Оглавление

1 Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия. 4

1.1 Определение положения равновесия. Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил). 4

1.2 Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). 6

1.3 Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. 7

1.4 Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. 9

1.4.1 Общие теоремы об устойчивости линейных систем. . 10

1.4.2 Устойчивость линейных систем с постоянной матрицей. Критерий Рауса-Гурвица. 12

1.4.3 Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. 13

1.5 Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем. 17

1.6 Устойчивость равновесия консервативных механических систем. 22

1.6.1 Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. 22

1.6.2 Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. 24

1.7 Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер. 25

1.8 Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. 28

1.8.1 Уравнение частот. Общее решение. 28

1.8.2 Свойства амплитудных векторов. Использование симметрии системы для нахождения мод колебаний. . . 30
1.8.3 Главные (нормальные) координаты. Случай кратных корней. 32
1.9 Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие. 34

2 Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты. 39
2.1 Основы Гамильтоновой механики. 39
2.1.1 Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. 39
2.1.2 Функция Гамильтона для консервативной системы. . 42
2.2 Первые интегралы гамильтоновых систем. 43
2.2.1 Скобки Пуассона. 43
2.2.2 Теорема Якоби-Пуассона. 45
2.2.3 Типичные первые интегралы Гамильтоновых систем. 46
2.2.4 Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат. 48
2.2.5 Понижение порядка уравнений Гамильтона для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера. 48
2.3 Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. 50
2.4 Вариационный принцип Гамильтона. 52
2.5 Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. 54
2.6 Основы теории групп Ли. 55
2.6.1 Понятие группы Ли. 56
2.6.2 Однопараметрические группы Ли. Теорема единственности. 58
2.6.3 Ряд Ли. Инвариант группы. 60
2.6.4 Дифференциальный и интегральный инварианты группы. 61
2.7 Теорема Эмми Нётер. 64
2.8 Интегральные инварианты Пуанкаре-Картана и Пуанкаре. 66
2.9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Сохранение фазового объема гамильтоновой системы. 68
2.10 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. . . . 70

2.11 Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем. 73

3 Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби. 79

3.1 Канонические преобразования. Критерий каноничности преобразования. 79

3.2 Свободные преобразования. 82

3.3 Полусвободные преобразования. 83

3.4 Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований. 85

3.5 Уравнение Гамильтона-Якоби 86

3.6 Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных. . 87

Глава 1

Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия.

1.1 Определение положения равновесия. Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил).

Положением равновесия называется такое положение механической системы, в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю.

Из определения ясно, что равновесие существенно зависит от системы координат, связанной с наблюдателем.

Рассмотрим склерономную механическую систему в обобщенных координатах: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{q})$.

Критерий равновесия стационарной механической системы: *некоторое положение $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}^0$ стационарной механической системы является положением равновесия тогда и только тогда, когда все обобщенные силы в этом положении равны нулю:*

$$Q_k(t, \overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{0}) = 0, \qquad k = 1, \dots, n$$

Доказательство

Необходимость

Для стационарной системы кинетическая энергия имеет только квадратичную форму:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overrightarrow{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Теперь уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

примут вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_k(t, \overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}})$$

По условию, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}^0$ — положение равновесия. Тогда левая часть последнего уравнения обращается в ноль, и для любого k выполняется

$$Q_k(t, \overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{0}) = 0$$

Достаточность

Пусть нашлось такое положение $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}^0$, что для любого k выполняется

$$Q_k(t, \overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{0}) = 0$$

Тогда $\overrightarrow{q}^0$ — решение полученных выше уравнений Лагранжа, которое, в силу теоремы Коши, единственно.

Теорема доказана.

Отметим, что хотя рассматриваемая система склерономна, действующие на нее обобщенные силы могут зависеть от времени, причем сама система останется склерономной.

Если обобщенная сила потенциальна

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi(t, \overrightarrow{q})}{\partial q_k},$$

то

$$\left.\frac{\partial \Pi(t, \overrightarrow{q})}{\partial q_k}\right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{q}^0} = 0,$$

то есть система имеет стационарную точку.

1.2 Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений).

Рассмотрим голономную систему в обобщенных координатах:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t, \overrightarrow{q})$$

Критерий равновесия системы с идеальными связями: *некоторое положение $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}^0$ механической системы с идеальными связями является положением равновесия тогда и только тогда, когда в этом положении суммарная работа всех сил на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю.*

Доказательство

Необходимость

Рассмотрим элемент массы dm механической системы. Обозначая $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{n}$ соответственно ускорение элемента массы, плотность силы и плотность реакции связей, действующих на элемент массы, запишем общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\int \left(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{f}\right) \delta \overrightarrow{r} dm = 0$$

Если система находится в равновесии, то $\overrightarrow{w} \equiv 0$ и

$$\delta A = \int \overrightarrow{f} \delta \overrightarrow{r} dm = 0$$

Достаточность

Пусть суммарна работа всех сил на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю. Выражая виртуальное перемещение в обобщенных координатах как полный дифференциал, получим

$$\delta A = \int \overrightarrow{f} \delta \overrightarrow{r} dm = \int \overrightarrow{f} \left(\sum \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} \delta q_i\right) dm = \sum \left(\int \overrightarrow{f} \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} dm\right) \delta q_i = \\ = \sum Q_i \delta q_i = 0$$

Но по условию равенство верно на любом виртуальном перемещении, то есть δq_i — независимая и произвольная. Тогда $Q_i = 0$. Отсюда и из критерия равновесия стационарной механической системы следует требуемое.

Теорема доказана.

1.3 Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия.

Рассмотрим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно старшей производной, поэтому можно записать

$$\ddot{\vec{q}} = f(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

Заменой $\dot{\vec{q}} = \vec{u}$ получим

$$\dot{\vec{u}} = f(t, \vec{q}, \vec{u}),$$

то есть уравнения Лагранжа второго рода есть частный случай систем вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}),$$

которые мы и будем рассматривать. Для механической системы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix}$$

— фазовый вектор.

Вектор $\vec{a}$ будем считать **положением равновесия** последней системы, если $\vec{F}(t, \vec{a}) = 0$.

Заменой $\vec{x} \to \vec{x} - \vec{a}$ всегда можно переместить положение равновесия в начало координат, поэтому далее будем считать, что $\vec{a} = \vec{0}$.

Решение $\vec{x}(t_0, x_0)$ последней системы называется **бесконечно продолжимым вправо**, если оно существует для любого $t \in [t_0, \infty)$.

Положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ называется **устойчивым по Ляпунову**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall \vec{x}(t) : \|\vec{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{x}(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in [t_0, \infty),$$

где $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ — норма вектора $\vec{x}$.

Из определения непосредственно следует, что в достаточно малой окрестности устойчивого положения равновесия любые решения бесконечно продолжаемы вправо.

Из последнего определения получим: положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ называется **неустойчивым по Ляпунову**, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \ \forall \delta \ \ \exists \vec{x}(t) \text{ и } \exists t^* : \|\vec{x}(t_0)\| < \delta, \ \ \|\vec{x}(t^*)\| > \varepsilon,$$

или иначе, положение равновесия называется неустойчивым по Ляпунову, если найдется хотя бы одно непродолжаемое бесконечно вправо решение в сколь угодно малой окрестности положения равновесия.

Положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ называется **асимптотически устойчивым**, если:

1. оно устойчиво по Ляпунову;
2. $\exists \Delta < \delta : \forall \overrightarrow{x}(t) : \|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0}$

Несложно показать, что если некоторое положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системы $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{x})$ устойчиво для некоторого момента времени t_0, то оно устойчиво и для любого последующего момента времени $t_1 > t_0$, принимаемого за начальный.

1.4 Первый метод Ляпунова исследования устойчивости.

Под первым методом Ляпунова понимают совокупность приемов и средств исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанных непосредственно на анализе общих или частных решений этих систем, а также использующих определенные характеристики указанных решений.

Заметим, что к исследованию устойчивости положения равновесия всегда можно свести исследование устойчивости любого частного решения.

Действительно, пусть $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\psi}(t)$ — некоторое частное решение системы $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{x})$. Выполним в этой системе замену переменных $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{y}$: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{\psi}(t)$. Тогда в новых переменных система имеет вид

$$\dot{\overrightarrow{y}} = \overrightarrow{F}[t, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{\psi}(t)] - \overrightarrow{F}[t, \overrightarrow{\psi}(t)]$$

с положением равновесия $\overrightarrow{y} \equiv \overrightarrow{0}$

Решение $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\psi}(t)$ называется **устойчивым по Ляпунову (асимптотически устойчивым**) если устойчивым по Ляпунову (асимптотически устойчивым) будет это положение равновесия. Если все частные решения системы устойчивы, то говорят, что сама эта система является устойчивой.

1.4.1 Общие теоремы об устойчивости линейных систем.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\overrightarrow{x}} = A(t)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(t)$$

Теорема об устойчивости линейной системы: *линейная система (с любым свободным членом) устойчива тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы.*

Доказательство

Пусть $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\psi}(t)$ — исследуемое на устойчивость решение неоднородной системы. Сведем задачу к исследованию устойчивости положения равновесия:

$$\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{y} : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{\psi}(t)$$

Подстановка в систему дает

$$\dot{\overrightarrow{\psi}} + \dot{\overrightarrow{y}} = A(t)[\overrightarrow{\psi}(t) + \overrightarrow{y}] + \overrightarrow{f}(t)$$

Поскольку

$$\dot{\overrightarrow{\psi}} \equiv A(t)\overrightarrow{\psi}(t) + \overrightarrow{f}(t),$$

то для $\overrightarrow{y}$ получаем систему

$$\dot{\overrightarrow{y}} = A(t)\overrightarrow{y},$$

которая не зависит от того, какое именно частное решение рассматривается.

Теоерема доказана.

Теорема об устойчивости линейной однородной системы: *линейная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда каждое ее решение ограничено.*

Доказательство

Необходимость

Допустим, что система устойчива, то есть все ее частные решения устойчивы, но у нее есть неограниченное решение $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\psi}(t)$. Очевидно, $\overrightarrow{\psi}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (t_0 — начальный момент времени), так как иначе решение $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\psi}(t)$ неустойчиво по определению в силу неограниченности, поэтому мы можем построить решение

$$\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{\psi}(t)}{\|\overrightarrow{\psi}(t_0)\|} \cdot \frac{\delta}{2},$$

обладающее свойством $\|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \delta$. Но $\|\overrightarrow{x}(t)\| \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$, т.е. это решение неустойчиво по определению, а значит неустойчива и сама система, что противоречит условию.

Достаточность

Пусть любое решение ограничено. Но тогда фундаментальная матрица решений $\Phi(t, t_0)$, столбцы которой составлены из линейно независимых частных решений, также ограничена. Если эти решения выбраны так, что

$$\Phi(t_0, t_0) = E,$$

то общее решение линейной однородной системы можно записать как

$$\overrightarrow{x}(t) = \Phi(t, t_0)\overrightarrow{x}(t_0)$$

Тогда

$$\|\overrightarrow{x}(t)\| \leq M\|\overrightarrow{x}(t_0)\|$$

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ будем выбирать $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ и все частные решения системы устойчивы по определению, а значит устойчива и сама система.

Теорема доказана.

1.4.2 Устойчивость линейных систем с постоянной матрицей. Критерий Рауса-Гурвица.

Теорема об устойчивости линейной системы с постоянной матрицей: *линейная система с постоянной матрицей*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда вещественные части корней характеристического уравнения системы

$$det\,(A - \lambda E) = 0$$

отрицательны:

$$Re\lambda_k < 0 \;\; \forall k \in [1, n]$$

Доказательство

Из теории линейных систем дифференциальных уравнений известно, что произвольная компонента вектора решения $\vec{x}$ линейной системы состоит из суммы функций следующего вида: $e^{\alpha_k t}cos(\beta_k t)$, если корни $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ не являюются кратными. Если же среди корней есть кратные, то в решении появляются слагаемые вида

$$(C_0 + C_1 t + \ldots + C_p t^p)e^{\alpha_k t}cos(\beta_k t)$$

Если $\alpha_k < 0$, то все такие слагаемые стремятся к нулю при $t \to \infty$, а значит решения линейной системы ограничены. По теореме об устойчивости линейной однородной системы, исходная система устойчива, а в силу экспоненциального затухания решений — и асимптотически устойчивой.

Теорема доказана.

Таким образом, чтобы установить асимптотическую устойчивость линейной системы, достаточно убедиться, что все корни ее характеристического уравнения

$$det(A - \lambda E) \equiv a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = 0$$

обладают отрицательными вещественными частями. Полиномы с таким свойством называют **устойчивыми**.

Несложно показать, что устойчивый полином имеет все коэффициенты *одного знака*. Это следует из разложения полинома на множители и условия отрицательности действительных частей его корней.

Критерий Рауса-Гурвица: *для устойчивости полинома*

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n, \qquad a_0 > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица Гурвица

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & a_n \end{pmatrix}$$

была положительно определена.

Критерий Льенара-Шипара: *для устойчивости полинома*

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$$

необходимо и достаточно, чтобы:

1. $a_i > 0 \;\; \forall i \in [1, n]$*;*

2. все четные или все нечетные миноры матрицы Гурвица были положительными.

1.4.3 Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

В большинстве случаев исследование устойчивости положения равновесия нелинейных систем может быть сведено к исследованию устойчивости линейных систем. Случаи, когда это можно сделать, описывает следующая теорема Ляпунова, которая считается основной теоремой первого метода Ляпунова.

Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению: *пусть для системы*

$$\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$$

(положение равновесия которой $\overrightarrow{x} \equiv \overrightarrow{0}$*)* $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$ *непрерывно дифференцируема в нуле, а ее вторые производные существуют и ограничены в некоторой окрестности положения равновесия. Тогда из асимптотической устойчивости системы* $\dot{\overrightarrow{x}} = A\overrightarrow{x}$*, где*

$$A = \left.\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{x}}\right|_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}},$$

будет следовать асимптотическая устойчивость положения равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *исходной системы. Если же линейная часть* $\dot{\overrightarrow{x}} = A\overrightarrow{x}$ *исходной системы неустойчива, то и сама система неустойчива.*

Доказательство

1. Лемма Гронуолла: если для положительных $u(t)$, $f(t)$ и c имеет место неравенство

$$u(t) \leq c + \int\limits_0^1 f(\tau)u(\tau)d\tau,$$

то справедлива оценка сверху:

$$u(t) \leq \exp\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)$$

Докажем записанную лемму. Из исходного неравенства получаем

$$\frac{u(t)}{c + \int\limits_0^t f(\tau)u(\tau)d\tau} \leq 1$$

Домножив полученное неравенство на $f(t)$ и интегрируя обе части, получим

$$\int\limits_0^t \frac{f(\tau)u(\tau)}{c+\int\limits_0^t f(\tau')u(\tau')d\tau'} \leq \int\limits_0^t f(\tau)d\tau,$$

откуда

$$\ln\left[c+\int\limits_0^t f(\tau)u(\tau)d\tau\right]-\ln c \leq \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$$

и из исходного неравенства

$$u(t) \leq c+\int\limits_0^t f(\tau)u(\tau)d\tau \leq c\exp\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right),$$

что доказывает лемму.

