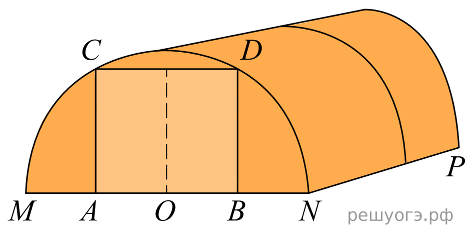
1. Задание 1 № 370458

Какое наименьшее количество дуг нужно заказать, чтобы расстояние между соседними дугами было не более 60 см?



Алексей Юрьевич решил построить на дачном участке теплицу длиной NP = 4,5 м. Для этого он сделал прямоугольный фундамент. Для каркаса теплицы Алексей Юрьевич заказывает металлические дуги в форме полуокружностей длиной 5,2 м каждая и плёнку для обтяжки. В передней стенке планируется вход, показанный на рисунке прямоугольником $ACDB$. Точки A и B — середины отрезков MO и ON соответственно.

Решение. Переведем 60 см = 0,6 м. Найдем количество промежутков между дугами: 4,5 : 0,6 = 7,5, следовательно, наименьшее количество промежутков — 8. Количество дуг на единицу больше, чем количество промежутков: 8 + 1 = 9.

Ответ: 9.

2. Задание 2 № 370459

Найдите примерную ширину MN теплицы в метрах. Число π возьмите равным 3,14. Результат округлите до десятых.

Решение. Ширина MN представляет собой диаметр окружности. Длина окружности равна 5,2 · 2 = 10,4. Зная о том, что длина окружности может быть вычислена по формуле $L = 2\pi R = \pi D$, имеем $D \approx 3,31$. Таким образом, D = 3,3.

Ответ: 3,3.

3. Задание 3 № 370460

Найдите примерную площадь участка внутри теплицы в квадратных метрах. Ответ округлите до целых.

Решение. Площадь участка представляет собой прямоугольник. Вычислим площадь: S = 4,5 · 3,3 = 14,85 м^2. Округлим до целых: S = 15.

Ответ: 15.

4. Задание 4 № 370461

Сколько квадратных метров плёнки нужно купить для теплицы с учётом передней и задней стенок, включая дверь? Для крепежа плёнку нужно покупать с запасом 10 %. Число π возьмите равным 3,14. Ответ округлите до целых.

Решение. Для начала необходимо посчитать площадь крыши теплицы. Крыша представляет собой прямоугольник со сторонами, равными 4,5 м и 5,2 м. Вычислим его площадь: $S = 4{,}5 \cdot 5{,}2 = 23{,}4$ м^2. Передняя и задняя стенка — это два полукруга, то есть вместе они составляют круг. Найдем площадь круга: $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = 3,14 \cdot \left(\frac{5,2}{3,14}\right)^2 \approx 8,61$ (заметим, что в данной формуле l — это не длина окружности, а длина дуги теплицы, то есть половина дуги окружности). Поскольку плёнки надо купить с запасом, прибавляем по 10% к уже имеющимся значениям. Получаем: $25,74 + 9,47 \approx 35,21$. Округляя до целых, получаем 35.

Ответ: 35.

Примечание Решу ОГЭ.

Мы не знаем, как можно купить круглую плёнку для передней и задней частей теплицы (мы бы купили прямоугольную пленку и разрезали её), но за правдивость условий полностью отвечает составитель задачи. Возможно, это задание о других временах или странах.

5. Задание 5 № 370462

Найдите примерную высоту входа в теплицу в метрах. Число π возьмите равным 3,14. Ответ округлите до десятых.

Решение. Треугольник COD — равносторонний. Высота треугольника COD является высотой входа. Воспользуемся формулой высоты равностороннего треугольника: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, где a — это сторона треугольника. Таким образом, высота равна:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{260}{157} \approx 1,4.$$

Ответ: 1,4.

6. Задание 6 № 337528

Найдите значение выражения $1\frac{8}{17} : \left(\frac{12}{17} + 2\frac{7}{11}\right)$.

