

Лекция 4

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Методы простой итерации и итерации Зейделя. Метод прогонки.

система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты перед неизвестными уравнений, x_i - неизвестные величины, b_i - свободные члены уравнений.

Определение

Решением системы линейных алгебраических уравнений являются те значения неизвестных, при которых все уравнения системы обращаются в тождество

СЛАУ

есть хотя бы одно решение

решений нет

несовместная

совместная

ровно одно решение

бесконечное множество решений

определённая

неопределённая

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

прямые

итерационные

Гаусса, Крамера, Жордана, окаймления, ортогонализации, главных элементов, метод квадратного корня, **метод прогонки**

**метод итерации,
метод итерации
Зейделя**

Прямые методы дают решение за конечное число действий, просты и универсальны.

Решение реализуют в два шага: систему преобразуют к более простому виду, затем решают упрощенную систему и получают решение.

Итерационные методы привлекают простотой реализации, требуют задания начального приближения, применяются для решения систем специального вида. Скорость сходимости итерационного процесса зависит от свойств матрицы коэффициентов перед неизвестными и выбора начального приближения

Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Позволяет найти приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений с заданной точностью ε

Условия сходимости метода

Все коэффициенты a_{ij} отличны от нуля
и справедливы неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

Метод простой итерации

Перепишем уравнения системы в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \dots - a_{1n} \cdot x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_{21} - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \dots - a_{2n} \cdot x_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_{n1} - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \dots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Возьмем приближенное решение системы $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ – нулевое приближение, подставим в формулы и вычислим первое приближение $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \dots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)} \right) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_{21} - a_{21} \cdot x_1^{(0)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \dots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)} \right) \\ \dots \\ x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_{n1} - a_{n1} \cdot x_1^{(0)} - a_{n2} \cdot x_2^{(0)} - \dots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(0)} \right) \end{array} \right.$$

подставим $x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1$ в формулы и вычислим второе приближение $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2$. Повторяем вычисления до выполнения условия достижения точности для всех x_i

$$\max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$

Задание

Имеется система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 20 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 = 15 \\ 2 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 = 83 \\ x_1 + 5 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 18 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 12 \cdot x_4 = 8 \end{cases}$$

Найти решение системы методом итерации с точностью 10^{-3} .

