Решение логарифмических неравенств. Задание № 15 ЕГЭ (профильный уровень)

Попкова Е.В., учитель математики

МОУ «СОШ №63» г. Магнитогорска

ПЛАН ВЕБИНАРА

1. Обзор задания № 15 за последние три года
2. Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий
3. Специальные методы решения логарифмических неравенств
4. Решение логарифмических неравенств специальными методами

Обзор задания № 15
за последние три года

2017/2018

- Досрочная волна

$$\frac{6^x-4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x-5\cdot 2^x+20}\le \frac{1}{x-5}$$

- Основная волна

$$\log_7(2x^2+12)-\log_7(x^2-x+12)>\log_7(2-\frac{1}{x})$$

- Демоверсия

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

Обзор задания № 15 за последние три года

2018/2019

- Досрочная волна

$$\frac{2^{5+x}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}} \le 2^{x}$$

- Основная волна

$$\log_6(21-7x) \ge \log_6(x^2-8x+15)+\log_6(x+3)$$

- Демоверсия

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1) \ge \log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

Обзор задания № 15 за последние три года

2019/2020

- Досрочная волна

$$\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12)+\log_5(5-x)$$

- Основная волна

$$x^2 \cdot \log_{343}(5-x) \leq \log_7(x^2-10x+25)$$

- Демоверсия

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

Обзор задания № 15 за последние три года

2020/2021

- Демоверсия

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий

- Основная волна 2018/2019

$$\log_6(21-7x) \ge \log_6(x^2-8x+15)+\log_6(x+3)$$

$$\begin{cases} 21-7x>0, \\ x^2-8x+15>0, \\ x+3>0, \\ 21-7x \ge (x^2-8x+15)(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ (x-3)(x-5)>0, \\ x>-3, \\ 7(3-x) \ge (x-3)(x-5)(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3<x<3, \\ (x-5)(x+3) \ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ (x+2)(x-4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x\le -2$$

$$ответ: (-3;-2]$$

Свойства логарифмов

Метод интервалов

Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий

- Демоверсии 2018/2019, 2019/2020, 2020/2021

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\ge\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

$$\begin{cases} 8x^2+7>0, \\ x^2+x+1>0, \\ \dfrac{x}{x+5}+7>0, \\ \dfrac{8x^2+7}{x^2+x+1}\ge\dfrac{8x+35}{x+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-5;\ x>-\dfrac{35}{8}, \\ \dfrac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)(x^2+x+1)}\ge\dfrac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)(x^2+x+1)} \end{cases}$$

Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий

- Демоверсии 2018/2019, 2019/2020, 2020/2021

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\ge\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

$$\begin{cases} x<-5;\ x>-\dfrac{35}{8}, \\ \dfrac{3x^2+36x}{(x+5)(x^2+x+1)}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-5;\ x>-\dfrac{35}{8}, \\ \dfrac{3x(x+12)}{(x+5)(x^2+x+1)}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-5;\ x>-\dfrac{35}{8}, \\ x\le-12;-5<x\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad x\le-12;-\frac{35}{8}<x\le 0 \qquad \textit{ответ}:(-\infty;-12];\left(-\frac{35}{8};0\right]$$

Свойства логарифмов

Метод интервалов

Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий

- Основная волна 2019/2020

$$x^2 \cdot \log_{343}(5-x) \le \log_7(x^2-10x+25)$$

$$x^2 \cdot \log_{343}(5-x) \le \log_7(x-5)^2$$

. С учетом того, что x<5 неравенство принимает вид:

$$x^2 \cdot \log_{343}(5-x) \le \log_7(5-x)^2$$

Применяя свойства логарифмов, решим неравенство:

$$\frac{x^2}{3}\log_7(5-x)-2\log_7(5-x)\le 0 \Leftrightarrow (\log_7(5-x))\cdot(\frac{x^2}{3}-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_7(5-x))\cdot(x^2-6)\le 0 \Leftrightarrow (\log_7(5-x))\cdot(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\le 0$$