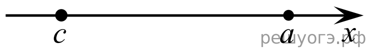
Решение. Выполним действия в скобках, затем деление:

$$1\frac{8}{17} : \left(\frac{12}{17} + 2\frac{7}{11}\right) = \frac{25}{17} : \left(\frac{12}{17} + \frac{29}{11}\right) = \frac{25}{17} : \frac{12 \cdot 11 + 29 \cdot 17}{17 \cdot 11} = \frac{25}{17} \cdot \frac{17 \cdot 11}{132 + 493} = \frac{25 \cdot 11}{625} = 0,44.$$

Ответ: 0,44.

7. Задание 7 № 205773

На координатной прямой изображены числа a и c. Какое из следующих неравенств неверно?



1) $a-1>c-1$
2) $-a<-c$
3) $\dfrac{a}{6}<\dfrac{c}{6}$
4) $a+3>c+1$

Решение. Заметим, что $a>c$. Проверим все варианты ответа:
1) $a-1>c-1 \Leftrightarrow a>c-1+1 \Leftrightarrow a>c$ — верно,
2) $-a<-c \Leftrightarrow a>c$ — верно,
3) $\dfrac{a}{6}<\dfrac{c}{6} \Leftrightarrow a<6\cdot\dfrac{c}{6} \Leftrightarrow a<c$ — неверно,
4) $a+3>c+1 \Leftrightarrow a>c+1-3 \Leftrightarrow a>c-2$ — верно.

Неверным является неравенство 3.

8. Задание 8 № 311329

Упростите выражение $\dfrac{a^2+4a}{a^2+8a+16}$ и найдите его значение при $a=-2$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение:

$$\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}=\frac{a(a+4)}{(a+4)^2}=\frac{a}{a+4}.$$

При $a=-2$, значение полученного выражения равно $-2:2=-1$.

9. Задание 9 № 137383

Решите уравнение $x^2=2x+8$.
Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^2-2x-8=0$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней равна 2, а их произведение -8.

Тем самым это числа -2 и 4.

Ответ: -24.

10. Задание 10 № 315196

Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Решение. Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

Упорядочим данный ряд: 130, 132, 134, 158, 166, следовательно, медиана равна 134. Среднее арифметическое же будет равно

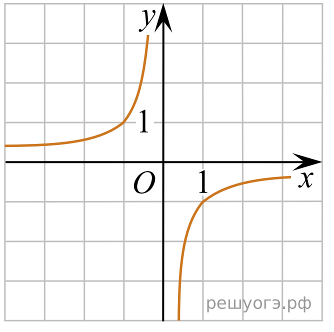
$$\frac{130+132+134+158+166}{5}=144.$$

Разница между медианой и средним арифметическим составляет $144-134=10$.

Ответ: 10.

11. Задание 11 № 193102

Найдите значение k по графику функции $y=\frac{k}{x}$, изображенному на рисунке.



Решение. Поскольку гипербола проходит через точку $(-1;\,1)$, имеем: $1=\frac{k}{-1}\Leftrightarrow k=-1.$

Ответ: -1.

12. Задание 12 № 311348

Площадь ромба S (в $м^2$) можно вычислить по формуле $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, где d_1, d_2 — диагонали ромба (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите диагональ d_1, если диагональ d_2 равна 30 м, а площадь ромба 120 $м^2$.

Решение. Подставим в формулу известные величины:

$$120 = \frac{1}{2}d_1 \cdot 30 \Leftrightarrow 15d_1 = 120 \Leftrightarrow d_1 = 8 \text{ м.}$$

Ответ: 8.

13. Задание 13 № 319930

При каких значениях a выражение $5a+9$ принимает отрицательные значения?
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $a > -\frac{9}{5}$
2) $a < -\frac{5}{9}$
3) $a > -\frac{5}{9}$
4) $a < -\frac{9}{5}$

Решение. Решим неравенство $5a+9<0$:

$$5a+9<0 \Leftrightarrow 5a < -9 \Leftrightarrow a < -\frac{9}{5}.$$

Правильный ответ указан под номером: 4.

