Рассмотрим абсолютно жесткий элемент ***AOB***, закрепленный с помощью двух деформируемых стержней 1 и 2 (см. рис.1). Первый стержень изготовлен из меди ($E_1 = 10^{11}\,\Pi a$), второй – из стали ($E_2 = 2 \cdot 10^{11}\,\Pi a = 2E_1$), соотношение площадей поперечных сечений стержней $A_1 = 2A_2$. Заданы размеры: $a = 1\,м$, $b = 1{,}5\,м$, $c = 2\,м$.

Удобно заранее вычислить некоторые геометрические параметры: $l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 1{,}8\,(м)$, $\beta = arctg\dfrac{a}{b} = arctg\dfrac{2}{3} = 33{,}7^\circ$,
$\cos\beta = 0{,}832$, $l_2 = c = 2\,(м)$.

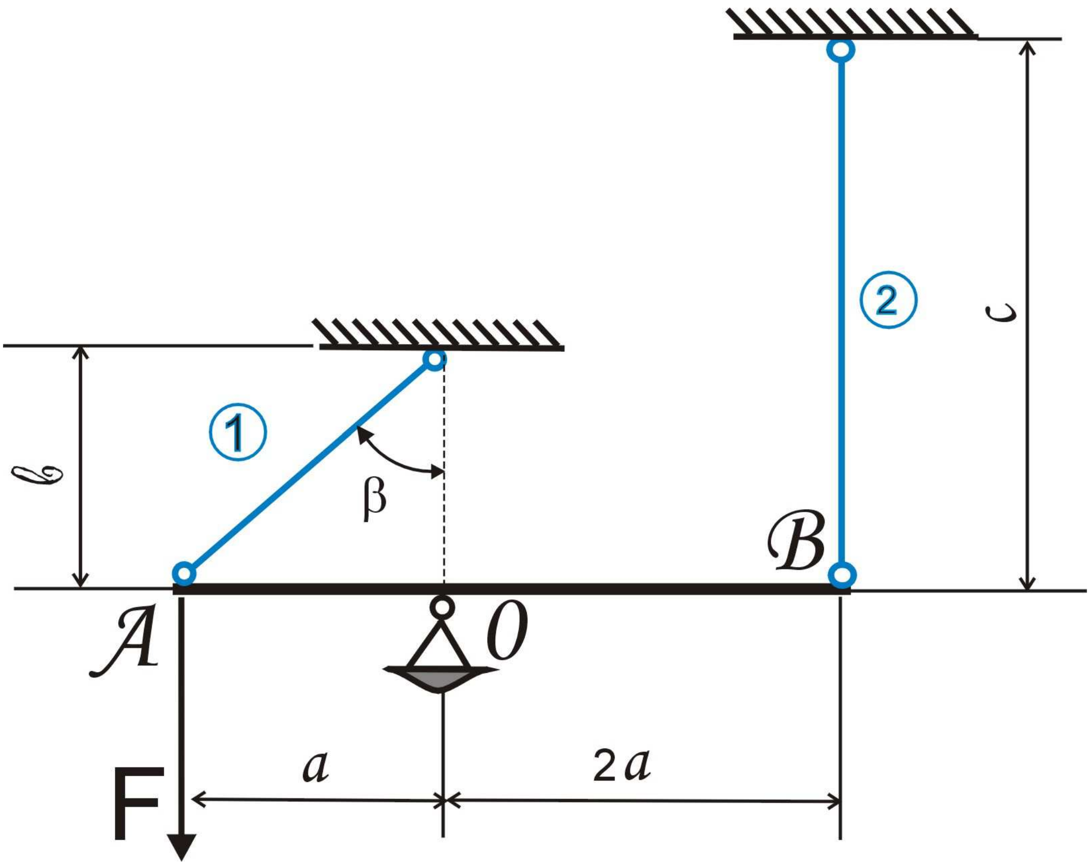

Рис.1

Схема внешних сил, действующих на жесткий элемент ***AOB***, представлена на рис.2. При этом предполагается, что продольные силы N_1, N_2 в деформируемых стержнях 1 и 2 являются растягивающими, и это позволяет в дальнейшем автоматически получить для них правильные знаки.

Запишем **уравнения равновесия** элемента ***AOB*** :

$\sum F_x = H + N_1 \cdot \sin\beta = 0$, $\sum F_y = R + N_2 - F + N_1 \cos\beta = 0$,

$\sum M_{(\cdot)O} = F \cdot a - N_1 \cdot \cos\beta \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0.$

Здесь рассматриваются две составляющие силы N_1 - горизонтальная и вертикальная, причем момент относительно точки O создает именно вертикальная составляющая, равная $N_1 \cdot \cos\beta$.

