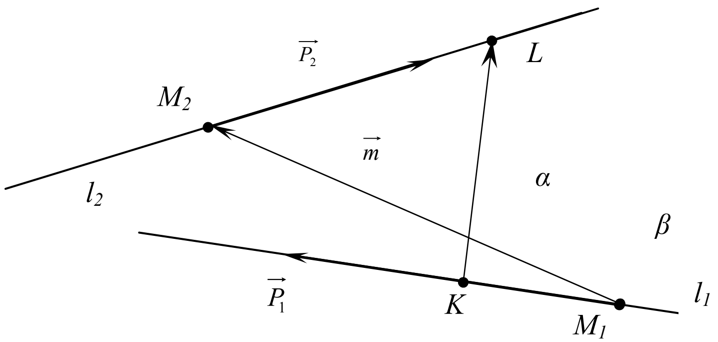


Рис. 2.2

Пусть KL — общий перпендикуляр прямых l_1 и l_2. Представим $\overrightarrow{KL}$ в виде

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KM_1} + \overrightarrow{M_1M_1} + \overrightarrow{ML} = x\vec{p_1} + \vec{m} + y\vec{p_2}.$$

Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условий перпендикулярности вектора $\overrightarrow{KL}$ векторам $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$:

$$\begin{cases} (x\vec{p}_1 + \vec{m} + y\vec{p}_2) \cdot \vec{p}_1 = 0, \\ (x\vec{p}_1 + \vec{m} + y\vec{p}_2) \cdot \vec{p}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\overrightarrow{KL}$:

$$KL = \left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{(x\vec{p}_1 + \vec{m} + y\vec{p}_2)^2}\ .$$

Ответ: $\sqrt{\left(x\vec{p}_1 + m + y\vec{p}_2\right)^2}$. •

Задача 2.3. **В плоскости ω задан равносторонний ΔABC со стороной m. На перпендикуляре к плоскости ω в точке A откладывается отрезок $AS = m$. Найти угол между прямыми AB и SC, расстояние между прямыми AB и SC** (рис. 2.3).

1) а) Выберем аффинный базис $\vec{a} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 2.3). По условию $[AS] \perp (ABC)$, поэтому $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$.

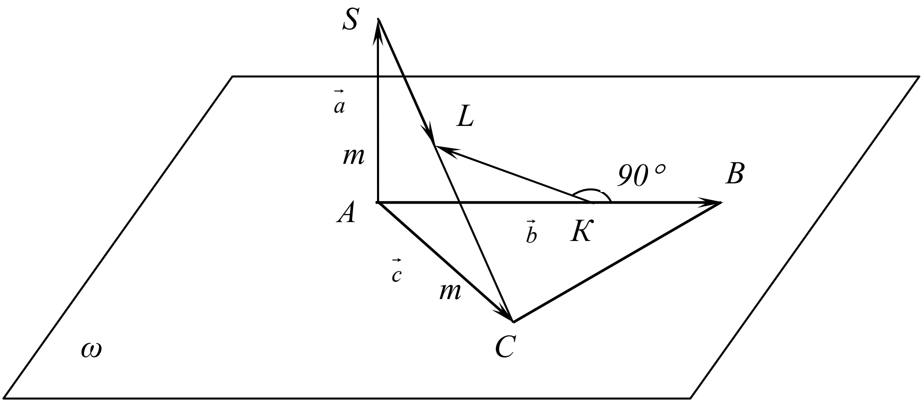


Рис. 2.3

Треугольник ABC — равносторонний и, значит, $\widehat{\vec{c},\vec{b}} = 60^\circ$. Составим таблицу скалярных произведений векторов базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	m^2	0	0
$\vec{b}$	0	m^2	$\frac{1}{2}m^2$
$\vec{c}$	0	$\frac{1}{2}m^2$	m^2

(2)

б) $\overrightarrow{AB} \| (AB)$ и $\overrightarrow{SC} \| (SC)$, т.е. векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$ — направляющие векторы соответствующих прямых. Пусть φ — величина угла между прямыми AB и SC. Угол φ найдем из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{\left|\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})\right|}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}-\vec{a}\right|}. \tag{3}$$

Используя таблицу (2), последовательно находим

$$\begin{cases} \left|\vec{b}\right| = m, \left|\vec{c}-\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{c}^2-\vec{a}^2)} = \sqrt{\vec{c}^2+\vec{a}^2} = m\sqrt{2}, \\ \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}\vec{c}-\vec{b}\vec{a} = \vec{b}\vec{c} = \frac{1}{2}m^2. \end{cases} \tag{4}$$

С учетом (4) из формулы (3) имеем

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}m^2}{m\cdot m\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2) Расстояние между скрещивающимися прямыми AB и SC равно длине общего перпендикуляра KL к этим прямым. Из коллинеарности соответствующих векторов $\overrightarrow{AK} \| \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SL} \| \overrightarrow{SC}$ следует, что

$$\overrightarrow{AK} = x\cdot\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{SL} = y\cdot\overrightarrow{SC}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SL} = -x\vec{b} + \vec{a} + y(-\vec{a}+\vec{c}) = (1-y)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}. \tag{5}$$

Учитывая (5), таблицу (2), получаем

$$\begin{cases} (KL)\perp(AB) \\ (KL)\perp(SC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{AB} = 0, \\ \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left((1-y)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}\right)\cdot\vec{b} = 0, \\ \left((1-y)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -xm^2 + y\frac{1}{2}m^2 = 0, \\ -(1-y)m^2 - x\frac{1}{2}m + ym^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ -2+4y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7}, \\ y = \frac{4}{7}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{KL} = \frac{3}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c} = \frac{1}{7}(3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) \text{ и}$$

$$KL = \left|\overrightarrow{KL}\right| = \frac{1}{7}\sqrt{(3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c})^2} = \frac{1}{7}\sqrt{9m^2+4m^2+16m^2-8m^2} = \frac{m\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: 1) $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $KL = \frac{m\sqrt{21}}{7}$. ●

§ 2.3. Расстояние от точки до прямой

Задача 2.4. **Дано: точка M, прямая *l* с направляющим вектором $\vec{p}$, точка $A \in p$, $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$. Найти расстояние от точки M до прямой *l*** (рис. 2.4).

○ Приведем схему решения этой задачи, полагая, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{m}$ в условии задачи заданы в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на прямую *l* (рис. 2.4). $\overrightarrow{AN} \parallel \vec{p}$, $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AN} = x\vec{p}$.

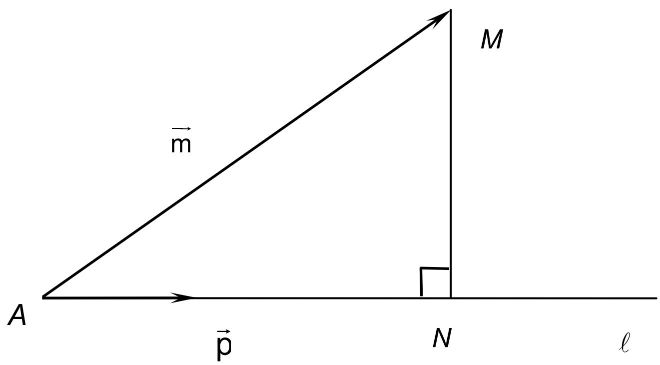


Рис. 2.4

Значит, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x\vec{p} - \vec{m}$. Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{p}$:

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{p} = 0 \Leftrightarrow (x\vec{p} - \vec{m}) \cdot \vec{p} = 0.$$

Ответ: Искомое расстояние $MN = \sqrt{(x\vec{p} - \vec{m})^2}$.●

Задача 2.5. **В правильной треугольной пирамиде SABC (S — вершина; SA = 4) точка D лежит на ребре SC, CD = 3, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найти объем пирамиды** (рис. 2.5).

а) Выберем базис из векторов $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{c}$ (рис. 2.5).

Составим таблицу умножения для векторов базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (угол φ пока неизвестен).

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	16	$16 \cos \varphi$	$4 \cos \varphi$
$\vec{b}$	$16 \cos \varphi$	16	$4 \cos \varphi$
$\vec{c}$	$4 \cos \varphi$	$4 \cos \varphi$	1

(6)

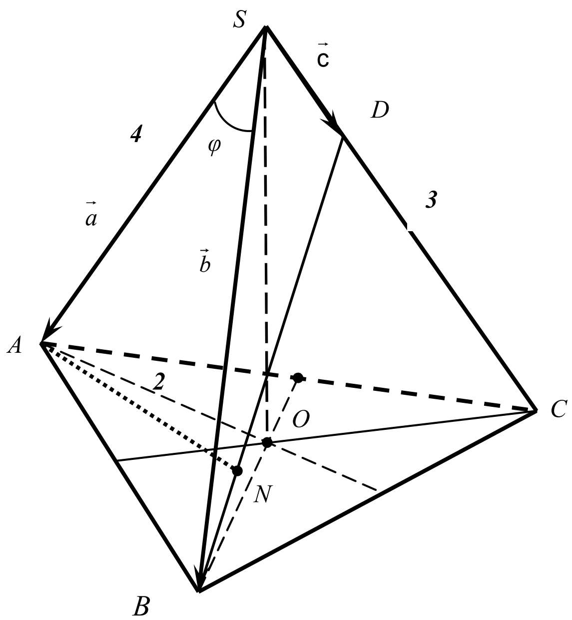


Рис. 2.5

б) По условию расстояние от точки *A* до прямой *BD* равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы (6), получим уравнение, позволяющее найти $\cos\varphi$.

Пусть *N* — проекция точки *A* на прямую *BD* (рис. 2.5). Выразим $\overrightarrow{AN}$ через базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DA} = x\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = x(\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} + x\vec{b} + (1 - x)\vec{c}\ .$$

Так как $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{DB}$, то $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Теперь используя таблицу (6), вычислим последовательно

$$\begin{gathered}\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (17x - 1) - 8(x+1)\cos\varphi = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

$$\left|\overrightarrow{AN}\right|^2 = (-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c})^2 = 17x^2 - 2x + 17 - 8(x+1)^2\cos\varphi.$$

С другой стороны, $\left|\overrightarrow{AN}\right|^2 = 4$, откуда следует

$$17x^2 - 2x + 13 - 8(x+1)^2\cos\varphi = 0. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) получаем $x = 7/9$ и $\cos\varphi = 55/64$.

Таким образом, таблица (6) полностью определена.

в) Вычислим объем пирамиды. Пусть точка *O* — центроид треугольника *ABC* (точка пересечения медиан *ABC*). Тогда

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}) \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{SO}\right| = SO = \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{48 + 96\cos\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{58}.$$

SO — высота пирамиды, так как в правильной пирамиде вершина *S* проектируется в точку пересечения *O* медиан треугольника *ABC*.

Вычислим теперь $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = AB^2$:

$$AB^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = \frac{9}{2},$$

и площадь основания (площадь правильного треугольника *ABC*):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Искомый объем

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{58} = \frac{3\sqrt{174}}{16}. \bullet$$

Ответ: $V_{пир} = \dfrac{3\sqrt{174}}{16}$.

§ 2.4. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью

Схема решения этого типа задач такова.

Дано: плоскость *ω* с базисом $\{\vec{a},\vec{b}\}$; точка *A*, принадлежащая плоскости *ω*; точка M, не лежащая в плоскости *ω.* Найти расстояние от точки M до плоскости и угол между прямой *AM* и плоскостью *ω* (рис. 2.6).

Пусть *N* — ортогональная проекция точки *M* на плоскость *ω*. (рис. 2.6).

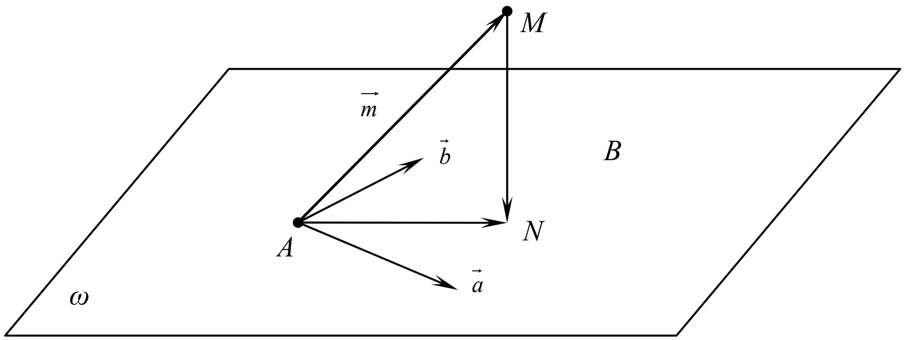


Рис. 2.6

Разложим вектор $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{m}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}\ .$$

Неизвестные коэффициенты *x, y* находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MN}$ к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{cases} \left(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}\right)\cdot\vec{a} = 0, \\ \left(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}\right)\cdot\vec{b} = 0. \end{cases}$$

Зная *x* и *y*, находим расстояние от точки *M* до плоскости *ω*:

$$MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \overrightarrow{m})^2}\ .$$

Если $x\vec{a} + y\vec{b} \neq \vec{o}$, то угол между прямой $\overrightarrow{AM}$ и плоскостью *ω* равен углу между векторами $\overrightarrow{m}$ и $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, а если $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{o}$, то прямая $\overrightarrow{AM} \perp \omega$.

З а д а ч а 2.6. **Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Все плоские углы при вершине А призмы равны по 60°, $AA_1 = 1$, $AB = 1$, $AC = 2$. Найти расстояние от точки А до плоскости $\omega = (BCC_1)$. Определить угол между прямой АВ и плоскостью ω.**

Пусть точка *N* — ортогональная проекция точки *A* на плоскость *ω*. *AN* — искомое расстояние (рис. 2.7).

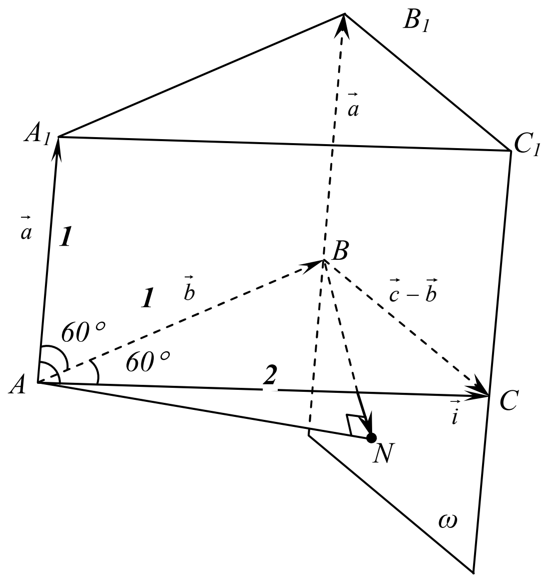


Рис. 2.7

а) Выберем аффинный базис пространства: $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ и составим таблицу скалярных произведений векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	**1**	$\frac{1}{2}$	**1**
$\vec{b}$	$\frac{1}{2}$	**1**	1
$\vec{c}$	**1**	**1**	4

(9)

б) Найдем базис плоскости $\omega = (BCC_1)$, векторы которого выражаются через базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, пространства. Четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Векторы $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ образуют базис плоскости ω, поскольку они параллельны плоскости ω и $\vec{a} \nparallel (\vec{c} - \vec{b})$.

Пусть $\overrightarrow{BN} = x(\vec{c} - \vec{b}) + y\vec{a}$, тогда

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b}) + y\vec{a}. \qquad (10)$$

в) Используя разложение (10) и таблицу умножения (9), находим

$$AN \perp \omega \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \perp \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AN} \perp \vec{a} = 0, \\ \overrightarrow{AN} \perp (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AN} \cdot \vec{a} = 0, \\ \overrightarrow{AN} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b}) + y\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (\vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b}) + y\vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + y = 0, \\ 3x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{11}, \\ y = -\frac{6}{11}. \end{cases} \qquad (11)$$

Таким образом, $\overrightarrow{AN} = -\frac{6}{11}\vec{a} + \frac{10}{11}\vec{b} + \frac{1}{11}\vec{c}$ и

$$AN = \left|\overrightarrow{AN}\right| = \frac{1}{11}\sqrt{(-6\vec{a} + 10\vec{b} + \vec{c})^2} = \frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

Пусть φ — величина угла между прямой AB и плоскостью ω. Из прямоугольного ΔANB получим

$$\sin\varphi = \frac{AN}{AB} = \frac{2\sqrt{22}}{11} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

Замечание. Разумеется, можно было воспользоваться разложением

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{6}{11}\vec{a} - \frac{1}{11}\vec{b} + \frac{1}{11}\vec{c}$$

и в силу таблицы умножения (9) найти

$$BN = \left|\overrightarrow{BN}\right| = \frac{1}{11}\sqrt{(-6\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Тогда из прямоугольного ΔABC находим

$$\cos\varphi = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{33}}{11} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Ответ: $AN = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$; $\varphi = \arcsin\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$ или $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.●

§ 2.5. Угол между плоскостями

Определение. Вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$ *называется нормальным вектором плоскости ω, если любая прямая* $l \| \vec{n}$ *перпендикулярна плоскости ω.*

Как известно, плоскость *ω* вполне определяется по точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \omega$ и нормальному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$\omega : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 . \qquad (12)$$

Предварительно решим основную (базовую) задачу.

Задача 2.7. **Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки** $M(1;2;3)$, $N(2;1;4)$ **и** $P(0;-1;5)$.

а) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{MN} = (1;-1;1)$ и $\overrightarrow{MP} = (-1;-3;2)$.

$\overrightarrow{MN} \nparallel \overrightarrow{MP}$, т.е. точки *M, N, P* не лежат на одной прямой (неколлинеарные). Из аксиом принадлежности следует, что через три неколлинеарные точки можно провести одну и только одну плоскость $\omega = (MNP)$.

б) Пусть вектор $\vec{n} = (a;b;c)$ — искомый нормальный вектор плоскости $\omega = (MNP)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0, \\ -a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{4}c, \\ a = -\dfrac{1}{4}c. \end{cases} \qquad (13)$$

Из системы (13) следует, например, что $\vec{n} = (-1; 3; 4)$ — нормальный вектор плоскости ω.