проверка условия сходимости

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

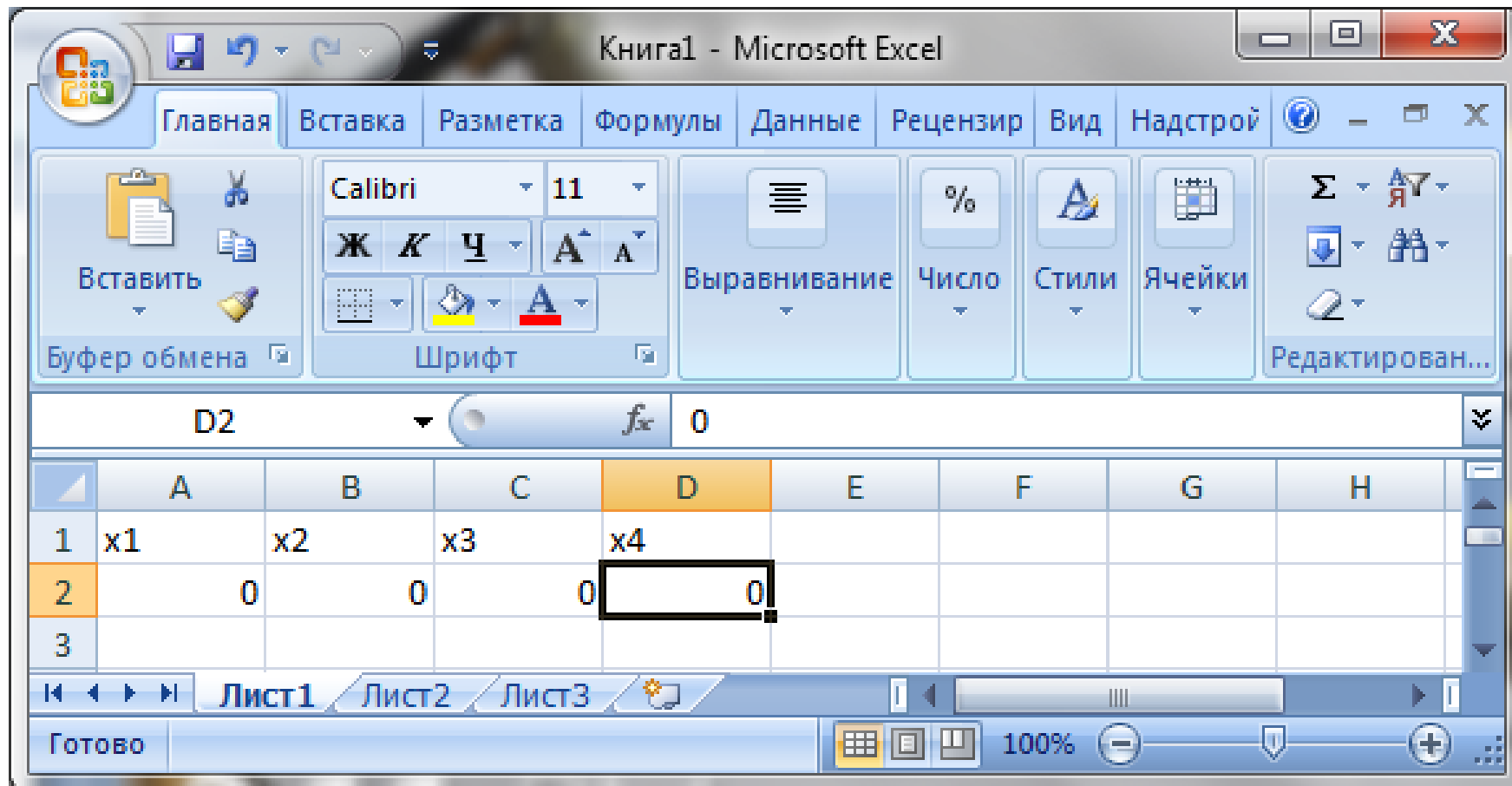
- Первое уравнение 20 сравниваем с суммой $1+1+3+5 \Rightarrow$ условие справедливо
- Второе уравнение 18 сравниваем с суммой $2+5 \Rightarrow$ условие справедливо
- Третье уравнение 32 сравниваем с суммой $1+5+6 \Rightarrow$ условие справедливо
- Четвертое уравнение 12 сравниваем с суммой $3+2 \Rightarrow$ условие справедливо.

Перепишем уравнения системы в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{20} \cdot (15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{18} \cdot (83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{32} \cdot (18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{12} \cdot (8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \end{array} \right.$$

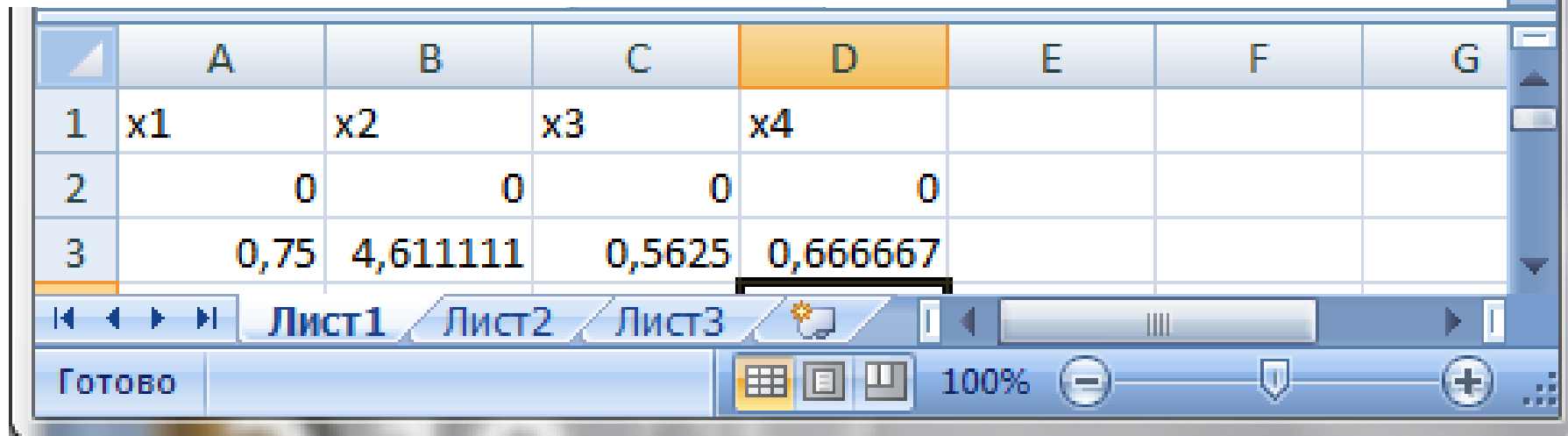
Решение в Microsoft Excel.