2. Из условия теоремы (для производных) следует, что система представима в виде

$$\dot{\overrightarrow{x}} = A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \qquad \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\| \leq a\|\overrightarrow{x}\|^2, \quad a = const$$

Поскольку линейная часть системы асимптотически устойчива, то все корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E) = 0$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. Обозначим

$$2h = \min_k |\operatorname{Re}\lambda_k|$$

и выполним замену переменных

$$\overrightarrow{x} \to e^{-ht}\overrightarrow{y}$$

Система в новых переменных приобретает вид

$$\dot{\overrightarrow{y}}e^{-ht} - h\overrightarrow{y}e^{-ht} = A\overrightarrow{y}e^{-ht} + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{y}e^{-ht}\right),$$

Откуда

$$\dot{\overrightarrow{y}} = \underbrace{(A + hE)}_{B}\overrightarrow{y} + e^{ht}\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{y}e^{-ht}\right)$$

Очевдино, что линейная часть этой системы по-прежнему устойчива. Запишем эту систему в эквивалентной форме

$$\overrightarrow{y}(t) = e^{Bt}\overrightarrow{y_0} + \int\limits_0^t e^{B(t-\tau)}e^{h\tau}\overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{y}(\tau)e^{-h\tau}\right]d\tau$$

и оценим $\overrightarrow{y}(t)$ по норме:

$$\|\overrightarrow{y}(t)\| \leq \|e^{Bt}\| \cdot \|\overrightarrow{y_0}\| + \int\limits_0^t \|e^{B(t-\tau)}\|e^{ht}\|\overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{y}(\tau)e^{-h\tau}\right]d\tau$$

Поскольку линейная часть системы устойчива, то ее фундаментальная матрица решений ограничена:

$$\|e^{Bt}\| \leq M$$

и написанное неравенство можно переписать в виде

$$\|\overrightarrow{y}(t)\| \leq M\|\overrightarrow{y_0}\| + Ma\int\limits_0^t e^{-h\tau}\|\overrightarrow{y}(\tau)\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq M\|\overrightarrow{y_0}\| + Ma\int\limits_0^t e^{-h\tau}\|\overrightarrow{y}(\tau)\|d\tau$$

Последний переход верен до тех пор, пока $\|\overrightarrow{y(\tau)}\| \leq 1$.

Используя лемму Гронуолла, получаем

$$\|\overrightarrow{y}(t)\| \leq M\exp\left[Ma\int\limits_0^t e^{-h\tau}d\tau\right]\|\overrightarrow{y_0}\| \leq k\|\overrightarrow{y_0}\|$$

Так как рассамтривается окрестность нулевого положения равновесия, то считаем $\|\overrightarrow{y_0}\| < \dfrac{1}{k}$. Тогда $\|\overrightarrow{y}(\tau)\|^2 < \|\overrightarrow{y}(\tau)\|$ при любом τ и из неравенства $\|\overrightarrow{y}(t)\| \leq k\|\overrightarrow{y_0}\|$ следует устойчивость положения равновесия в переменной $\overrightarrow{y}$. Переходя к переменной $\overrightarrow{x}$, имеем

$$\|\overrightarrow{x}(t)\| = \|\overrightarrow{y}(t)\|e^{-ht} \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

что и означает асимптотическую устойчивость положения равновесия в переменой $\overrightarrow{x}$.

Теорема доказана.

Отметим, что если система $\dot{\overrightarrow{x}} = A\overrightarrow{x}$ устойчива, но не асимптотически, то полученной теоремой пользоваться нельзя.

Теорема об устойчивости по линейному приближению — основная теорема прямого метода Ляпунова.

1.5 Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем.

Будем исследовать автономные системы вида $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$. Пусть некоторая функция $V(\overrightarrow{x})$, называемая **функцией Ляпунова**, непрерывно дифференцируема в ε-окрестности положения равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Теорема прямого метода Ляпунова об устойчивости: *если существует функция Ляпунова $V(\overrightarrow{x})$ такая, что*

1. $V(\overrightarrow{0}) = 0$ *и* $V(\overrightarrow{x}) > 0$ *при* $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$
2. $\dot{V} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} F_i \leq 0,$

то положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ устойчиво.

Доказательство

Рассмотрим сферу $\|\overrightarrow{x}\| = \varepsilon_1$, причем ε_1 возьмем так, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Функция $V(\overrightarrow{x})$ непрерывно дифференцируема в ε-окрестности положения равновесия, а значит она непрерывна в этой окрестности, а значит, непрерывна и в ε_1-окрестности положения равновесия. Сфера — компакт, поэтому по теореме Вейерштрасса $V(x)$ ограничена на сфере и достигает на ней своих верхней и нижней граней. Пусть

$$V^* = \min_{\|\overrightarrow{x}\|=\varepsilon} V(\overrightarrow{x})$$

$V(\overrightarrow{x})$ — непрерывна, тогда, взяв в определении непрерывности $\varepsilon_1 = V^*$, для положения равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ получим

$$\exists\delta(\delta < \varepsilon) : \forall\overrightarrow{x} : \|\overrightarrow{x}\| < \delta \Rightarrow |V(\overrightarrow{x}) - V(\overrightarrow{0})| = V(\overrightarrow{x}) < V^*$$

Рассмотрим произвольное решение $\overrightarrow{x}(t)$ исходной системы с начальным условием $\|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \delta$. Покажем от противного, что такая траектория не покинет ε_1-окрестности. Пусть в какой-то момент времени $t_1 > t_0$ $\|\overrightarrow{x}(t_1)\| = \varepsilon_1$. В силу невозрастания производной функции Ляпунова по времени и учитывая, что V^* — точная нижняя грань функции Ляпунова на сфере, имеем:

$$V^* > V(\overrightarrow{x}(t_0)) \geq V(\overrightarrow{x}(t_1)) \geq V^*,$$

что невозможно. Тогда положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ устойчиво по определению.

Теорема доказана.

Отметим, что первое условие в теореме прямого метода Ляпунова об устойчивости можно заменить на «$V(\overrightarrow{x})$ имеет минимум в положении равновесия», при этом доказательство теоремы не изменится.

Общего метода нахождения функции Ляпунова не существует, но если в системе есть первые интегралы (u_i), то чаще всего ее ищут в виде линейной комбинации первых интегралов и их квадратов:

$$V(\overrightarrow{x}) = \sum \lambda_i u_i + \sum \mu_i u_i^2$$

Теорема Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости: *если в некоторой окрестности положения равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ существует функция Ляпунова $V(\overrightarrow{x})$ такая, что*

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \begin{cases} = 0, \ \overrightarrow{x} \in M \\ < 0, \ \overrightarrow{x} \notin M \end{cases} \quad ,$$

где M — некоторое множество, выбранное так, что единственной целой траекторцей исследуемой автономной системы, лежащей в M, является $\overrightarrow{x} \equiv \overrightarrow{0}$, то

а) если $V(\overrightarrow{x})$ имеет минимум в положении равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, то это положение равновесия асимптотически устойчиво;

б) если $V(\overrightarrow{x})$ знаконеопределена в окрестности $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, то положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ неустойчиво.

Доказательство

Доказательство условия а)

$\dot{V}(\overrightarrow{x}) \leq 0$, поэтому положения равновесия устойчиво по теореме прямого метода Ляпунова об устойчивости. По определению устойчивости

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall \overrightarrow{x}(t) : \|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\overrightarrow{x}(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in [t_0, \infty)$$

Покажем, что это положение равновесия асимптотически устойчиво, то есть, помимо устойчивости, выполняется

$$\exists \Delta < \delta : \forall \overrightarrow{x}(t) : \|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0}$$

Предположим противное: положение равновесия устойчиво, но

$$\forall \Delta < \delta \ \ \exists \overrightarrow{x}(t) : \|\overrightarrow{x}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \overrightarrow{x}(t) \neq \overrightarrow{0}$$

Рассмотрим произвольную Δ_1-окрестность $(0 < \Delta_1 < \delta)$ и пусть для некоторой траектории $\overrightarrow{x_1}(t)$ условие асимптотической устойчивости не выполняется: $\lim\limits_{t\to\infty} \overrightarrow{x_1}(t) = \overrightarrow{x}^*$. В силу устойчивости положения равновесия, траектория $\overrightarrow{x_1}(t)$ ограничена. Тогда бесконечная последовательность $\{\overrightarrow{x_1}(t_k)\}$ $(k \in \mathbb{N})$ также ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса выделим сходящуюся подпоследовательность

$$\{\overrightarrow{x_i}\} = \{\overrightarrow{x_1}(t_{ki})\} : \lim_{i\to\infty} \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{x}^*$$

Функция $V(\overrightarrow{x_1})$ не возрастает (так как у нее неположительная производная) и ограничена, поэтому, по теореме Вейерштрасса, существует предел

$$\lim_{i\to\infty} V(\overrightarrow{x_i}) = V(\overrightarrow{x}^*) = V^*$$

Рассмотрим траекторию $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x}^*, t)$ $(\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x}^*)$. Производная функции Ляпунова неположительна, поэтому найдется такой момент времени T, что

$$V[\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x}^*, T)] < V^*$$

Рассмотрим траектории $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_i}, t)$.

Напомним известную теорему о пределах: если $A < B$ и $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$, то

$$\exists n : A_i < B \ \ \forall i > n$$

В нашем случае $A = V[\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x}^*, T)]$, $B = V^*$ и $\lim\limits_{i\to\infty} V[\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_i}, t)] = V[\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x}^*, T)]$, поэтому

$$\exists n : V[\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_i}, t)] < V^* \ \ \forall i > n$$

Последнее утверждение приводит к противоречию, поскольку $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_i}, t)$ — часть траектории $\overrightarrow{x_1}(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} V(\overrightarrow{x_1}(t)) = V^*$.

В силу произвольности выбора Δ_1-окрестности, асимптотическая устойчивость положения равновесия доказана

Доказательство условия б)

Рассмотрим множество $G = \{\overrightarrow{x} \mid V(\overrightarrow{x}) < 0\}$. $V(\overrightarrow{x})$ знаконеопределена в окрестности положения равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, поэтому, очевидно, G непусто.

Рассмотрим траекторию $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_0}, t)$, $\overrightarrow{x_0} \in G$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что рассматриваемая траектория покинет ε-окрестность положения равновесия.

Заметим, что, так как $V(\overrightarrow{x}) < 0$ при $\overrightarrow{x} \in G$ и $\dot{V}(\overrightarrow{x}) < 0$, то траектория $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_0}, t)$ не пересекает границу множества G.

Допустим теперь, что данная траектория не пересекает ε-окрестность положения равновесия и остается в $G \cap U_\varepsilon(\overrightarrow{0})$. $V(\overrightarrow{x})$ ограничена на замкнутом множестве $G \cap U_\varepsilon(\overrightarrow{0})$ как непрерывная функция, поэтому

$$\exists V^* = \inf_{x \in G \cap U_\varepsilon(\overrightarrow{0})} V(\overrightarrow{x})$$

Рассмотрим область

$$H = U_\varepsilon(\overrightarrow{0}) \cap G \cap \{\overrightarrow{x} \mid V(\overrightarrow{x}) < V(\overrightarrow{x_0})\}$$

В этой области существует

$$L = |\sup_{x \in H} \dot{V}(\overrightarrow{x})|,$$

так как H — ограниченное множество, а производная ограничена в силу непрерывности на ограниченном множестве функции Ляпунова и ее производной. $L \neq 0$. Действительно, $L = 0$ только в области M, но M не содержит целых траекторий кроме нулевой. Поэтому начальный момент времени можно выбрать так, что ни одна точка из G не будет лежать в M, так как через конечное время все траектории покинут M. Так как L — супремум, причем на множестве H функция Ляпунова отрицательна, то

$$V(\overrightarrow{x}) < V(\overrightarrow{x_0}) - Lt$$

— неограниченная функция. Это противоречит тому, что существует инфимум функции Ляпунова.

Теорема доказана.

Рассмотрим очевидные следствия из теоремы Барбашина-Красовского.

Теорема прямого метода Ляпунова об асимптотической устойчиовсти: *если существует функция Ляпунова $V(\overrightarrow{x})$ такая, что*

1. $$V(\overrightarrow{0}) = 0 \text{ и } V(\overrightarrow{x}) > 0 \text{ при } \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$$
2. $$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \begin{cases} = 0, \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \\ < 0, \ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \end{cases},$$

то положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ асимптотически устойчиво.

Теорема прямого метода Ляпунова о неустойчивости: *если существует функция Ляпунова $V(\overrightarrow{x}) > 0$ такая, что $\dot{V}(\overrightarrow{x}) > 0$, то положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ неустойчиво.*

Теорема Четаева о неустойчивости: *если существует функция Ляпунова $V(\overrightarrow{x})$ такая, что в сколь угодно малой окрестности положения равновесия существует область $V(\overrightarrow{x}) > 0$, во всех точках которой $\dot{V}(\overrightarrow{x}) > 0$, то положение равновесия $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ неустойчиво.*

Первое из следствий является частным случаем теоремы Барбашина-Красовского, а последние два можно получить заменой $V \to -V$, взяв $M = \{\overrightarrow{0}\}$.

1.6 Устойчивость равновесия консервативных механических систем.

Для консервативной системы кинетическая энергия имеет только квадратичную форму

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overrightarrow{q})\dot{q}_i \dot{q}_j,$$

а потенциальная энергия зависит только от обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi(\overrightarrow{q})$$

1.6.1 Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия.

Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем: *если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной механической системы имеет строгий минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Доказательство

Возьмем в качестве функции Ляпунова первый интеграл: $V(\overrightarrow{x}) = E(\overrightarrow{x}) = T + \Pi$. Выберем потенциал так, чтобы $\Pi(\overrightarrow{0}) = 0$. Потенциальная энергия имеет минимум в положении равновесия, поэтому $E(\overrightarrow{x}) > 0$ во всех точках кроме положения равновесия ($E(\overrightarrow{0}) = 0$, так как в положении равновесия обобщенные скорости равны нулю). При этом полная энергия — первый интеграл, тогда $\dot{E}(\overrightarrow{x}) \equiv 0$ и положение равновесия устойчиво по теореме прямого метода Ляпунова об устойчивости.

Теорема доказана.

Теорему Лагранжа-Дирихле можно обобщить на случай, когда к консервативной системе добавлены гироскопические и диссипативные силы.

Если выполнены условия теоремы Лагранжа-Дирихле и на систему действуют гироскопические силы, то положение равновесия остается устойчивым.

Действительно, мощность гироскопических сил равна нулю, а значит закон сохранения полной энергии не нарушается и доказательство теоремы не изменится.