Комментарий. *Система (13) двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений:* $\left\{(-\frac{1}{4}c; \frac{3}{4}c; c) \mid c \in R\right\}$ — *однопараметрическое семейство решений. Это соответствует тому геометрическому факту, что нормальных векторов плоскости тоже бесконечное множество (однопараметрическое семейство), так как они определены с точностью до скалярного множителя* *(коллинеарны между собой). Выберем из этого множества любое ненулевое решение. Например, при $c=4$ имеем $\vec{n}=(-1;3;4)$.*

в) Найдем уравнение плоскости ω по ее нормальному вектору $\vec{n}=(-1;3;4)$ и любой из заданных точек $(M;N;P)$. Например, возьмем точку $N(2;1;4)$. По формуле (12) получаем

$$-1(x-2)+3(y-1)+4(z-4)=0 \Leftrightarrow x-3y-4z+17=0 .$$

Ответ: $x-3y-4z+17=0$. ●

Замечание. Рассмотренный пример показывает (задача 14), как найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости ω, зная

а) либо три неколлинеарные точки плоскости ω;

б) либо базис плоскости ω, т.е. два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости ω: $\vec{a}\parallel\omega$; $\vec{b}\parallel\omega$.

Приведем схему решения задачи по определению величины угла между двумя пересекающимися плоскостями.

***Задача 2.8.* α и β — две пересекающиеся плоскости. Найти величину угла $\varphi=\left(\widehat{\alpha,\beta}\right)$.**

а) Прежде всего находим нормальные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ соответственно плоскостей α и β.

б) Величину угла $\varphi=(\widehat{\alpha,\beta})$, где $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, находим, используя формулу $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$.

Откуда следует, что

$$\varphi=\arccos\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}. \tag{14}$$

Ответ: $\varphi=\arccos\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$. ●

***Задача 2.9.* В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный ΔABC со стороной, равной 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости оснований и $SA=1$. Точки P и Q соответственно середины ребер SB, CB. Плоскость α параллельна прямым SC и AB. Плоскость β параллельна прямым AQ и CP. Определить величину угла между плоскостями α и β** (рис. 2.8).

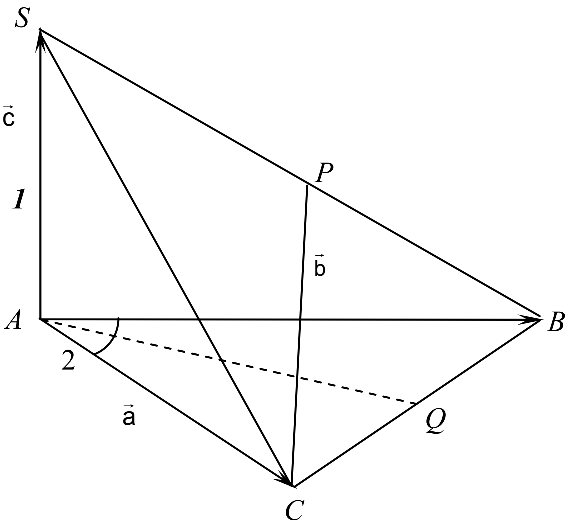


Рис. 2.8

а) Выберем базис векторов пространства $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ (рис. 2.8) и составим таблицу скалярных произведений векторов базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	2	0
$\vec{b}$	2	4	0
$\vec{c}$	0	0	1

(15)

б) Пусть $\vec{m}$ — нормальный вектор плоскости α. Разложим вектор $\vec{m}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\,. \tag{16}$$

По условию $\alpha \parallel (SC)$; $\alpha \parallel AB$ и, значит, $\overrightarrow{SC} \parallel \alpha$, $\overrightarrow{AB} \parallel \alpha$, $\overrightarrow{SC} \nparallel \overrightarrow{AB}$.

В силу этого неизвестные коэффициенты *x, y, z* в разложении (16) найдем из условий:

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{SC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Используя таблицу (15), приводим систему (17) к виду

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -6y. \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c}.$$

$\vec{m}$ — один из нормальных векторов плоскости α.

в) Пусть

$$\vec{n} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} \text{ —} \tag{18}$$

нормальный вектор плоскости β, а разложения векторов $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ имеют вид

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Из условия задачи следует, что

$$((CP)\parallel\beta,\ (AQ)\parallel\beta,\ (CP) \dot{-} (AQ)) \Leftrightarrow (\overrightarrow{CP}\parallel\beta,\ \overrightarrow{AQ}\parallel\beta,\ \overrightarrow{CP} \nparallel \overrightarrow{AQ}).$$

Таким образом, коэффициенты x_1, y_1, z_1 в формуле (18) можно найти из системы

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0, \\ (x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0, \end{cases}$$

которая с помощью таблицы (15) приводится к виду

$$\begin{cases} -6x_1 + z_1 = 0, \\ x_1 + y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -x_1, \\ z_1 = 6x_1. \end{cases}$$

Откуда получаем вектор $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + 6\vec{c}$ — один из нормальных векторов плоскости β.

г) Теперь, пользуясь таблицей (15), последовательно вычисляем

$$\left|\vec{m} \cdot \vec{n}\right| = \left|(-2\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + 6\vec{c})\right| = \left|-8 + 4 + 2 - 4 - 36\right| = 42,$$

$$\left|\vec{m}\right| = \sqrt{(-2\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c})^2} = \sqrt{16 + 4 + 36 - 8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3},$$

$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b} + 6\vec{c})^2} = \sqrt{4 + 4 + 36 - 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

И по формуле (14)

$$\cos\varphi = \frac{42}{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{30}}{40} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{7\sqrt{30}}{40}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{7\sqrt{30}}{40}$.

Упражнения

2.1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD длина каждого ребра равна *a*. Точка $M \in SC$, $SM:MC = 2:1$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AM}$.

2.2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AD взята точка Q, такая, что $AQ:QD = 2:1$. Найдите расстояние от вершины D до прямой PQ, если $AB = AA_1 = a$, $AD = 3a$, в основании параллелепипеда лежит прямоугольник ABCD и $\angle A_1AD = 60^\circ$.

2.3. Сторона основания ABCD правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину *2a*, боковое ребро — длину *a*. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B. Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM:AD_1 = 2:3$. Найдите его длину.

2.4. Вычислите расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*.

2.5. На ребре AB правильного тетраэдра MABC взяты точки P_1 и P_2, такие, что $AP_1:P_1P_2:P_2B = 1:1:2$. Найдите угол, который образует с плоскостью MAC прямые CP_1 и CP_2.

2.6. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ее ребра наклонены под углом α к основанию. Точки M, P — середины ребер AD и A_1D_1. Найдите угол между диагональным сечением призмы и плоскостью MC_1CP. Известно также, что $AD:AB = 2:3$ и $AA_1 = 4$.

2.7. Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

2.8. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основание которой — равносторонний треугольник. Через точки A, C, B_1 проходит плоскость. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью ACB_1, если $AB = 3$, $AA_1 = 4$.

2.9. В правильной треугольной пирамиде SABC, где S — вершина, $SA = 4$, точка D лежит на ребре SC, $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

2.10. Дан прямоугольной параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$, $AA_1 = 3$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.

2.11. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1 = \sqrt{2}\,AB$. Найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.

2.12. Основание треугольной пирамиды RHPQ является равнобедренный прямоугольный треугольник ΔHPQ, гипотенуза которого $PQ = 2\sqrt{2}$. Боковое ребро RH перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Найдите угол между прямыми RF и HN, где F — середина HP и N — середина PQ.

2.13. Длина ребра правильного тетраэдра ABCD равна *a*. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найдите длину отрезка MN.

2.14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, K — середина ребра DD_1. Найдите угол между прямыми CK и A_1D_1.

2.15. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник ΔABC со стороной 4. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, SA = 3. Точка M — середина ребра CB, а точка K делит ребро SB в отношении 1:4, считая от вершины S. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AM и CK.

2.16. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник ΔABC, в котором AB = AC = v, $\angle CAB = 30^\circ$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Точка K — середины SC. Найдите расстояние между AK и SB, если AS = v.

2.17. Дан правильный тетраэдр ABCD с ребром, равным *m*. K и L — середины сторон AD и BC соответственно. CC_1 — высота ΔABC. Найдите угол между KL и CC_1.

2.18. В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ΔABC со стороной 1. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна $\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, а плоскость β параллельна прямым SC и AB. Найдите угол между этими плоскостями.

2.19. В треугольной пирамиде ABCD все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр ΔABC, точка N — середина ребра AB, точка K — середина ребра CD. Найдите угол между прямыми MO и KN.

2.20. Докажите, что боковое ребро правильной треугольной пирамиды перпендикулярно к противолежащей стороне основания.

2.21. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину *a*. Найдите объем призмы.

2.22. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1 = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{2}a$. Найдите угол между диагоналями A_1B и AC_1.

2.23. Дана пирамида с двугранным углом при основании, равным 90°. В основании лежит правильный треугольник ΔABC со стороной, равной 7. Высота пирамиды SA = 7. Найдите расстояние между AB и SC.

2.24. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна *a*, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Найдите высоту призмы.

2.25. Точки M и N — середины ребер тетраэдра ABCD, точка P взята на ребре AD так, что $AP:AD = 2:3$. В каком отношении плоскость MNP делит ребро BC?

2.26. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон $AB:AD = 1:2$. Высота пирамиды проектируется в точку O (центр основания) и равна большей стороне основания. На ребрах MA и MC пирамиды взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Считая $AB = 2$, найдите расстояние от плоскости DPQ до точки N — середины AB.

2.27. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$; O — центр верхнего основания цилиндра, O_1 — нижнего. Найдите угол между прямыми OO_1 и ED_1, если радиус основания цилиндра равен высоте цилиндра.

2.28. Основанием пирамиды SABC является правильный треугольник ΔABC со стороной, равной $4\sqrt{4}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и $SC = 2$. M, N — середины сторон BC и AB соответственно. Найдите угол между прямыми SM и CN.

3.29. Основанием треугольной пирамиды RHPQ является равнобедренный прямоугольный треугольник HPQ, гипотенуза которого $PQ = 2\sqrt{2}$. Боковое ребро RH перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Найдите расстояние между прямыми RF и HN, где F — середина HP и N — середина PQ.

2.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, K — середина ребра DD_1. Найдите расстояние между прямыми CK и A_1D_1.

2.31. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину *a*. Вершины M и N правильного тетраэдра MNPQ лежат на прямой A_1C. Найдите объем призмы.

2.32. Дана пирамиды ABCD со сторонами $BD = 1$, $BC = BA = 2$ и углами: $\angle CBA = 45^\circ$ и $\angle DBA = 45^\circ$. Найдите объем пирамиды.

2.33. В правильной треугольной пирамиде SABC, где S — вершина, $SA = 4$, точка D лежит на ребре SC, $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

2.34. Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра *BC*, а другая проходит через точку *C* и середину ребра *AB*.

2.35. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник ΔABC, в котором $AB = AC = v$, $\angle CAB = 30^\circ$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Точка K — середина SC. Найдите угол между AK и SB, если $AS = v$.

2.36. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$: $AA_1 = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{2}a$. Найдите расстояние между диагоналями A_1B и AC_1.

2.37. Через вершину C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая продолжения ребер AB, AD, AA_1 за точки B, D, A_1 в точках B_0, D_0, A_0 соответственно так, что $AB_0:AB = AD_0:AD = 3AA_0:AA_1$. Найдите отношения объемов параллелепипеда и тетраэдра $AA_0B_0D_0$.

2.38. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Считая сторону основания равной *a*, найдите расстояние от точки P, взятой на ребре BB_1, до прямой AC_1, если отношение $BP:BB_1 = 1:4$.

2.39. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найдите отношение объемов конуса и призмы, если известно $AB_1:AB = 5:1$.

2.40. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D$, в основании которой лежит ромб с углом в 60° и стороной *a*, $\angle A_1AC = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $AA_1 = a$. Найдите расстояние от точки *A* до плоскости $\omega = (B_1D_1D)$ и угол ABK, где K — проекция точки A на плоскость ω.

2.41. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину *a*. Вершины M и N правильного тетраэдра MNPQ лежат на прямой A_1C. Найдите расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

2.42. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длины ребер равны: $AD = \sqrt{3}$, $DC = 1$, $DD_1 = \sqrt{2}$. Углы между прямыми DC и DD_1, AD и DD_1, AD и DC соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{6}$. Найдите расстояние от центра грани AA_1D_1D до плоскости BC_1D.

2.43. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка F — центр грани ABCD, точка K — середина ребра CC_1, N — середина ребра D_1C_1. Найдите угол между прямыми DN и FK.

2.44. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N — середины ребер B_1C_1 и DC соответственно. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости, проходящей через прямую MN и параллельной прямой AB, если ребро куба равно 2.

2.45. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, M, N и K — соответственно середины ребер AB, SC и BC, $SC = BC = 2$, точка F — точка пересечения прямых BN и SK. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, параллельной прямым SC и MF.

2.46. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом A, равным 60°. Все ребра призмы имеют длину a, точка K — ортогональная проекция точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональная проекция точки K на DD_1C_1C. Найдите объем пирамиды $DCLK$.

2.47. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, где $SA = 4$, точка B лежит на SC, $CD = 3$, а расстояние от точки A до BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

2.48. Точки M, N и P соответственно — середины ребер AB, CD и BC тетраэдра $ABCD$. Через точку P проведена плоскость, параллельная прямым DM и AN. В каком отношении эта плоскость разделяет ребро AD?

2.49. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. AC и DC_1 — диагонали его граней. Доказать, что существует и притом единственная пара точек M, N (M на прямой AC и N — на прямой DC_1) такая, что $MN \parallel BD_1$. Найдите отношение $MN : BD_1$.

2.50. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ отношение ребер $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{3}$, а точка P — середина ребра AC. Найдите угол, который образуют прямые B_1P и A_1B.

2.51. В плоскости ω задан квадрат $ABCD$ со стороной a. На перпендикуляре к плоскости ω, проведенным через точку A, лежит точка K, причем $KA = a$. Найдите угол между прямыми AB и KC.

2.52. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD. Докажите, что параллелепипед является кубом.

2.53. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота равна 3. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найдите длину ребра куба.

2.54. В основании пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм с углом в 60°. Дано отношение сторон основания: $AB : AD = 1 : 3$. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и $MB = 2AB$. На ребре AB взята точка P — середина этого ребра, а на MD — точка Q. Считая $AB = a$, найдите расстояние до прямой PQ от вершины C, когда отношение $MQ : MD = 3 : 4$.

2.55. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$ ($LM = KN$), описанная около окружности радиуса $\sqrt{3}$, $\angle MLK = \frac{2\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию. Высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки N до плоскости SKL.

2.56. Ребро правильного тетраэдра ABCD равно *a*, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 3$, точка F — центр грани ABC. Найдите угол между прямыми BC, KE и расстояние между этими прямыми.

2.57. В правильном тетраэдре ABCD отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найдите расстояние между прямыми MN и DE, где $AC = d$.

2.58. В правильном тетраэдре ABCD отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми MN и DE.

2.59. Дана треугольная пирамида SABC. $AC = CB = l$, $AB = m$, плоскость SAB перпендикулярна плоскости ABC, прямая CD перпендикулярна AB, $CB = h$, точка K принадлежит прямой AC, $AK = KC$. Найдите угол между прямыми BC и SK.

2.60. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP = 3PD$.

Найдите расстояние:

1) от точки F до прямой AP;

2) между прямыми EF и AP;

3) от точки A_1 до плоскости ΔEFP.

2.61. Ребро правильного тетраэдра ABCD равно b, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F — центр грани ABC. Найдите угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E, F.

2.62. Дана треугольная пирамида FABC, у которой $AF = 1$; $AB = \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{2}$; $\angle FAB = 45°$; $\angle FAC = 45°$; $\angle BAC = 60°$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через прямую AC и параллельной прямой AB, и плоскостью FMB, где M — середина [AC].

2.63. В треугольной пирамиде DABC: $AD = 3\sqrt{2}$; $AB = 3$; $AC = 1$; $\angle DAC = 45°$; $\angle DAB = 45°$; $\angle BAC = 60°$. Найдите расстояние от точки D до медианы AK треугольника ABC.

2.64. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Высота призмы равна катету основания. На ребрах AB, CC_1 и AC взяты соответственно точки P,Q и

T — середины этих ребер. Найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью α, проходящей через вершину C_1, параллельно прямым PQ и B_1T.

2.65. Высота MO правильной пирамиды MABC равна стороне ее основания. На отрезке OB взята точка P — середина этого отрезка. Найдите угол, который образует с плоскостью MAB прямая MK, где K середина ребра AC.

2.66. На ребрах AB, AC, MB и MC правильной пирамиды MABC все плоские углы при вершине M которой прямые, взяты соответственно точки D, E, F и K — середины этих ребер. Точка O — точка пересечения медиан основания пирамиды. Найдите углы между следующими прямыми: 1) BE и MD; 2) BE и AF; 3) AF и OK.

2.67. Высота MO пирамиды MABCD проектируется в точку пересечения диагоналей основания, которым является прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1:2$, и $MO = AD$. На ребре MC взята точка K — середина этого ребра. Найдите углы, которые образует плоскость BDK со следующими плоскостями: 1) ABC; 2) MCD; 3) MBC.

Глава III

РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВНЫХ ВЕКТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ

С введением в курсе аналитической геометрии элементов векторной алгебры стало возможным применять этот аппарат к решению многих геометрических задач на вычисление. Векторный метод решения геометрических задач имеет много преимуществ, одно из которых состоит в том, что значительно упрощаются решения геометрических задач в сравнении с решениями, выполненными традиционными методами. Кроме того, векторный метод позволяет сравнительно легко делать иногда очень далеко идущие обобщения [4].

§ 3.1. Первое основное векторное соотношение

Определение. Будем говорить, что точка C делит отрезок AB в отношении λ, если

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}\,. \qquad (1)$$

Если $\lambda>0$, то точка C делит отрезок внутренним образом, т. е. С$\in\left[AB\right]$, а если $\lambda<0$, то точка C делит отрезок внешним образом, т. е. C лежит вне отрезка АВ.

Теорема 1. Для того чтобы точка C делила отрезок АВ в отношении λ, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки O пространства выполнялось равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}. \qquad (2)$$

○ Пусть точка C делит отрезок в отношении λ, т. е. выполняется соотношение (1). Используя правило вычитания векторов, запишем равенство (1) в виде

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow (1+\lambda)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB} \bullet$$

В частности, если $\lambda = m : n$, т. е. $AC : CB = m : n$, то формула (2) примет вид

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \kappa\overrightarrow{OA} + (1-\kappa)\overrightarrow{OB},$$

$$k = \frac{n}{m+n}, 1-k = \frac{m}{m+n}.$$

Отметим, что если точка M является серединой отрезка AB, т. е. точка M делит отрезок AB в отношении $\lambda = 1$, то формула (2) примет в этом случае вид

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}. \quad (3)$$

Формулу (3) назовем в дальнейшем формулой для середины отрезка.