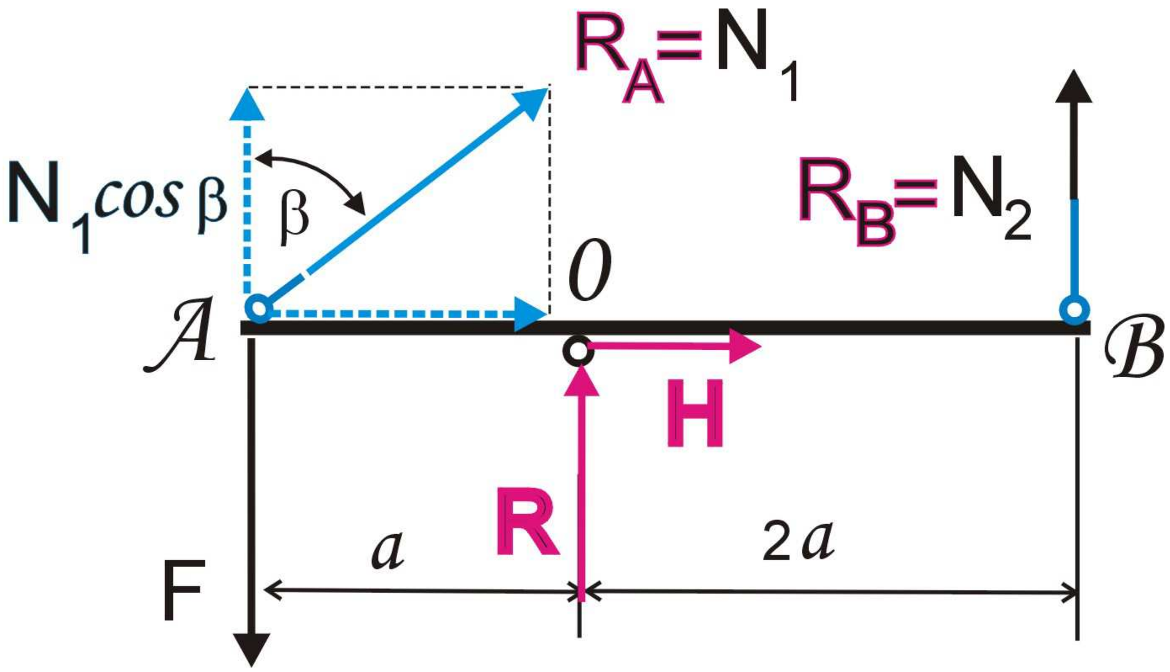

Рис.2

Итак, имеются четыре неизвестные внешние силы приложенные к элементу ***AOB***. Это реакции шарнирной опоры R, H и реактивные силы R_A и R_B, действующие на элемент ***AOB*** со стороны стержней 1 и 2, ***численно равные внутренним продольным силам*** N_1 ***и*** N_2 ***в этих стержнях*** (в уравнениях обозначения R_A и R_B для краткости опущены, вместо них сразу используются N_1 и N_2). Уравнений же равновесия, как видно, всего три, поэтому **степень статической неопределимости** в данной задаче равна $n_{сн} = 4 - 3 = 1$, то есть для нахождения всех неизвестных внешних усилий не хватает одного уравнения.

Недостающее уравнение можно записать, рассмотрев для данной стержневой системы **схему возможных перемещений**, обусловленных деформациями стержней (см. рис.3).