Напомним, что диссипативные силы с полной диссипацией — такие, у которых мощность строго отрицательна ($N = \sum Q_i^* \dot{q}_i < 0$).

Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем: *если выполняются условия теоремы Лагранжа-Дирихле и на систему действуют диссипативные силы с полной диссипацией, то положение равновесия* $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ *асимптотически устойчиво.*

Доказательство

Выберем, как и при доказательстве теоремы Лагранжа-Дирихле, в качестве функции Ляпунова полную энергию:

$$V(\overrightarrow{x}) = E(\overrightarrow{x}) > 0$$

По теореме об изменении полной механической энергии

$$\dot{V}(\overrightarrow{x}) = \dot{E}(\overrightarrow{x}) = \sum Q_i^* \dot{q}_i$$

Выберем множество M так, что все обобщенные скорости в любой точке множества равны нулю. Очевидно, что это множество не содержит целых траекторий системы кроме $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ по определению положения равновесия. Тогда положение равновесия асимптотически устойчиво по теореме Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Теорема доказана.

1.6.2 Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии.

Раскладывая потенциальную энергию в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ и учитывая, что, во-первых, потенциал можно выбрать так, чтобы $\Pi(\overrightarrow{0}) = 0$, а во-вторых, в положении равновесия консервативная система имеет стационарную точку, получим

$$\Pi(\overrightarrow{q}) = \Pi(\overrightarrow{0}) + \sum \left.\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}} q_i + \frac{1}{2} \sum \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}} q_i q_j + \ldots = \\ = \Pi_2(\overrightarrow{q}) + \Pi_3(\overrightarrow{q}) + \ldots,$$

то есть разложение потенциальной энергии в окрестности положения равновесия начинается как минимум с членов второго порядка.

Первая теорема Ляпунова: *если по членами второго порядка в разложении потенциальной энергии в окрестности положения равновесия консервативной системы установлено, что потенциальная энергия в положении равновесия не имеет минимума, то положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если $\Pi_2(\overrightarrow{q}) = 0$, то условие неустойчивости положения равновесия дает следующая теорема.

Вторая теорема Ляпунова: *если из членов наинизшего порядка в разложении потенциальной энергии консервативной системы установлено, что потенциальная энергия имеет строгий максимум в положении равновесия, то это положение равновесия неустойчиво.*

Теорема Четаева: *если потенциальная энергия консервативной системы в некоторой окрестности положения равновесия является од-*

нородной функцией обобщенных координат и в положении равновесия не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.

1.7 Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от параметра:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \qquad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Для механической системы одномерность x означает наличие одной степени свободы.

Условие равновесия

$$f(x, \alpha) = 0$$

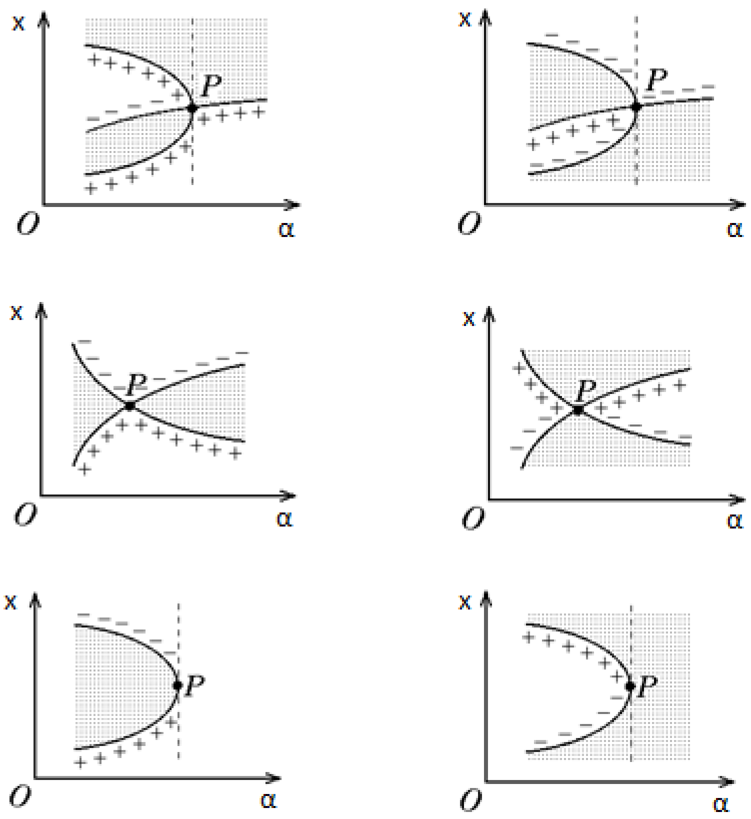
определяет на плоскости (α, x) семейство линий, которые образуют **кривую равновесия**. В общем случае эти линии могут пересекаться. Эти точки пересечения принято называть **точками бифуркации**. Пересечение линий решения в точке бифуркации означает неоднозначность решения уравнения в ее окрестности, поэтому в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

так как иначе по теореме о неявной функции уравнение $f(x, \alpha) = 0$ однозначно задает x как функцию α.

Зафиксируем какое-либо значение параметра α и будем увеличивать x. Если при прохождении кривой равновесия функция f меняет свой знак, то само положение равновесия может быть как устойчивым (при $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ в этой точке), так и неустойчивым (при $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ в этой точке), а в точке бифуркации характер устойчивости неопределен. Для того, чтобы понять, какие куски кривой равновесий соответствуют устойчивым положениям равновесия, а какие — неустойчивым, можно заштриховать участки плоскости (x, α), где функция f положительна. Если заштрихованная область располагается над кривой, то данная ветвь образована устойчивыми положениями равновесия. Если заштрихованная область расположена ниже прилегающего участка кривой, то этот участок отвечает неустойчивым положениям равновесия. Вдоль устойчивой ветви обычно ставят знаки «+», а вдоль неустойчивой, соответственно, «−».

Основные бифуркационные диаграммы в одномерном случае представлены на рисунках.

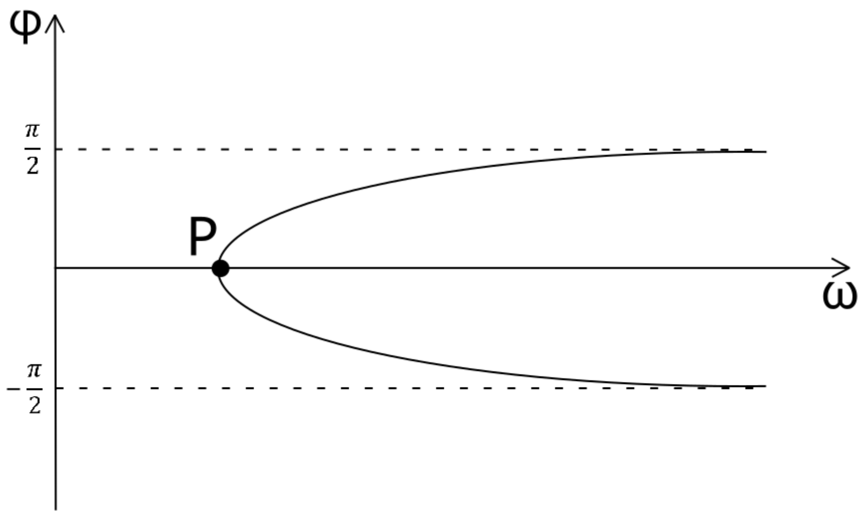


Точки P на первых четырех диаграммах называются бифуркациями типа **смены характера устойчивости**, а на последних двух — бифуркациями типа «**складка**».

Бифуркации типа «складка» образованы наложением двух линий кривой равновесий. Значение параметра, при котором возникает точка бифуркации, называется **бифуркационным значением параметра**, если в окрестности точки бифуркации наблюдается различный характер устойчивости линий кривой равновесия.

Рассмотрим круглую трубку, вращающуюся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Пусть на трубку насажен шарик, который может скользить по трубке без трения.

Считая частоту вращения трубки параметром, получаем систему с одной степенью свободы. Положение шарика определяется углом φ между радиус-вектором шарика (начало отсчета совпадает с центром окружности трубки) и вертикалью (в нижней точке $\varphi = 0$). Исследование такой системы на положения равновесия показывает, что до определенного значения частоты имеется только одно положение равновесия $\varphi = 0$, и оно является устойчивым, а начиная с некоторой частоты это положение равновесия становится неустойчивым и появляются два других неустойчивых положения равновесия. Соответствующая кривая равновесий показана на рисунке:



Точка P здесь называется бифуркацией типа «**вилка**».

Если размерность x больше единицы, то для нелинейных систем бывают случаи бифуркаций типа «вилка» (кривая равновесий будет иметь вид многомерной поверхности, проекция на каждую из плоскостей (x_i, α) будет иметь вид «вилки» из предыдущего примера). При этом может оказаться так, что правее бифуркационного параметра не существует положений равновесия. Такая точка бифуркации называется **дивергенцией**. Если же они существуют, то они неустойчивы и такая точка бифуркации называется **флаттером**.

1.8 Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия.

Напомним, что для консервативной системы кинетическая энергия имеет только квадратичную форму, а потенциальная энергия зависит только от обобщенных координат; при этом, как было получено ранее, разложение потенциальной энергии в окрестности положения равновесия начинается как минимум с членов второго порядка. Для применения линейной теории в разложении кинетической и потенциальной энергий следует оставить только члены второго порядка. Тогда в окрестности положения равновесия $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overrightarrow{0}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\overrightarrow{q}}^T A \dot{\overrightarrow{q}}$$

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi(\overrightarrow{q}) = \Pi_2(\overrightarrow{q}) + \Pi_3(\overrightarrow{q}) + ... \sim \Pi_2(\overrightarrow{q}) = \\ = \frac{1}{2} \sum \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}} q_i q_j = \frac{1}{2} \overrightarrow{q}^T C \overrightarrow{q}, \end{aligned}$$

где A и C — соответственно матрицы кинетической и потенциальной энергий:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}}, \qquad c_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}}$$

1.8.1 Уравнение частот. Общее решение.

Уравнения Лагранжа вблизи положения равновесия консервативной системы, с учетом структур кинетической и потенциальной энергий, имеют вид

$$A \ddot{\overrightarrow{q}} + C \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$$

Если система совершает малые колебания, то A и C положительно определены, так как в противном случае механическая система при отбрасывании членов выше второго порядка может утратить свои существенные свойства. Решение полученных уравнений Лагранжа ищется в виде

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{u} \sin(\omega t + \varphi),$$

где $\overrightarrow{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ — **амплитудный вектор**. Амплитудный вектор характеризует взаимосвязь изменений обобщенных координат при данном движении.

Подставив это решение в исходное уравнение, получим

$$(C - \omega^2 A)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Так как все амплитуды искомого колебания не должны обращаться в нуль, то, сделав замену $\mu = \omega^2$, получим

$$det(C - \mu A) = 0$$

— **уравнение частот.**

Далее будем предполагать, что среди решений уравнения частот нет кратных корней, а сами решения ненулевые.

Утверждение: *все корни $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ уравнения частот положительные и вещественные.*

Доказательство

Рассмотрим произвольное решение μ_i. Для него выполняется

$$C\overrightarrow{u_i} - \mu_i A\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$$

Допустим, что $\mu_i \in \mathbb{C}$, тогда и $\overrightarrow{u_i} \in \mathbb{C}$, тогда, введя обозначение $\overrightarrow{u_i}^* = \overline{\overrightarrow{u_i}}^T$ — комплексно сопряженный к $\overrightarrow{u_i}$ и транспонированный вектор, получим

$$\mu_i = \frac{\overrightarrow{u_i^*} C\overrightarrow{u_i}}{\overrightarrow{u_i^*} A\overrightarrow{u_i}}$$

Но если μ_i — корень, то и комплексно сопряженный к нему $\overline{\mu_i}$ (с амплитудным вектором $\overrightarrow{u_i}^*$) — тоже. Но

$$\overline{\mu_i} = \frac{\overrightarrow{u_i} C \overrightarrow{u_i^*}}{\overrightarrow{u_i} A \overrightarrow{u_i^*}}$$

Матрицы A и C симметрические и вещественные, поэтому $\overline{\mu_i} = \mu_i$.

Утверждение доказано.

1.8.2 Свойства амплитудных векторов. Использование симметрии системы для нахождения мод колебаний.

Отметим два свойства амплитудных векторов.

Свойство 1:

$$\left.\overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j}\right|_{i \neq j} = 0$$

Доказательство

Подставим в уравнения Лагранжа 2 амплитудных вектора $\overrightarrow{u_i}$ и $\overrightarrow{u_j}$ с соответствующими корнями μ_i и μ_j:

$$C\overrightarrow{u_i} - \mu_i A \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$$

$$C\overrightarrow{u_j} - \mu_j A \overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{0}$$

Домножим первое уравнение на $\overrightarrow{u_j}^T$, а второе — на $\overrightarrow{u_i}^T$ слева и вычтем из одного другое, учитывая, что матрицы C и A симметрические:

$$\overrightarrow{u_j}^T C \overrightarrow{u_i} - \mu_i \overrightarrow{u_j}^T A \overrightarrow{u_i} = 0$$

$$\overrightarrow{u_i}^T C \overrightarrow{u_j} - \mu_j \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j} = 0$$

$$(\mu_i - \mu_j)\, \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j} = 0$$

Так как мы предполагаем, что $i \neq j$ и среди решений нет кратных корней, то

$$\overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j} = 0$$

Свойство доказано.

Свойство 2: *амплитудные векторы линейно независимы.*

Доказательство

Если амплитудные векторы линейно независимы, то их линейная комбинация обращается в нулевой вектор только когда все коэффициенты ν_i равны нулю:

$$\nu_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \nu_n \overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$$

Покажем, что произвольно выбранный коэффициент ν_i равен нулю. Домножим уравнение на $\overrightarrow{u_i}^T A$ слева:

$$\nu_1 \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_1} + \ldots + \nu_i \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_i} + \ldots + \nu_n \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_n} = 0$$

Из свойства 1 получаем:

$$\nu_i \underbrace{\overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_i}}_{>0} = 0$$

Так как мы предполагаем, что среди решений нет нулевых, то из последнего уравнения $\nu_i = 0$. В силу произвольности выбора ν_i, получаем, что амплитудные векторы линейно независимы по определению.

Свойство доказано.

По сути мы доказали, что общее решение уравнений Лагранжа вблизи положения равновесия косервативной системы имеют вид

$$\overrightarrow{q}(t) = \sum C_i \overrightarrow{u_i} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{1.1}$$

Так как амплитудный вектор характеризует взаимосвязь изменений обобщенных координат, то для нахождения амплитудных векторов можно воспользоваться симметрией системы.