***Задача 3.1*. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину А к центру симметрии М грани BCC_1B_1 проведена прямая, пересекающая плоскость A_1BD в точке N. Вычислить отношение** $AN : NM$ (рис. 3.1).

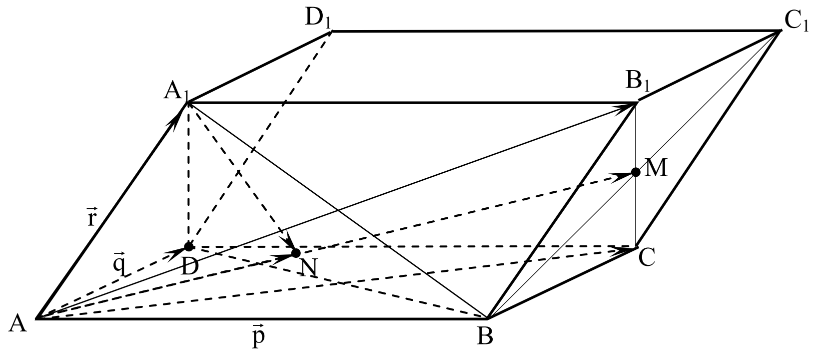


Рис. 3.1

○ 1. Пусть $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ — тройка некомпланарных векторов (рис. 3.1). Разложим векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$:

а) $\overrightarrow{AB_1} = \vec{r} + \vec{p}$; $\overrightarrow{AC} = p + \vec{q}$. По свойству середины М отрезка B_1C (3)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{r} + \vec{p} + \vec{p} + \vec{q}\right) = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}.$$

b) Векторы $\overrightarrow{A_1D}$, $\overrightarrow{A_1N}$, $\overrightarrow{A_1B}$ — компланарны. Тогда по признаку компланарности векторов имеем

$$\overrightarrow{A_1N} = x \cdot \overrightarrow{A_1D} + y \cdot \overrightarrow{A_1B}.$$

2. Точки A, N, M лежат на одной прямой. Значит, векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$ компланарны, т. е.

$$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}. \tag{3}$$

Подставляя (1), (2) в соотношение (3), находим

$$y\vec{p} + x\vec{q} + (1 - x - y)\vec{r} = k\left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}\right). \tag{4}$$

Так как разложение вектора по базису $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ однозначно, то из (4) следует (приравниваем коэффициенты в левой и правой частях при векторах $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$):

$$\begin{cases} y = k, \\ x = \frac{1}{2}k, \qquad \Rightarrow k = \frac{1}{2}. \\ 1 - x - y = \frac{1}{2}k \end{cases}$$

Из (3) тогда $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN} \Rightarrow AM = 2AN \Leftrightarrow AN = NM,$ т. е. $AN : NM = 1 : 1.$ •

Ответ: $AN : NM = 1 : 1.$

Задача 3.2. **Плоскость ω отсекает от боковых ребер SA, SB, SC правильной четырехугольной пирамиды $SABD$, отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$. Какую часть ребра SD, считая от вершины, отсекает плоскость ω?**

○ Пусть

$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}, \overrightarrow{SD} = \vec{d}, \omega = (KLM), \omega \cap [SD] = N,$$

$$(SO) \cap (LN) = O_1.$$

Пирамида $SABCD$ — правильная, поэтому ее боковые ребра равны, т.е. $SA = SB = SD = SC = a$. Рассмотрим равнобедренный ΔASC. Наша задача: выразить вектор $\overrightarrow{SO_1}$ через $\overrightarrow{SO}$.

По свойству медианы треугольника

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}. \tag{4}$$

Векторы $\overrightarrow{SO_1}$ и $\overrightarrow{SO}$ коллинеарны, поэтому

$$\overrightarrow{SO_1} = x \cdot \overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}x \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}x \cdot \vec{c}. \tag{5}$$

С другой стороны, так как SO_1 — биссектриса в ΔSKM, то по свойству биссектрисы угла имеем

$$\frac{KO_1}{O_1M} = \frac{SK}{SM} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}.$$

Отсюда в силу первого основного векторного соотношения из ΔSKM (рис. 3.2) находим

$$\overrightarrow{SO_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SK} = \frac{2}{9}\vec{c} + \frac{2}{9}\vec{a}. \tag{6}$$

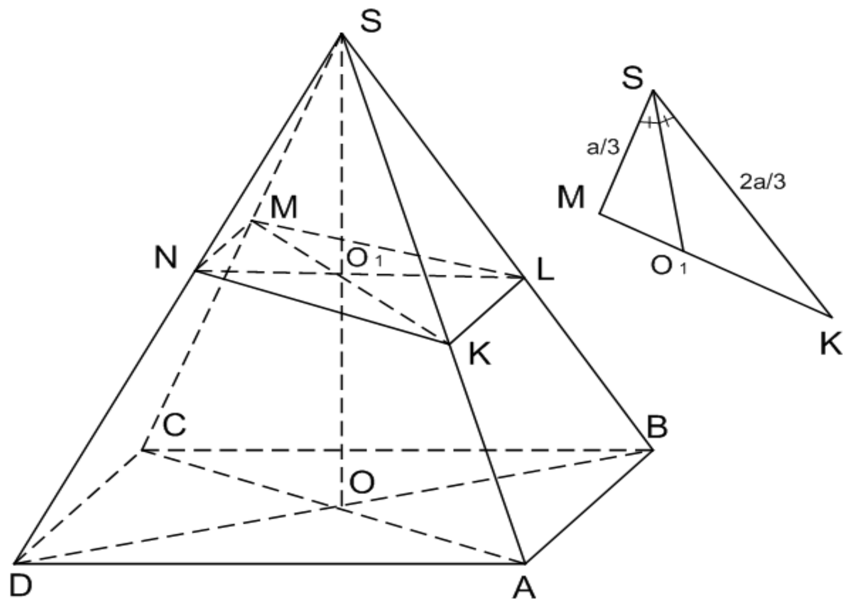


Рис. 3.2

Из равенств (5), (6) следует, что

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

и тогда

$$\overrightarrow{SO_1} = \frac{4}{9}\overrightarrow{SO}. \qquad (7)$$

Рассмотрим ΔSBD . Пусть $SN : SD = y \Rightarrow \overrightarrow{SN} = y\vec{d}.$

Так как SO_1 является биссектрисой в ΔSLN , то по свойству биссектрисы

$$\frac{LO_1}{O_1N} = \frac{SL}{SN} = \frac{\frac{1}{2}a}{ya} = \frac{1}{2y}. \qquad (8)$$

Учитывая (8), по основному векторному соотношению (1) из ΔSLN получаем:

$$\overrightarrow{SO_1} = \frac{1}{1+2y}\overrightarrow{SN} + \frac{2y}{1+2y}\overrightarrow{SL} = \frac{y}{1+2y}\vec{d} + \frac{y}{1+2y}\vec{b}. \qquad (9)$$

С другой стороны, из равенства (7) и $SO_1 = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ имеем

$$\overrightarrow{SO_1} = \frac{4}{9}\overrightarrow{SO} = \frac{4}{9}(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}) = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{d}. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что:

$$\frac{y}{1+2y} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 9y = 2 + 4y \Leftrightarrow y = \frac{2}{5} \Rightarrow SN = \frac{2}{5}SD.$$

Ответ: $\frac{2}{5}SD$.●

Задача 3.3. **$ABCD$ — треугольная пирамида. M — середина ребра AB. Точка K лежит на ребре BC, причем $BK = 2KC$. Разложить вектор $\overrightarrow{KN}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{CA}, \vec{b} = CB, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, если** $M : N = 2 : 3$ (рис. 3.3).

○ По первому основному векторному соотношению имеем

$$\overrightarrow{KN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{KM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{KD}. \qquad (11)$$

Теперь разложим векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KD}$ по векторам $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. По правилу вычитания векторов:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Отсюда, учитывая, что M — середина отрезка BA, находим

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

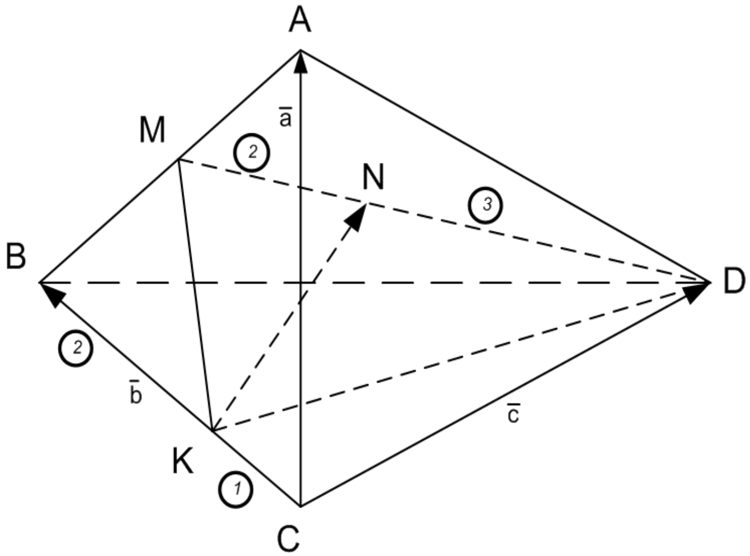


Рис. 3.3

Теперь по правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}. \qquad (12)$$

Наконец,

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}. \qquad (13)$$

Подставив разложения (12), (13) векторов $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KD}$ в формулу (11), окончательно получим:

$$\overrightarrow{KN} = \frac{3}{5}(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}) + \frac{2}{5}(\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}) = \frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}.$$

Ответ: $\overrightarrow{KN} = \frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$. ●

***Задача 3.4*. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с длиной ребер m. $M \in AB, N \in AD$; $BM : MA = 2:3,\ \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN} = \frac{7}{20} m^2$. В каком отношении N делит AD?** (рис. 3.4).

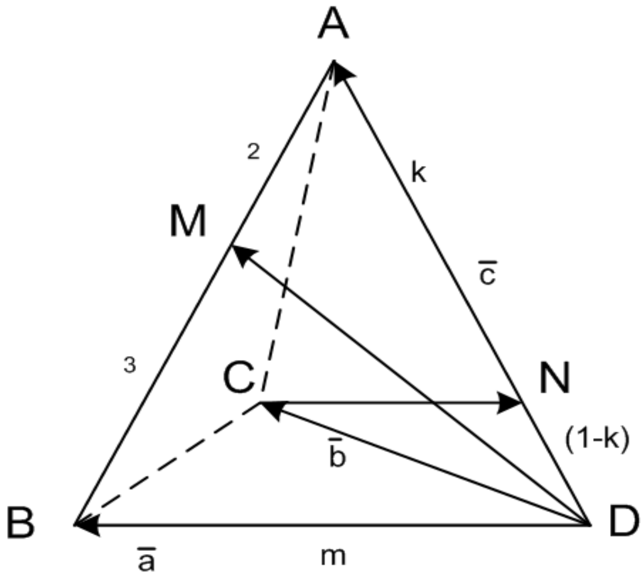


Рис. 3.4

○ Пусть $AN : AD = k$, тогда $ND : AD = 1 - k$.
Введем $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — аффинный базис, тогда

$$\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{CD} + (1-k) \cdot \overrightarrow{CA} = -k \cdot \vec{b} + (1-k)(-\vec{b} + \vec{c}) =$$
$$= -(-k + 1 - k) \cdot \vec{b} + (1-k) \cdot \vec{c} = (2k-1) \cdot \vec{b} + (1-k) \cdot \vec{c},$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN} = (\frac{2}{5} \cdot \vec{a} + \frac{3}{5} \cdot \vec{c}) \cdot ((2k-1) \cdot \vec{b} + (1-k) \cdot \vec{c}) =$$

$$= \frac{2}{5 \cdot 2} \cdot (2k-1) \cdot m^2 + \frac{2}{5 \cdot 2} \cdot (1-k) \cdot m^2 + \frac{2}{5 \cdot 2} \cdot (2k-1) \cdot m^2 + \frac{3}{5} \cdot (1-k) \cdot m^2 =$$
$$= (\frac{1}{5} \cdot 2k - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot k + \frac{3}{5} \cdot k - \frac{3}{10} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot k) \cdot m^2 = (\frac{1}{5} \cdot k + \frac{3}{10}) \cdot m^2.$$

По условию $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN} = \dfrac{7}{20} m^2$, значит,

$$\frac{1}{5} \cdot k + \frac{3}{10} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow 4k + 6 = 7 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow AN : ND = 1 : 3,$$

$$1 - k = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $AN : ND = 1 : 3.$ •

Задача 3.5*. В треугольнике *KLM* на стороне *KL* взята точка *A* так, что *KA : AL* = 1 : 3, на стороне *LM* взята точка *B* так, что *LB* : *BM* = 4 : 1. Пусть *C* — точка пересечения прямых *KB* и *MA*. Площадь треугольника *KLC* равна 2. Найти площадь треугольника *KLM (рис. 3.5).

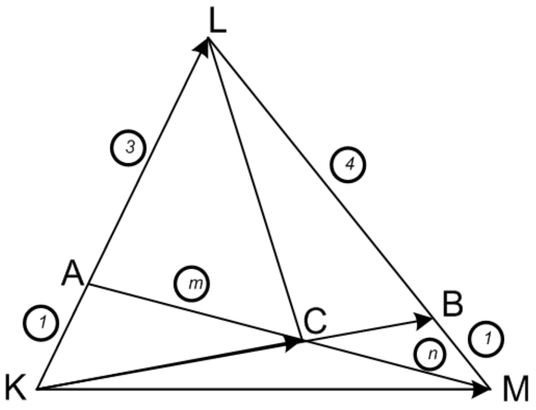


Рис. 3.5

○ Пусть $S_{\Delta KLM} = S$, тогда $S_{\Delta KLB} = \dfrac{4}{5} S$, так как у треугольников ΔKLM и ΔKLB одинаковая высота, которая проведена соответственно к основаниям *LM и LB*, где

$$\frac{4}{5} LM = LB.$$

Введем векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KM}$. В силу первого векторного соотношения получим

$$\overrightarrow{KB} = \frac{1}{5} \overrightarrow{KL} + \frac{4}{5} \overrightarrow{KM}.$$

Пусть $\overrightarrow{KC}=x\cdot\overrightarrow{KB}$, где $x\in(0,1)$, тогда

$$\overrightarrow{KC}=\frac{x}{5}\cdot\overrightarrow{KL}+\frac{4x}{5}\cdot\overrightarrow{KM}. \tag{14}$$

Пусть $|AC|:|CM|=m:n$, тогда из ΔAKM по первому основному векторному соотношения получим

$$\overrightarrow{KC}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{KA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{KM}=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{KL}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{KM}. \tag{15}$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам из (14) и (15) получаем следующую систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{5}=\dfrac{n}{4(m+n)},\\ \dfrac{4x}{5}=\dfrac{m}{m+n};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x}{5}=\dfrac{n}{m+n},\\ \dfrac{4x}{5}=\dfrac{m}{m+n};\end{cases}\Rightarrow\ \frac{8x}{5}=\frac{n+m}{m+n}\ \Rightarrow\ x=\frac{5}{8}.$$

Так как ΔKLB и ΔKLC имеют общую высоту, то

$$S_{\Delta KLC}=S_{\Delta KLB}=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}\cdot S=\frac{1}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\cdot S_{\Delta KLM}\Rightarrow$$

$$S_{\Delta KLM}=2\cdot S_{\Delta KLC}=2\cdot 2=4.$$

Ответ: $S_{\Delta KLM}=4$. •

Задача 3.6. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. На прямой AC взята точка E, такая, что $AE:AC=2:1$, причем точка C лежит между точками A и E, а на прямой AB_1 взяты точки O и F такие, что $AO=OB_1=B_1F$. Найти расстояние между точками O и E** (рис. 3.6).

○ $\dfrac{AO}{OF}=\dfrac{1}{2}$. Введем декартов базис $\{\vec a,\vec b,\vec c\}$, как указано на рисунке (3.6).

Пусть

$$\overrightarrow{AB}=\vec a,\overrightarrow{AD}=\vec b,\overrightarrow{AA_1}=\vec c.\ \overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}=2(\vec a+\vec b),$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-2(\vec a+\vec b)+\frac{3}{2}(\vec a+\vec c)=-\frac{1}{2}\vec a-2\vec b+\frac{3}{2}\vec c.$$

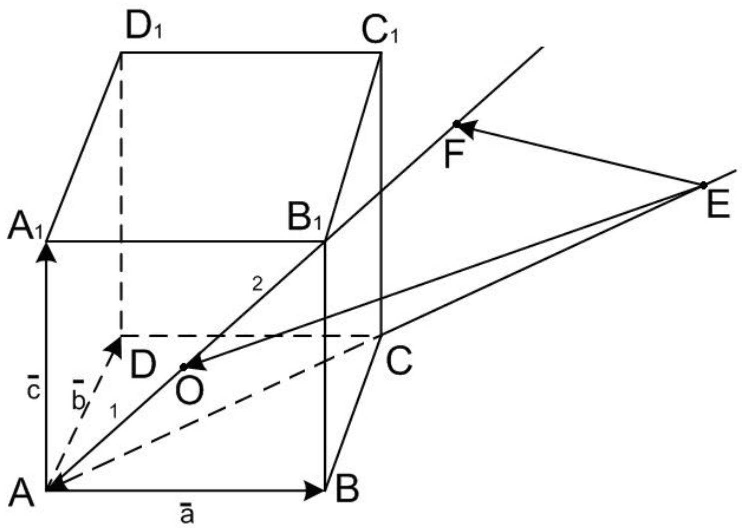


Рис. 3.6

По первому основному векторному соотношению имеем

$$\overrightarrow{EO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}(-2(\vec{a}+\vec{b}))+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c})=-\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\left|\overrightarrow{EO}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}a^2+4a^2+\frac{1}{4}a^2}=\frac{9}{2}\sqrt{9+16+1}=\frac{a\sqrt{26}}{2}.$$

Ответ: $\rho(O,E)=\dfrac{a\sqrt{26}}{2}$.•

§ 3.2. Второе основное векторное соотношение

Т е о р е м а 2. Если точка M и N делят направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно в равных отношениях, т. е.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

то выполняется равенство

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}$$

или

$$\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{BD},$$

где *AB* и *CD* — любые пространственные отрезки.

○ Пусть O — произвольная точка пространства. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$ (рис. 3.7).