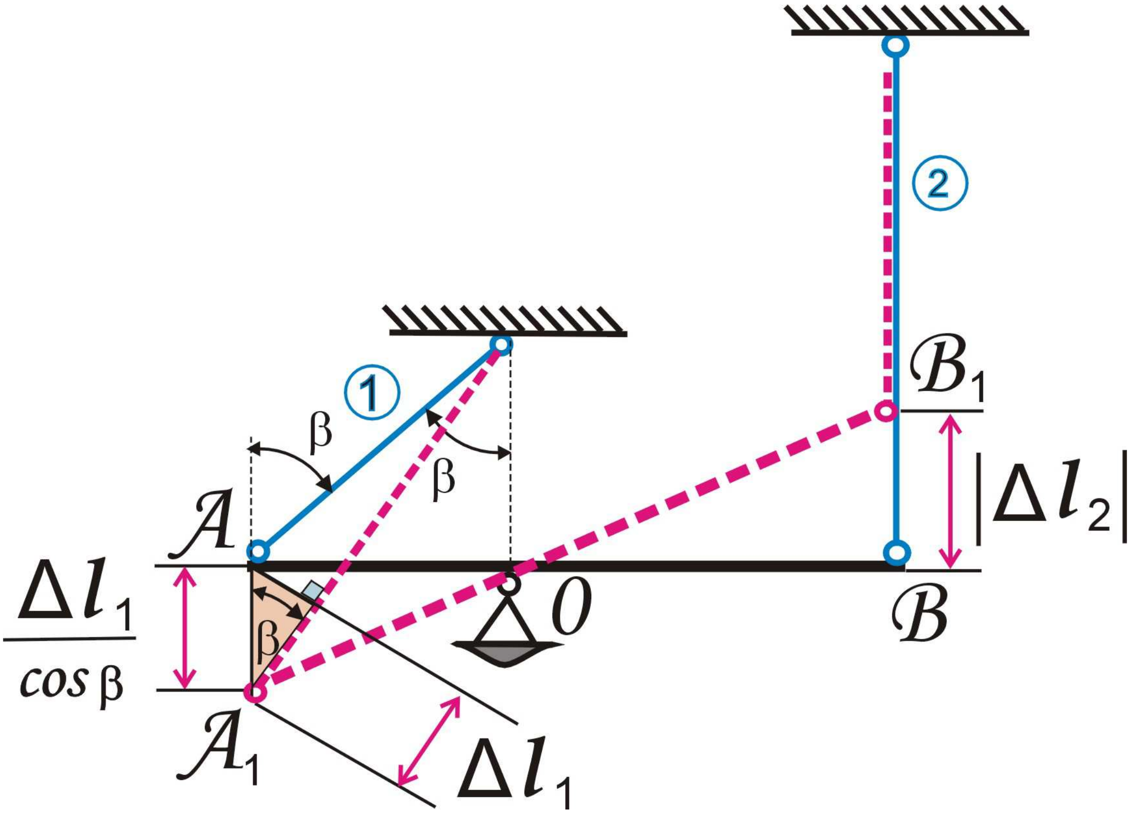

Рис.3

Из подобия треугольников ΔAA_1O и ΔBB_1O устанавливаем соотношение между удлинениями стержней – **уравнение совместности перемещений**:

$$\frac{|BB_1|}{|AA_1|} = \frac{|OB|}{|OA|} \Rightarrow \frac{|\Delta l_2|}{\Delta l_1/\cos\beta} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow |\Delta l_2|\cos\beta = 2\Delta l_1 .$$

Здесь считается, что перемещения точек A и B происходят в направлениях, перпендикулярным их радиус-векторам OA и OB, проведенным из мгновенного центра поворота O, то есть по вертикали. Чтобы найти изменение длины первого стержня Δl_1, проведем перпендикуляр к новому направлению первого стержня (вместо дуги окружности). Поскольку перемещения и изменения углов бесконечно малы, можно считать, что угол в получившемся прямоугольном треугольнике равен β. Отрезок AA_1 является гипотенузой в этом треугольнике, следовательно $|AA_1| = \dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta}$.

С учетом того, что, как видно из схемы, второй стержень оказывается сжатым, $\Delta l_2 < 0$, и, следовательно, $|\Delta l_2| = -\Delta l_2$, окончательно запишем

$$-\Delta l_2 \cos\beta = 2\Delta l_1 .$$

Применив **закон Гука,** перепишем это уравнение совместности в виде:

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}\cos\beta = -2\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \Rightarrow N_2 = -2\frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2 \cos\beta} N_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 = -2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}8}{2\cdot 0{,}832}\cdot N_1 = -2{,}16\,N_1$$

Итак, получена система уравнений:

$$F - 0{,}832 N_1 + 2N_2 = 0$$

$$N_2 = -2{,}16 N_1$$

Решив ее, получим $N_1 = 0{,}19F,\;\; N_2 = -0{,}42F$. Отметим, что полученные знаки продольных усилий N_1 и N_2 соответствуют истинной картине деформаций – первый стержень растянут, второй сжат.

Запишем теперь условия прочности для обоих стержней:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}19F}{A_1} \le [\sigma_1], \quad |\sigma_2| = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{0{,}42F}{A_2} \le [\sigma_2].$$

В дальнейшем, в зависимости от того, что известно, и что требуется определить, эти неравенства могут использоваться как для подбора сечений, так и для определения грузоподъемности.