Рассмотрим пример. Два одинаковых груза массы m, связанных между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости k каждая, совершают малые колебания по гладкой горизоантальной направляющей. Оба груза могут двигаться только по прямой, поэтому система имеет 2 степени свободы. Из симметрии системы легко увидеть 2 возможных движения системы:

1. оба груза всегда движутся в одном направлении, при этом центральная пружина неподвижна. Тогда

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Оба груза всегда движутся в противоположных направлениях, то есть когда центральная пружина сжата, крайние расжаты, и наоборот. При этом

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Зная амплитудные векторы, собственные частоты находятся из уравнения частот. Отметим, что если известны все амплитудные векторы кроме одного, то его можно найти, пользуясь первым свойством амплитудных векторов.

Общее решение находится из (1.1).

1.8.3 Главные (нормальные) координаты. Случай кратных корней.

Выполним нормировку амплитудных векторов:

$$\text{если} \quad \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_i} = m_i > 0, \quad \text{то} \quad \overrightarrow{u_i} \to \frac{\overrightarrow{u_i}}{\sqrt{m_i}}$$

Теперь свойство A-ортогональности векторов (первое свойство амплитудных векторов) можно записать в виде

$$\overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Рассмотрим преобразование

$$\overrightarrow{q} = U\overrightarrow{\theta}, \qquad U = ||\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}||, \qquad \overrightarrow{u_i}^T A \overrightarrow{u_j} = \delta_{ij}$$

Теперь в новом базисе с учетом ортогональности

$$T = \frac{1}{2}\dot{\overrightarrow{q}}^T A \dot{\overrightarrow{q}} = \frac{1}{2}\dot{\overrightarrow{\theta}}^T \underbrace{U^T A U}_{E} \dot{\overrightarrow{\theta}}$$

Вековое уравнение

$$C\overrightarrow{u_i} - \mu_i A\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$$

домножим слева на проивзвольный транспонированный амплитудный вектор, отличный от $\overrightarrow{u_i}$:

$$\overrightarrow{u_j}^T C\overrightarrow{u_i} - \mu_i \underbrace{\overrightarrow{u_j}^T A\overrightarrow{u_i}}_{\delta_{ij}} = \overrightarrow{0},$$

откуда

$$\overrightarrow{u_j}^T C\overrightarrow{u_i} = \mu_i \delta_{ij}$$

и

$$\Pi = \frac{1}{2}\overrightarrow{q}^T C\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\theta}^T \underbrace{U^T C U}_{diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \overrightarrow{\theta}$$

С учетом видов кинетической и потенциальной энергий в новом базисе, уравнения Лагранжа примут вид

$$\ddot{\theta}_i + \mu_i \theta_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где θ_i — **главные (нормальные) координаты**.

Существует теорема линейной алгебры о приведении двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена:

$$\exists U: \quad \overrightarrow{q} = U\overrightarrow{\theta}: \quad U^T A U = E, \quad U^T C U = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

поэтому всегда возможен переход к нормальным координатам, в том числе в случае кратных корней.

Отметим, что если есть нулевые корни, то решение уравнений Лагранжа при использованном нами линейном приближении кинетической и потенциальной энергий не всегда корректно описывает поведение системы.

1.9 Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

Пусть колебательная система подвержена действию внешней силы, зависящей от времени. При этом до действия этой силы, считаем, что на систему, помимо потенциальных сил, действовали внешние силы $\overrightarrow{\tilde{Q}}$, зависящие от обобщенных скоростей. Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{Q}(t) + \overrightarrow{\tilde{Q}} = \overrightarrow{Q}(t) - B\dot{\overrightarrow{q}},$$

где $\overrightarrow{\tilde{Q}} = -B\dot{\overrightarrow{q}}$ — строго диссипативна. Действительно,

$$N = -\dot{\overrightarrow{q}}^T B\dot{\overrightarrow{q}} < 0,$$

поэтому положение равновесия $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ в системе

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + B\dot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$$

асимптотически устойчиво по обобщению теоремы Лагранжа-Дирихле на диссипативные системы. Здесь

$$B = -\frac{\partial \overrightarrow{\tilde{Q}}}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}}\bigg|_{\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}}$$

— матрица диссипативных сил.

Решение исходного уравнения ищут в виде

$$\overrightarrow{q}(t) = \underbrace{\overrightarrow{q}^{0}(t)}_{\text{общее решение}} + \underbrace{\overrightarrow{q}^{*}(t)}_{\text{частное решение}}$$

Общее решение однородной системы $\overrightarrow{q}^{0}(t)$ называют переходным процессом, так как из определения асимптотической устойчивости

$$\overrightarrow{q}^{0}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \overrightarrow{0},$$

Будем далее рассматривать установившееся движение, не учитывая тем самым переходный процесс. При таком рассмотрении имеет место принцип суперпозиции: если

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + B\dot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{Q_1}(t), \quad \overrightarrow{q_1}(t) \text{ — решение},$$

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + B\dot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{Q_2}(t), \quad \overrightarrow{q_2}(t) \text{ — решение},$$

то для композиции этих движений

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + B\dot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \alpha_1\overrightarrow{Q_1}(t) + \alpha_2\overrightarrow{Q_2}(t), \quad \alpha_1\overrightarrow{q_1}(t) + \alpha_2\overrightarrow{q_2}(t) \text{ — решение}$$

Рассмотрим гармоническое воздействие: $\overrightarrow{Q}(t) = \overrightarrow{p}\cos\omega t$. Подставим новое выражение для силы в уравнение движения и поставим уравнению движения в соответствие его комплексную форму:

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + B\dot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}\cos\omega t \to A\ddot{\hat{\overrightarrow{q}}} + B\dot{\hat{\overrightarrow{q}}} + C\hat{\overrightarrow{q}} = \overrightarrow{p}e^{i\omega t} = \\ = \overrightarrow{p}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

Из принципа суперпозиции непосредственно следует, что

$$\overrightarrow{q}(t) = \mathrm{Re}\,\hat{\overrightarrow{q}}(t)$$

$\hat{\overrightarrow{q}}(t)$ ищется в виде

$$\hat{\overrightarrow{q}}(t) = \overrightarrow{h}\,e^{i\omega t}$$

Теперь уравнение движения примет вид

$$\underbrace{\left(-\omega^2 A + i\omega B + C\right)}_{D(\omega)}\overrightarrow{h} = \overrightarrow{p}$$

Матрица $D(\omega)$ невырождена, так как характеристические корни всегда имеют действительную часть. Тогда

$$\overrightarrow{h} = \underbrace{D^{-1}(\omega)}_{W(\omega)}\overrightarrow{p}$$

$$\hat{\overrightarrow{q}}(t) = W(\omega)\overrightarrow{p}\,e^{i\omega t}$$

$$\hat{q}_i(t) = \sum w_{ij}(\omega) p_j e^{i\omega t},$$

где

$$w_{ij}(\omega) = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}{\det D},$$

— **амплитудно-фазовая характеристика**, показывающая отклик i-ой координаты при возбуждени по j-ой, где Δ_{ij} — алгебраическое дополнение.

Преобразуем полученное решение:

$$\hat{q}_i(t) = \sum \underbrace{|w_{ij}(\omega)|}_{R_{ij}} p_j \exp\left(i\left(\omega t + \underbrace{\arg w_{ij}(\omega)}_{\psi_{ij}}\right)\right),$$

где R_{ij} и ψ_{ij} — соответственно **амплитудно- и фазово-частотная характеристики**.

Рассмотрим систему без диссипации:

$$A\ddot{\overrightarrow{q}} + C\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}\cos\omega t$$

В системе без диссипации нет переходного процесса, поэтому

$$\overrightarrow{q}(t) = \overrightarrow{q}^*(t)$$

Если воздействие периодическое, то удобно перейти к нормальным координатам

$$\overrightarrow{q} = U\overrightarrow{\theta}$$

$$U^T A U = E$$

$$U^T C U = \Lambda = diag(\omega_i^2)$$

$$AU\ddot{\overrightarrow{\theta}} + CU\overrightarrow{\theta} = \overrightarrow{Q}(t)$$

Домножим последнее уравнение на U^T слева:

$$\ddot{\overrightarrow{\theta}} + \Lambda\overrightarrow{\theta} = U^T\overrightarrow{Q}(t),$$

где $U^T\overrightarrow{Q}(t) = \overrightarrow{\Theta}(t)$ — **обобщенная сила в нормальных координатах**.

Если обобщенная сила периодическая и

$$\ddot{\theta}_i + \omega_i^2\theta_i = p_i\cos\omega t,$$

то частное решение ищется в виде

$$\theta_i = \frac{p_i}{w_i^2 - w^2}\cos\omega t, \quad \omega \neq \omega_i$$

$$\theta_i = \frac{p_i}{2\omega_i} t \sin \omega_i t, \quad \omega = \omega_i$$

Второй случай соответствует **явлению резонанса**, когда частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы. Из вида решения видно, что в случае резонанса, амплитуда колебаний по соответствующей нормальной координате неограниченно растет, а по остальным координатам будут наблюдаться гармонические колебания на частоте вынуждающей силы. Поэтому амплитудно-частотная характеристика при гармоническом воздействии имеет разрывы второго рода на всех собственных частотах системы.

Если система подвержена действию периодической, но не гармонической внешней силы, то нужно разложить эту силу в ряд Фурье. Теперь внешняя сила представлена в виде суммы гармонических колебаний. Каждая из полученных гармонических сил вызывает независимое вынужденное колебание в связи с принципом суперпозиции. Поэтому следует для каждой гармонической силы найти решение, используя амплитудно-фазовую характеристику, а затем найти искомое решение в виде суммы уже найденных.

Если внешняя сила не является периодической, то вместо разложения в ряд Фурье нужно использовать интеграл Фурье.

Глава 2

Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты.

2.1 Основы Гамильтоновой механики.

2.1.1 Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона.

Преобразование $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ называется **потенциальным преобразованием** или **преобразованием Лежандра**, если у него существует потенциал, то есть

$$\exists V(\overrightarrow{x}) : \ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \nabla V(\overrightarrow{x})$$

Потенциал $V(\overrightarrow{x})$ **невырожден**, если его гессиан не равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \neq 0$$

Потенциал $V(\overrightarrow{x})$ **сильно невырожден**, если исходное преобразование гладко и взаимно однозначно разрешимо в обратную сторону, то есть

$$\exists\overrightarrow{\varphi}:\ \overrightarrow{x}=\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{y})$$

Теорема Донкина: *если преобразование потенциально, то обратное преобразование также потенциально, его потенциал невырожден и задается формулой*

$$W(\overrightarrow{y})=\left[\sum x_i y_i - V(\overrightarrow{x})\right]_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{y})}$$

Доказательство

Продифференцируем написанную формулу по y_k:

$$\frac{\partial W}{\partial y_k}=x_k+\sum y_i\frac{\partial x_i}{\partial y_k}-\sum\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

Но

$$\overrightarrow{y}=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})=\nabla V(\overrightarrow{x})\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x_i}=y_i,$$

поэтому в продифференцированной формуле одинаковые слагаемые под знаками суммирования. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial y_k}=x_k=\varphi_k(\overrightarrow{y}),$$

то есть преобразование $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{y})$ потенциально.

Теорема доказана.

Выпишем уравнения Лагранжа для системы с **потенциальными** силами:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

Введем понятие **обобщенного импульса**:

$$p_i=\frac{\partial L(\overrightarrow{q},\dot{\overrightarrow{q}},t)}{\partial\dot{q}_i}$$

Введем **функцию Гамильтона** или **гамильтониан**:

$$\mathcal{H} = \left[\sum p_i \dot{q}_i - L\right]_{\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)},$$

где $\{\vec{q}, \vec{p}, t\}$ — **переменные Гамильтона**.

Заметим аналогию между преобразованием Лежандра и обобщенным импульсом:

$$\begin{gathered}
\dot{\vec{q}} \to \vec{x} \\
\vec{p} \to \vec{y} \\
L \to V \\
\mathcal{H} \to W
\end{gathered}$$

Теперь очевидно: обобщенный импульс — потенциальное преобразование, где гамильтониан играет роль потенциала обратного преобразования. Обратное преобразование существует, так как выражения для обобщенного импульса разрешимы относительно $\dot{\vec{q}}_i$ в силу основной теоремы Лагранжева формализма:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} \right\| \neq 0$$

Из выражения для гамильтониана

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Из определения обобщенного импульса, для уравнений Лагранжа получим:

$$\frac{d}{dt} p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Возьмем производную по обобщенной координате от гамильтониана:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} = \sum p_j \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Теперь можно выписать уравнения движения в фазовых переменных:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

— **канонические уравнения Гамильтона**.

2.1.2 Функция Гамильтона для консервативной системы.

Исследуем структуру гамильтониана. Для этого напомним сначала структуру лагранжиана:

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

Воспользуемся теперь теоремой Эйлера об однородных функциях, которая гласит: если

$$f(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda^k f(\overrightarrow{x}),$$

то

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f(\overrightarrow{x})$$

Для функции Гамильтона, учитывая определение обобщенного импульса и то, что нулевая форма кинетической энергии и потенциальная энергия не зависят явно от обобщенной скорости, имеем:

$$\mathcal{H} = \sum p_i\dot{q}_i - L = \sum \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum \frac{\partial T_2}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - L =$$
$$= (2T_2 + T_1) - L = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H} = T_2 - T_0 + \Pi$$

Для консервативной системы $T = T_2$, откуда

$$\mathcal{H} = T + \Pi$$

— **физический смысл функции Гамильтона для консервативной системы**.

2.2 Первые интегралы гамильтоновых систем.

Рассмотрим решение $\overrightarrow{x}(t_0, \overrightarrow{x_0})$ системы $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{x})$. Функция $G(t, \overrightarrow{x})$ — первый интеграл рассматриваемой системы, если

$$G(t, \overrightarrow{x}(t, \overrightarrow{x_0})) = const$$

Напомним также критерий первого интеграла:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$$

2.2.1 Скобки Пуассона.

Для гамильтоновых систем

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases},$$

у которых $G = G(t, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$, крититерий первого интеграла имеет вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \underbrace{\sum \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)}_{\{\mathcal{H}, G\}} = 0,$$

где $\{\mathcal{H}, G\}$ — **скобка Пуассона**. Окончательно, критерий первого интеграла для гамильтоновых систем получен в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{\mathcal{H}, G\} = 0$$

Отметим четыре свойства скобок Пуассона.

1. Антикоммутативность: $\{H, G\} = -\{G, H\}$

2. Линейность: $\{\alpha H + \beta F, G\} = \alpha\{H, G\} + \beta\{F, G\}$

3. Дифферецирование: $\dfrac{\partial\{H, G\}}{\partial\alpha} = \left\{\dfrac{\partial H}{\partial\alpha}, G\right\} + \left\{H, \dfrac{\partial G}{\partial\alpha}\right\}$

4. Тождество Пуассона: $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

Все четыре свойства проверяются прямой подстановкой в определение. Тем не менее, докажем альтернативным методом тождество Пуассона.

Доказательство

1) Очевидно, конструкция вида $\{*, \{*, *\}\}$ содержит вторые производные последних двух функций, что проверяется прямой подстановкой в определение.