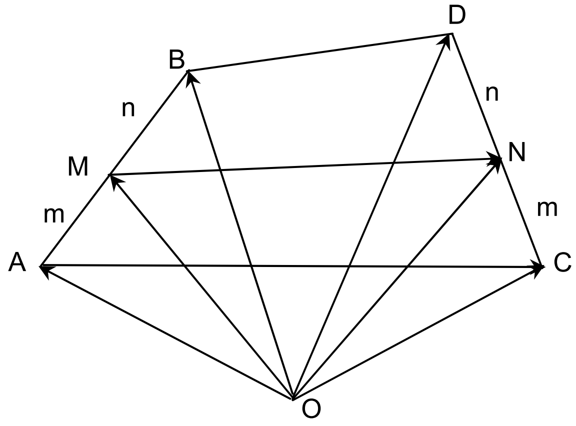


Рис. 3.7

В силу первого основного векторного соотношения

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}.$$

Рассмотрим теперь векторы $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{ON}$.
По первому основному векторному соотношению имеем

$$\overrightarrow{ON} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OC}.$$

Теперь найдем вектор $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) +$$

$$+\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}. \bullet$$

З а д а ч а 3.7. **Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях**

BC_1 **и** CA_1 **боковых граней, параллельные плоскости** ABB_1A **. Один из этих отрезков проведен через точку** M **диагонали** BC_1 **так, что** $BM : BC_1 = 1:3$ **. Найти его длину** (рис. 3.8).

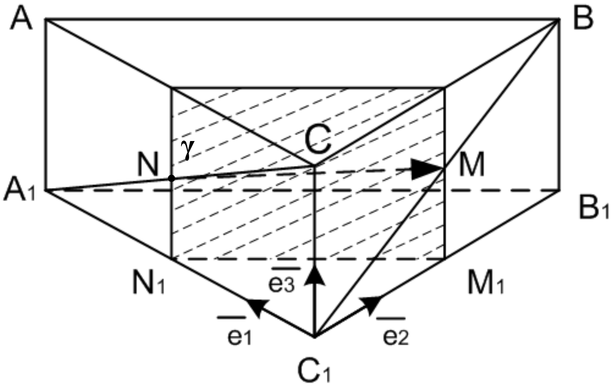


Рис. 3.8

○ Выберем систему координат $\left\{C_1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ так, как указано на рисунке 3.8, причем $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = \left|\overrightarrow{e_3}\right| = 1$.

Через точку M, лежащую в плоскости боковой грани, проведем прямую MM_1, параллельную прямой BB_1. Пусть $M_1 = (MM_1) \bigcap \left[C_1B_1\right]$. Затем в плоскости нижнего основания проведем $M_1N_1 \| A_1B_1$. Прямые MM_1 и N_1M_1 определяют плоскость $\gamma \| (ABB_1)$. Пусть $\gamma \bigcap \left[A_1C\right] = N$. Отрезок $[NM]$ — искомый отрезок. По условию задачи $BM : MC_1 = 1:2$ и в силу обобщенной теоремы Фалеса, последовательно рассматривая подобные треугольники, получаем следующую цепочку равенств:

$$\frac{1}{2} = \frac{BM}{MC_1} = \frac{B_1M_1}{M_1C_1} = \frac{A_1N_1}{N_1C_1} = \frac{A_1N}{NC}.$$

Таким образом, плоскость сечет направленные отрезки $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ в точках M и N так, что

$$\frac{BM}{MC_1} = \frac{A_1N}{NC} = \frac{1}{2}.$$

По второму основному векторному соотношению:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1B}. \qquad (2)$$

Разложим векторы равенства (2) по базису $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

$$\overrightarrow{CC_1} = -a\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{e_3} + (\overrightarrow{C_1B_1} - \overrightarrow{C_1A_1}) = a\overrightarrow{e_3} + (a\overrightarrow{e_2} - a\overrightarrow{e_1}) = -a\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2} + a\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{3}a\overrightarrow{e_3} + \frac{2}{3}(-a\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2} + a\overrightarrow{e_3}) = -\frac{2}{3}a\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{3}a\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{3}a\overrightarrow{e_3}.$$

Учитывая, что $\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 60°; \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) = 90°; \angle(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 90°$,

$$NM^2 = \overrightarrow{NM}^2 = (-\frac{2}{3}a\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{3}a\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{3}a\overrightarrow{e_3})^2 = \frac{4}{9}a^2 +$$

$$+\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{9}a^2 \cdot \cos 60° = a^2 - \frac{2}{9}a^2 = \frac{7}{9}a^2.$$

Отсюда $NM = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$ •

Задача 3.8. **В кубе** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **точка** M **лежит на ребре** BB_1**, причем** $BM : MB_1 = 3:2$**, а точка** N **лежит на ребре** AD**, причем** $AN : ND = 2 : 3$**. Вычислите длину** MN**, если ребро куба равно** a (рис. 3.9).

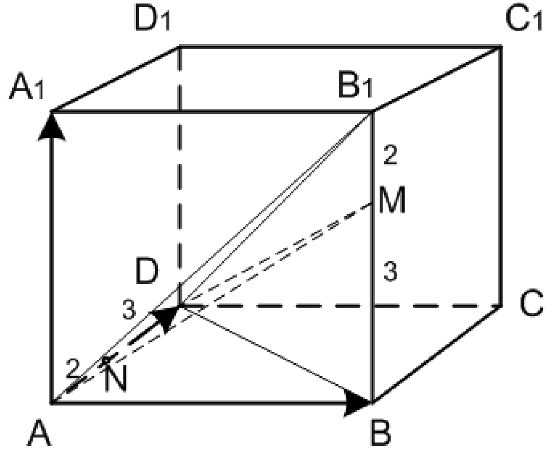


Рис. 3.9

○ 1. Выберем базис: $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

2. По второму основному векторному соотношению имеем из ΔAMD :

$$\overrightarrow{MN}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{MD}. \qquad (3)$$

3. Найдем $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MD}$.

$$-\overrightarrow{MA}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=-\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{MD}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{DB}+\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{DB_1}=\frac{2}{5}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{3}{5}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}.$$

Подставляя полученные выражения в равенство (3), получаем:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{3}{5}(-\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{c})+\frac{2}{5}(-\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c})=-\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{25}\vec{c}.$$

Находим длину $\overrightarrow{MN}$:

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\frac{4}{25}a^2+\frac{1}{25}a^2+\frac{9}{25}a^2}=\frac{\sqrt{14}}{5}a.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{5}a.$●

Задача 3.9. **Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны m, служит ромб с острым углом 60°. Найдите длину отрезка NM, где точка N лежит на ребре BB_1, а точка M — на диагонали боковой грани DC, так, что $BN:NB_1=C_1M:MB=3:2$** (рис. 3.10).

○ По условию $\frac{BN}{NB_1}=\frac{C_1M}{MD}=\frac{3}{2}$, поэтому к векторам $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{B_1D}$ применим второе основное векторное соотношение:

$$\overrightarrow{NM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC_1}+\frac{3}{5}\overrightarrow{B_1D}. \qquad (4)$$

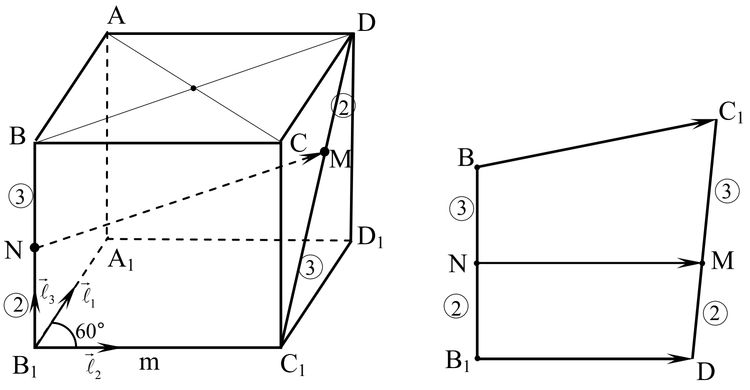


Рис. 3.10

Введем аффинный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — тройку некомпланарных единичных векторов (см. рис. 3.10), где $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3,\ \left(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}\right) = 60°.$ Разложим последовательно векторы $\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{B_1D}, \overrightarrow{NM}$ по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$(\overrightarrow{BC_1} = m\vec{e}_2 - m\vec{e}_3,\ \overrightarrow{B_1D} = m\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + m\vec{e}_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{2}{5}\left(m\vec{e}_2 - m\vec{e}_3\right) + \frac{3}{5}\left(m\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + m\vec{e}_3\right) = \frac{3}{5}m\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + \frac{1}{5}m\vec{e}_3.$$

Следовательно,

$$NM^2 = \left|\overrightarrow{NM}\right|^2 = \overrightarrow{NM}^2 = \left(\frac{3}{5}m\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + \frac{1}{5}m\vec{e}_3\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{25}m^2 + m^2 + \frac{1}{25}m^2 + 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}m^2 = 2m^2 \Rightarrow NM = \sqrt{2m^2} = m\sqrt{2}.$$

Ответ: $m\sqrt{2}.$

Задача 3.10. **Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали B_1D призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B. Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что** $AM : AD_1 = 2 : 3.$

1. Найти длину этого отрезка.

2. Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков (рис. 3.11).

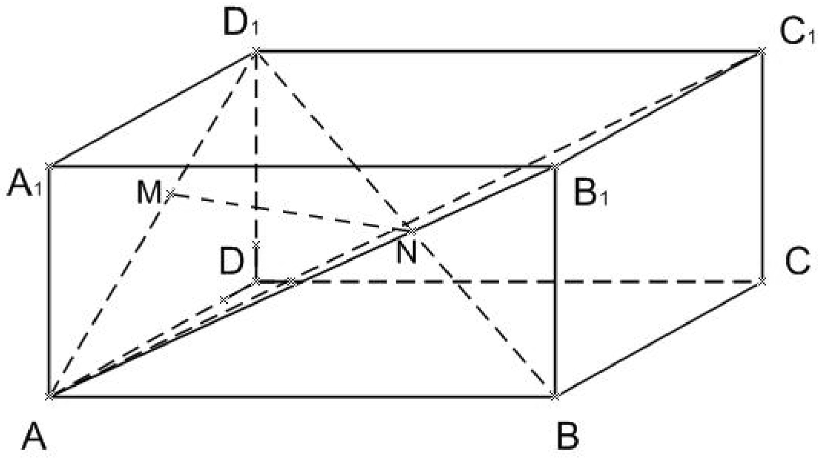


Рис. 3.11

○ 1. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскостям граней ABB_1A_1, DCC_1D_1. Первая плоскость пересекает отрезок B_1D в точке N и делит отрезки AD_1 и B_1D, соединяющие вторую и третью плоскости в одинаковом соотношении. Значит,

$$B_1N : ND = AM : MD_1 = 2:1.$$

По второму основному векторному соотношению имеем

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}.$$

Введем прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Разложим $\overrightarrow{D_1D}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ по базису:

$$\overrightarrow{DD_1} = -a\vec{k},\ \ \overrightarrow{AB_1} = 2a\,\vec{j} + a\vec{k}.$$

Таким образом, получаем:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}(-a\vec{k}) + \frac{1}{3}(2a\,\vec{j} + a\vec{k}) = \frac{2}{3}a\,\vec{j} - \frac{1}{3}a\vec{k}.$$

Найдем длину $\overrightarrow{MN}$:

$$MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

2. Пусть $DM_1 : MA = p$, тогда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{p+1}\cdot\overrightarrow{D_1D} + \frac{p}{p+1}\cdot\overrightarrow{AB_1} = -\frac{a}{p+1}\cdot\vec{k} + \frac{2ap}{p+1}\cdot\vec{j} +$$

$$+\frac{ap}{p+1}\cdot\vec{k} = \frac{2ap}{p+1}\cdot\vec{j} + \frac{a(p-1)}{p+1}\cdot\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \frac{4a^2p^2}{(p+1)^2} + \frac{a^2(p-1)^2}{(p+1)^2} = \frac{a^2(5p^2-2p+1)}{(p+1)^2}. \qquad (4)$$

Очевидно, MN будет иметь наименьшее значение при том значении p, при котором его достигает функция $y = \frac{5p^2-2p+1}{(p+1)^2}$, это будет при $p = \frac{1}{3}$.

Найденное значение p подставим в выражение (4), получим $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $1.\frac{a\sqrt{5}}{3}$; $2.\frac{a\sqrt{2}}{2}$.●

Задача 3.11. **Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $a = 4$. Концы отрезка MN, параллельного плоскости (AA_1D_1D), лежат на диагоналях боковых граней C_1D и A_1B соответственно,. Один из концов отрезка (точка M) делит диагональ C_1D в отношении $C_1M : C_1D = 1:4$. Найти длину отрезка MN** (рис. 3.12).

○ Построим искомый отрезок MN: $MN \parallel (AA_1D_1D)$.

В силу обобщенной теоремы Фалеса (из построения):

$$\frac{C_1M}{MD} = \frac{CM_1}{DM_1} = \frac{BN_1}{N_1A} = \frac{BN}{NA_1} = \frac{1}{3}.$$

По второму основному векторному отношению получаем:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A_1D} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BC_1}. \qquad (5)$$

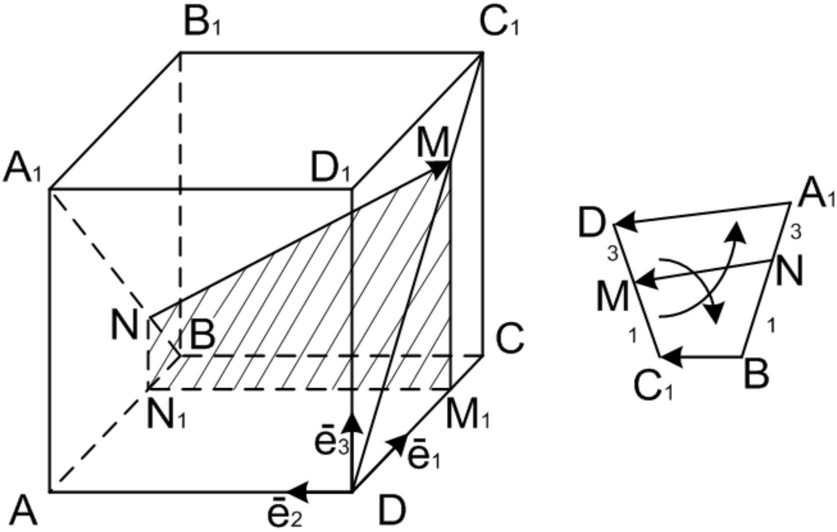


Рис. 3.12

Введем ортонормированный базис $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$, где $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = \left|\overrightarrow{e_3}\right| = 1$.

Разложим векторы по этому базису:

$$\overrightarrow{A_1D} = -a \cdot \overrightarrow{e_2} - a \cdot \overrightarrow{e_3}\,,\ \overrightarrow{BC_1} = -a \cdot \overrightarrow{e_2} + a \cdot \overrightarrow{e_3}\,.$$

Полученные разложения подставим в выражение (5):

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}a\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{4}a\overrightarrow{e_3} - \frac{3}{4}a\overrightarrow{e_2} + \frac{3}{4}a\overrightarrow{e_3} = -a\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{2}a\overrightarrow{e_3}.$$

Известно, что

$$\overrightarrow{MN}^2 = \left|\overrightarrow{MN}\right|^2 \Rightarrow MN^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow MN = \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 4 = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $MN = 2\sqrt{5}.\bullet$

Задача 3.12. **Ребро правильного тетраэдра** $ABCD$ **равно** a**.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{e_3};\ P \in BD,\ L \in AC$, **причем** $BP : PD = 2:1;$ $AL : LC = 1:2$. **Найти скалярное произведение векторов** $\overrightarrow{LP}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ (рис. 3.13).

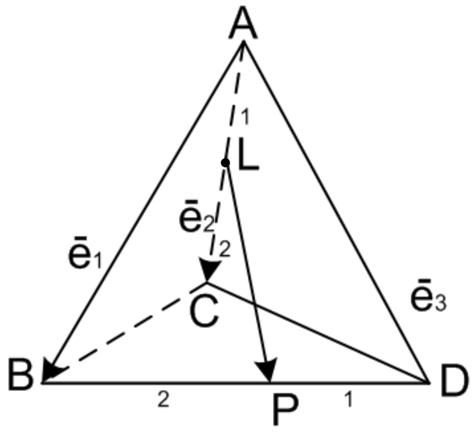


Рис. 3.13

○ По второму основному векторному соотношению:

$$\overrightarrow{LP} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$$

Теперь найдем скалярное произведение данных векторов:

$$\overrightarrow{LP}\cdot\overrightarrow{CD} = (\frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_3})(-\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = -\frac{1}{3}a^2\cos 60° +$$

$$+\frac{1}{3}a^2\cos 60° + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2\cos 60° - \frac{2}{3}a^2\cos 60° + \frac{2}{3}a^2 =$$

$$= (-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{2}{3})\cdot a^2 = (1 - \frac{1}{2})\cdot a^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

Ответ: $\overrightarrow{LP}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}a^2$. ●

§ 3.3. Третье основное векторное соотношение

Теорема 3. Пусть S **— произвольная точка пространства такая, что** $S \notin (ABC)$**. Для произвольной точки** M **плоскости** (ABC) **выполняется соотношение**

$$\overrightarrow{SM} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SB} + \gamma\overrightarrow{SC}, \qquad (1)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Возможны следующие случаи.

1. Точка M — внутренняя точка ΔABC (рис. 3.14).

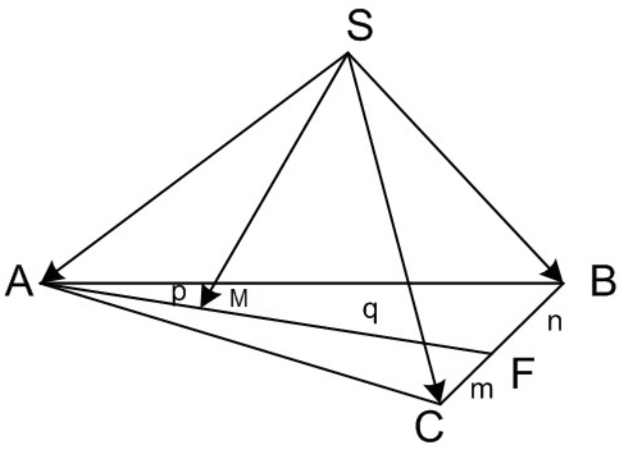


Рис. 3.14

○ Пусть точка F делит $[BC]$ в отношении, $CF : FB = m : n$, а точка M делит $[AF]$ в отношении $AM : MF = p : q$.