Решение логарифмических неравенств реальных вариантов ЕГЭ и демоверсий

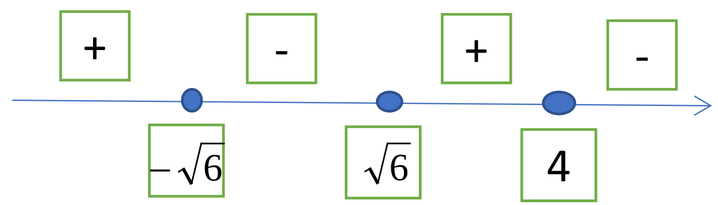
- Основная волна 2019/2020

$$x^2 \cdot \log_{343}(5-x) \le \log_7(x^2 - 10x + 25)$$

продолжение

$$(\log_7(5-x)) \cdot (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \le 0$$

Метод интервалов:



И с учетом x<5 получим ответ: $-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}; 4 \le x < 5$

$$\textit{Ответ}: \left[-\sqrt{6}; \sqrt{6}\right] \cup [4;5)$$

Специальные методы решения логарифмических неравенств

Специальные методы решения логарифмических неравенств применяют в случае, если:

- Неравенство не получается решить выше указанными методами
- Неравенство содержит переменную в основании логарифма
- Неравенства содержат логарифмы с разными основаниями
- Неравенство содержит модуль
- Неравенство смешанное

Специальные методы решения логарифмических неравенств

- Метод введения новой переменной

$$\log_{0,5}^2(x-3)+3\sqrt{\log_{0,5}^2(x-3)}-4<0$$

- Применение формул перехода к новому основанию

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)}\geq\frac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}$$

- Метод рационализации

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10)>3$$

Специальные методы решения логарифмических неравенств

Метод рационализации при решении логарифмических неравенств.

- Метод позволяет в ряде случаев упростить неравенство, содержащее сложное трансцендентное (неалгебраическое) выражение, сведя его к рациональному неравенству и решить его методом интервалов.

(метод можно изучить по презентации и видео, которые содержаться в материалах для учителя)

Решение логарифмических неравенств специальными методами

- Метод рационализации и переход к новому основанию

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)} \ge \frac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-9>0, \\ x^2+8x+12>0, (-\infty;-6)\cup\left(3;\sqrt{10}\right)\cup \\ x^2-9\ne 1; \end{cases}$

По формуле перехода к новому основан

$$\log_{x^2-9} 12 \ge \log_{x^2-9}(x^2+8x+12)$$

Применим метод рационализации при условии, что $x^2-9\ne 1$

$$(x^2-9-1)(12-x^2-8x-12)\ge 0; (x^2-10)(-x^2-8x)\ge 0; -8\le x<\sqrt{10}; 0\le x<\sqrt{10}.$$

$$\log_{p(x)} f(x) - \log_{p(x)} g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p(x)-1)(f(x)-g(x))>0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ p(x)>0, \\ p(x)\ne 1. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получим ответ: $[-8;-6)\cup\left(3;\sqrt{10}\right)$

Решение логарифмических неравенств специальными методами

- Метод рационализации, переход к новому основанию и введение новой переменной

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10)>3$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-10x+25>0, \\ x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ -x^2+7x-10>0, \\ 5-x>0, \\ 5-x\neq 1; \end{cases}$$

$$(2;3)\cup(3;4)\cup(4;5)$$

Применяя свойства логарифма и с учетом ОДЗ, неравенство принимает вид:

$$\log_{x-2}(x-5)+\log_{5-x}(x-2)(5-x)>3;$$

$$\log_{x-2}(5-x)+\log_{5-x}(x-2)+\log_{5-x}(5-x)>3;$$

$$\log_{x-2}(5-x)+\log_{5-x}(x-2)+1>3.$$

Решение логарифмических неравенств специальными методами

Применим формулу перехода к новому основанию логарифма

$$\log_{x-2}(5-x)+\frac{1}{\log_{x-2}(5-x)}-2>0$$

Введем новую переменную ($\log_{x-2}(5-x)=t$) : $t+\frac{1}{t}-2>0$, где $t\in(0;1)\cup(1;+\infty)$

Вернемся к исходной переменной и решим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{x-2}(5-x)>0,\\ \log_{x-2}(5-x)<1,\end{cases}\\ \log_{x-2}(5-x)>1;\end{array}\right.$$

Решение совокупности: $(3;3{,}5)\cup(3{,}5;4)$

И с учетом ОДЗ $(2;3)\cup(3;4)\cup(4;5)$ получим ответ: $(3;3{,}5)\cup(3{,}5;4)$

Спасибо за внимание!