2) F, G, H входят в тождество Пуассона симметрично, поэтому достаточно доказать, что в тождество не входит, например, F, тогда свойство будет доказано.

Заметим теперь, что скобка Пуассона $\{H, F\}$ может быть представлена как действие на функцию F дифференциального оператора:

$$\{H, F\} = U_H F, \quad U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Теперь, пользуясь свойством антикоммутативности, имеем

$$\begin{aligned}\{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} &= -\{H, \{G, F\}\} + \{G, \{H, F\}\} = \\ &= -U_H U_G F + U_G U_H F = (\underbrace{U_G U_H - U_H U_G}_{[U_H, U_G]})F,\end{aligned}$$

где $[U_H, U_G]$ — **коммутатор операторов**.

Очевидно, что для

$$U = \sum a_i(\overrightarrow{x})\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad V = \sum b_i(\overrightarrow{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Коммутатор

$$[U, V] = \sum \left[(Ub_i) - (Va_i)\right]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

— оператор первого порядка. Поэтому и $[U_G, U_H]$ — оператор первого порядка. Тогда левая часть тождества Пуассона не содержит вторых производных функции F.

Свойство доказано.

2.2.2 Теорема Якоби-Пуассона.

Теорема Якоби-Пуассона: *Если F, G — первые интегралы системы с функцией Гамильтона $\mathcal{H}$, то $\{F, G\}$ — первый интеграл.*

Доказательство

F, G — первые интегралы, поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{\mathcal{H}, F\} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} + \{\mathcal{H}, G\} = 0$$

Покажем, что $\{F, G\}$ — первый интеграл, то есть

$$\frac{\partial\{F, G\}}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0$$

Воспользуемся свойством дифференцирования и тем, что F и G — первые интегралы:

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = -\{\{\mathcal{H}, F\}, G\} + \{F, -\{\mathcal{H}, G\}\} +$$
$$+\{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = \{G, \{\mathcal{H}, F\}\} + \{F, \{G, \mathcal{H}\}\} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0$$

Теорема доказана.

Пользуясь теоремой Якоби-Пуассона, можно получить любое число первых интегралов, зная только два. Но это не значит, что они будут независимыми.

Первые интегралы $G_1, \ldots, G_k$ независимы, если не существует функции Φ такой, что

$$\Phi(G_1(\overrightarrow{x}), \ldots, G_k(\overrightarrow{x})) = 0$$

Пусть $\{G_i\}$ зависимы, то есть $\Phi(G_1(\overrightarrow{x}), \ldots, G_k(\overrightarrow{x})) = 0$. Но тогда

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial G_j(\overrightarrow{x})} \nabla G_j(\overrightarrow{x}) = 0$$

Теперь определение независимости первых интегралов можно переформулировать.

Если $RgM = k$, где $M = \|\nabla G_1, \ldots, \nabla G_k\|$, то $\{G_i\}$ независимы. Если $RgM < k$, то первые интегралы зависимы.

2.2.3 Типичные первые интегралы Гамильтоновых систем.

Возьмем полный дифференциал от функции Гамильтона и преобразуем его, пользуясь уравнениями Гамильтона:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Из полученного выражения непосредственно следует, что если гамильтониан не зависит явно от времени, то сам гамильтониан является первым интегралом. Система, в которой функция Гамильтона не зависит явно от времени, называется **обобщенно консервативной**.

Пусть в системе есть циклические координаты, и, например, координата q_1 — циклическая, то есть эта координата не входит в лагранжиан. При выводе уравнений Гамильтона было получено, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i},$$

что в частности справедливо и для циклической координаты. Производная функции Лагранжа по циклической координате равна нулю, но тогда и производная функции Гамильтона по этой кординате равна нулю. То есть, если координата не входит в лагранжиан, то и в гамильтониан она также не входит.

Пусть для некоторой системы функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t)$$

φ_i — первые интегралы, что легко показать, воспользовавшись критерием первого интеграла для гамильтоновых систем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \varphi_i\} = \{\mathcal{H}, \varphi_i\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} = \\ = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i}\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} = 0\end{aligned}$$

Пусть теперь гамильтониан имеет вид "матрешки":

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left[t, f_1(q_1, p_1, f_2(\ldots f_n(q_n, p_n))\ldots)\right]$$

Как и в предыдущем случае доказывается, что f_n — первый интеграл. Но тогда

$$f_{n-1} = f_{n-1}(q_{n-1}, p_{n-1}, \underbrace{f_n}_{const}),$$

то есть f_{n-1} зависит от f_n как от константы, поэтому как и для f_n доказывается, что f_{n-1} — первый интеграл. Теперь по индукции несложно доказать, что все функции f_i — первые интегралы.

2.2.4 Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат.

Вернемся теперь к системе с циклическими координатами. Как было выяснено, если, например, q_1 — циклическая координата, то она не входит в гамильтониан, но тогда $p_1 = const$, так как из уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = 0$$

Теперь уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}\left[q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t\right]}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}\left[q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t\right]}{\partial q_i} \end{cases}$$

Полученная система из $2n-2$ уравнений замкнута относительно своих переменных, то есть порядок системы уравнений Гамильтона понизился на 2 единицы. При этом циклическая координата q_1 находится из уравнения

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}$$

2.2.5 Понижение порядка уравнений Гамильтона для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Рассмотрим теперь обобщенно консервативную систему. В ней, как было установлено, гамильтониан является первым интегралом:

$$\mathcal{H}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}) = h = const$$

Выразим из этого уравнения обобщенный импульс p_1 в предположении, что гамильтониан явно зависит от p_1:

$$p_1 = -K(\overrightarrow{q}, p_2, \ldots, p_n, h)$$

Подставив этот обобщенный импульс обратно в гамильтониан, получим тождество

$$\mathcal{H}\,[\overrightarrow{q}, -K, p_2, \ldots, p_n] \equiv h$$

Продифференцировав полученное тождество по переменным q_i, p_i, $i \in [2, n]$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \left(-\dfrac{\partial K}{\partial q_i} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \left(-\dfrac{\partial K}{\partial p_i} \right) = 0 \end{cases}$$

Теперь уравнения Гамильтона при $i \in [2, n]$ можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \dfrac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_1 \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \dfrac{\partial K}{\partial q_i} = \dot{q}_1 \dfrac{\partial K}{\partial q_i}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dq_1} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dq_1} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_i} \end{cases}$$

— **уравнения Уиттекера**.

Полученная система из $2n - 2$ уравнений замкнута относительно своих переменных. При этом обобщенная координата q_1 играет роль времени.

Таким образом, порядок уравнений Гамильтона понижается на 2 единицы в случае обобщенно консервативной системы.

Закон движения исходной гамильтоновой системы в зависимости от времени можно получить, подставив в гамильтониан в уравнении Гамильтона для первой координаты

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}$$

решения уравненй Уиттекера и подставив $p_1 = -K(\overrightarrow{q}, p_2, \ldots, p_n, h)$. Из полученного уравнения находится обобщенная координата q_1 в зависимости от времени, после чего полученное выражение для q_1 подставляется в решения уравнений Уиттекера и в выражение для обобщенного импульса p_1, тем самым выражая их через время.

2.3 Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону.

Действием по Гамильтону называется функционал

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)dt,$$

ставящий произвольной дифференцируемой кривой (траектории) $\overrightarrow{q}(t)$ число S.

Возьмем некоторую траекторию $\overrightarrow{q}(t)$ и **проварьируем** ее, то есть вместо исходной траектории будем рассматривать семейство траекторий $\overrightarrow{q}(t, \alpha)$, зависящих от некоторого параметра α. Семейство задается так, что, во-первых, $\overrightarrow{q}(t, 0) = \overrightarrow{q}(t)$, а во-вторых, должны быть указаны начальная ($\overrightarrow{q}(t_1(\alpha), \alpha)$) и конечная ($\overrightarrow{q}(t_2(\alpha), \alpha)$) точки для каждого члена семейства.

Вычислим действие по Гамильтону для каждого члена семейства варьирующейся траектории

$$S(\alpha) = \int\limits_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} L(\overrightarrow{q}(\alpha), \dot{\overrightarrow{q}}(\alpha), t)dt$$

и построим **вариацию** действия по Гамильтону — дифференциал функционала по α:

$$\delta S = S'_\alpha(\alpha)\delta\alpha$$

Преобразуем полученное выражение, подставляя определение действия по Гамильтону:

$$\delta S = L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Здесь

$$dt = t'_\alpha(\alpha)\delta\alpha, \quad \delta q_i = \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha, \quad \delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha$$

Заметим, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right) dt = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= \sum p_i \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

Так как $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}(t,\alpha)$, то выражая δq_i в концевых точках через полный дифференциал, получим для предыдущего выражения

$$\sum p_i \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} = \sum p_i dq_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \left(\sum p_i \dot{q}_i dt_2 - \sum p_i \dot{q}_i dt_1 \right)$$

Теперь для вариации действия окончательно получим

$$\delta S = L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \sum p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \sum p_i dq_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \left(\sum p_i \dot{q}_i dt_2 - \sum p_i \dot{q}_i dt_1 \right) +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \sum p_i dq_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \left(\sum p_i \dot{q}_i - L_2 \right) dt_2 +$$

$$+ \left(\sum p_i \dot{q}_i - L_1 \right) dt_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= \sum p_i dq_i \Big|_{t_1}^{t_2} - H_2 dt_2 + H_1 dt_1 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= \left[\sum p_i dq_i - \mathcal{H} dt \right] \Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

— **полная вариация действия**.

2.4 Вариационный принцип Гамильтона.

Рассмотрим задачу с фиксированными концами, то есть когда начальные и конечные точки членов семейства при варьировании одинаковы:

$$\overrightarrow{q}(t_1, \alpha) = \overrightarrow{q_1}, \quad \overrightarrow{q}(t_2, \alpha) = \overrightarrow{q_2}$$

Выше, при выводе выражения для полной вариации действия, было получено, что

$$\delta S = L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \sum p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

но в задаче с фиксированными концами $dt_2 = dt_1 = \delta q_i = 0$, поэтому в такой задаче полная вариация действия принимает более простой вид

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

Если при некотором α путь (траектория) $\overrightarrow{q}(t, \alpha)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа с заданным лагранжианом L, то такой путь называется **прямым**. Остальные пути называются **окольными**.

Если в поставленной задаче имеется более одного прямого пути, то точки пересечения прямых путей (в том числе и на концах) называются **сопряженными кинетическими фокусами**.

Вариационный принцип Гамильтона: *путь является прямым тогда и только тогда, когда при любом его варьировании в задаче с фиксированными концами, выполняется*

$$\delta S(0) = 0$$

Доказательство

Необходимость

Пусть некоторый путь $\overrightarrow{q}(t)$ — прямой. Проварьируем его при фиксированных концах (теперь $\overrightarrow{q}(t) = \overrightarrow{q}(t, 0)$). Прямой путь удовлетворяет уравнениям Лагранжа с лагранжианом L, поэтому

$$\delta S(0) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{0} \delta q_i dt \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Достаточность

Пусть при произвольном варьировании некоторой траектории

$$\delta S(0) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Так как варьирование, по условию теоремы, произвольное, то есть δq_i — произвольные и независимые, то

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

то есть траектория, которую мы варьировали, удовлетворяет уравнениям Лагранжа, а значит, является прямым путем.

Теоерма доказана.

Если на прямом пути нет кинетических фокусов, то действие по Гамильтону на прямом пути имеет минимум. Поэтому принцип Гамильтона иногда называют **принципом наименьшего действия**.

2.5 Преобразование лагранжиана при замене координат и времени.

Рассмотрим уравнения Лагранжа в некоторой системе $\{\overrightarrow{q}, t\}$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

и сделаем замену переменных $\{\overrightarrow{q}, t\} \to \{\overrightarrow{q}', t'\}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}(\overrightarrow{q}', t') \\ t = t(\overrightarrow{q}', t') \end{cases}$$

Запишем выражение для действия по Гамильтону в старых переменных и выразим его в новых переменных:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)dt = \int\limits_{t'_1}^{t'_2} L\left[\overrightarrow{q}(\overrightarrow{q}', t'), \dot{\overrightarrow{q}}(\overrightarrow{q}', \dot{\overrightarrow{q}}', t'), t(\overrightarrow{q}', t')\right] \frac{dt}{dt'}dt'$$

Здесь

$$\dot{q}_i = \frac{\frac{\partial q_i}{\partial t'} + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}\dot{q}'_j}{\frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_j \frac{\partial t}{\partial q'_j}\dot{q}'_j}, \quad \dot{q}'_j = \frac{dq'_j}{dt'}, \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_j \frac{\partial t}{\partial q'_j}\dot{q}'_j$$

Для образа прямого пути выполняется $\delta S = 0$ (где S выражено в новых переменных), поэтому, в силу принципа Гамильтона, образ прямого пути есть прямой путь, то есть он удовлетворяет уравнениям Лагранжа в новых переменных с новым лагранжианом

$$L' = L\frac{dt}{dt'}$$

Значит, при любой невырожденной замене координат и времени уравнения Лагранжа сохраняют форму, то есть они *ковариантны* по отношению к этой замене.

Отметим, что функция Лагранжа обладает **калибровочной инвариантностью**, а именно, если добавить к функции Лагранжа полную производную по времени от произвольной гладкой функции времени и обобщенных координат, то уравнения Лагранжа не изменятся. Действительно, если

$$L' = L + \frac{d\Phi(t, \overrightarrow{q})}{dt},$$

то

$$S' = S + \Phi(t_2, \overrightarrow{q_2}) - \Phi(t_1, \overrightarrow{q_1}),$$

поэтому

$$\delta S' = \delta S,$$

то есть прямые пути систем с такими Лагранжианами совпадают. Это означает, что зная множество путей, по которым может двигаться система, нельзя однозначно восстановить лагранжиан.

2.6 Основы теории групп Ли.

Произвольное множество G называется **группой**, если

1. На множестве G определена *операция умножения* «$\circ$», которая любым двум элементам $A \in G$, $B \in G$, *взятым в определенном порядке*, ставит в соответствие единственный элемент $C \in G$:

$$A \circ B = C$$

2. Существует *единица группы* E:

$$E \circ A = A \circ E = A \; \forall A \in G$$

3. Для любого $A \in G$ существует *обратный* элемент A^{-1}:

$$A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = E$$

4. Операция умножения на этом множестве *ассоциативна*:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

2.6.1 Понятие группы Ли.

Рассмотрим множество преобразований n-мерного вещественного арифметического пространства в себя:

$$\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a})$$

Переход от одного преобразования к другому осуществляется изменением параметра $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^k$.

Выберем в качестве операции умножения, вводимой на множестве преобразований $\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a})$, композицию двух преобразований, причем: если после преобразования $\overrightarrow{q} \to \overrightarrow{q}'$ с некоторым фиксированным $\overrightarrow{a}$ выполняется преобразование $\overrightarrow{q}' \to \overrightarrow{q}''$ с некоторым фиксированным $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{q}'' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{b}),$$

то, поскольку операция задана так, что она не должна выходить за пределы исходного множества, то должно выполняться

$$\overrightarrow{q}'' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a}), \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{c}),$$

причем понятно, что параметр $\overrightarrow{c}$ связан функционально с параметрами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),$$

где γ — **групповая операция**.

Множество преобразований $\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a})$ называется **группой Ли**, если

1. Операция умножения есть композиция двух преобразований, причем

$$\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a}), \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$$

2. Тождественное преобразование принадлежит рассматриваемому множеству, то есть существует единица группы $\overrightarrow{e}$, размерность которой совпадает с размерностью параметра, такая, что

$$\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{e}) = \overrightarrow{q}$$

3. Для любого $\overrightarrow{a}$ существует обратный элемент $\overrightarrow{a}^{-1}$:

$$\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a}), \overrightarrow{a}^{-1}) = \overrightarrow{q}$$

4. $\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{a})$ — аналитическая функция в некоторой окрестности единицы группы $\overrightarrow{e}$ и произвольной точки $\overrightarrow{q}$.

Понятно, что группа Ли является группой. Действительно, она обладает первыми тремя свойствами группы, а из курса математического анализа известно, что композиция отображений ассоциативна.

Группами Ли являются, например, n-параметрическая группа трансляций ($\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$), преобразования Галилея и Лоренца.

2.6.2 Однопараметрические группы Ли. Теорема единственности.

Здесь и далее будем рассматривать группы Ли с вещественным параметром ($a \in \mathbb{R}$). Такие группы Ли называют однопараметрическими. Сделаем замену переменных $a \to \mu = a - e$. При такой замене тождественному преобразованию соответствует $\mu = 0$ ($\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu = 0) = \overrightarrow{q}$).

Разложим уравнение группы по степеням μ в окрестности $\mu = 0$:

$$\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu) = \overrightarrow{q} + \left.\frac{\partial \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \mu + \ldots,$$

где

$$\left.\frac{\partial \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q})$$

— **ядро группы**.

Теорема единственности: для восстановления группы достаточно знать ее ядро.

Доказательство

Рассмотрим малую вариацию параметра группы, приводящую и к малой вариации точки $\overrightarrow{q}$, и воспользуемся сначала третьим, а затем первым свойствами группы Ли:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q}' + \delta \overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu + \delta\mu) = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}', \mu^{-1}), \mu + \delta\mu) = \\ = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}', \gamma(\mu^{-1}, \mu + \delta\mu)) \end{aligned}$$

Разложим групповую операцию в ряд по степеням $\delta\mu$:

$$\gamma(\mu^{-1}, \mu + \delta\mu) = \gamma(\mu^{-1}, \mu) + \left.\frac{\partial \gamma(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2}\right|_{\substack{\mu_1 = \mu^{-1} \\ \mu_2 = \mu}} \delta\mu + \ldots$$

Первое слагаемое обращается в ноль, что непосредственно следует из третьего свойства группы Ли, поэтому обозначив

$$\left.\frac{\partial\gamma(\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_2}\right|_{\substack{\mu_1=\ \mu^{-1}\\ \mu_2=\ \ \mu}} = \Gamma(\mu),$$

получим, раскладывая функцию $\overrightarrow{Q}$ в ряд по $\delta\mu$

$$\overrightarrow{q}' + \delta\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}', \Gamma(\mu)\delta\mu + \ldots) = \overrightarrow{q}' + \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}')\Gamma(\mu)\delta\mu + \ldots$$

Переходя к пределу при $\delta\mu \to 0$, получаем

$$\frac{d\overrightarrow{q}'}{d\mu} = \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}')\Gamma(\mu)$$

Так как параметр произвольный, то группа $\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{Q}(\overrightarrow{q}, \mu)$ может быть получена как решение полученной задачи Коши с начальным условием $\left.\overrightarrow{q}'\right|_{\mu=0} = \overrightarrow{q}$. Единственность решения следует из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Введем замену $\mu \to \tau$, где

$$\tau = \int\limits_0^\mu \Gamma(\mu)d\mu$$

— **канонический параметр**. Теперь найденное дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{d\overrightarrow{q}'}{d\tau} = \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}'), \quad \overrightarrow{q}'(0) = \overrightarrow{q},$$

правая часть которого определяется только ядром группы. Решая полученное уравнение, мы восстанавливаем группу полностью с точностью до указанной замены параметра.

Теорема доказана.

Доказанная теорема означает, что между однопараметрическими группами Ли и автономными дифференциальными уравнениями установлено взаимно однозначное соответствие.

2.6.3 Ряд Ли. Инвариант группы.

Рассмотрим некоторую скалярную функцию $F(\overrightarrow{q})$. В окрестности $\mu = 0$

$$F(\overrightarrow{q}') = F(\overrightarrow{q} + \mu\overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}) + \ldots) = F(\overrightarrow{q}) + \left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \mu + \ldots =$$
$$= F(\overrightarrow{q}) + \mu \sum \eta_i \frac{\partial F}{\partial q_i} + \ldots,$$

где

$$\sum \eta_i \frac{\partial}{\partial q_i} = U$$

— **инфинитезимальный оператор**.

Пусть теперь группа Ли задана через канонический параметр τ:

$$\overrightarrow{q}' = \overrightarrow{q} + \tau\overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}) + \ldots$$

Ей по теореме единственности эквивалентна система

$$\frac{d\overrightarrow{q}'}{d\tau} = \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}')$$

Для исследуемой скалярной функции имеем

$$F(\overrightarrow{q}') = F(\overrightarrow{q} + \tau\overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{q}) + \ldots) \equiv \tilde{F}(\overrightarrow{q}, \tau)$$

Найдем производную от этой функции по параметру:

$$\frac{dF(\overrightarrow{q}')}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i'}\frac{dq_i'}{d\tau} = \sum \eta_i \frac{\partial F}{\partial q_i'} = UF(\overrightarrow{q}')$$

Аналогично

$$\frac{d^2F(\overrightarrow{q}')}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tau^2} = U^2F(\overrightarrow{q}')$$

и так далее. Используя полученные соотношения и раскладывая функцию в ряд Тейлора, получим

$$F(\overrightarrow{q}') = F(\overrightarrow{q},\tau) = F(\overrightarrow{q}) + \tau\frac{\partial F}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} + \ldots =$$
$$= F + \tau UF + \frac{\tau^2}{2!}U^2F + \ldots = e^{\tau U}F(\overrightarrow{q})$$

Полученный ряд называется **рядом Ли**.

Функция $F(\overrightarrow{q})$ называется **инвариантом группы**, если она не изменяется группой:

$$F(\overrightarrow{q}') = F(\overrightarrow{q})$$

Подставляя определение инварианта группы в ряд Ли, получаем эквивалентное определение: $F(\overrightarrow{q})$ — инвариант группы, если

$$UF(\overrightarrow{q}) = 0$$

2.6.4 Дифференциальный и интегральный инварианты группы.

Выясним, как изменяется группой функция $F(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$.

Пусть в пространстве $(\overrightarrow{q}, t)$ действует группа

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q}' &= \overrightarrow{q} + \tau\overrightarrow{\eta}(t, \overrightarrow{q}) + \ldots \\ t' &= t + \tau\xi(t, \overrightarrow{q}) + \ldots, \end{aligned}$$

тогда

$$\dot{\overrightarrow{q}}' = \frac{d\overrightarrow{q}'}{dt'} = \frac{d\overrightarrow{q}'/dt}{dt'/dt} = \frac{\dot{\overrightarrow{q}} + \tau\dot{\overrightarrow{\eta}} + \ldots}{1 + \tau\dot{\xi} + \ldots} = \dot{\overrightarrow{q}} + \tau(\dot{\overrightarrow{\eta}} - \dot{\overrightarrow{q}}\dot{\xi}) + \ldots,$$

где последнее преобразование есть применение формулы Тейлора в окрестности $\tau = 0$. Теперь видно, что можно считать, что группа действует не в пространстве $(t, \overrightarrow{q})$, а в пространстве $(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ с ядрами $\overrightarrow{\eta}$, ξ и $\overrightarrow{\zeta} = \dot{\overrightarrow{\eta}} - \dot{\overrightarrow{q}}\dot{\xi}$. Продолженная таким образом группа называется **группой первого продолжения**. Оператор этой группы

$$\overset{(1)}{U} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \sum \eta_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum \left(\dot{\eta}_i - \dot{q}_i \dot{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$$

Функция $F(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ называется **дифференциальным инвариантом группы**, если она не меняется под действием этой группы:

$$F(\overrightarrow{q}', \dot{\overrightarrow{q}}', t') = F(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$$

Используя ряд Ли, получаем эквивалентное определение: $F(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ — инвариант группы, если

$$\overset{(1)}{U} F = 0$$

Рассмотрим функционал

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t) dt$$

Пусть в пространстве $(\overrightarrow{q}, t)$ действует та же группа, как и при исследовании функции $F(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$. Рассматриваемый функционал называется **интегральным инвариантом группы**, если он не меняется под действием этой группы:

$$S' = \int\limits_{t_1'}^{t_2'} \Phi(\overrightarrow{q}', \dot{\overrightarrow{q}}', t') dt' = S$$

Рассмотрим малое приращение параметра группы:

$$S'(\tau+\delta\tau)=\int\limits_{t'_1(\tau+\delta\tau)}^{t'_2(\tau+\delta\tau)} \Phi\left[\overrightarrow{q}'(\tau+\delta\tau),\dot{\overrightarrow{q}}'(\tau+\delta\tau),t'(\tau+\delta\tau)\right]dt'(\tau+\delta\tau)$$

Разложим $\overrightarrow{q}'(\tau+\delta\tau)$ и $t'(\tau+\delta\tau)$ по степеням $\delta\tau$

$$\overrightarrow{q}'(\tau+\delta\tau)=\overrightarrow{q}'(\tau)+\frac{d\overrightarrow{q}'}{d\tau}\delta\tau+\dots$$
$$t'(\tau+\delta\tau)=t'(\tau)+\frac{dt'}{d\tau}\delta\tau+\dots$$

и выполним в полученном интеграле замену переменнных

$$\overrightarrow{q}'(\tau+\delta\tau)\to\overrightarrow{q}'(\tau),\quad t'(\tau+\delta\tau)\to t'(\tau)$$

Переходя к группе первого продолжения и учитывая, что по теореме единственности

$$\frac{d\overrightarrow{q}'}{d\tau}=\overrightarrow{\eta}(t',\overrightarrow{q}'),\quad \frac{dt'}{d\tau}=\xi(t',\overrightarrow{q}'),$$

получим

$$S'=\int\limits_{t'_1(\tau)}^{t'_2(\tau)}\Phi\left[\overrightarrow{q}'+\overrightarrow{\eta}\delta\tau+\dots,\dot{\overrightarrow{q}}'+\left(\dot{\overrightarrow{\eta}}-\dot{\xi}\dot{\overrightarrow{q}}\right)\delta\tau+\dots,t'(\tau)+\xi\delta\tau+\dots\right]\times$$
$$\times d(t'(\tau)+\xi\delta\tau+\dots),$$

где $S'=S'(\tau+\delta\tau)$. Используя ряд Ли, а затем раскладывая получившееся выражение по степеням $\delta\tau$, получаем

$$S'=\int\limits_{t'_1(\tau)}^{t'_2(\tau)}\left[\Phi+\delta\tau\overset{(1)}{U}\Phi+\dots\right]d(t'(\tau)+\xi\delta\tau+\dots)=$$
$$=\int\limits_{t'_1(\tau)}^{t'_2(\tau)}\Phi dt'+\delta\tau\int\limits_{t'_1(\tau)}^{t'_2(\tau)}\left[\overset{(1)}{U}\Phi+\frac{d\xi}{dt'}\Phi\right]dt'+\dots$$

Если рассматриваемый функционал — интегральный инвариант, то при действии на него группы с каноническим параметром τ, функционал, очевидно, не должен от него зависеть, так как исходный функционал от него не зависит. Тогда

$$\frac{dS'(\tau+\delta\tau)}{d\tau} = \lim_{\delta\tau\to 0}\frac{S'(\tau+\delta\tau)-S'(\tau)}{\delta\tau} = \int\limits_{t'_1(\tau)}^{t'_2(\tau)} \left[\overset{(1)}{U}\,\Phi + \frac{d\xi}{dt'}\Phi\right] dt' = 0,$$

откуда получаем, что функционал — интегральный инвариант группы, если

$$\overset{(1)}{U}\,\Phi + \frac{d\xi}{dt'}\Phi = 0$$

2.7 Теорема Эмми Нётер.

Теорема Эмми Нётер: *если существует группа Ли*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q}' &= \overrightarrow{q} + \tau\overrightarrow{\eta}(t,\overrightarrow{q}) + \ldots \\ t' &= t + \tau\xi(t,\overrightarrow{q}) + \ldots, \end{aligned}$$

для которой действие по Гамильтону

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)dt,$$

— интегральный инвариант, то у системы есть первый интеграл

$$\sum \eta_i(\overrightarrow{q},t)p_i - \xi(\overrightarrow{q},t)\mathcal{H}(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p},t) = const$$

Доказательство

Действие по Гамильтону — интегральный инвариант, поэтому

$$\overset{(1)}{U} L + \frac{d\xi}{dt'} L = 0$$

Раскрывая оператор группы, получим

$$\xi \frac{\partial L}{\partial t} + \sum \eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum \left(\dot{\eta}_i - \dot{\xi} \dot{q}_i \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\xi} L = 0$$

Вспомним выражение для гамильтониана

$$\mathcal{H} = \left[\sum p_i \dot{q}_i - L \right]_{\vec{\dot{q}} = \vec{\dot{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)},$$

и возьмем от него полную производную по времени

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$$

$$= \left[\sum p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \right]_{\vec{\dot{q}} = \vec{\dot{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Из уравнений Лагранжа (напомним, что канонические уравнения Гамильтона справедливы только для систем с **потенциальными** силами)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

Теперь условие инвариантности можно записать в виде

$$-\xi \dot{\mathcal{H}} + \sum \eta_i \dot{p}_i + \sum \dot{\eta}_i p_i - \sum \dot{\xi} \dot{q}_i p_i + \dot{\xi} L =$$
$$= -\xi \dot{\mathcal{H}} + \sum \eta_i \dot{p}_i + \sum \dot{\eta}_i p_i - \mathcal{H} \dot{\xi},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(\sum p_i\eta_i - \xi\mathcal{H}\right) = 0,$$

то есть

$$\sum p_i\eta_i - \xi\mathcal{H} = const$$

Теорема доказана.

Группа, по отношению к которой действие по Гамильтону — интегральный инвариант, называется **группой симметрии системы**.

Используя теорему Эмми Нётер, можно найти первые интегралы системы. Например, взяв $\xi = -1$, $\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{0}$, можно получить закон сохранения полной механической энергии консервативной системы.

2.8 Интегральные инварианты Пуанкаре-Картана и Пуанкаре.

Рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)$ и выберем на нем произвольный контур (замкнутую кривую)

$$C_1 = \{\overrightarrow{q_1}(\alpha), \overrightarrow{p_1}(\alpha), t_1(\alpha)\},\ \alpha \in [0,1],\ C_1(\alpha = 0) = C_1(\alpha = 1)$$

Из каждой точки кривой C_1, как из начальной, проведем соответствующий прямой путь. Он однозначно определяется из канонических уравнений Гамильтона при заданной начальной точке. Совокупность таких путей задает **трубку прямых путей**. На этой трубке произвольно выберем второй контур

$$C_2 = \{\overrightarrow{q_2}(\alpha), \overrightarrow{p_2}(\alpha), t_2(\alpha)\},\ \alpha \in [0,1],\ C_2(\alpha = 0) = C_2(\alpha = 1),$$

охватывающий контур и имеющий с каждой образующей лишь одну общую точку. Считаем параметры α, параметризующие контуры, **согласованными**, то есть при каждом значении α соответствующие точки контуров C_1 и C_2 расположены на одном и том же прямом пути. Запишем вариацию действия по Гамильтону для этого семейства и учтем, что все пути исследуемого семейства — прямые:

$$\delta S(\alpha) = \left[\sum p_i dq_i - \mathcal{H}dt\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt =$$

$$= \left[\sum p_i dq_i - \mathcal{H}dt\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Проинтегрируем полученное выражение по α в пределах от 0 до 1. Учитывая, что на каждом из контуров при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ задаются одни и те же точки, получим

$$\int\limits_0^1 \delta S(\alpha) = \int\limits_0^1 S'(\alpha)d\alpha = S(1) - S(0) = 0$$

$$\int\limits_0^1 \sum p_{i2}(\alpha)dq_{i2}(\alpha) - \mathcal{H}dt_2(\alpha) - \int\limits_0^1 \sum p_{i1}(\alpha)dq_{i1}(\alpha) + \mathcal{H}dt_1(\alpha) = 0$$

$$\oint\limits_{C_1} \sum p_i dq_i - \mathcal{H}dt = \oint\limits_{C_2} \sum p_i dq_i - \mathcal{H}dt$$

Интегральное выражение

$$J_{\text{ПК}} = \oint\limits_{C} \sum p_i dq_i - \mathcal{H}dt$$

носит название **интегрального инварианта Пуанкаре-Картана**.

Если контуры **изохронные**, то есть образованы сечениями трубки плоскостями $t = const$, то $dt = 0$ и инвариант Пуанкаре-Картана переходит в **универсальный интегральный инвариант Пуанкаре**:

$$J_{\text{П}} = \oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i,$$

где $\overline{C}$ означает изохронный контур.

Универсальность означает инвариантность для любой гамильтоновой системы (гамильтониан не входит в выражение для интеграла), то есть значение этого интегрального инварианта одинаково для любой гамильтоновой системы, если рассматривается одна и та же трубка прямых путей.

2.9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Сохранение фазового объема гамильтоновой системы.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}),$$

общее решение которой

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{x_0}, t)$$

Рассмотрим некоторую замкнутую область в фазовом пространстве и пусть каждая точка области есть неоторое начальное положение исследуемой системы при $t = 0$. Обозначив эту область за G_0, вычислим ее фазовый объем

$$V_0 = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_0} dx_{10} \dots dx_{n0}$$

Пусть через малый промежуток времени t область G_0 перешла в согласованную с G_0 область G_t. Запишем выражение для фазового объема области G_t и перейдем к переменным области G_0 через якобиан преобразования:

$$V_t = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_1} dx_1 \dots dx_n = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_0} \left|\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{x_0}}\right| dx_{10} \dots dx_{n0}$$

Так как рассматриваемый промежуток времени мал, то разложим решение $\overrightarrow{x}$ по степеням t:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_0}) + \ldots$$

Для якобиана получаем

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{x_0}}\right| = \det\left(E + t\frac{\partial \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_0})}{\partial \overrightarrow{x_0}} + \ldots\right)$$

Из курса линейной алгебры известно, что если $\varepsilon \to 0$, то

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon\ \mathrm{tr}A + \ldots,$$

где $\mathrm{tr}A$ — след матрицы A, то есть сумма ее диагональных элементов. Теперь якобиан преобразования принимает вид

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{x_0}}\right| = 1 + t\sum \frac{\partial F_i(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_{i0}} + \ldots = 1 + t\ \mathrm{div}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_0}) + \ldots$$

Подставим преобразованный якобиан в выражение для фазового объема

$$V_t = V_0 + t\int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_0} \mathrm{div}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_0})dx_{10}\ldots dx_{n0}$$

и возьмем производную по времени при $t = 0$:

$$\dot{V}_t\Big|_{t=0} = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_0} \mathrm{div}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_0})dx_{10}\ldots dx_{n0}$$

Автономная система не зависит явно от времени, поэтому полученное выражение справедливо при любом t. Если же система не является автономной, то момент времени $t = 0$ можно заменить на произвольный момент времени t_0 и провести рассуждения, аналогичные рассуждениям выше, сделав замену $t \to t - t_0$. Поэтому для произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеем

$$\dot{V}_t = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{G_t} \mathrm{div}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})dx_1\ldots dx_n$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема: *фазовый объем автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на произвольной области ее решений сохраняется тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = 0$$

Для гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{q} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix},$$

тогда, так как функция Гамильтона считается достаточно гладкой, ее смешанные производные равны и

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \sum \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} = 0,$$

откуда следует сохранение фазового объема гамильтоновой системы на области ее решений по только что доказанной теореме.

2.10 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов.

Теорема 1: *пусть в произвольной системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = Q_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \\ \dot{p}_i = P_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \end{cases}$$

имеет место интегральный инвариант Пуанкаре:

$$J_{\Pi} = \oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i = \mathrm{inv}$$

Тогда эта система гамильтонова, то есть

$$\exists\, \mathcal{H}: \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Доказательство

Так как контур $\overline{C}$ есть результат переноса точек начального контура $\overline{C_0}$ под действием исследуемой системы уравнений, то можно выразить переменные на этом контуре через переменные на начальном контуре и перейти от интегрирования по контуру $\overline{C}$ к интегрированию по контуру $\overline{C_0}$:

$$J_{\Pi} = \oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i = \oint\limits_{\overline{C_0}} \sum p_i(\overrightarrow{q_0}, \overrightarrow{p_0}, t) \delta q_i(\overrightarrow{q_0}, \overrightarrow{p_0}, t)$$

Возьмем производную по времени от полученного выражения в начальный момент времени:

$$\dot{J}_{\Pi} = \oint\limits_{\overline{C_0}} \sum \dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i = \oint\limits_{\overline{C_0}} \sum P_i \delta q_i + p_i \delta Q_i$$

Но

$$\delta(Q_i p_i) = Q_i \delta p_i + p_i \delta Q_i,$$

поэтому

$$p_i \delta Q_i = -Q_i \delta p_i + \delta(Q_i p_i),$$

откуда, учитывая, что интеграл по контуру от полного дифференциала равен нулю, получим

$$\dot{J}_{\Pi} = \oint\limits_{\overline{C_0}} \sum P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i = 0$$

Равенство нулю следует из того, что J_Π — инвариант. Так как $\overline{C_0}$ — произвольный контур, то равенство нулю возможно только если подынтегральная функция — полная производная некоторой функции. Обозначим эту функцию за $-\mathcal{H}$. Тогда

$$\sum P_i\delta q_i - Q_i\delta p_i = -\delta\mathcal{H}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) = -\sum \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\delta p_i$$

В полном дифференциале не участвует производная по времени, так как рассматриваемые контуры изохронные, то есть на каждом выбранном контуре $t = const$. Из последнего соотношения следует

$$Q_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Теорема доказана.

Теорема 2: *пусть в произвольной системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = Q_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \\ \dot{p}_i = P_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \end{cases}$$

имеет место интегральный инвариант типа Пуанкаре-Картана:

$$J = \oint\limits_C \sum p_i dq_i - \Phi(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)dt = \mathrm{inv}$$

Тогда эта система гамильтонова, причем

$$\Phi = \mathcal{H} + \dot{G}(t),$$

где $G(t)$ — произвольная функция.

Доказательство

J — интегральный инвариант типа Пуанкаре-Картана, то есть он имеет место для любых контуров, согласованных с начальным контуром, поэтому он имеет место и для изохронных контуров (если начальный контур изохронный). Но на изохронном контуре $dt = 0$, поэтому имеет место интегральный инвариант Пуанкаре. Тогда по теореме 1 исследуемая система гамильтонова с некоторым гамильтонианом $\mathcal{H}$. Итого, имеем два интегральных инварианта типа Пуанкаре-Картана с функциями Φ и $\mathcal{H}$. Они совпадают на изохронных контурах, а значит и на произвольных контурах:

$$\oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i = \oint\limits_{C} \sum p_i dq_i - \Phi dt = \oint\limits_{C} \sum p_i dq_i - \mathcal{H} dt$$

Отсюда

$$\oint\limits_{C} (\Phi - \mathcal{H}) dt = 0$$

В силу произвольности контура, подынтегральное выражение — полный дифференциал от некоторой функции G. Тогда

$$(\Phi - \mathcal{H}) dt = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i \right),$$

откуда следует, что частные производные функции G по переменным q_i и p_i равны нулю, то есть $G = G(t)$. Поэтому

$$\Phi = \mathcal{H} + \dot{G}(t)$$

Теорема доказана.

2.11 Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

Теорема Ли Хуа-чжуна: *интеграл*

$$I = \oint\limits_{\overline{C}} \sum A_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \delta q_i + B_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \delta p_i$$

является универсальным интегральным инвариантом гамильтоновых систем тогда и только тогда, когда

$$\exists c = const \neq 0 : \; I = cJ_{\Pi}$$

Доказательство

Необходимость

Рассмотрим случай с одной степенью свободы:

$$I = \oint\limits_{\overline{C}} A(q,p,t)\delta q + B(q,p,t)\delta p$$

Пусть гамильтоновой системе с гамильтонианом $\mathcal{H}$ соответствует общее решение

$$\begin{cases} q = q(q_0, p_0, t) \\ p = p(q_0, p_0, t) \end{cases}$$

Сведем интегрирование по контуру $\overline{C}$ к интегрированию по начальному контуру $\overline{C_0}$:

$$I = \oint\limits_{\overline{C_0}} A(q\,(q_0,p_0,t), p(q_0,p_0,t),t)\,\delta q(q_0,p_0,t) + \\ + B(q\,(q_0,p_0,t), p(q_0,p_0,t),t)\,\delta p(q_0,p_0,t)$$

Так как интеграл I — универсальный интегральный инвариант (то есть является инвариантом для любой гамильтоновой системы), то, задавая конкретные значения для гамильтониана, можно уточнить подынтегральное выражение.

1. Пусть $\mathcal{H} = 0$. Тогда из уравнений Гамильтона $q = q_0$, $p = p_0$.

$$I = \oint\limits_{\overline{C_0}} A(q_0,p_0,t)\delta q_0 + B(q_0,p_0,t)\delta p_0$$

По условию теоремы I — интегральный инвариант, поэтому

$$\dot{I} = \oint\limits_{C_0} \frac{\partial A}{\partial t}\delta q_0 + \frac{\partial B}{\partial t}\delta p_0 = 0,$$

причем внесение оператора дифференцирования под знак интеграла объясняется тем, что сам интеграл не зависит от времени, так как I — инвариант. В силу произвольности контура, подынтегральное выражение — полный дифференциал от некоторой функции f, то есть

$$\frac{\partial A}{\partial t}\delta q + \frac{\partial B}{\partial t}\delta p = \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}\delta p,$$

откуда

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}$$

Выражая функцию f через ее первообразную по t

$$f(q,p,t) = \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t},$$

получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(A - \frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(B - \frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0,$$

то есть существуют такие функции $a(q,p)$ и $b(q,p)$, что справедливо представление

$$A = a(q,p) + \frac{\partial F}{\partial q}, \quad B = b(q,p) + \frac{\partial F}{\partial p},$$

которое определяет вид

$$\begin{aligned} A\delta q + B\delta p = a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p = \\ = a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \delta F \end{aligned}$$

выражения под интегралом. Учитывая, что интеграл по контуру от полного дифференциала равен нулю, для самого интеграла получим

$$I = \oint\limits_{\overline{C}} a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p$$

2. Пусть $\mathcal{H} = -p$. Тогда из уравнений Гамильтона $q = q_0 + t$, $p = p_0$. Используя выражение для исходного интеграла, полученного в первом пункте, получим

$$I = \oint\limits_{\overline{C_0}} a(q_0 + t, p_0)\delta q_0 + b(q_0 + t, p_0)\delta p_0$$

Факт инвариантности интеграла приводит к результату

$$\dot{I}\Big|_{t=0} = \oint\limits_{\overline{C_0}} \frac{\partial a(q_0 + t, p_0)}{\partial q_0}\delta q_0 + \frac{\partial b(q_0 + t, p_0)}{\partial q_0}\delta p_0 = 0$$

Рассуждая аналогично первому пункту, получим

$$a(q,p) = \bar{a}(p) + \frac{\partial G}{\partial q}, \quad b(q,p) = \bar{b}(p) + \frac{\partial G}{\partial p},$$

$$a\delta q + b\delta p = \bar{a}(p)\delta q + \bar{b}(p)\delta p + \delta G(q,p),$$

$$I = \oint\limits_{\overline{C}} \bar{a}(p)\delta q + \bar{b}(p)\delta p$$

3. Пусть $\mathcal{H} = -q$. Тогда из уравнений Гамильтона $q = q_0$, $p = p_0 + t$. Используя выражение для исходного интеграла, полученного во втором пункте, получим

$$I = \oint\limits_{\overline{C_0}} \bar{a}(p_0 + t)\delta q_0 + \bar{b}(p_0 + t)\delta p_0$$

Факт инвариантности интеграла приводит к результату

$$\dot{I}\Big|_{t=0} = \oint\limits_{\overline{C_0}} \frac{d\bar{a}(p)}{dp}\delta q + \frac{d\bar{b}(p)}{dp}\delta p = 0$$

В силу произвольности контура, подынтегральное выражение — полный дифференциал от некоторой функции k, то есть

$$\frac{\partial k(q,p)}{\partial q} = \frac{d\bar{a}(p)}{dp}, \quad \frac{\partial K(q,p)}{\partial p} = \frac{d\bar{b}(p)}{dp},$$

то есть для функции $\bar{k} = (q,p) = k(q,p) - \bar{b}(p)$ должно выполняться

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial q} = \frac{d\bar{a}(p)}{dp}, \quad \frac{\partial \bar{k}}{\partial p} = 0$$

Из второго уравнения следует, что левая часть первого уравнения не зависит от p. Правая часть первого уравнения, очевидно, не зависит от q, поэтому обе части равны постоянной c, откуда

$$\bar{a}(p) = cp + c_1, \quad \bar{k} = cq + c_2$$

Подстановка $\bar{a}(p)$ в подынтегральное выражение I дает

$$\bar{a}(p)\delta q + \bar{b}(p)\delta p = cp\delta q + \delta(c_1 q + \int \bar{b}(p)dp)$$

Из всех трех пунктов имеем:

$$\bar{a}(p)\delta q + \bar{b}(p)\delta p = cp\delta q + \delta(c_1 q + \int \bar{b}(p)dp),$$

$$a\delta q + b\delta p = \bar{a}(p)\delta q + \bar{b}(p)\delta p + \delta G(q,p),$$

$$A\delta q + B\delta p = a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \delta F$$

Подставляя последовательно первое во второе и второе в третье и учитывая, что интеграл по контуру от полного дифференциала равен нулю, получим

$$I = c \oint\limits_{\overline{C}} p\delta q$$

Доказательство для системы с произвольным числом степеней свободы аналогичное, просто нужно рассматривать больше «пробных» гамильтонианов.