Рассматривая (SCB), по первому основному векторному соотношению находим:

$$\overrightarrow{SF} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SC}. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим плоскость SAF. Вновь применяя первое векторное соотношение, имеем:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{SF} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{SA}. \tag{3}$$

Подставим (2) в равенство (3):

$$\overrightarrow{SM} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{SA} + \frac{pm}{(p+q)(m+n)}\overrightarrow{SB} + \frac{pn}{(p+q)(m+n)}\overrightarrow{SC}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{q}{p+q},\ \beta = \frac{pm}{(p+q)(m+n)},\ \gamma = \frac{pn}{(p+q)(m+n)}$$

и, следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{q(m+n) + pm + n}{(p+q)(m+n)} = 1$.●

2. Точка M лежит на одной из сторон ΔABC.

○ Пусть для определенности $M \in [AC]$ (рис. 3.15).

Положим $AM : MC = m : n$, тогда по первому векторному соотношению:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} + 0 \cdot \overrightarrow{SB}$$

и

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} + 0 = 1. \bullet$$

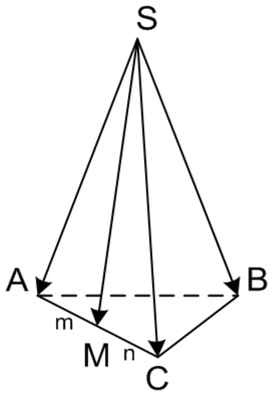


Рис. 3.15

3. Точка $M \notin \Delta ABC$ (рис. 3.16).

○ Пусть $AF : FC = m : n$, а $MF : FB = p : q$. С одной стороны, рассматривая плоскость SAC, по первому основному векторному соотношению имеем

$$\overrightarrow{SF} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA}. \qquad (4)$$

С другой стороны, рассматривая плоскость SMB, по формуле (2) находим

$$\overrightarrow{SF} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{SB} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{SM}. \qquad (5)$$

Из равенств (4), (5) следует:

$$\frac{q}{p+q}\overrightarrow{SM} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{SB} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SC} +$$

$$+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{n(p+q)}{(m+n)q}\overrightarrow{SA} -$$

$$-\frac{p}{q}\overrightarrow{SB} + \frac{m(p+q)}{(m+n)q}\overrightarrow{SC}.$$

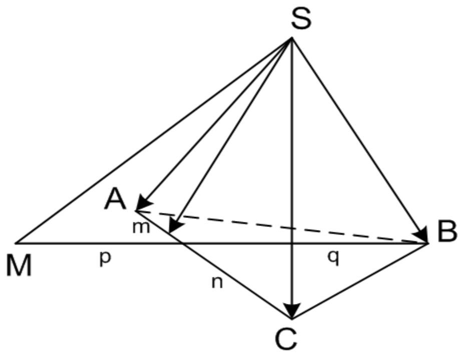


Рис. 3.16

Сумма коэффициентов этого равенства

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{n(p+q)}{(m+n)q} - \frac{p}{q} + \frac{m(p+q)}{(m+n)q} = 1. \bullet$$

Задача 3.13. **В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $4a$, длина бокового ребра равна a. Точки D**

и F — середины ребер A_1B_1 и BC соответственно. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DF и перпендикулярен к ней. Найти длину этого отрезка.

○ Выберем аффинный базис следующим образом: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}, \overrightarrow{BB_1}= =\vec{в}, \overrightarrow{BC}=\vec{c}$ (рис. 3.17).

а) Пусть $CM:CA=к, BN:BB_1=l$, тогда $MA:CA=1-к$.

По условию

$$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{FD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{FD}=0. \tag{6}$$

Выразим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{FD}$ через базисные векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=l\vec{b}-k\vec{a}+(k-1)\vec{c},\\ \overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D}=-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}.\end{cases} \tag{7}$$

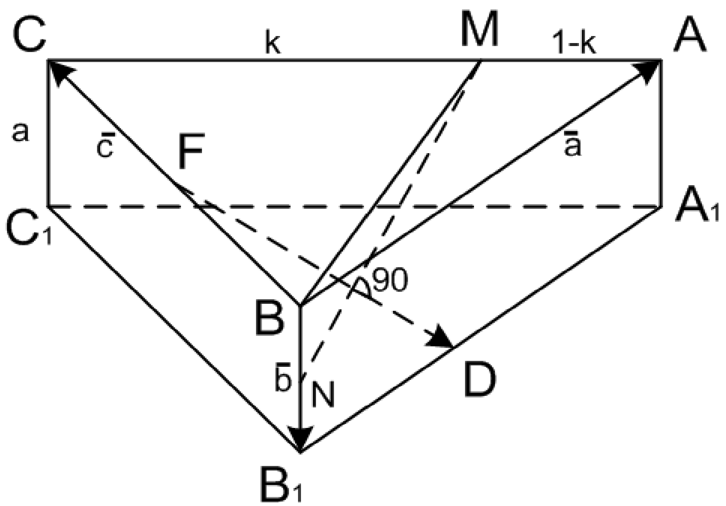


Рис. 3.17

Подставим разложения (7) векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{FD}$ в равенство (5) и учтем, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=8a^2$.

В результате получим:

$$l-8k+4=0. \tag{8}$$

Прямые NM, FD пересекаются, и, следовательно, точки F, M, N, D лежат в одной плоскости. Значит, можно применить третье основное векторное соотношение:

$$\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BF} + \beta \overrightarrow{BN} + \gamma \overrightarrow{BD} = \alpha \cdot \frac{1}{2}\vec{c} + \beta(l\vec{b}) + \gamma(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \\ = \frac{1}{2}\gamma\vec{a} + (\beta l + \gamma)\vec{b} + \frac{\alpha}{2}\vec{c}, \qquad (9)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

С другой стороны, по первому основному векторному соотношению:

$$\overrightarrow{BM} = k\vec{a} + (1-k)\vec{c}\,. \qquad (10)$$

Из равенств (9) и (10) в силу однозначности разложения вектора по базису получим:

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{1}{2}\gamma, \\ \beta l + \gamma = 0, \\ 1 - k = \dfrac{\alpha}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2(1-k), \\ \beta = -\dfrac{2k}{l}, \\ \gamma = 2k. \end{cases}$$

Из условия $\alpha + \beta + \gamma = 1 \Leftrightarrow 2(1-k) + 2k - \dfrac{2k}{l} = 1$ следует

$$l - 2k = 0\,. \qquad (11)$$

с) Решим систему, составленную из уравнений (8) и (11):

$$\begin{cases} l - 2k = 0, \\ l - 8k + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3}, \\ l = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Тогда из соотношения (7) находим $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{4}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{c}$.

Отсюда следует:

$$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c})^2 = \frac{4}{9}\cdot 16a^2 + \frac{16}{9}a^2 + \\ + \frac{16}{9}a^2 + \frac{4}{9}\cdot 8a^2 = \frac{128}{9}a^2 \Rightarrow MN = \frac{8\sqrt{2}}{3}a.$$

Ответ: $MN = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}a$. •

Задача 3.14. **Секущая плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$ и делит пополам медиану SL грани SAB, а медиану SK грани SAC пересекает в точке D такой, что $DK = 2SD$. В каком отношении эта плоскость делит ребра грани SBC.**

○ Выберем базис $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ (рис. 3.18).

Пусть

$$\overrightarrow{SM} = x\vec{b}, \overrightarrow{SN} = y\vec{c}, \qquad (12)$$

где M и N — точки пересечения секущей плоскости с ребрами SB и SC соответственно. Найдем x и y в равенствах (12).

Представим разложение вектора $\overrightarrow{SM}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, используя третье основное векторное соотношение. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{SM} = \alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SF} + \gamma \overrightarrow{SD}, \\ &\alpha + \beta + \gamma = 1. \end{aligned} \qquad (13)$$

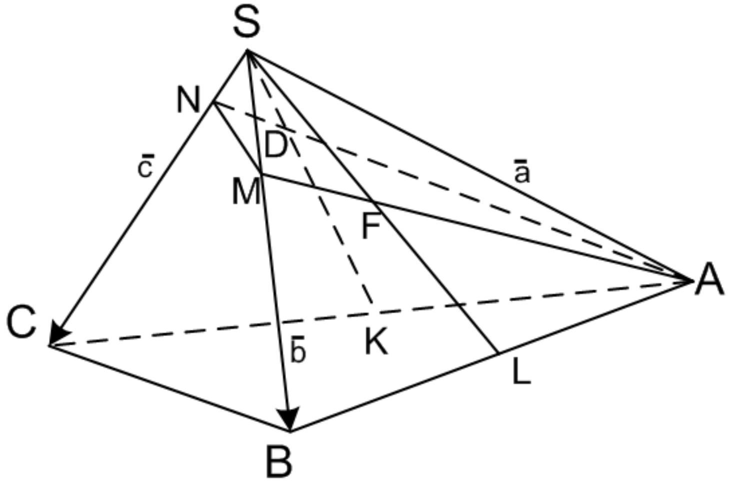


Рис. 3.18

Подставим разложения векторов $\overrightarrow{SF}, \overrightarrow{SD}$ в (13) и, учитывая $\gamma = 1 - \alpha - \beta$, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} &= \alpha\vec{a} + \frac{1}{4}\beta(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{6}(1 - \alpha - \beta)(\vec{a} + \vec{c}) = \\ &= (\frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1-\beta}{6})\vec{a} + \frac{\beta}{4}\vec{b} + \frac{1-\alpha-\beta}{6}\vec{c}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Из равенств (12) и (14) на основе единственности разложения вектора по базису получим систему:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{\beta}{4} = x, \\ \frac{1}{6}(1-\alpha-\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ \beta = \frac{4}{3}, \\ \alpha = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{SF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SL} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}), \overrightarrow{SD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SK} = \frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{c}).$$

Итак, $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}SB \Leftrightarrow SM : MB = 1:2$.

Аналогично находим y. По третьему основному векторному соотношению:

$$\overrightarrow{SN} = \tilde{\alpha}\overrightarrow{SA} + \tilde{\beta}\overrightarrow{SF} + \gamma\overrightarrow{SD} =$$

$$= \tilde{\alpha}\vec{a} + \frac{1}{4}\tilde{\beta}(\vec{a}+\vec{b}) + \frac{1}{6}(1-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta})(\vec{a}+\vec{c}). \qquad (15)$$

Из равенств (12) и (15) следует:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\tilde{\alpha} + \frac{1}{12}\tilde{\beta} + \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{1}{4}\tilde{\beta} = 0 \\ \frac{1}{6}(1-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} = -\frac{1}{5}, \\ \tilde{\beta} = 0, \\ y = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$ и, значит, $SN : NC = 1:4$.

Ответ: $SN : NC = 1:4, SM : MB = 1:2$. •

Задача 3.15. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Точка K — середина ребра AA_1, M — центроид грани (CDD_1). Отрезок FH с концами на B_1C_1 и AD пересекает KM и перпендикулярен ей. Найти длину FH** (рис. 3.19).

○ 1. Центроид M — точка пересечения диагоналей C_1D и $D_1C \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1M = MD = D_1M = MC$.

2. Выберем базис следующим образом: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{в}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Пусть $B_1F : FC_1 = l : (1-l)$, $AH : HD = m : (1-m)$.

Выразим $\overrightarrow{FH}$ и $\overrightarrow{KM}$ через базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1M} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AH} = \vec{a}(m-l) - \vec{b} - \vec{c}.$$

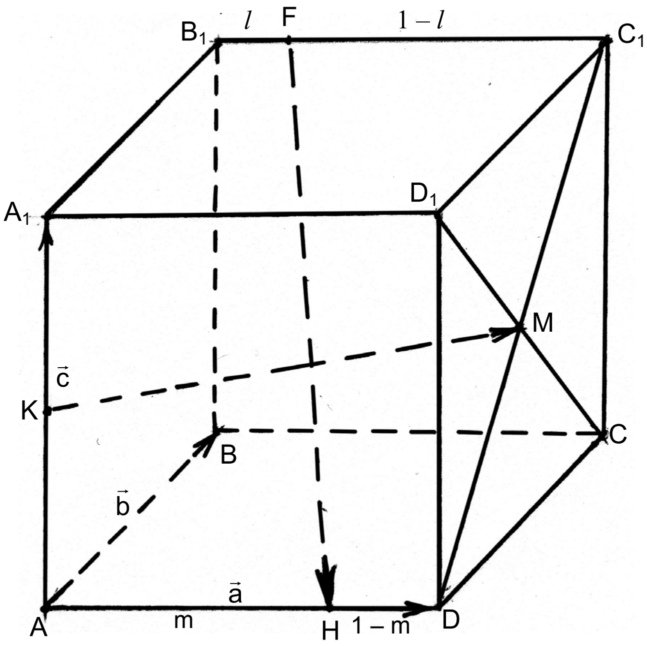


Рис. 3.19

По условию

$$\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{FH} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{FH} = 0 \Rightarrow (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})(\vec{a}(m-l) - \vec{b} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m-l)\overrightarrow{a^2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b^2} = 0 \Leftrightarrow (m-l)\vec{a}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{a}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow m - l - \frac{1}{2} = 0. \qquad (16)$$

Прямые KM и FH пересекаются, то есть точки K, M, F, H принадлежат одной плоскости. Можно применить третье основное векторное соотношение:

$$\overrightarrow{D_1H} = \alpha\overrightarrow{D_1K} + \beta\overrightarrow{D_1F} + \gamma\overrightarrow{D_1M} =$$
$$= \alpha(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}) + \beta(\vec{b} - (1-l)\vec{a} + \gamma(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}), \tag{17}$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

С другой стороны,

$$\overrightarrow{D_1H} = -m\vec{c} + (1-m)(-\vec{a} - \vec{c}). \tag{18}$$

Из (17) и (18) в силу однозначности разложения вектора по базису:

$$\begin{cases} -\alpha - \beta(1-l) = m - 1, \\ \beta + \frac{1}{2}\gamma = 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2m+2l-4}{-1-l}, \\ \beta = -\frac{1}{2}\gamma, \\ y = \alpha + 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2m+2l-4}{-1-l} + \frac{2m+2l-4}{-1-l} + 2 - \frac{1}{2}(\frac{2m+2l-4}{-1-l} + 2) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2m+2l-4}{-1-l} + \frac{1}{2}(\frac{2m+2l-4}{-1-l} + 2) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{m+l-2}{-1-l} = 0 \Leftrightarrow m + l - 2 = 0. \tag{19}$$

Из (16) и (19) следует

$$\begin{cases} m - l - \frac{1}{2} = 0, \\ m + l - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - l, \\ 2 - l - l - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{3}{4}, \\ m = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Находим длину FH:

$$FH^2 = \left|\overrightarrow{FH}^2\right| = (\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 + a^2 = \frac{9}{4}a^2 \Rightarrow FH = \frac{3}{2}a.$$

Ответ: $FH = \frac{3}{2}a.$•

Задача 3.16. **В правильной пирамиде $ABCD$ длина бокового ребра равна 2*a* и плоские углы при вершине равны, образованные ребрами пирамиды равны $60°$. Точки M и N — середины**

ребер AB и DC соответственно. Отрезок PQ с концами на прямых AD и BC пересекает прямую MN и перпендикулярен к ней. Найти длину PQ (рис. 3.20).

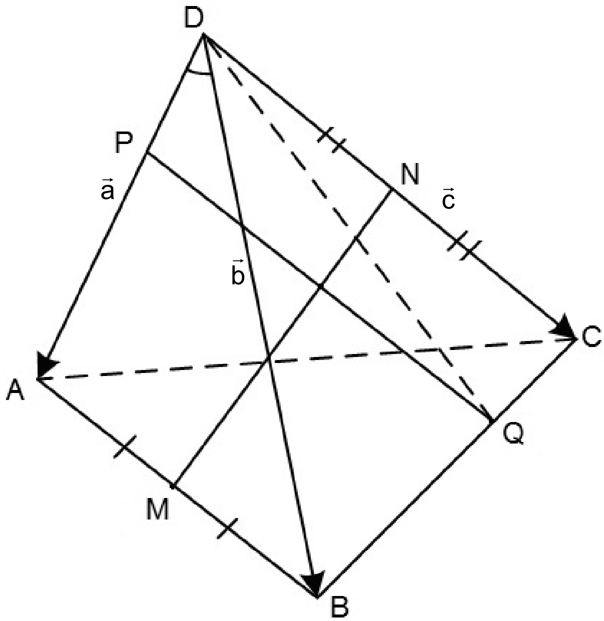


Рис. 3.20

○ Введем базис $\{\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \}$, как указано на рисунке.

Пусть $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Обозначим $\dfrac{DP}{DA} = l, \dfrac{BQ}{BC} = k.$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}; \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = l \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + (1-k) \cdot \vec{c}. \end{cases}$$

Так как $PQ \perp MN \iff \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \iff l + k = 0.$

$PQ \cap MN \Rightarrow$ (точки P, Q, M, N принадлежат одной плоскости). Применяя третье основное векторное соотношение, находим:

$$\overrightarrow{DQ} = \alpha \cdot \overrightarrow{DP} + \beta \cdot \overrightarrow{DB} + \gamma \cdot \overrightarrow{DN} = \alpha \cdot l \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{c},$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Также $\overrightarrow{DQ} = k \cdot \vec{b} + (1-k) \cdot \vec{c}.$

В силу однозначности разложения вектора по базису получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha \cdot l = 0; \\ \beta = k; \\ \dfrac{1}{2} \cdot \gamma = 1 - k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0; \\ \beta = k; \\ \gamma = 2 \cdot (1-k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + 2 \cdot (1-k) = 1; \\ l + k = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1; \\ l = -1. \end{cases}$$

Тогда $\overrightarrow{PQ} = -\vec{a} + \vec{b}$ и $PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(b-a)^2} = \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4a^2} = 2a.$

Ответ: $PQ = 2a.$•

Задача 3.17. **Дана правильная четырехугольная пирамида** $SABCD$**. Сторона основания равна** $2a$**, высота** SA **равна** a**.** SA **перпендикулярна основанию.** $M \in SC,\ N \in BD,\ MN \perp SC,\ \overrightarrow{AD} = \vec{a},$ $\overrightarrow{AB} = \vec{b},\ \overrightarrow{AS} = \vec{c}$**. Выразить** MN **через** $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ (рис. 3.21).

○ Пусть $\dfrac{SM}{SC} = m$, тогда $\dfrac{MC}{SC} = 1 - m$. Пусть $\dfrac{DN}{DB} = n$, тогда $\dfrac{NB}{DB} = 1 - n$.