Занесение в ячейки таблицы нулевого приближения



Вычисление первого приближения

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{20} \cdot (15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{18} \cdot (83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{32} \cdot (18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{12} \cdot (8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \end{cases}$$



	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3	x4			
2	0	0	0	0			
3	0,75	4,611111	0,5625	0,666667			

Получение следующих приближений копированием формул

Книга1 - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка Формулы Данные Рецензия Вид Настройка

Вставить Шрифт Выравнивание Число Стили Ячейки Редактирование

Буфер обмена

A3 fx =1/20*(15+B2+3*C2+5*D2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3	x4			
2	0	0	0	0			
3	0,75	4,611111	0,5625	0,666667			
4	1,231597	4,342593	-0,30642	-0,53299			
5	0,78792	4,622319	-0,05458	-0,39345			
6	0,874567	4,632855	-0,11059	-0,48436			
7	0,843963	4,648483	-0,0979	-0,48233			
8	0,847157	4,651318	-0,09976	-0,4873			
9	0,845778	4,652343	-0,09937	-0,48785			
10	0,845749	4,65265	-0,09939	-0,48814			
11	0,84569	4,652722	-0,09938	-0,48821			
12	0,845676	4,65276	-0,09938	-0,48823			

Лист1 Лист2 Лист3

Среднее: 1,266669896 Количество: 40 Сумма: 50,66679586 100%

Режим отображен

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{20} \cdot (15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{18} \cdot (83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{32} \cdot (18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}) \\ x_4^{(1)} &= \frac{1}{12} \cdot (8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \end{aligned} \right.$$

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following formulas in the cells:

Row	Column A	Column B	Column C	Column D
1	x1	x2		
2				
3				
4				
5	=1/20*(15+B4+3*C4+5*D4)			
6	=1/20*(15+B5+3*C5+5*D5)			
7	=1/20*(15+B6+3*C6+5*D6)			
8	=1/20*(15+B7+3*C7+5*D7)			
9	=1/20*(15+B8+3*C8+5*D8)			
10	=1/20*(15+B9+3*C9+5*D9)			
11	=1/20*(15+B10+3*C10+5*D10)	=1/18*(83-2*A10-5*D10)		
12	=1/20*(15+B11+3*C11+5*D11)	=1/18*(83-2*A11-5*D11)		

Additional formulas visible in the spreadsheet:

- Column B (rows 2-12): =1/12*(8-3*B2-C2)
- Column C (rows 2-12): =1/12*(8-3*B3-C3)
- Column D (rows 2-12): =1/12*(8-3*B4-C4)
- Column E (rows 2-12): =1/12*(8-3*B5-C5)
- Column F (rows 2-12): =1/12*(8-3*B6-C6)
- Column G (rows 2-12): =1/12*(8-3*B7-C7)
- Column H (rows 2-12): =1/12*(8-3*B8-C8)
- Column I (rows 2-12): =1/12*(8-3*B9-C9)

The status bar at the bottom shows: Готово Среднее: 1,266669896 Количество: 40 Сумма: 50,66679586 100%

Решение в MathCAD методом Гаусса с использованием функции *Isolve*

1. Задать матрицу коэффициентов перед неизвестными системы
2. Задать столбец свободных членов системы
3. Написать имя функции с аргументами
4. Нажать знак равенства для вывода решения

Isolve

The screenshot displays the Mathcad interface with the following content:

- Menu Bar:** Файл, Правка, Вид, Вставка, Формат, Инструменты, Символьные операции, Окно
- Toolbar:** Includes icons for file operations, editing, and mathematical symbols. The font is set to Times New Roman, size 10.
- Equation Editor:**
 - Matrix A is defined as:
$$A := \begin{pmatrix} 20 & -1 & -3 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 32 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$
 - Matrix B is defined as:
$$B := \begin{pmatrix} 15 \\ 83 \\ 18 \\ 8 \end{pmatrix}$$
 - The result of the solve function is:
$$\text{Isolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 0.846 \\ 4.653 \\ -0.099 \\ -0.488 \end{pmatrix}$$
- Matrix Palette:** A small window titled "Матрица" is open, showing various matrix symbols like $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, x_n , x^{-1} , $|x|$, \vec{m} , M^{\wedge} , M^T , $m..n$, $\# \cdot \vec{v}$, $\# \times \vec{v}$, ΣU , and $\frac{d}{dt}$.
- Bottom Bar:** Contains the text "Нажмите F1, чтобы открыть справку." (Press F1 to open help), "АВТО" (Auto), and "Страниц ..." (Page ...).

Решение в MathCAD методом итерации с использованием функции **find**

функция **Find** позволяет находить

- ✓ Значения корней нелинейных уравнений
- ✓ решения системы линейных алгебраических уравнений
- ✓ решения системы линейных уравнений

Реализация функции find

- Задание начальных приближений (нулевых): $x := x_0, y := y_0, z := z_0, \dots$
- Ввод слова ***Given***, указывающего на то, что далее следует система уравнений
- Ввод системы уравнений; (знак равенства ставится «**жирный**» с палитры «**логический**»)
- Ввод функции ***Find(x,y,z,...)***
- Получение решения нажатием клавиши =.

find

The screenshot shows the Mathcad interface with the following content:

Mathcad - [СЛАУ]

Файл ПРАВКА Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Variables Times New Roman 10 **B** *I* U 200% ?

Мой веб-узел Go

$x := 0 \quad y := 0 \quad z := 0 \quad v := 0$

given

$20 \cdot x - y - 3 \cdot z - 5 \cdot v = 15$

$2 \cdot x + 18 \cdot y + 5 \cdot v = 83$

$x + 5 \cdot y + 32 \cdot z + 6 \cdot v = 18$

$3 \cdot y + z + 12 \cdot v = 8$

Булева алгебра

$= < > \leq \geq$

$\neq \neg \wedge \vee \oplus$

$\text{find}(x, y, z, v) = \begin{pmatrix} 0.846 \\ 4.653 \\ -0.099 \\ -0.488 \end{pmatrix}$

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО Страница 1

Метод итерации Зейделя

В методе простой итерации при вычислении следующего приближения используются значения предыдущего. В методе Зейделя предложено при получении следующего приближения использовать не только значения предыдущего шага итерации, но и уже полученные значения текущей итерации

Формулы итерации Зейделя

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \dots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \dots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)}) \\ \dots \\ x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(1)} - a_{n2} \cdot x_2^{(1)} - \dots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(1)}) \end{array} \right.$$

Метод Зейделя

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following details:

- Title Bar:** slaуитерац - Microsoft Excel
- Formulas Bar:** F3, $f_x = 1/20*(15+G2+3*H2+5*I2)$
- Spreadsheet Data:**

	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x1	x2	x3	x4				
2	0	0	0	0				
3	0,75	4,527778	-0,1684	-0,45124				
4	0,838317	4,64331	-0,10461	-0,48544				
5	0,845114	4,652055	-0,09977	-0,48803				
6	0,845629	4,652717	-0,09941	-0,48823				
7	0,845668	4,652767	-0,09938	-0,48824				
8	0,845671	4,652771	-0,09938	-0,48824				
9								

Status Bar: Среднее: 1,216308916 Количество: 24 Сумма: 29,19141398 100%

Точность вычислений достигнута

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following details:

- Window title: слауитерац - Microsoft Excel
- Active sheet: Лист1
- Formula bar: $=1/20*(15+G2+3*H2+5*I2)$
- Table data (rows 3-8):

	F	G	H	I
1	x1	x2	x3	x4
2	0	0	0	0
3	0,75	4,527778	-0,1684	-0,45124
4	0,838317	4,64331	-0,10461	-0,48544
5	0,845114	4,652055	-0,09977	-0,48803
6	0,845629	4,652717	-0,09941	-0,48823
7	0,845568	4,652767	-0,09938	-0,48824
8	0,845671	4,652771	-0,09938	-0,48824

The status bar at the bottom displays: Среднее: 1,216308916 Количество: 24 Сумма: 29,19141398 100%