Достаточность очевидна и проверяется прямой подстановкой $I = cJ_{\Pi}$ в исходный интеграл.

Теорема доказана.

Глава 3

Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби.

3.1 Канонические преобразования. Критерий каноничности преобразования.

Неособенное преобразование

$$\begin{cases} \overrightarrow{\widetilde{q}} = \overrightarrow{\widetilde{q}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \\ \overrightarrow{\widetilde{p}} = \overrightarrow{\widetilde{p}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t), \end{cases}$$

называется **каноническим**, если оно переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову. Неособенное означает обратимое. Если преобразование обратимое, то

$$\det \frac{\partial(\overrightarrow{\widetilde{q}}, \overrightarrow{\widetilde{p}})}{\partial(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})} \neq 0$$

Критерий каноничности преобразования: *преобразование* $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}) \to (\overrightarrow{\widetilde{q}}, \overrightarrow{\widetilde{p}})$ *каноническое тогда и только тогда, когда*

$$\exists c = const,\ c \neq 0,\ \exists F = F(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t):$$

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i - \widetilde{H}dt = c\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right) - dF(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t),$$

*где c — **валентность** канонического преобразования, а F — **производящая функция**.*

Доказательство

Необходимость

Рассмотрим трубки прямых путей в старых и новых переменных, соответствующие гамильтонианам $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{H}}$ соответственно. Выберем произвольные контуры C и $\widetilde{C}$ соответственно в старых и новых переменных и потребуем, чтобы они были согласованными между собой. Введем два согласованных изохронных контура $\overline{C}$ и $\overline{\widetilde{C}}$ в один и тот же момент времени t в старых и новых переменных соответственно. В силу интегрального инварианта Пуанкаре-Картана и учитывая, что интеграл по контуру от полного дифференциала равен нулю, имеем

$$\oint\limits_{C} \sum p_i dq_i - Hdt = \oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i, \tag{3.1}$$

$$\oint\limits_{\widetilde{C}} \sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i - \widetilde{H}dt = \oint\limits_{\overline{\widetilde{C}}} \sum \widetilde{p}_i \delta\widetilde{q}_i, \tag{3.2}$$

Перейдем в последнем интеграле к старым переменным:

$$\oint\limits_{\overline{\widetilde{C}}} \sum \widetilde{p}_i \delta\widetilde{q}_i = \oint\limits_{\overline{C}} \sum \widetilde{p}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)\delta\widetilde{q}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) =$$

$$= \oint\limits_{\overline{C}} \sum_i \widetilde{p}_i \frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_i \widetilde{p}_i \frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial p_j}\delta p_j$$

Так как полученное выражение — интегральный инвариант, то по теореме Ли Хуа-чжуна $\exists c = const \neq 0$:

$$\oint\limits_{\overline{C}} \sum \widetilde{p}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)\delta\widetilde{q}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) = c\oint\limits_{\overline{C}} \sum p_i \delta q_i$$

Выражая правую часть полученного выражения через (3.1) и подставляя результат в (3.2), где левая часть выражена в старых переменных, получим

$$\oint\limits_C \sum \widetilde{p}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)\delta\widetilde{q}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) - \widetilde{\mathcal{H}}dt = c\oint\limits_C \sum p_i dq_i - Hdt,$$

откуда

$$\oint\limits_C \sum \widetilde{p}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)\delta\widetilde{q}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) - \widetilde{\mathcal{H}}dt - c(\sum p_i dq_i - Hdt) = 0$$

В силу произвольности контура, подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции. Обозначив этот дифференциал за $-dF$, получаем

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i - \widetilde{H}dt = c\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right) - dF(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)$$

Достаточность

Возьмем контуры так же, как и при доказательстве необходимости и проинтегрируем уравнение в условии теоремы по контуру C, выразив новые переменные через старые:

$$c\oint\limits_C \sum p_i\delta q_i - Hdt = \oint\limits_C \sum \widetilde{p}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)\delta\widetilde{q}_i(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) - \widetilde{H}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)dt =$$

$$= \oint\limits_{\widetilde{C}} \sum \widetilde{p}_i\delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H}dt,$$

где последнее равенство есть результат перехода обратно к новым переменным. Первый интеграл в цепочке равенств — инваариант, поэтому по второй обратной теореме теории интегральных инвариантов система в новых переменных — гамильтонова.

Теорема доказана.

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i = \sum \widetilde{p}_j d\widetilde{q}_j = \sum\left(p_j\frac{\partial q_j}{\partial q_i}dq_i + \widetilde{p}_j\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial p_i}dp_i\right) + \sum p_j\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial t}dt$$

Подставим полученное выражение в критерий каноничности и приравняем коэффициенты при dq_i, dp_i. Получившаяся система

$$\begin{cases} \sum\limits_j \widetilde{p}_j \dfrac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial q_i} = cp_i - \dfrac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum\limits_j \widetilde{p}_j \dfrac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial p_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

служит для проверки каноничности преобразования. Из равенства коэффициентов при dt находим гамильтониан в новой системе переменных

$$\widetilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} - \sum \widetilde{p}_j \frac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial t}$$

Преобразования, валентность которых равна единице ($c = 1$), называются **унивалентными**.

3.2 Преобразования, допускающие $(\overrightarrow{q}, \widetilde{\overrightarrow{q}})$-описание (свободные преобразования).

Рассмотрим неособенное преобразование

$$\begin{cases} \widetilde{\overrightarrow{q}} = \widetilde{\overrightarrow{q}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \\ \widetilde{\overrightarrow{p}} = \widetilde{\overrightarrow{p}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) \end{cases}$$

Если

$$\det \frac{\partial \widetilde{\overrightarrow{q}}}{\partial \overrightarrow{p}} \neq 0, \tag{3.3}$$

то обобщенный импульс можно выразить через остальные переменные

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{q}, \widetilde{\overrightarrow{q}}, t)$$

и выбрать вместо переменных Гамильтона новые независимые переменные $\{\overrightarrow{q}, \widetilde{\overrightarrow{q}}, t\}$. Такие переменные называются **свободными**.

Исследуемые неособенные преобразования, для которых выполняется (3.3), называются **свободными преобразованиями**.

Выразим обобщенный импульс в критерии каноничности через свободные переменные:

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i - \widetilde{H}dt = c\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right) - dS(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{q}}, t) =$$
$$= c\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right) - \frac{\partial S}{\partial t}dt - \sum \frac{\partial S}{\partial q_i}dq_i - \sum \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i}d\widetilde{q}_i,$$

где

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{q}}, t),$$

а

$$S(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{q}}, t) = F(\overrightarrow{\widetilde{q}}, \overrightarrow{\widetilde{p}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{q}}, t), t)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим связь между каноническим преобразованием и производящей функцией S

$$\begin{cases} \widetilde{p}_i = - & \dfrac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} \\ cp_i = & \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$$

и выражение для функции Гамильтона в свободных переменных:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = c\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3.3 Полусвободные преобразования.

Рассмотрим то же неособенное преобразование, что и в предыдущем пункте.

Если

$$\det \frac{\partial \overrightarrow{\widetilde{p}}}{\partial \overrightarrow{p}} \neq 0, \tag{3.4}$$

то, как и в предыдущем пункте, можно показать, что вместо переменных Гамильтона можно выбрать новые независимые переменные $\{\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{p}}, t\}$, называемые **полусвободными**.

Исследуемые неособенные преобразования, для которых выполняется (3.4), называются **полусвободными преобразованиями**.

Перейдя к полусвободным переменным, преобразуем выражение

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i = d \sum \widetilde{p}_i \widetilde{q}_i - \sum \widetilde{q}_i d\widetilde{p}_i$$

Так как первое слагаемое в правой части равенства есть полный дифференциал, то его можно «включить» в производящую функцию и обозначить новую функцию за R. Тогда критерий каноничности примет вид

$$-\sum \widetilde{q}_i d\widetilde{p}_i - \widetilde{\mathcal{H}} dt = c \left(\sum p_i dq_i - \mathcal{H} dt \right) - dR(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\widetilde{p}}, t)$$

Аналогично предыдущему пункту, из этого равенства можно получить связь между каноническими преобразованиями и производящей функцией R

$$\begin{cases} \widetilde{q}_i = \dfrac{\partial R}{\partial \widetilde{p}_i} \\ c p_i = \dfrac{\partial R}{\partial q_i} \end{cases}$$

и выражение для гамильтониана в полусвободных переменных:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = c\mathcal{H} + \frac{\partial R}{\partial t}$$

3.4 Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

Фазовым потоком называется совокупность преобразований $\{\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0\} \to \{\overrightarrow{q}(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t), \overrightarrow{p}(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t)\}$ фазового пространства.

Теорема: *фазовый поток*

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t), \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t)$$

гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, & q_i^0 = q_i(t^0) \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, & p_i^0 = p_i(t^0) \end{cases}$$

— унивалентное каноническое преобразование.

Доказательство

Пусть система определена функциями Лагранжа $L(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ и Гамильтона $\mathcal{H}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t)$. Возьмем произвольное решение уравнений Гамильтона $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$ и проварьируем его так, чтобы начальный конец был закреплен $(t^0(\alpha) \equiv t^0 = const)$ и чтобы

$$p_i^0(\alpha) = \frac{\partial L(\overrightarrow{q}^0(\alpha), \dot{\overrightarrow{q}}^0(\alpha), t^0}{\partial \dot{q}_i}$$

Для действия по Гамильтону имеем

$$S(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t) = \int\limits_{t^0}^{t} L(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t) dt$$

Для вариации действия, так как начальный конец закреплен, получим

$$dS = \sum p_i dq_i - H dt - \sum p_i^0 dq_i^0$$

Отсюда

$$\sum p_i^0 dq_i^0 = \sum p_i dq_i - Hdt - dS(\overrightarrow{q}^0, \overrightarrow{p}^0, t)$$

и преобразование каноническое по критерию каноничности, где $H^0 \equiv 0$, $c = 1$, производящая функция — действие по Гамильтону.

Теорема доказана.

3.5 Уравнение Гамильтона-Якоби

Найдем свободное унивалентное каноническое преобразование, для которого гамильтониан в новых переменных равен нулю. При такой постановке задачи критерий каноничности в свободных переменных имеет вид

$$\sum \widetilde{p}_i d\widetilde{q}_i = \sum p_i dq_i - Hdt - dS(\overrightarrow{q}, \widetilde{\overrightarrow{q}}, t)$$

Связь между каноническим преобразованием и производящей функцией S

$$\begin{cases} \widetilde{p}_i = - & \dfrac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_i} \\ cp_i = & \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases} \tag{3.5}$$

и выражение для функции Гамильтона в свободных переменных:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = c\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Подставляя эти уравнения в критерий каноничности и учитывая, что $\widetilde{\mathcal{H}} = 0$, а $c = 1$, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\overrightarrow{q}, \frac{\partial S}{\partial \overrightarrow{q}}, t\right) = 0$$

— **уравнение Гамильтона-Якоби**.

Так как гамильтониан в новых переменных в рассматриваемой задаче равен нулю, то общее решение уравнений Гамильтона

$$\widetilde{\overrightarrow{q}} = \widetilde{\overrightarrow{q}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) = const = \alpha_i$$

$$\widetilde{\overrightarrow{p}} = \widetilde{\overrightarrow{p}}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) = const = -\beta_i$$

Преобразуем систему (3.5) с учетом вышесказанного:

$$\begin{cases} \widetilde{p_i} = -\beta_i = - \dfrac{\partial S(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} \\ p_i = \dfrac{\partial S(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\alpha}, t)}{\partial q_i} \end{cases} \tag{3.6}$$

Подстановка полученного общего решения в новых переменных в систему (3.6) дает общее решение уравнений Гамильтона в старых переменных

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, t), \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, t)$$

3.6 Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Будем искать производящую функцию уравнения Гамильтона-Якоби в виде полного интеграла. Решение $S = S(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\alpha}, t)$ — **полный интеграл** уравнения Гамильтона-Якоби, если

1. S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

2. $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0$

Одинм из методов нахождения производящей функции в виде полного интеграла является **метод разделения переменных**. Для этого полный интеграл ищут в виде

$$S = S_0(t, \overrightarrow{\alpha}) + S_1(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{\alpha}) + \ldots + S_n(\overrightarrow{q_n}, \overrightarrow{\alpha})$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$\mathcal{H} = (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)e^t$$

Из системы (3.6) выразим обобщенный импульс и подставим его в уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^2\right]\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + q_2\right]e^t = 0$$

Будем искать S в виде

$$S = S_0(t, \overrightarrow{\alpha}) + S_1(q_1, \overrightarrow{\alpha}) + S_2(q_2, \overrightarrow{\alpha})$$

Получим

$$e^{-t}\frac{\partial S_0}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^2\right]\left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)^2 + q_2\right]e^t = 0$$

Во всем выражении только первый множитель второго слагаемого зависит от q_1, поэтому

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^2 = \alpha_1 = const,$$

откуда

$$S_1 = \int \sqrt{\alpha_1 - q_1^2}dq_1$$

Аналогично

$$S_2 = \int \sqrt{\alpha_2 - q_2^2}dq_2$$

и

$$S_0 = -\alpha_1\alpha_2 e^t,$$

тогда

$$S = -\alpha_1\alpha_2 e^t + \int \sqrt{\alpha_1 - q_1^2}dq_1 + \int \sqrt{\alpha_2 - q_2^2}dq_2$$

Из системы (3.6)

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\alpha_2 e^t + \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 - q_1^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\alpha_1 e^t + \int \frac{dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 - q_2^2}}$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \sqrt{\alpha_1 - q_1^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \sqrt{\alpha_2 - q_2^2}$$

Из последних четырех уравнений находятся $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, t)$ и $\overrightarrow{q}(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, t)$.