Например, известна сила $F = 100\ кН$, тогда для площадей сечений получаем неравенства:

$$A_1 \ge \frac{0{,}19F}{[\sigma_1]} = \frac{0{,}19\cdot 100\cdot 10^3}{120\cdot 10^6} = 1{,}6\cdot 10^{-4}(м^2) = 1{,}6\ (см^2)$$

$$A_2 \ge \frac{0{,}42F}{[\sigma_2]} = \frac{0{,}42\cdot 100\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 2{,}6\cdot 10^{-4}(м^2) = 2{,}6\ (см^2).$$

С учетом принятого при решении задачи соотношения площадей $A_1 = 2A_2$, что при подстановке в первое неравенство дает $2A_2 \ge 1{,}6\ (см^2) \Rightarrow A_2 \ge 0{,}8\ (см^2)$, выбираем в соответствии с более сильным неравенством: $A_1 = 5{,}2\ (см^2),\ A_2 = 2{,}6\ (см^2)$. Тогда напряжения в стержнях оказываются равны

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}19\cdot 100\cdot 10^3}{5{,}2\cdot 10^{-4}} = 36{,}5(МПа) \le [\sigma_1] = 120\ (МПа),$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-0{,}42\cdot 100\cdot 10^3}{2{,}6\cdot 10^{-4}} = -161{,}5(МПа), |\sigma_2| \ge [\sigma_2] = 160\ (МПа).$$

Хотя формально условие прочности для второго стержня не выполняется (это связано с ошибками округления), но такой перегруз, составляющий менее 5%, допустим.

Пусть теперь известны площади сечений стержней $A_1 = 6\,(см^2)$, $A_2 = 3\,(см^2)$. Тогда из условий прочности получаем два неравенства для определения грузоподъемности (допускаемой величины силы F):

$$F \le \frac{[\sigma_1]\cdot A_1}{0{,}19} = \frac{120\cdot 10^6\cdot 6\cdot 10^{-4}}{0{,}19} \approx 379\,(кН),$$

$$F \le \frac{[\sigma_2]\cdot A_2}{0{,}42} = \frac{160\cdot 10^6\cdot 3\cdot 10^{-4}}{0{,}42} \approx 114\,(кН).$$

В соответствии с более сильным неравенством, выбираем $F = 110\,кН$, тогда напряжения составят

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}19\cdot 110\cdot 10^3}{6\cdot 10^{-4}} = 34{,}8\,(МПа) \le [\sigma_1] = 120\,(МПа),$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-0{,}42\cdot 110\cdot 10^3}{3\cdot 10^{-4}} = -154\,(МПа),\ |\sigma_2| \le [\sigma_2] = 160\,(МПа).$$

Рассмотрим теперь ту же стержневую систему, находящуюся только **под температурным воздействием**: пусть первый стержень нагревается на $\Delta t = 40^\circ C$ (см. рис.4)

