ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, РАЦИОНАЛЬНЫХ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ, СТЕПЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Теоретические сведения.

КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА, ИХ СВОЙСТВА.

Корень n – степени: $\sqrt[n]{a}$, **n** - *показатель корня,* **a** – *подкоренное выражение*

Если **n** – ***нечетное число,*** *то выражение* $\sqrt[n]{a}$ *имеет смысл при* $\forall$ *a*

Если **n** – ***четное число,*** то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$

Арифметический корень: $\left.\begin{matrix} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in N, a \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \geq 0$

Корень нечетной степени из отрицательного числа: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕЙ

1. *Правило извлечения корня из произведения:*
   $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. *Правило извлечения корня из дроби:*
   $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \geq 0, b > 0, b \neq 0)$

3. *Правило извлечения корня из корня:*
   $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(k > 0, a \geq 0)$

4. *Правило вынесения множителя из под знака корня:*
   $\sqrt[n]{ba^n} = a\sqrt[n]{b}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$

5. *Внесение множителя под знак корня:*
   $b\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{3b^2}, \text{если } b \geq 0 \\ -\sqrt{3b^2}, \text{если } b \leq 0 \end{cases}$,

6. *Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и тоже число.*
   $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k > 0)$

7. *Правило возведения корня в степень.*
   $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ $(a \geq 0, \text{если } k \leq 0, \text{то } a \neq 0)$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, **a** – *основание степени,* **n** – *показатель степени*

Свойства:

1. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным.*
   $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. *При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным.*
   $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. *При возведении степени в степень показатели перемножаются.*
   $(a^m)^n = a^{mn}$

4. *При возведении в степень произведения двух чисел, каждое число возводят в эту степень, а результаты перемножают.*

$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$

5. *Если в степень возводят частное двух чисел, то в эту степень возводят числитель и знаменатель, а результат делят друг на друга.*

$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{n} = \frac{\boldsymbol{a}^{n}}{\boldsymbol{b}^{n}}$

6. *Если* $a > 0, b > 0$, то $a^n > b^n$

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. $\boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{n}} = \frac{1}{a^n}$, где $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n} > 0$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$
3. $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{1}$, где $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{0}^{\boldsymbol{0}}$ не имеет смысла
4. *По определению*: $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{a}$

   $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$

Свойства:

1. $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}$
2. $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} : \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}$
3. $(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{mn}}$
4. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}$
6. *Пусть r рациональное число* $0 < a < b$, *тогда*

   $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} < \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{r}}$ ***при r>0*** $\qquad$ $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} > \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{r}}$ ***при r<0***

7 *.Для любого рациональных чисел r и s из неравенства* $r > s$ *следует*

$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} > \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{s}}$ ***при a>1*** $\qquad$ $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} < \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{s}}$ ***при*** $0 < a < 1$

Формулы сокращённого умножения.

Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Пример 1. Упростите выражение $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}}$.

Решение

Применим свойства степеней (умножение степеней с одинаковым основанием и деление степеней с одинаковым основанием): $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}} = 9m^{\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}-(-3)} = 9m^7$.

Ответ: $9m^7$.

Пример 2.Сократить дробь: $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$

Решение.Так область определения дроби $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ все числа, кроме $x \neq 1$ и $x \neq -2$.Вместе с тем $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}$.Сократив дробь, получим $\frac{x^2+x+1}{x+2}$.Область определения полученной дроби: $x \neq -2$, т.е. шире, чем область определения первоначальной дроби. Поэтому дроби $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ и $\frac{x^2+x+1}{x+2}$ равны при $x \neq 1$ и $x \neq -2$.

Пример 3.Сократить дробь: $\frac{a^2-9}{a+3} = \frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)} = a-3$

Пример 4.Упростить: $\frac{6}{x-5} + \frac{2}{5-x} = \frac{6}{x-5} - \frac{2}{x-5} = \frac{4}{x-5}$

Пример 5.Упростить: $\frac{3y^2-6y}{y^2-4} = \frac{3y(y-2)}{(y-2)(y+2)} = \frac{3y}{y+2}$

Пример 6. Упростить: $\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{2-4x}{x^2}$

Пример 7. Упростить: $\frac{x^2-5x}{x^2-25} : x^2 = \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)x^2} = x(x+5)$

Пример 8.Упростить: $\left(\frac{x}{2y}\right)^3 \cdot \frac{8y^3}{3x} = \frac{x^3}{3}$

Пример 9. Вычислить: $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

Решение. $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3 \cdot 0{,}3 = \frac{7}{5} - 0{,}9 = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5$

Пример 10.Упростить выражение: $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

Решение.
$$\frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} = 4\sqrt{\frac{18}{6}} + 3\sqrt{\frac{24}{6}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{72}{6}} =$$
$$= 4\sqrt{3} + 6 - \frac{\sqrt{12}}{2} = 4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 6$$

Пример 11.Сократить дробь $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}}$, если $\sqrt{t} \neq 8$.

Решение. $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}} = \frac{(8-\sqrt{t})(8+\sqrt{t})}{8-\sqrt{t}} = 8+\sqrt{t}$.

Пример 12.Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A = \frac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$.

Решение. В знаменателе имеем иррациональность 2-й степени, поэтому помножим и числитель, и знаменатель дроби на сопряженное выражение, то есть сумму чисел $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{2}$, тогда в знаменателе будем иметь разность квадратов, которая и ликвидирует иррациональность. $A = \frac{1(\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{7-8} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{7}-2\sqrt{2}$