Разложим $\overrightarrow{MN}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= -m \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) - \vec{c} + (1-n)\cdot\vec{a} + n \cdot \vec{b} = \\ &= -m\vec{a} - m\vec{b} + m\vec{c} - \vec{c} + \vec{a} - n\vec{a} + n\vec{b} = \\ &= (1-n-m) \cdot \vec{a} + (n-m) \cdot \vec{b} + (m-1) \cdot \vec{c}. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя третье основное векторное соотношение, имеем:

$$\overrightarrow{AN} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD} + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot m \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) =$$
$$= (\alpha + \gamma \cdot m) \cdot \vec{a} + (\beta + \gamma \cdot m) \cdot \vec{b} - \gamma \cdot m \cdot \vec{c}, \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Вектор $\overrightarrow{AN}$ можно разложить и по-другому:

$$\overrightarrow{AN} = (1-n) \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}.$$

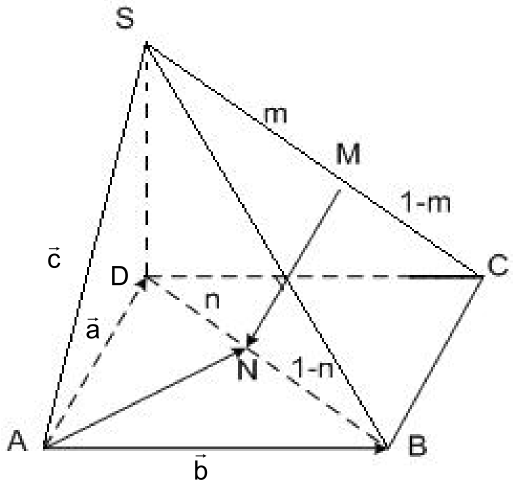


Рис. 3.21

В силу однозначности разложения вектора по базису получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha+\gamma\cdot m=1-n; \\ \beta+\gamma\cdot m=n; \\ \gamma\cdot m=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0(m\neq 0); \\ \alpha=1-n; \\ \beta=n. \end{cases}$$

С другой стороны: $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{SC}=0.$ Найдем $\overrightarrow{SC}$: $\overrightarrow{SC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$

Теперь вычисляем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{SC}=(1-n-m)\cdot 4a^2+(n-m)\cdot 4a^2-(m-1)\cdot a^2=$$

$$=(4-4n-4m+4n-4m-m-1)\cdot a^2=0\Leftrightarrow 3-9m=0\Rightarrow m=\frac{1}{3},$$

тогда $n=\frac{1}{3}$.

Найденные значения подставляем в выражение (19) и получаем следующее разложение $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}.$$

Ответ: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}.$●

§ 3.4. Четвертое основное векторное соотношение

Определение.* *Пусть дана система из n точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Точка F называется центроидом (или центром тяжести) этой системы точек, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{FA_i} = \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2} + \ldots + \overrightarrow{FA_n} = \vec{0}. \qquad \textbf{(1)}$$

Центроидом многогранника (многоугольника) назовем точку, являющуюся центроидом всех его вершин.

Приведем некоторые примеры центроидов.

1. Центроидом отрезка A_1A_2 является его середина F, так как $\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2} = \vec{0}$ (рис. 3.22).

Рис. 3.22

Центроидом $\Delta A_1A_2A_3$ (рис. 3.23) является точка пересечения его медиан.

Действительно, учитывая свойство медиан треугольника $(MF = \frac{1}{2} FA_1)$ и свойство диагоналей параллелограмма $(MF = MK)$, получим

$$\overrightarrow{FA_1} + (\overrightarrow{FA_2} + \overrightarrow{FA_3}) = \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FK} = \vec{0}.$$

Теорема 4. (Признак центроида системы точек). **Точка F является центроидом точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ тогда и только тогда, когда для любой точки O пространства имеет место равенство:**

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}. \qquad (2)$$

○ *Необходимое условие.* Доказательство проведем индукцией по n.

1. При $n = 2$, т. е. для отрезка $[A_1, A_2]$, имеем:

$$\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2} = \vec{0}$$

и

$$\begin{array}{r} \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA_1} = \overrightarrow{OA_1} \\ + \quad \underline{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA_2} = \overrightarrow{OA_2}} \\ 2\overrightarrow{OF} + \vec{0} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}), \end{array}$$

т. е. $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$.

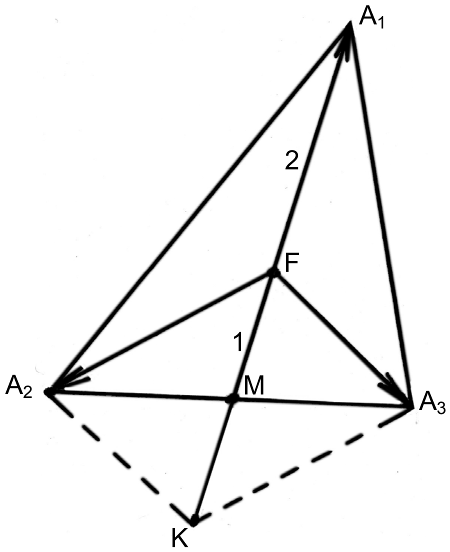


Рис. 3.23

Итак, формула (2) справедлива при $n = 2$. База индукции доказана.

2. Допустим, что точка M — центроид точек $\{A_1, A_2, \dots A_к\}$ и выполняется равенство (2):

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OA_i} . \tag{3}$$

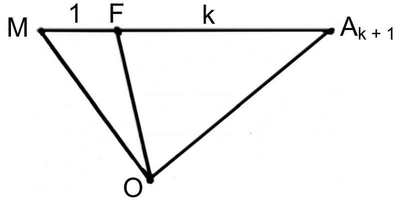


Рис. 3.24

Точка F — центр тяжести системы из $(k+1)$ точек $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}\}$ делит отрезок MA_{k+1} в отношении $MF : FA_{k+1} = 1 : k$ (рис. 3.24).

Тогда по равенству (1) и условию (3) находим:

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA}_{k+1}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{OM}=$$

$$=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA}_{k+1}+\frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OA_i}\right)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\overrightarrow{OA_i}.$$

Тем самым доказан индукционный шаг. Из пунктов 1 и 2 доказательства, на основе принципа математической индукции следует, что формула (2) справедлива для любого $n \in N$.

Достаточное условие. Пусть для системы точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ выполняется равенство (2), где O — произвольная точка пространства. Докажем, что точка F есть центроид данной системы точек, т. е. выполняется условие (1). Используя правило треугольника сложения векторов и формулу (2), имеем:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{FA_1}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OA_1},\\ +\ &\overrightarrow{FA_2}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OA_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\overrightarrow{FA_n}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OA_n} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{FA_i}=n\overrightarrow{FO}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=n\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}.$$

Итак, $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{FA_i}=\vec{0}$, т. е. точка F — центроид системы точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. ●

Соотношение (2) называется четвертым основным векторным соотношением.

Задача 3.18. **Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке F, которая делит каждую медиану в соотношении $3:1$, считая от вершины. Доказать, что точка F — центроид тетраэдра.**

○ Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с центроидом противолежащей грани.

Пусть $SABC$ — тетраэдр, SM_1 и AM_2 — его медианы, где M_1 — центроид грани ABC, M_2 — центроид грани SBC (рис. 3.25).

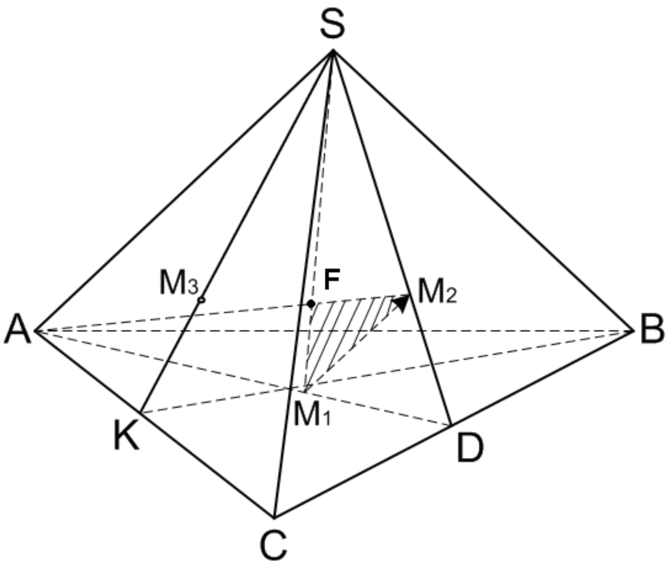


Рис. 3.25

а) AD и CD — медианы соответственно граней ABC и SCB; $M_1 \in AD,\ M_2 \in SD.$

Пусть $AM_2 \cap SM_1 = F.$

Так как M_1 и M_2 центроиды граней, то по формуле (2) имеем:

$$\overrightarrow{FM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FS} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}),$$

$$\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}).$$

Значит, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{FM_2} - \overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FS} - \overrightarrow{FA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

Отсюда следует, что

$$[M_1M_2] \parallel [AS],\ M_1M_2 = \frac{1}{3}AS \ . \tag{4}$$

б) Так как $M_1M_2 \parallel AS$, то внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AS, M_1M_2 и секущей SM_1; $\angle M_1FM_2 = \angle AFS$ — как вертикальные. Из подобия треугольников $FM_1M_2,\ FAS$ и в силу равенства (4) имеем:

$$\frac{FM_1}{FS} = \frac{M_1M_2}{AS} = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

в) Рассмотрим медианы SM_1 и BM_3 тетраэдра $SABCD$, где M_3 — центроид грани ASC. Пусть $[SM_1]\cap[BM_3]=F^*$. Аналогично рассуждая, как в пунктах а) и в), получим:

$$[M_1M_3]\parallel[SB], M_1M_3=\frac{1}{3}SB, \frac{F^*M_1}{F^*S}=\frac{M_1M_3}{SB}=\frac{1}{3}. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) вытекает, что $F^*\equiv F$, т.е. медианы SM_1, AM_2, BM_3 тетраэдра $SABCD$ пересекаются в одной точке.

Аналогично доказываем, что медиана CM_4, где M_4 — центроид грани ASB, тоже проходит через точку F.

Итак, все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке F.

г) Из равенств (5) и (6), кроме того, следует, что:

1) точка F делит каждую медиану в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра;

2) отрезок, соединяющий два центроида граней тетраэдра, параллелен соответствующему ребру тетраэдра (т. е. ребру, соединяющему несовпадающие вершины рассматриваемых граней) и равен 1/3 длины этого ребра.

Докажем, что точка F пересечения медиан тетраэдра является центроидом тетраэдра.

По свойству медиан тетраэдра (п. 1) имеем:

$$\overrightarrow{FS}=-3\overrightarrow{FM_1}, \overrightarrow{FA}=-3\overrightarrow{FM_2},$$
$$\overrightarrow{FB}=-3\overrightarrow{FM_3}, \overrightarrow{FC}=-3\overrightarrow{FM_4}.$$

Сложив эти равенства почленно и, учитывая, что M_1, M_2, M_3, M_4 — центроиды граней (используем равенство (2)), получим:

$$\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=-3(\overrightarrow{FM_1}+\overrightarrow{FM_2}+\overrightarrow{FM_3}+\overrightarrow{FM_4})=$$
$$=(-3)\cdot\frac{1}{3}\Big[(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FS})+(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FS})+(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FS})\Big]=$$
$$=-3(\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})\Leftrightarrow\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0},$$

т.е. точка F — центроид тетраэдра. ●

Задача 3.19. **Длины ребер тетраэдра $ABCD$ равны a, b, c, m, n, p. Найти расстояние от вершины A до точки пересечения медиан грани BCD.**

○ Пусть O — точка пересечения медиан грани BCD — центроид грани, $AB=a, AC=b, AD=c, BD=p, BC=m, CD=n$ (рис. 3.26).

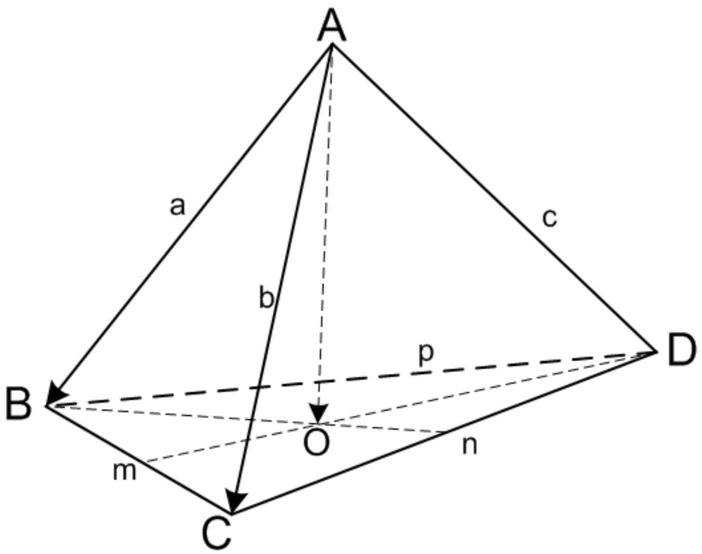


Рис. 3.26

По признаку (2) центроида имеем

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Откуда, учитывая, что $\left|\vec{a}\right| = a^2$, получим:

$$\overrightarrow{AO}^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})^2 =$$

$$= \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}). \qquad (7)$$

По теореме косинусов из треугольников ABC, ABD, ACD находим

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= a^2 + b^2 - m^2, \\ 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= a^2 + c^2 - p^2, \\ 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} &= b^2 + c^2 - n^2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Из равенств (7) и (8) следует:

$$\overrightarrow{AO}^2 = \frac{1}{9}(3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + p^2))$$

и, значит, $AO = \dfrac{1}{3}\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + p^2)}$.

Ответ: $AO = \dfrac{1}{3}\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2) - (m^2 + n^2 + p^2)}$. ●

Следствие. Если длины всех ребер тетраэдра равны a, т.е. тетраэдр правильный, то

$$AO = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2 - 3a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Задача 3.20. **Даны два треугольника** ABC **и** $A_1B_1C_1$ (рис. 3.27)**. Эти треугольники могут лежать как в одной плоскости, так и в разных плоскостях (пространственная модель). Пусть** G **и** G_1 **— соответственно точки пересечения медиан этих треугольников. Доказать, что** $\overrightarrow{GG_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.

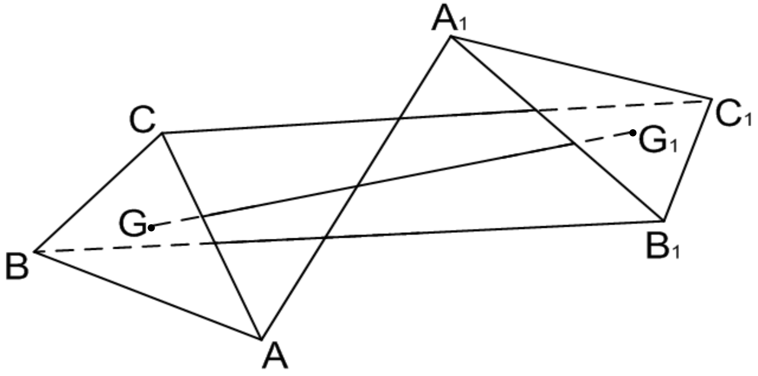


Рис. 3.27

○ Точка G_1 — центроид $\Delta A_1B_1C_1$. Поэтому на основе четвертого основного векторного соотношения имеем

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC}). \qquad (9)$$

Используя правило треугольника сложения векторов, находим

$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA_1} \\ \overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB_1} \\ \underline{GC_1 = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC_1}} \end{array} \qquad (10)$$

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}).$$

Точка G — центроид ΔABC, поэтому

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}. \qquad (11)$$

В силу равенств (9) и (11) из (10) получим:

$$\overrightarrow{GG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}).$$ ●

Векторный метод решения задач позволяет делать глубокие обобщения, в чем можно убедиться на примере решения следующей задачи.

Задача 3.21. **Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин вписанного правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.**

○ Традиционное решение этой задачи есть, например, в работе [36, с. 208—211]. Однако с помощью векторов решить ее можно намного проще. Приведем решение [4].

Пусть правильный ΔABC вписан в окружность $\omega(O, R)$ с центром O и радиусом R, а M — произвольная точка на окружности (рис. 3.28).

Точка O (центр окружности) — есть центроид правильного ΔABC, т.е.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}. \qquad (12)$$

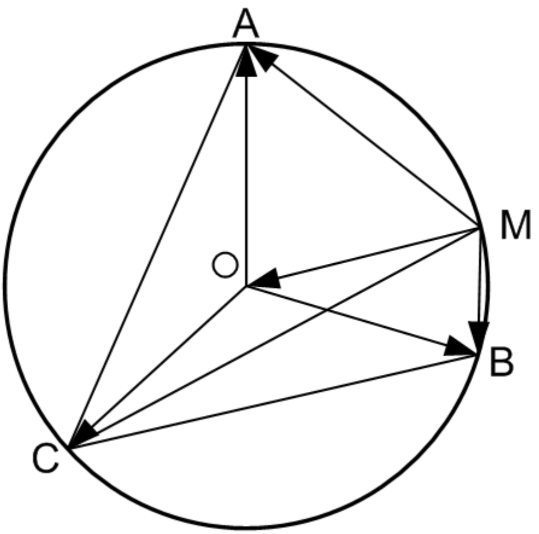


Рис. 3.28

По правилу треугольника сложения векторов:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}^2 &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{MB}^2 &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{MC}^2 &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сложив равенства (13) почленно и учитывая соотношение (12), свойство $\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2$ и $\left|\overrightarrow{MO}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = R$, получим

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2.$$

Итак, сумма квадратов искомых расстояний не зависит от положения точки M на окружности, а зависит только от ее радиуса R. ●

Такое решение задачи намного короче и легче традиционного. Но преимущество его не только в этом, а в большей общности рассуждений. Действительно нетрудно обобщить эту задачу на следующие случаи:

а) Приведенное доказательство справедливо и для точки M сферы, описанной вокруг треугольника так, что ее центр совпадает с центром треугольника.

б) Нетрудно обобщить эту теорему и для случая, когда в окружность или сферу вписан не треугольник, а любой правильный многоугольник.

в) Многоугольник может быть и не обязательно правильным, но симметричным относительно центра O.

г) Задачу можно обобщить и для описанных правильных многоугольников.

д) Можно и дальше продолжать обобщение задачи: рассматривать многоугольник (многогранник) не обязательно правильный или симметричный относительно точки O, а окружность (сферу), не обязательно вписанную или описанную, важно лишь, чтобы сумма векторов $\overrightarrow{OA_i}$ равнялась нулевому вектору, т. е. точка O — центроид точек $\{A_1 \ldots A_n\}$.

З а д а ч а 3.22. **В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются соответственно точками пересечения медиан граней ADB и BDC. Доказать, что $MN \| AC$ и найти отношение длин этих отрезков** (рис. 3.29).