14. Задание 14 № 394131

Вика решила начать делать зарядку каждое утро. В первый день она сделала 30 приседаний, а в каждый следующий день она делала на одно и то же количество приседаний больше, чем в предыдущий день. За 15 дней она сделала всего 975 приседаний. Сколько приседаний сделала Вика в пятый день?

Решение. Вика в первый день сделала 30 приседаний, значит, $a_1 = 30$, во второй — a_2, … , в последний — a_n приседаний. Тогда $S_n = 975$ приседаний. Так как $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$, получим, что Вика увеличивала на

$$975 = \frac{2 \cdot 30 + d(15-1)}{2} \cdot 15 \Leftrightarrow \frac{975 \cdot 2}{15} = 60 + 14d \Leftrightarrow 130 - 60 = 14d \Leftrightarrow 70 = 14d \Leftrightarrow d = 5 \text{ приседаний в день.}$$

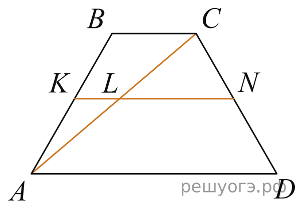
Зная d, найдем a_5:

$$a_5 = a_1 + d(n-1) \Rightarrow a_5 = 30 + 5(5-1) = 30 + 20 = 50.$$

Ответ: 50.

15. Задание 15 № 311411

Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.



Решение. Так как KN — средняя линия трапеции, то KL и LN средние линии треугольников ABC и CAD соответственно.

$$KL = \frac{BC}{2} = 2 \text{ см}, \; LN = \frac{AD}{2} = 5 \text{ см}.$$

Ответ: 5.

16. Задание 16 № 316346

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен 120°. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ} = \sqrt{16 + 16 + 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

(здесь a и b — боковые стороны равнобедренного треугольника, c — основание.

Диаметр описанной окружности найдем по обобщенной теореме синусов:

$$D = 2R = 2 \cdot \frac{c}{2\sin 120^\circ} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$$

Ответ: 8.

Примечание.

Вместо того, чтобы искать основание треугольника, можно было найти угол при основании. Действительно, сумма углов при основании данного равнобедренного треугольника равна 60°. Эти углы равны, поэтому каждый из них равен 30°. Применяя обобщенную теорему синусов для боковой стороны и противолежащего ей угла, получаем: $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8.$

Приведем решение Андрея Ларионова.

Угол при основании равен $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$

Следовательно, дуга описанной окружности, на которую он опирается, равна $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Эту дугу стягивает боковая сторона треугольника.

Хорда, стягивающая дугу в 60°, равна радиусу окружности, поэтому радиус описанной окружности равен боковой стороне треугольника, тогда $D = 2 \cdot 4 = 8$.

17. Задание 17 № 169869

Периметр ромба равен 40, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.

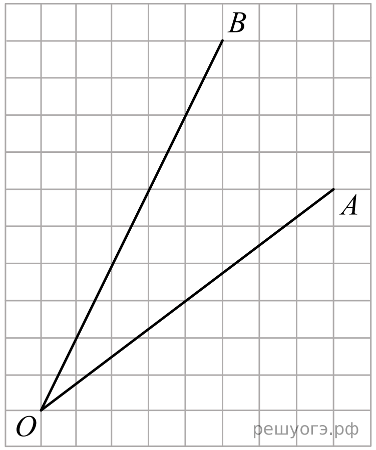
Решение. Периметр ромба равен сумме длин всех его сторон. Так как все стороны равны, сторона ромба равна 10. Площадь ромба равна произведению сторон на синус угла между ними. Таким образом,

$$S = 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

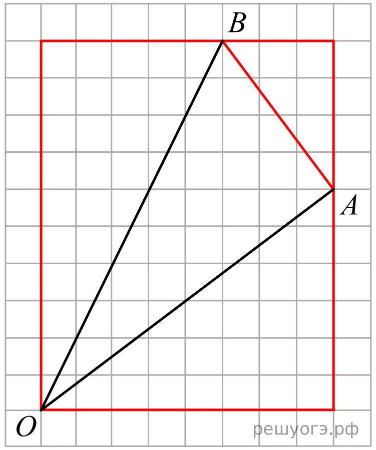
Ответ: 50.