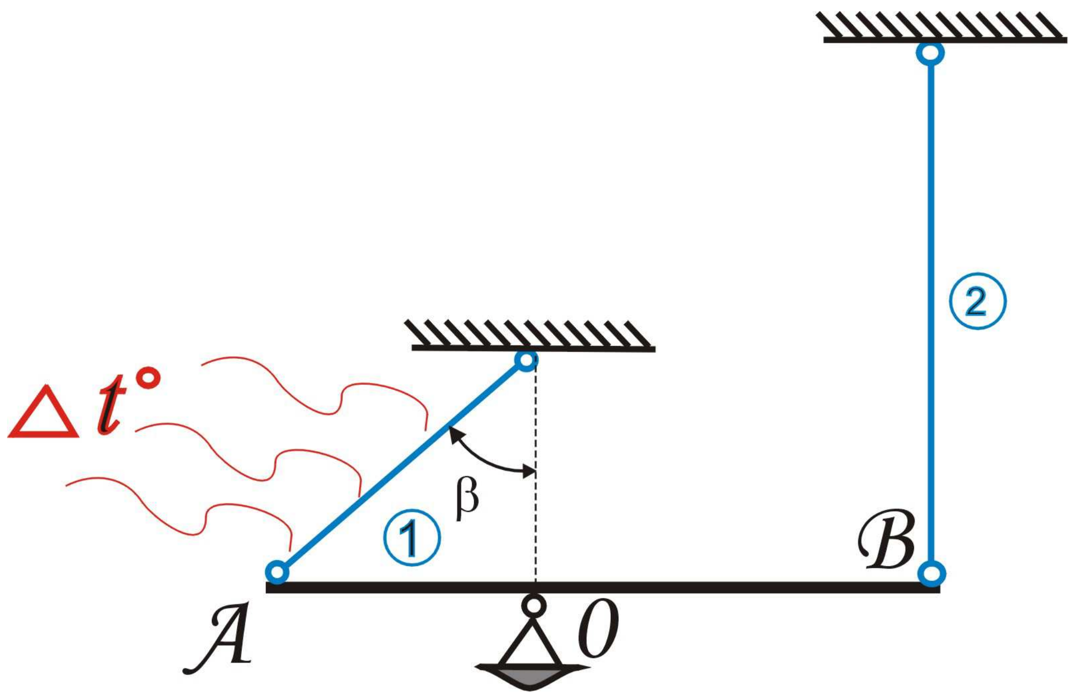

Рис.4

Схема внешних сил, действующих на жесткий элемент ***AOB***, будет отличаться от приведенной на рис.2 только отсутствием силы F (см. рис.5)

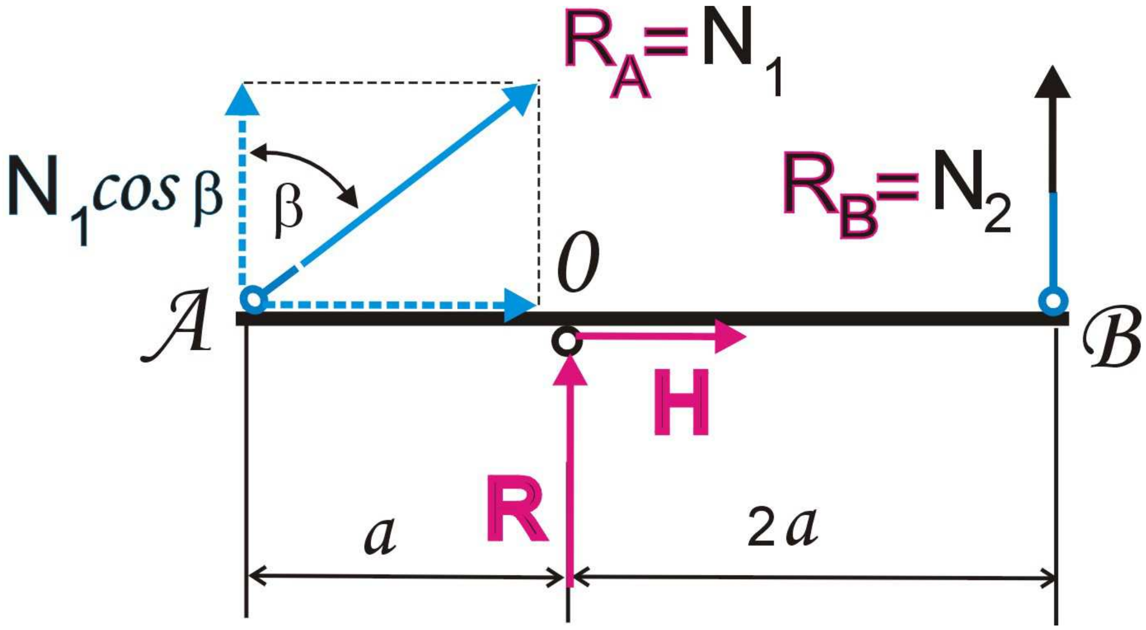

Рис.5

Уравнения равновесия запишутся в виде

$$\sum F_x = H + N_1 \cdot \sin\beta = 0,\ \sum F_y = R + N_2 + N_1 \cos\beta = 0,$$

$$\sum M_{(\cdot)O} = -N_1 \cdot \cos\beta \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать через напряжения, учитывая соотношение между площадями $A_1 = 2A_2$:

$$-\sigma_1 A_1 \cdot 0{,}832 + \sigma_2 A_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 0{,}832\sigma_1.$$

Схема возможных перемещений в данном случае выглядит точно так же, как показано на рис.3, поскольку ясно, что от нагрева первый стержень будет удлиняться. **Уравнение совместности перемещений** не претерпит никаких изменений: $-\Delta l_2 \cos\beta = 2\Delta l_1$.

Записывая **закон Гука**, учтем для первого стержня наличие температурного слагаемого (α - коэффициент линейного расширения):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 \Delta t l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta t l, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{\sigma_2 l_2}{E_2}\ .$$

Далее подставляем эти выражения в уравнение совместности и, решая систему уравнений, сразу находим температурные напряжения $\sigma_1(\Delta t)$ и $\sigma_2(\Delta t)$.

Расчет на неточность изготовления совершенно аналогичен расчету на температурное воздействие, только лишь в законе Гука вместо слагаемого $\delta_{t^\circ} = \alpha \Delta t l$ используется заданная начальная неточность изготовления δ.