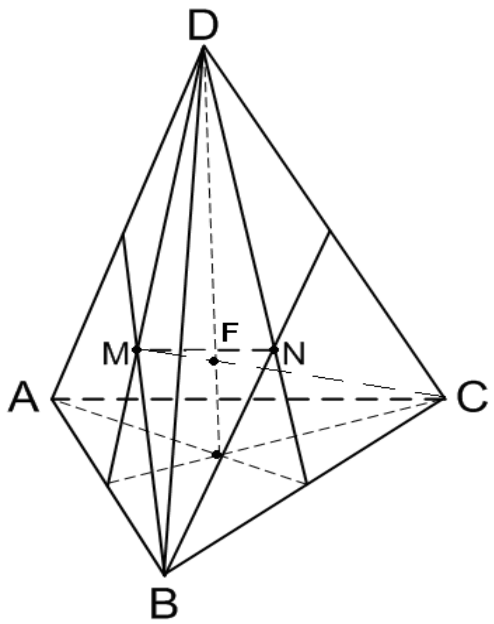


Рис. 3.29

○ Пусть F — центроид тетраэдра, а так как M и N — центроиды граней ADB и BDC соответственно, то по признаку центроида системы точек имеем:

$$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD}),$$

$$\overrightarrow{FN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}).$$

$$\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{FN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FC}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}. \qquad (14)$$

Из (14) видно, что $NM \| CA$ и $\dfrac{NM}{CA} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{NM}{CA} = \dfrac{1}{3}$. ●

Задача 3.23. **Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной m; $M \in AA_1$, $N \in AB$, $K \in AD$. ΔMNK — правильный со стороной, равной $\frac{\sqrt{2}}{2}m$. Диагональ куба AC_1 пересекает ΔMNK в точке S. Найти AS** (рис. 3.30).

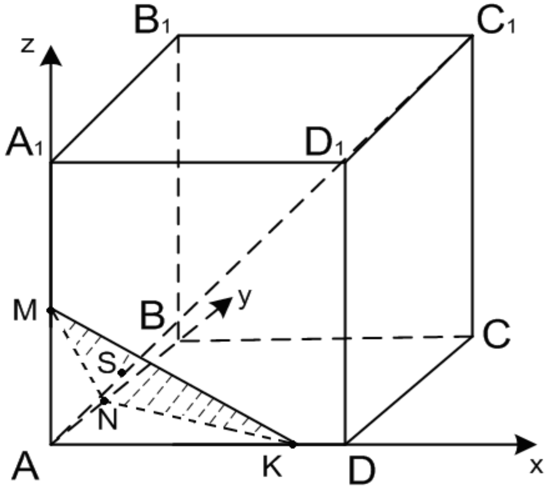


Рис. 3.30

○ Введем ортогональную систему координат $\{A, x, y, z\}$, как показано на рисунке.

$$\triangle MAK = \triangle MAN = \triangle NAK: \ MA = AK = AN.$$

Рассмотрим $\triangle MAK$, пусть $AK = AN = x$. По теореме Пифагора:

$$x^2 + x^2 = MK^2 = \frac{1}{2}m^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 = \frac{1}{4}m^2 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}.$$

Итак, $AM = AK = AN = \frac{1}{2}m$.

$AC_1 \perp (MNK) \Rightarrow (AS$ — высота пирамиды $AMNK$).

Так как ΔMNK — правильный, то S — центроид ΔMNK.

По четвертому основному векторному соотношению:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK}).$$

$$\overrightarrow{AM} = \{0; 0; \frac{1}{2}m\}, \ \overrightarrow{AN} = \{0; \frac{1}{2}m; 0\}, \ \overrightarrow{AK} = \{\frac{1}{2}m; 0; 0\}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AS} = \{\frac{1}{6}m; \frac{1}{6}m; \frac{1}{6}m\},$$

$$AS = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{36}m^2} = \sqrt{\frac{1}{12}m^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}m = \frac{\sqrt{3}}{6}m.$$

Ответ: $AS = \frac{\sqrt{3}}{6}m.$ ●

Упражнения

3.1. На медиане BD равнобедренного треугольника ABC лежит точка K такая, что $|KD| = 2|BK|$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке M. Найдите отношение $CM : BM$.

3.2. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1, точка M — середина ребра AB, точка K лежит на ребре BC, причем $|BK| = 2|KC|$. Найдите расстояние от точки K до середины отрезка DM.

3.3. Через правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a проведена секущая плоскость, которая делит двугранный угол α при основании пирамиды пополам. Найдите длину отрезка KR, если KS и SL — апофемы противоположных боковых граней пирамиды и точка R лежит на SL.

3.4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ двугранный угол при основании равен $60°$. Точки M и N — середины боковых граней SB и SC. Найдите угол между прямыми AM и BN.

3.5. Точка N лежит на стороне BCтреугольника ABC, точка M — на луче CA. При этом $|AM| = |AC|$ и $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

3.6. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB, AC и AD прямые. Точки E, F, M и K — середины ребер AD, BC, AC и BD соответственно. Найдите длину наибольшего ребра в тетраэдре, если $|MK| = a$, $|EF| = a\sqrt{6}$.

3.7. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Найдите длину отрезка прямой, по которой пересекается плоскость, проходящая через вершины B, D, B_1, D_1, и плоскость сечения, проходящего через центр куба и середины ребер AB, BC и CC_1.

3.8. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Рассматриваются отрезки скрещивающихся прямых, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая — через точку C и середину ребра AB. Вычислите длину отрезка $[PQ]$, если $|PS|:|PE| = 3:2$ и $|CQ|:|QD| = 3:2$.

3.9. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна a. Точки K и Q — середины сторон основания DC и AB соответственно. Найдите длину отрезка, один конец которого лежит на $[OK]$, а другой на ребре DS и при этом делит его в отношении $|SM|:|SD| = 2:3$. Угол наклона бокового ребра к основанию равен φ.

3.10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях D_1A и A_1B лежат соответственно точки M и K так, что $|D_1M|:|D_1A| = |KB|:|A_1B| = 1:3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MK.

3.11. Длина ребра куба AC_1 равна a. Точки M, N и K — середины ребер B_1C_1, BC и AD соответственно. Точка E — центр грани DD_1C_1C. Отрезок $[PQ]$ с концами на прямых DD_1 и MN пересекает прямую EK и перпендикулярен к ней. Найдите дину этого отрезка.

3.12. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точка M — середина ребра AB, а точка N принадлежит ребру MSC, причем прямая MN перпендикулярна ребру SC. Определите отношение $|SN|:|SC|$.

3.13. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a. Точка F — середина ребра SA, а точка E лежит на SC, причем $\overrightarrow{SE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$. Отрезок $[MN]$ с концами на прямых AB и CK пересекает прямую FE и перпендикулярен к ней. Найдите его длину.

3.14. В тетраэдре с вершиной в точке D проведен отрезок, один конец которого лежит в точке пересечения медианы и стороны основания, к которой она проведена, а другой конец лежит на медиане тетраэдра и делит ее в отношении $|DM|:|MO| = p:q$. Найдите длину KM.

3.15. Через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Площадь диагонального сечения, проходящего через эту вершину, равна S. Найдите площадь треугольника, ограниченного боковым ребром параллелепипеда, его диагональю, исходящей из данной вершины, и линией пересечения диагонального сечения с проведенной плоскостью.

3.16. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, плоский угол при вершине равен $60°$. Точка E — середина ребра SC, точка F делит ребро SA в отношении $|SF|:|SA| = 1:3$. Найдите длину отрезка $[MN]$, перпендикулярного прямой FE, если точка M лежит на ребре SB, а точка N принадлежит высоте пирамиды SO.

3.17. Точки A_1, B_1, D_1, C_1, E_1, F_1, K_1 и L_1 — середины сторон правильного восьмиугольника $ABCDEFKL$. Докажите, что центры тяжести квадратов $A_1C_1E_1K_1$ и $B_1D_1F_1L_1$ совпадают.

3.18. В прямоугольнике $ABCK$ сторона AB имеет длину a. Точка D лежит вне плоскости прямоугольника так, что AD образует равные углы со сторонами AK и AB. Центр сферы радиуса $4a$, проходящей через точки A, B, C и D, совпадает с центроидом этих точек. Найдите площадь прямоугольника.

3.19. Высота тетраэдра $SABC$ имеет длину h. CF — медиана ΔABC, SF — медиана ΔABS. Найдите длину отрезка M_1M_2, если M_1 и M_2 — точки пересечения медиан в ΔABC и ΔABS.

3.20. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершины любого вписанного восьмиугольника, противоположные вершины которого симметричны относительно центра окружности, есть величина постоянная, не зависящая от положения точки окружности.

3.21. На ребрах DA, DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ взяты точки M, N, K таким образом, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Точка G — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?

3.22. На ребрах AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки M и P таким образом, что $AM:MB = DP:PC = 1:3$. Найдите расстояние между точками M и P.

3.23. Основанием пирамиды $ABFD$ служит ромб со стороной a, острый угол основания равен $60°$. Боковые грани — равнобедренные треугольники с углом при основании $30°$. Точка M лежит на отрезке AF, причем $MF:MA = 2:3$; N — на отрезке KL, причем $NK:NL = 2:3$. Точка L — точка пересечения диагоналей основания, а точка K принадлежит отрезку BF, причем $KF = \frac{1}{3}BF$. Найдите длину отрезка MN.

3.24. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все его грани — равные ромбы со стороной a и углом $60°$. Рассматривается отрезок с концами на диагоналях BC_1 и CA_1, параллельный плоскости ABB_1A_1. Отрезок проведен через точку M так, что $BM:BC_1=1:4$. Найдите его длину и площадь сечения NMM_1N_1.

3.25. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость A_1DB пересекает диагональ AC_1 в точке M. Докажите, что $AM:AC_1=1:3$.

3.26. Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до вершины треугольника равна $2a^2$.

3.27. В основании пирамиды $OABCD$ лежит квадрат со стороной a. Все боковые ребра равны b. Найдите расстояние от центроида основания пирамиды до центроида ее боковой грани.

3.28. На ребрах SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ взяты точки D, E, F. Плоскости ABF, BCD, CAF пересекаются в точке M. Прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N. Докажите, что $\frac{PN}{NS}=3\frac{PM}{MS}$.

3.29. Все плоские углы при вершине M правильной пирамиды $MABC$ прямые. На ребрах BC и MC взяты соответственно точки L и N, такие, что $BL:BC=CN:CM=1:4$ и через точки A, L, N проведена секущая плоскость. Считая боковое ребро пирамиды равным b, найдите расстояние от центроида треугольника O до точки M.

3.30. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $AK:KP=1:3$, $CM=PM$. Найдите отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

3.31. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABL. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

3.32. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB=AA_1=4$, $AD=2$. $F\in A_1B_1$ и делит ее в отношении $3:1$, считая от точки B_1; $P\in BC$ и делит ее пополам; $M\in D_1C_1$, $N\in BB_1$, $MN\perp FP$. Найдите MN.

3.33. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна a. Точки K и L — середины A_1D_1 и DC соответственно. Отрезок MN с концами на прямых B_1C_1 и AD пересекает прямую KL и перпендикулярен к ней. Найдите длину MN.

3.34. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 4 см. Точки M и N лежат на сторонах B_1C_1 и D_1D соответственно. Точки K и L — середины сторон A_1D и DC соответственно. Прямые MN и KL пересекаются под прямым углом. Найдите отношения, в которых точки M и N делят стороны B_1C_1 и D_1D; найдите отрезок MN.

3.35. На ребрах DA, DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ взяты точки M, N и K так, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. G — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?

3.36. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна m, а длина бокового ребра $3m$. Точка $N \in BB_1$ такова, что $B_1N : NB = 2 : 5$, а точка M — это точка пересечения диагоналей грани AA_1C_1C. Отрезок FE с концами на прямых A_1B_1 и CB пересекает прямую MN и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

3.37. Дана правильная шестиугольная призма с высотой $OO_1 = 2a$ и объемом $72a^3$. Точки F и D — середины соответственно сторон BO и O_1A_1. Отрезок MN с концами на прямых AB и OO_1 пересекает DF и перпендикулярен к ней. Найдите длины отрезков DF и MN.

3.38. В треугольной пирамиде $SABC$ SK и SL — медианы граней SAB и SAC соответственно. Точки M и D принадлежат этим медианам так, что $SM = MK$, $SD = DL = 1 : 2$. В каком отношении плоскость AMD делит объем пирамиды?

3.39. В основании пирамиды $OABCD$ лежит квадрат со стороной a. Все боковые ребра равны b. Найдите расстояние от центроида основания пирамиды до центроида ее боковой грани.

3.40. Дана сфера, в ее плоскости большого круга расположен квадрат, сторона которого равна a. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до вершины квадрата равна $4a^2$.

3.41. Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN \| BC$ и найдите отношение $MN : BC$.

3.42. Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $M \in AC$, $AM = \frac{1}{3}AC$. Точка N — точка пересечения диагоналей прямоугольника BB_1D_1D. $\vec{a} = \overrightarrow{AD}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ — аффинный базис. Выразите $\overrightarrow{MN}$ через этот базис.

3.43. Дан куб. Найдите расстояние от центроида нижней грани до центроида боковой грани, если сторона куба равна a.

3.44. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна p, длина бокового ребра — $2p$. На ребре AA_1 взята точка F так, что $AF = \frac{3}{5}AA_1$; точка O — центр противоположной ребру AA_1 грани BB_1C_1C. Найдите длину отрезка FO.

3.45. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами, равными $a, b, c.$ Найдите расстояние от вершины A до центроида сечения, проходящего через вершины C, B_1 и D_1.

3.46. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, длина бокового ребра SA которой равна 4, точка D лежит на ребре SC, $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

3.47. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что для произвольной точки пространства O справедливо неравенство: $OM < \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD)$.

3.48. Даны точки $A, B, C, D,$ не лежащие на одной прямой. Точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно, точка O — середина отрезка MN (M не совпадает с N). Докажите, что для любой точки S выполняется равенство: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

3.49. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что его диагональ C_1A проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится этими точками на три равных отрезка.

3.50. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$; M_1, M_2, M_3, M_4 — центры масс граней $A_1A_2A_6A_5$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_3A_4A_8A_7$, $A_1A_2A_3A_4$. Докажите, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ параллелограмм.

3.51. Дан тетраэдр $ABCD$, в основании которого лежит равносторонний ΔABC : $AB = BC = CA = 4$, $DA = 5, DB = 3, DC = 2$. Найдите площадь ΔDOC, где O — точка пересечения медиан ΔABC.

3.52. На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что: $AK : KB = DM : MC = p$, $BL : LC = AN : ND = q$. Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в одной точке O, причем: $KO : OM = q$, $NO : OL = p$.

3.53. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Длина ребра $SA = 4$, точка $D \in SC$, причем $DC = 3$; расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

3.54. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной 1. Точка M — точка пересечения медиан ΔABD, а точка O — точка пересечения диагоналей куба. Найдите длину прямой OM.

3.55. Дан правильный тетраэдр $SABC$ со стороной, равной a, точка F — центроид тетраэдра. Найдите объем пирамиды $FABC$ и длины ребер FA, FC, FB.

3.56. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной m. $M \in AA_1$, $N \in AB, K \in AD$. ΔMNK — правильный со стороной, равной $\frac{\sqrt{2}}{2}m$. Диагональ куба AC_1 пересекает ΔMNK в точке S. Найдите длину AS.

3.57. Дан правильный додекаэдр, радиус описанной сферы которого равен R. Вычислите сумму квадратов длин всех его ребер и его диагоналей.

3.58. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания, равной a, высотой, равной $2a$. S — середина FB, T — середина F_1E_1, $M \in FF_1, N \in BE$, $MN \cap FF_1$, $MN \perp ST$, $\vec{a} = \overrightarrow{FE}, \vec{b} = \overrightarrow{FB}, \vec{c} = \overrightarrow{FF_1}$. Выразите через $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

3.59. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, координаты вершин которой $A(2,2,0), B(0,2,0), C(0,0,2), D(0,2,2), S(3,1,2)$. Найдите центр тяжести этой пирамиды.

3.60. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точка E лежит на продолжении ребра AD. O_1 — центроид тетраэдра $EBCD$. Найдите, в каком отношении вершина D делит отрезок AE, если $O_1H = O_1D$, где H — центр ΔABD.

3.61. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Q — точка пересечения медиан $A_1B_1C_1$, P — точка пересечения диагоналей BCC_1B_1. $\vec{a} = \overrightarrow{AC_1}, \vec{b} = \overrightarrow{AB_1}, \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Выразите $\overrightarrow{PQ}$ через $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

3.62. В плоскости α лежат точки A, B, C, которые составляют равносторонний треугольник со стороной 5 см. Рассматривается точка S вне плоскости α, такая, что $SA = 5, SB = 7, SC = 12$. Найдите расстояние от точки S до центра тяжести ΔABC.

3.63. Даны две произвольные пирамиды в пространстве $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки F и F_1 — центроиды этих пирамид. Докажите, что $FF_1 = \frac{1}{4}(AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1)$.

3.64. Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция. $AB = CD = 8$, $BC = \frac{1}{2}AD = 7$, $SA = 10$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно таким образом, что $AM : MB = 1:3$, $CN : ND = 1:3$. Найдите площадь ΔSMN.

3.65. Дана правильная пирамида $OABC$, ребра которой равны a. Точка $D \in OB$ и делит ее пополам, $M \in CD$ так, что $DM : MC = 1:5$, а точка $N \in AO$ так, что $AN : NO = 1:5$. Найдите длину NM.

3.66. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат со стороной a. Точка $K \in AD$ так, что $AK : KD = 3:2$. Точка $M \in SB$ так, что $SM : MB = 3:2$. Найдите KM, если высота пирамиды равна a.

3.67. Основанием правильной пирамиды $SABCDEF$ служит шестиугольник со стороной $a = 3$, боковое ребро пирамиды равно 5. Точка K делит сторону AB в отношении $1:3$, а точка N в таком же отношении делит апофему ΔSED. Найдите KN.

3.68. Все ребра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ имеют длину a; точка $K \in BC_1$ так, что $BK : KC_1 = 3:2$, точка $M \in CD_1$ так, что $CM : MD_1 = 3:2$. Определите длину KM.

3.69. Все ребра правильной пирамиды $SABC$ имеют длину a. Точка M лежит на пересечении медиан ΔABC, а точка N лежит на пересечении медиан $\Delta A_1B_1C_1$, полученного в результате пересечения пирамиды с плоскостью, параллельной основанию ABC и делящего боковые ребра пирамиды в следующем отношении: $SA_1 : A_1A = SB_1 : B_1B = SC_1 : C_1C = 1:3$. Найдите длину отрезка NM.