Режим отображения формул

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'Formulas' ribbon selected. The ribbon includes options like 'fx', 'Autosum', 'Logical', 'Text', 'Date and Time', 'Defined Names', 'Dependencies', and 'Calculate'. The spreadsheet below shows a grid with formulas displayed in a large font. The formulas are:

	F	G	H	I
1				x4
2				0
3				$=1/20*(15+G2+3*H2+5*I2)$
4	$=1/20*(15+G4+3*H4+5*I4)$			$=1/12*(8-3*G3-H3)$
5	$=1/20*(15+G5+3*H5+5*I5)$	$=1/18*(83-2*F3-5*I2)$		$=1/12*(8-3*G4-H4)$
6	$=1/20*(15+G6+3*H6+5*I6)$	$=1/32*(18-F3-5*G3-6*I2)$		$=1/12*(8-3*G5-H5)$
7	$=1/20*(15+G7+3*H7+5*I7)$	$=1/18*(83-2*F8-5*I7)$		$=1/12*(8-3*G6-H6)$
8				$=1/12*(8-3*G7-H7)$

The status bar at the bottom shows 'Готово' (Ready) and a zoom level of 100%.

Метод прогонки

Метод Гаусса заключается в приведении матрицы коэффициентов перед неизвестными к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1' \\ \phantom{a_{11}x_1 +} a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2' \\ \phantom{a_{11}x_1 +} \phantom{a_{22}x_2 +} \dots \\ \phantom{a_{11}x_1 +} \phantom{a_{22}x_2 +} a_{nn}x_n = b_n' \end{array} \right.$$

Обратный ход метода Гаусса

$$x_n = b_n' \quad x_{n-1} = b_{n-1}' - a_{n-1n}' \cdot x_n$$

Метод прогонки – метод Гаусса для систем специального вида:

матрица коэффициентов
трехдиагонального вида ($n=4$)

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 = f_1 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ \quad a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ \quad \quad a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{array} \right.$$

Прямой ход метода прогонки

Как в прямом ходе метода Гаусса, мы достигаем треугольного вида матрицы коэффициентов умножением всех элементов строки на число и вычитанием ее из нижестоящей строки системы.

Результат прямого хода прогонки

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + s_1 \cdot x_2 = g_1 \\ x_2 + s_2 \cdot x_3 = g_2 \\ x_3 + s_3 \cdot x_4 = g_3 \\ x_4 = g_4 \end{array} \right.$$

$$s_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad g_1 = \frac{f_1}{b_1} \quad g_i = \frac{f_i - a_i \cdot g_{i-1}}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}}$$

$$s_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}} \quad i=2, 3, 4$$

Получение ответа обратным ходом
прогонки по формулам

$$x_4 = g_4$$

$$x_i = g_i - s_i \cdot x_{i+1} \quad i=3, 2, 1.$$

Задание

Найти решение системы методами итерации и прогонки

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7 \cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

Решение методом прогонки
Систему приводим к виду, когда
коэффициент в первом уравнении
перед первой неизвестной равняется
единице

$$\begin{cases} x_1 + 0,33 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7 \cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

Данные в Microsoft Excel

$$\begin{cases} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 = f_1 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0,33 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7 \cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	
1	i	fi	ai	bi	ci	
2		1	0	0	1	0,33
3		2	-3	1	6	-1
4		3	16	1	-8	2
5		4	2	-1	10	-3
6		5	-4	-1	7	0

Выполнение прямого хода

Слаупрогонка - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Библиотека функций

Вставить функцию

Σ Автосумма

Недавно использовались

Финансовые

Логические

Текстовые

Дата и время

Определенные имена

Зависимости формул

Вычисление

G3 f_x =(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	fi	ai	bi	ci	si	gi
2	1	0	0	1	0,33	0,33	0
3	2	-3	1	6	-1	-0,1764	-0,5291005
4	3	16	1	-8	2	-0,2556	-2,1127142
5	4	2	-1	10	-3	-0,3079	-0,0115671
6	5	-4	-1	7	0		-0,5994455

Лист1 Лист2 Лист3

Среднее: -0,813206827 Количество: 4 Сумма: -3,252827307 184%

Формулы прямого хода

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'Formulas' ribbon selected. The spreadsheet contains data in columns A and B, and formulas in columns C and D. The formulas in column C are for 'si' and the formulas in column D are for 'gi'. The formulas are as follows:

	A	B	si	gi
		15	=E2/D2	=B2/D2
1	i	fi	=E3/(D3-C3*F2)	=(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)
2	1	0	=E4/(D4-C4*F3)	=(B4-C4*G3)/(D4-C4*F3)
3	2	-3	=E5/(D5-C5*F4)	=(B5-C5*G4)/(D5-C5*F4)
4	3	16		
5	4	2		
6	5	-4		=(B6-C6*G5)/(D6-C6*F5)

The status bar at the bottom shows 'Готово' (Ready) and a zoom level of 100%.