18. Задание 18 № 348484

Найдите тангенс угла AOB. Размер клетки 1 × 1.



Решение. Найдем каждую из сторон треугольника AOB, чтобы показать, что он прямоугольный.



$$OB = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125},$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25},$$

$$OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}.$$

Таким образом, $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{AO} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

19. Задание 19 № 169917

Какие из следующих утверждений верны?

1) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 90°, то эти две прямые параллельны.
2) Если угол равен 60°, то смежный с ним равен 120°.
3) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы равны 70° и 110°, то эти две прямые параллельны.
4) Через любые три точки проходит не более одной прямой.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.
1) «Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 90°, то эти две прямые параллельны.» — *неверно*, если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрестлежащие углы равны, то эти две прямые параллельны. Если внутренние накрестлежащие углы составляют в сумме 90°, то они могут быть не равны.
2) «Если угол равен 60°, то смежный с ним равен 120°.» — *верно*, сумма смежных углов равна 180°.
3) «Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы равны 70° и 110°, то эти две прямые параллельны.» — *верно*, если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.
4) «Через любые три точки проходит не более одной прямой.» — *верно*, через три точки либо нельзя провести прямую, если они не лежат на одной линии, либо можно, но только одну.

Ответ: 234.

20. Задание 20 № 311236

Разложите на множители: x^2y+1-x^2-y.

Решение. Имеем:

$$x^2y+1-x^2-y=x^2y-x^2-y+1=x^2(y-1)-(y-1)=(y-1)(x^2-1)=(y-1)(x-1)(x+1).$$

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

21. Задание 21 № 126

Из пунктов A и B, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от A. Найдите скорость пешехода, шедшего из A, если известно, что он шёл со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из B, и сделал в пути получасовую остановку.

Решение. Пусть скорость пешехода, шедшего из пункта A, равна x км/ч, $x>1$. Тогда скорость пешехода, шедшего из пункта B, равна $(x-1)$ км/ч.

Составим таблицу по данным задачи:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Пешеход, шедший из A	x	$\frac{9}{x}$	9
Пешеход, шедший из B	$x-1$	$\frac{10}{x-1}$	10

Так как пешеход, шедший из A, сделал по пути остановку на $\frac{1}{2}$ ч., а вышли пешеходы одновременно, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-1}-\frac{9}{x}=\frac{1}{2} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} 20x-18(x-1)=x(x-1) \Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=6 \end{array}\right. \underset{x>1}{\Leftrightarrow} x=6.$$

Ответ: 6 км/ч.

22. Задание 22 № 338314

Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}\right|+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

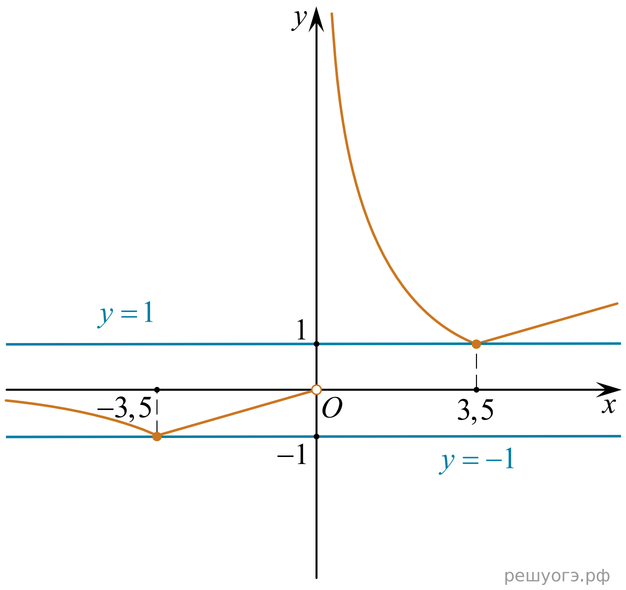
Решение. Раскроем модуль:

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}\right|+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right)=$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3,5}{x}-\frac{x}{3,5}+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right), \text{ при } x\leqslant -3,5 \text{ и } 0<x<3,5, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right), \text{ при } -3,5<x<0 \text{ и } x\geqslant 3,5 \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} \frac{3,5}{x}, \text{ при } x\leqslant -3,5 \text{ и } 0<x<3,5, \\ \frac{x}{3,5}, \text{ при } -3,5<x<0 \text{ и } x\geqslant 3,5. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:

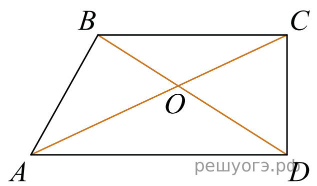


Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: −1; 1.

23. Задание 23 № 311666

Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2. Найдите площадь трапеции.



Решение. По условию $S_{\Delta AOD} \neq S_{\Delta BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{4}{3} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$. Значит, $S_{\Delta ABO} = \frac{4}{3} S_{\Delta CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$.

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание AD и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно,

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Поэтому и $S_{\Delta COD} = 12$; $S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49$ см^2.

Ответ: 49 см^2.

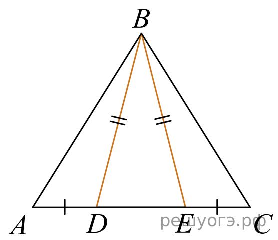
Примечание.

Учащиеся, изучающие геометрию углубленно, могут решить задачу в один шаг:

$$S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_{BOC}} + \sqrt{S_{AOD}}\right)^2 = 49.$$

24. Задание 24 № 103

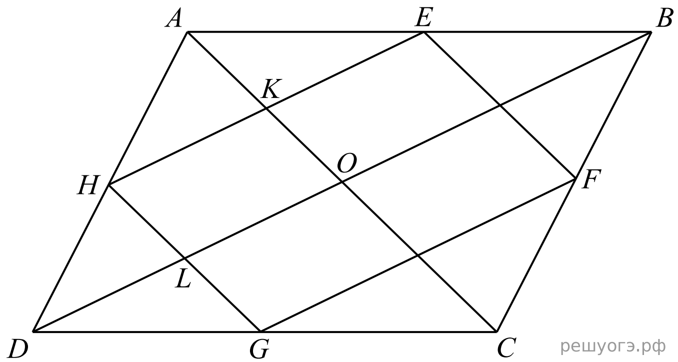
На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



Решение. Так как по условию $BD = BE$, то треугольник BDE является равнобедренным. Пусть угол при основании этого треугольника равен x, тогда $\angle BEC = \angle BDA = 180^\circ - x$. Треугольники BEC и BDA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = BC$ и треугольник ABC —равнобедренный.

25. Задание 25 № 339373

Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 28.



Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке. Поскольку $HG \parallel AC$ и $HE \parallel BD$, получаем, что $HKOL$ — параллелограмм, следовательно, углы KHL и KOL равны. Рассмотрим треугольники ABC и EBF, угол EBF — общий, углы BEFи BAC равны как соответственные при параллельных прямых, углы BFE и BCA — аналогично, следовательно, треугольники ABC и BEF подобны по двум углам. Откуда $\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{BE}{AB}$ Аналогично подобны треугольники ABD и AEH, откуда $\dfrac{HE}{BD} = \dfrac{AE}{AB}$. Пусть сторона ромба равна a, а длина короткой диагонали равна d. Сложим два полученных уравнения:

$$\frac{EF}{AC} + \frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB} + \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{d} + \frac{a}{28d} = \frac{AE+EB}{AB} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \frac{28a+a}{28d} = \frac{AB}{AB} \Leftrightarrow 28d = 29a \Leftrightarrow a = \frac{28d}{29}.$$

Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними: $S_{HEFG} = a^2 \sin \angle KHL$. Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \angle KOL = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 28d \cdot \sin \angle KOL$. Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2 \sin \angle KHL}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot 28d \cdot \sin \angle KOL} = \frac{a^2}{14d^2} = \frac{d^2 \frac{28^2}{29^2}}{14d^2} = \frac{56}{841}.$$

Ответ: $\frac{56}{841}$.