3.70. Дан правильный тетраэдр $MABC$, ребра которого равны m; точка N делит ребро AM в отношении $AN : NM = 2:1$. Найдите длину отрезка HN, где H — основание высоты тетраэдра, проведенной к плоскости ABC.

3.71. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1. На ребрах BB_1 и DD_1 взяты точки K и P соответственно, причем $BK : B_1K = 1:3$, $DP = PD_1$. Плоскость, проведенная через точки A, K, P, пересекает диагонали A_1D и B_1C в точках M и T соответственно. Найдите длину отрезка MT.

3.72. Сторона правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, а боковое ребро равно a. Отрезки AD_1 и DB_1 параллельны плоскости AA_1B_1B, $M \in AD_1$, $AM : MD_1 = 2:1$, $N \in DB_1$. Найдите длину отрезка MN. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного плоскости AA_1B_1B.

3.73. Дана прямоугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит равнобедренная трапеция $ABCD$. Точка M делит ребро AB в отношении $AM : MB = 2:3$, точка N делит CD в отношении $CN : ND = 3:2$. Найдите площадь сечения, проходящего через MN параллельно высоте пирамиды, если $BC = a, AD = b, AA_1 = h$.

3.74. Сторона основания правильной пирамиды $MABC$ равна a. Отношение высоты пирамиды к медиане ее основания равно $2:3$. На ребрах MB и AC взяты точки P и Q соответственно таким образом, что $MP : PB = 1:3$, $AQ : QC = 1:3$. Найдите расстояние от точки P до Q.

3.75. Дан тетраэдр $SABC$. На ребре AB взята точка M так, что $AM : MB = 2:3$, точка N делит SC в том же отношении. На SA выбрана точка K так, что $CK \perp MN$. Найдите отношение $AK : KS$, если $AB = a$.

3.76. Плоскость ω пересекает боковые ребра DA, DB, DC треугольной пирамиды $DABC$ соответственно в точках K, L, M. Пусть $P = AL \cap KB$, $Q = BM \cap LC$, $R = CK \cap AM$. Докажите, что $\omega \| (ABC) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (PQR) \| (ABC)$.

3.77. Дана пирамида $SABC$. Точки M' и Q — середины ребер CB и AC соответственно, а точка O — точка пересечения медиан ΔABC. Точка M лежит на отрезке SM' так, что $SM : MM' = 1:2$, а точка N лежит на ребре SA так, что $SN : NA = 3:1$. Найдите, в каком отношении прямая, проходящая через точку B и точку пересечения SO и MN, делит отрезок SQ.

3.78. Ребра четырехугольной пирамиды $SABC$ равны a. В ее основании лежит равнобедренная трапеция. Точки M, N, P, Q принадлежат плоскости, которая отсекает от ребер пирамиды отрезки: $SN = \frac{2}{3}SB$, $SP = \frac{1}{3}SC$, $SQ = \frac{1}{5}SD$. Найдите, в каком отношении точка M делит грань SA.

3.79. На ребрах DA, DB, DC треугольной пирамиды $ABCD$ взяты точки M, N, K так, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Точка G —

точка пересечения медиан ΔABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?

3.80. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Плоскость α отсекает от боковых ребер SA, SB, SC отрезки: $SE=\frac{1}{4}SA$, $SF=\frac{3}{5}SB, SG=\frac{3}{4}SC$. В каком отношении, начиная от вершины, точка $H\in SD$ делит ребро SD?

Ответы

Глава I

1.1. $1:2$. **1.2.** $2:3$. **1.3.** $17:19$. **1.4.** $AM : MB_1 = BN : NC_1 = 2:1$ или $AM : MB_1 = 5:1$, $BN : NC_1 = 2:1$. **1.5.** $2:1$, считая от точки М. **1.6.** $1:5$.

1.7. $3:4$. **1.8.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **1.9.** $3:7$. **1.10.** $2:3$. **1.11.** $2:5$. **1.12.** $\arccos\frac{3}{13}$.

1.13. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **1.14.** $\frac{a}{3}\sqrt{1+\frac{11}{2}\cos^2\varphi}$. **1.15.** $\frac{\sqrt{10}}{3}a$. **1.16.** $\frac{\sqrt{74}}{12}$. **1.17.** $\frac{2a}{5}$.

1.18. $\frac{\sqrt{p^2+2pq+3q^3}}{\sqrt{6}\left(p+q\right)}$. **1.19.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}h$. **1.20.** $\arccos\frac{1}{3}$. **1.21.** $\frac{2}{3}$. **1.22.** $\arccos\frac{\sqrt{14}}{6}$.

1.23. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **1.24.** $9:17$. **1.25.** $\frac{1}{3}\sqrt{3b^2-a^2}$. **1.26.** $\arccos\frac{1}{18}$. **1.27.** $\arcsin\frac{10}{\sqrt{134}}$.

1.28. $\frac{11\sqrt{170}}{170}$. **1.29.** $\frac{2}{7}a$. **1.30.** $2:3$. **1.31.** $\arccos\frac{3\sqrt{29}}{29}$. **1.32.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

1.33. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **1.34.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$. **1.35.** $\frac{\pi}{3}$. **1.36.** $\arccos\frac{13\sqrt{3}}{54}$. **1.37.** $\arcsin\frac{1}{3}$.

1.38. $\arcsin\frac{3\sqrt{31}}{31}$. **1.39.** $\arccos\frac{\sqrt{26}}{13}$. **1.40.** $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1.41.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

1.42. $\arccos\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **1.43.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{20}$. **1.44.** $\arccos\frac{22\sqrt{13}}{91}$. **1.45.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

1.46. $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **1.47.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.48.** $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **1.49.** $\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

1.50. $\frac{7\sqrt{5}}{10}$. **1.51.** $\frac{\pi}{3}$. **1.52.** $\arccos\frac{\sqrt{51}}{51}$. **1.53.** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$. **1.54.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

1.55. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$. **1.56.** $\arccos\frac{\sqrt{15}}{30}$, $\frac{\pi}{4}$. **1.57.** $\arccos\frac{4\sqrt{65}}{65}$. **1.58.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1.59. $\frac{\pi}{3}$. **1.60.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1.61.** $\frac{2\sqrt{21}}{21}$. **1.62.** 90°. **1.63.** $\arcsin\frac{2\sqrt{22}}{11}$. **1.64.** 30°.

1.65. $\frac{16\sqrt{55}}{101}$. **1.66.** $\arccos\frac{\sqrt{42}}{21}$. **1.67.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$. **1.68.** $\arccos\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

1.69. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **1.70.** $\arccos\frac{19\sqrt{33}}{165}$. **1.71.** $\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **1.72.** $\arccos\frac{\sqrt{70}}{70}$.

1.73. 2. **1.74.** $\arccos\frac{2\sqrt{22}}{11}$. **1.75.** $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$. **1.76.** $\arccos\frac{\sqrt{105}}{35}$. **1.77.** $\frac{\sqrt{449}}{61}$.

1.78. $\arccos\frac{\sqrt{69}}{69}$. **1.79.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **1.80.** $\arccos\frac{2\sqrt{29}}{29}$. **1.81.** $\frac{3}{4}$.

1.82. $\arccos\frac{5\sqrt{33}}{33}$. **1.83.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{13}$. **1.84.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1.85.** 1. **1.86.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

1.87. $\arcsin\frac{4\sqrt{442}}{221}$. **1.88.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **1.89.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **1.90.** $\arccos\frac{1}{4}$.

1.91. $\arcsin\frac{\sqrt{35}}{15}$. **1.92.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **1.93.** $\frac{\sqrt{1930}}{101}$. **1.94.** $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$.

1.95. $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **1.96.** $\arccos\frac{5\sqrt{41}}{41}$. **1.97.** $\frac{5\sqrt{21}}{21}$. **1.98.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$.

1.99. $\arcsin\frac{21}{\sqrt{1021}}$. **1.100.** $\arccos\frac{1}{7}$.

Глава II

2.1. $\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$. **2.2.** $\frac{a}{13}\sqrt{390}$. **2.3.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **2.4.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

2.5. $\arcsin\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{65}}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **2.6.** $\frac{11\sqrt{130}}{130}$. **2.7.** 45°. **2.8.** $\arccos\sqrt{\frac{27}{91}}$.

2.9. $\frac{3}{16}\sqrt{174}$. **2.10.** $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$. **2.11.** 60°. **2.12.** $\frac{\pi}{3}$. **2.13.** $\frac{a\sqrt{23}}{6}$.

2.14. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **2.15.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **2.16.** $\sqrt{\frac{11-4\sqrt{3}}{32}}v$. **2.17.** $\arccos\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

2.18. $\arccos\frac{1}{5}$. 2.**19.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$. 2.**21.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. 2.**22.** $\arccos\frac{3}{4}$. 2.**23.** $\sqrt{21}$.

2.24. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 2.**25**. 2:1. 2.**26.** 2. 2.**27.** 45°. 2.**28.** 45°. 2.**29.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2.**30.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

2.31. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **2.32.** $\sqrt{30}$. **2.33.** $\frac{3\sqrt{174}}{16}$. **2.34.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.35.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **2.36.** $\sqrt{\frac{2}{3}}a$.

2.37. $\frac{18}{125}$. **3.38.** $\frac{5a\sqrt{2}}{8}$. **2.39.** $\frac{125\pi}{18}$. **2.40.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, 45°. **2.41.** $\frac{\sqrt{6}}{6}a$. **2.42.** $\frac{3\sqrt{86}}{83}$.

2.43. $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. **2.44.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **2.45.** $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.46.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$. **2.47.** $\frac{3\sqrt{174}}{16}$.

2.48. 1:1. **2.49.** 1:3. **2.50.** $\arccos\frac{3\sqrt{15}}{20}$. **2.51.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 2.**53.** $\frac{6}{5}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

2.54. $\frac{a\sqrt{13261}}{76}$. **2.55.** $\frac{12\sqrt{111}}{37}$. **2.56.** $\arccos\frac{5}{6}$; $\frac{a}{\sqrt{22}}$. **2.57.** $\frac{\sqrt{2279}d}{84}$.

2.58. $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$. **2.59.** $\frac{\left|2l^2-m^2\right|}{2l\sqrt{l^2+4h^2}}$. **2.60.** $\frac{6\sqrt{221}}{17}$; $\frac{16\sqrt{77}}{77}$; $\frac{12\sqrt{93}}{31}$.

2.61. $\arccos\frac{7}{2\sqrt{19}}$; $\frac{a\sqrt{6}}{9}$; $a\sqrt{\frac{11}{6}}$ **2.62**. $\frac{\pi}{3}$. **2.63**. $3\sqrt{\frac{10}{13}}$. **2.64**. $\arcsin\frac{\sqrt{13}}{13}$.

2.65. $\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{13}$. 2.**66**. 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$; 3) $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

2.67. 1) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$; 3) $\arccos\frac{7\sqrt{102}}{102}$.

Глава III

3.1. $4:1$. **3.2.** $0{,}38$. **3.3.** $\frac{9a^2}{4(2\cos\alpha+1)^2}$. **3.4.** $\arccos\frac{3}{13}$. **3.5.** $2:3$.

3.6. $3a$. **3.7.** a. **3.8.** $|CD|:|QD|=3:2$. **3.9.** $\frac{a}{3}\sqrt{1+\frac{11}{2}\cos^2\varphi}$.

3.10. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$. **3.11.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **3.12.** $1:2$. **3.13.** $\frac{\sqrt{74}}{12}$.

3.14. $\frac{(p^2+2pq+3q^2)^{1/2}}{\sqrt{6}(p+q)}$. **3.15.** $\frac{S}{6}$. **3.16.** $\frac{2a}{5}$.

3.18. $a^2\,\frac{\sqrt{\cos^2\varphi+126\cos\varphi+126}-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. **3.19.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}h$.

3.21. $14:27$. **3.22.** $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **3.23.** $\frac{2}{5\sqrt{3}}a$. **3.24.** $NM=\frac{a\sqrt{7}}{4}, S_{сеч.}=\frac{3}{8}a^2$.

3.27. $\frac{\sqrt{2b^2+a^2}}{3\sqrt{2}}$. **3.29.** $\frac{b}{4}\sqrt{46}$. **3.30.** $NP:BN=3:4$.

3.31. $|MN|=\frac{a\sqrt{23}}{6}$. **3.32.** $MN=\frac{5}{6}$. **3.33.** $MN=a\sqrt{3}$.

3.34. $MN=4\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{2}}; \frac{B_1M}{B_1C_1}=\sqrt{2}, \frac{D_1N}{D_1D}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.35.** $\frac{DP}{PG}=\frac{9}{15}$.

3.36. $\frac{3\sqrt{43}}{7}m$. **3.37.** $FD=a\sqrt{10}; MN=a\sqrt{1026-366\sqrt{6}}$.

3.38. $1:14$. **3.39.** $\frac{\sqrt{2b^2+a^2}}{3\sqrt{2}}$. **3.41.** $MN:BC=1:3$.

3.42. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **3.43.** $\frac{\sqrt{53}}{8}a$. **3.44.** $\frac{\sqrt{79}}{10}p$.

3.45. $\frac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **3.45.** $\frac{3\sqrt{174}}{16}$. **3.51.** $\frac{\sqrt{61}}{6}$. **3.53.** $\frac{3\sqrt{174}}{16}$.

3.54. $\frac{\sqrt{101}}{14}$. **3.55.** $V=\frac{\sqrt{18}}{(12)^2}a^3; \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **3.56.** $\frac{\sqrt{3}}{6}m$. **3.57.** $x^2=900R^2$.

3.58. $\overrightarrow{NM}=\frac{3-5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+6)}\vec{a}+\frac{3\sqrt{3}-15}{2(\sqrt{3}+6)}\vec{b}+\frac{5\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+6}\vec{c}$. **3.59.** $\left\{1; \frac{7}{5}; \frac{6}{5}\right\}$.

3.60. $ED:DA=1:4$. **3.61.** $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}$.

3.62. $\frac{1}{3}\sqrt{183}$. **3.64.** $\frac{1}{2}\sqrt{4947}$. **3.65.** $NM = \frac{\sqrt{129}}{12}a$.

3.66. $KM = \frac{2\sqrt{6}}{5}a$. **3.67.** $KN \approx 5$. **3.68.** $KM = \frac{\sqrt{10}}{5}a$.

3.69. $NM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **3.70.** $HN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$. **3.71.** $MT = \frac{\sqrt{145}}{12}$.

3.72. $MN = \frac{a\sqrt{5}}{3}, AB_1 = a\sqrt{5}$. **3.73.** $S_{сеч.} = \frac{1}{5}h(2a+3b)$.

3.74. $PQ = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. **3.75.** $AK : KS = 5:1$. **3.77.** $SP : PQ = 6:13$.

3.78. $SM : MA = 3:13$. **3.79.** $DP : PG = 9:17$. **3.80.** $3:11$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзенштат Я.И., Белоцерковская Б.Г.* Решение задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1960.

2. *Антонов Н.Г., Выгодский М.Я. и др.* Сборник задач по элементарной математике. М.: Наука, 1968.

3. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др.* Геометрия 9—10. М.: Просвещение, 1987.

4. *Бевз Г.П.* Обобщение при решении задач с помощью векторов // Математика в школе. 1978. №2.

5. *Бескин Л.Н.* Стереометрия. М.: Просвещение, 1971.

6. *Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1971.

7. *Габович И.Г.* К решению стереометрических задач // Математика в школе. 1977. №2.

8. *Габович И.Г.* Вспомогательные углы и отрезки // Квант. 1981. №9.

9. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1985.

10. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике. Геометрия. М.: Просвещение, 1992.

11. *Гохидзе М.Г.* К теме «Вневписанная окружность» // Математика в школе. 1990. №2.

12. *Гохидзе М.Г.* О вневписанной окружности в задачах по стереометрии» // Математика в школе. 1991. №5.

13. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1976.

14. *Дятлов В.Н., Дятлов Г.В.* Стереометрические задачи. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991.

15. *Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы / под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.

16. *Ионин Ю.И., Некрасов В.Б.* Вычисление расстояний и углов // Квант. 1987. №1.

17. *Крайзман М.Л.* Расстояние между скрещивающимися прямыми // Квант. 1972. №11.

18. *Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И.* Геометрия: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. М.: Просвещение, 1977.

19. *Кушнир А.И.* Метод вспомогательного элемента // Квант. 1974. №2.

20. *Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С. и др.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1981.

21. *Калинин А.Ю., Терешин Д.А.* Стереометрия 10. М.: Изд-во МФТИ, 1996.

22. *Калинин А.Ю., Терешин Д.А.* Стереометрия 11. М.: Изд-во МФТИ, 2001.

23. *Киселев А.П., Рыбкин Н.А.* Стереометрия 10—11: учебник и задачник. М.: Дрофа, 1995.

24. *Лурье М. И., Александров Б. И.* Пособие по геометрии. М.: Изд-во МГУ, 1984.
25. *Литвиненко В. Н.* Сборник задач по стереометрии с методами решений: пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1998.
26. *Литвиненко В. Н.* Практикум по элементарной математике. Стереометрия. М.: Вербум-М, 2000.
27. *Моденов П. С.* Экзаменационные задачи по математике (с анализом их решения). М.: Просвещение, 1969.
28. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1983.
29. *Позойский Р. И.* Сборник задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1950.
30. *Попов Ю. И.* Стереометрия. Методы и приемы решения задач: учебное пособие. Из-во РГУ им. И.Канта., 2009.
31. *Попов Ю. И.* Стереометрия II. Методы и приемы решения задач: учебное пособие. Из-во РГУ им. И. Канта, 2010.-220с.
32. *Прасалов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
33. *Рыбкин Н.* Сборник задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1955.
34. *Стратилатов П. В.* Сборник задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1958.
35. *Стратилатов П. В.* Сборник задач по геометрии для 9—10 классов: пособие для учителя. М.: Просвещение, 1986.
36. *Туманов С. И.* Поиски решения задачи. М.: Просвещение, 1969.
37. *Худобин А. И., Худобин Н. И.* Сборник задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1955.
38. *Шахно К. У.* Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск: Высш. шк., 1969.
39. *Шувалова Э.* Координатный метод // Квант. 1977. №11.
40. *Штенберг Л. Ф.* Многофигурная стереометрическая задача // Квант. 1983. №2.
41. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия. М.: Наука, 1984.
42. *Шарыгин Н. Ф., Голубев В. Н.* Факультативный курс по математике. Решение задач: учебное пособие для 11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1991.
43. *Юшкевич А. Н.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