Реферат: "Теоремы о необходимых и достаточных условиях локального минимума."

Выполнили: Бетехтина М, Прасолова А.

10 апреля 2022 г.

Введение.

Во многих областях науки и в практической деятельности часто приходится сталкиваться с задачами поиска экстремума функции. Дело в том, что многие технические, экономические и т.д. процессы моделируются функцией или несколькими функциями, зависящими от переменных – факторов, влияющих на состояние моделируемого явления. Требуется найти экстремумы таких функций для того, чтобы определить оптимальное (рациональное) состояние, управление процессом. Так в экономике, часто решаются задачи минимизации издержек или максимизации прибыли - микроэкономическая задача фирмы.

При изучении любого типа задач оптимизации важное место занимает вопрос об условиях оптимальности, или, как еще говорят, условиях экстремума. Различают

• условия оптимальности, т. е. условия, которым должна удовлетворять точка, являющаяся решением задачи,

• достаточные условия оптимальности, т. е. условия, из которых следует, что данная точка является решением задачи.

Целью данной работы является формулировка теорем о необходимых и достаточных условиях локального минимума.

Постановка задачи оптимизации

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется таким образом. Среди элементов x, образующих множество X, найти такой элемент x^*, который доставляет минимальное значение $f(x^*)$ заданной функции $f(x)$. Для того, чтобы корректно поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

1. Допустимое множество - множество $X = \{\vec{x}|\ g_i(\vec{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m\} \subset R^n$
2. Целевую функцию - отображение $f : X \to R$
3. Критерий поиска (max или min).

Теорема о существовании решения

Теорема 1

Пусть X - компакт в R^n (т.е. замкнутое ограниченное множество), f - непрерывная функция на X. Тогда точка глобального минимума функции f на X (глобальное решение задачи

$$f(x) \to min, x \in X \tag{1}$$

существует).

Также представим другую формулировку данной теоремы:

Пусть X - замкнутое множество в R^n, f - непрерывная функция на X, причем при некотором $x^0 \in X$ множество $N(x^0) = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x^0)\}$ ограничено. Тогда точка глобального минимума функции f на X существует.

Доказательство

Из замкнутости X и непрерывности f следует, что множество $N(x^0)$ замкнуто и поэтому является компактом. По теореме 1 точка минимума f на $N(x^0)$ существует. Из определения $N(x^0)$ ясно, что она же будет точкой минимума f на x. Теорема доказана.

Задача (1) представляет собой общую постановку задачи оптимизации. Классификацию задач оптимизации можно проводить по нескольким признакам в зависимости от вида функции f и множества X.

Задача безусловной оптимизации

Задача (1) называется задачей безусловной оптимизации, есхи $x = R^n$, т.е. если она имеет вид $f(x) \to min, x \in R^n$ (5) Пусть

$$f'(x^*) = \left(\frac{df}{dx_1}(x^*), \ldots, \frac{df}{dx_n}(x^*)\right)$$

- вектор первых частных производных (градиент) функции f в точке $x^* \in R^n$;

$$f''(x^*) = \left(\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(x^*) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

- матрица вторых частных производных (гессиан) функции f в точке $x^* \in R^n$

Теорема 2

Пусть функция $f\colon R^n \to R$ дифференцируема в точке $x^0 \in G$. Если f достигает в $x^0 \in G$ локального минимума на G, то

$$\bigtriangledown f(x^0)' z \geq 0 \quad \forall z \in T(x^0)$$

Доказательство

Для $z = 0$ имеем $\bigtriangledown f(x^0)'z = 0$. Пусть $z \in T(x^0)$, $z \neq 0$. Тогда существуют $\lambda \in R_+$ и $z^* \in T(x^0)$, $\quad \| z^* \| = 1$, такие, что $z = \lambda z^*$.

Пусть, далее, $x^k \subset G$ – последовательность, для которой $x^k \xrightarrow{z^*} x^0$. Так как функция f достигает в x^0 локального минимума на G, то для достаточно большого k выполняется неравенство $f(x^k) \geq f(x^0)$. Отсюда с учётом предыдущей теоремы следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x^k) - f(x^0)}{\| x^k - x^0 \|} = \bigtriangledown f(x^0)' z^* \geq 0,$$

а потому и $\bigtriangledown f(x^0)'z \geq 0$.

Теорема 3

Пусть функция $f\colon R^n \to R$ дважды дифференцируема в точке $x^0 \in G$. Если f достигает в x^0 локального мининмума на G и $\bigtriangledown f(x^0) = 0$, то

$$z' \bigtriangledown^2 f(x^0) z \geq 0 \quad \forall z \in T(x^0)$$

Доказательство

Пусть $\{x^k\} \subset G$ - последовательность такая, что $x^k \xrightarrow{z} x^0$. В силу соотношений $\bigtriangledown f(x^0)'(x^k - x^0) = 0$ и $f(x^k) - f(x^0) \geq 0$ с учетом первой теоремы для достаточно большого k имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x^k) - f(x^0) - \bigtriangledown f(x^0)'(x^k - x^0)}{\| x^k - x^0 \|^2} = \frac{1}{2} z' \bigtriangledown^2 f(x^0) z \geq 0.$$

Итог

В данной работе мы сформулировали теоремы о необходимых и достаточных условиях локального минимума и привели доказательства этих теорем.