Выполнение обратного хода

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The title bar reads "Книга2 - Microsoft Excel". The ribbon is set to the "Форм" (Formulas) tab. The formula bar displays the formula $=G5-F5*H6$. The spreadsheet grid shows data in columns A through I and rows 2 through 6. The cell H5 is selected, and its value is 0,300483. The status bar at the bottom shows "Среднее: -0,742259933", "Количество: 4", and "Сумма: -2,969039734".

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	1	0	0	1	0,33	0,33	0	0,300483	
3	2	-3	1	6	-1	-0,176	-0,5291005	-0,91056	
4	3	16	1	-8	2	-0,256	-2,1127142	-2,16285	
5	4	2	-1	10	-3	-0,308	-0,0115671	-0,19612	
6	5	-4	-1	7	0		-0,5994455	-0,59945	

Решение в режиме отображения формул

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the 'Formulas' ribbon selected. The formula bar displays the formula $=G5-F5*H6$. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	1	0	0	1	0,33	$=E2/D2$	$=B2/D2$	$=G2-F2*H3$
3	2	-3	1	6	-1	$=E3/(D3-C3*F2)$	$=(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)$	$=G3-F3*H4$
4	3	16	1	-8	2	$=E4/(D4-C4*F3)$	$=(B4-C4*G3)/(D4-C4*F3)$	$=G4-F4*H5$
5	4	2	-1	10	-3	$=E5/(D5-C5*F4)$	$=(B5-C5*G4)/(D5-C5*F4)$	$=G5-F5*H6$
6	5	-4	-1	7	0		$=(B6-C6*G5)/(D6-C6*F5)$	$=G6$

The status bar at the bottom shows: Среднее: -0,742259933 Количество: 4 Сумма: -2,969039734 100%

Сопоставление с решением методом итерации

Преобразуем уравнения системы применения метода итерации

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -0,33 \cdot x_2 \\ x_2 = \frac{-3 - x_1 + x_3}{6} \\ x_3 = -\frac{16 - x_2 - 2 \cdot x_4}{8} \\ x_4 = \frac{2 + x_3 + 3 \cdot x_5}{10} \\ x_5 = \frac{-4 + x_4}{7} \end{array} \right.$$

Решение методом итерации

Книга1 - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка ст Формулы Данные Рецензиро Вид Надстройки

Библиотека функций Определенные имена Зависимости формул Вычисление

А3 f_x = -0,33*B2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x1	x2	x3	x4	x5				
2	0	0	0	0	0				
3	0	-0,5	-2	0,2	-0,57143				
4	0,17	-0,8608	-2,0125	-0,17143	-0,54286				
5	0,28	-0,8828	-2,15046	-0,16411	-0,59592				
6	0,29	-0,907	-2,15137	-0,19382	-0,59487				
7	0,3	-0,9084	-2,16183	-0,1936	-0,59912				
8	0,3	-0,9103	-2,16196	-0,19592	-0,59909				
9	0,3	-0,9104	-2,16276	-0,19592	-0,59942				
10	0,3	-0,9105	-2,16278	-0,1961	-0,59942				
11	0,3	-0,9105	-2,16284	-0,1961	-0,59944				
12	0,3	-0,9106	-2,16284	-0,19612	-0,59944				
13	0,3	-0,9106	-2,16285	-0,19612	-0,59945				

Лист1 Лист2 Лист3

Среднее: -0,696945251 Количество: 55 Сумма: -38,3319888 100%

Книга1 - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка ст **Формулы** Данные Рецензиро Вид Надстройки

Библиотека функций Определенные имена Зависимости формул Вычисление

A3 f_x =-0,33*B2

	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3	x4	x5
2		0	0	0	0
3	=-0,33*B2	=(-3-A3+C2)/6	=-(16-B2-2*D2)/8	=(2+C2+3*E2)/10	=(-4+D2)/7
4	=-0,33*B3	=(-3-A4+C3)/6	=-(16-B3-2*D3)/8	=(2+C3+3*E3)/10	=(-4+D3)/7
5	=-0,33*B4	=(-3-A5+C4)/6	=-(16-B4-2*D4)/8	=(2+C4+3*E4)/10	=(-4+D4)/7
6	=-0,33*B5	=(-3-A6+C5)/6	=-(16-B5-2*D5)/8	=(2+C5+3*E5)/10	=(-4+D5)/7
7	=-0,33*B6	=(-3-A7+C6)/6	=-(16-B6-2*D6)/8	=(2+C6+3*E6)/10	=(-4+D6)/7
8	=-0,33*B7	=(-3-A8+C7)/6	=-(16-B7-2*D7)/8	=(2+C7+3*E7)/10	=(-4+D7)/7
9	=-0,33*B8	=(-3-A9+C8)/6	=-(16-B8-2*D8)/8	=(2+C8+3*E8)/10	=(-4+D8)/7
10	=-0,33*B9	=(-3-A10+C9)/6	=-(16-B9-2*D9)/8	=(2+C9+3*E9)/10	=(-4+D9)/7
11	=-0,33*B10	=(-3-A11+C10)/6	=-(16-B10-2*D10)/8	=(2+C10+3*E10)/10	=(-4+D10)/7
12	=-0,33*B11	=(-3-A12+C11)/6	=-(16-B11-2*D11)/8	=(2+C11+3*E11)/10	=(-4+D11)/7
13	=-0,33*B12	=(-3-A13+C12)/6	=-(16-B12-2*D12)/8	=(2+C12+3*E12)/10	=(-4+D12)/7

Лист1 Лист2 Лист3

Среднее: -0,696945251 Количество: 55 Сумма: -38,3319888 100%

Прогонка в пакете Mathcad

The screenshot shows the Mathcad interface with the following content:

задание исходных данных

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 0.33 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 16 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

прямой ход прогонки

$$s_0 := \frac{c_0}{b_0} \quad i := 1..3 \quad s_i := \frac{c_i}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}} \quad s = \begin{pmatrix} 0.33 \\ -0.176 \\ -0.256 \\ -0.308 \end{pmatrix}$$
$$g_0 := \frac{f_0}{b_0} \quad i := 1..4 \quad g_i := \frac{f_i - a_i \cdot g_{i-1}}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.529 \\ -2.113 \\ -0.012 \\ -0.599 \end{pmatrix}$$

обратный ход прогонки

$$x_4 := g_4 \quad i := 3..0 \quad x_i := g_i - s_i \cdot x_{i+1} \quad x = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.911 \\ -2.163 \\ -0.196 \\ -0.599 \end{pmatrix}$$

A "Matrix" pop-up window is visible on the right side of the screen, showing various matrix operations like \times_n , \times^{-1} , $|x|$, $f(t)$, $M^<$, M^T , $m..n$, $\hat{r} \cdot \hat{r}$, $\hat{r} \times \hat{r}$, Σv , and $\frac{d}{dt}$.

На практике часто приходится сталкиваться не только с системами линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей A , но и с прямоугольной матрицей размера $M \times N$, т. е. системами, в которых число неизвестных не равно числу уравнений (как больше, так и меньше него). Такие системы для решения требуют специфического подхода.

Неклассические системы

Рассмотренные выше системы предполагают равно количество уравнений и неизвестных. Это означает, что матрица из коэффициентов перед неизвестными (A) квадратная. Для таких систем доказано, что решение существует и единственно, если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$). **Плохо обусловленная система** – система, у которой определитель отличен от нуля, но очень близок к нулю.

Несмотря на то, что ^иплохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике искать их чаще всего не имеет смысла

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6.01y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2.01y = 3 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$

Mathcad - [Безымянный:1]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 **B** *I* U $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ 200% ?

Мой веб-узел Go

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6.01 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A1 := \begin{pmatrix} 1 & 2.01 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 803 \\ -400 \end{pmatrix} \quad + \quad \text{lsolve}(A1, B) = \begin{pmatrix} -265 \\ 133.333 \end{pmatrix}$$

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО Страница 1

Переопределенные и недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений

- Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений – системы, в которых число уравнений больше числа неизвестных
- Недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений – системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных