Лекция 4

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Методы простой итерации и итерации Зейделя. Метод прогонки.

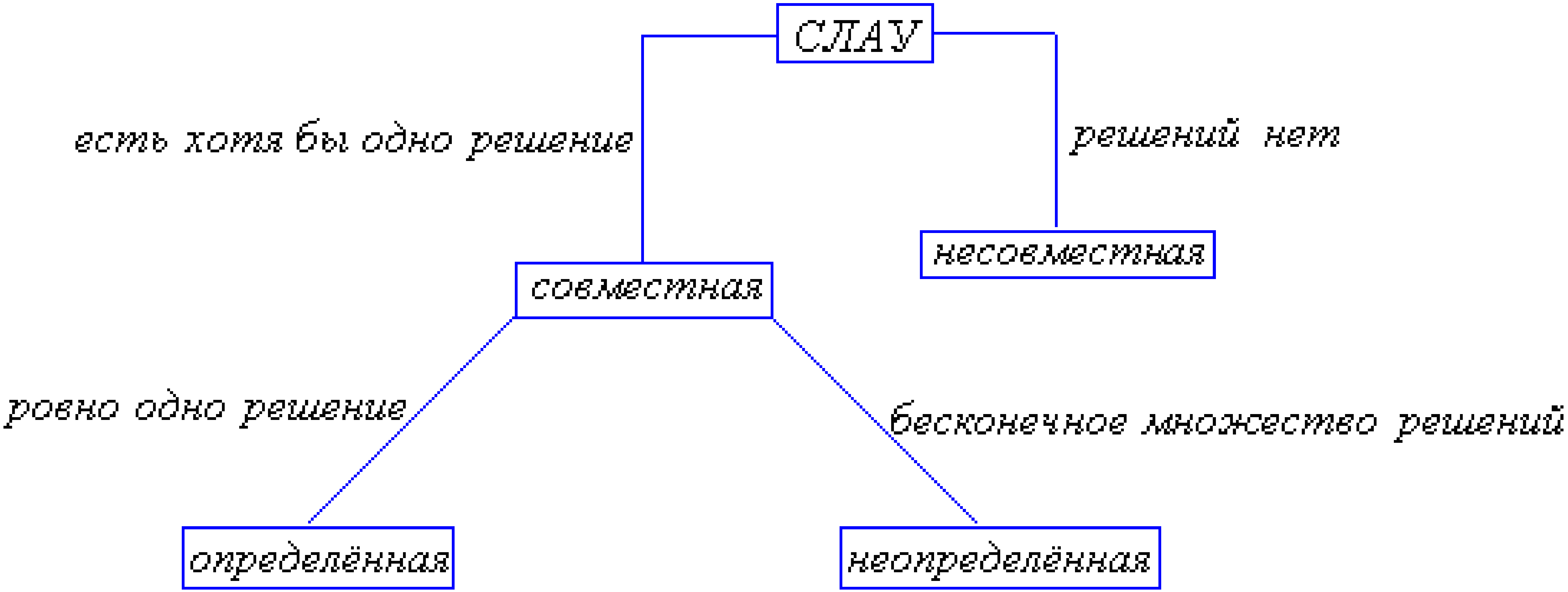
система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $\boldsymbol{a_{ij}}$ - коэффициенты перед неизвестными уравнений, $\boldsymbol{x_i}$ - неизвестные величины, $\boldsymbol{b_i}$ - свободные члены уравнений.

Определение

Решением системы линейных алгебраических уравнений являются те значения неизвестных, при которых все уравнения системы обращаются в тождество


СЛАУ
есть хотя бы одно решение
решений нет
совместная
несовместная
ровно одно решение
бесконечное множество решений
определённая
неопределённая

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

прямые

Гаусса, Крамера, Жордана, окаймления, ортогонализации, главных элементов, метод квадратного корня, **метод прогонки**

итерационные

метод итерации, метод итерации Зейделя

Прямые методы дают решение за конечное число действий, просты и универсальны. Решение реализуют в два шага: систему преобразуют к более простому виду, затем решают упрощенную систему и получают решение.

Итерационные методы привлекают простотой реализации, требуют задания начального приближения, применяются для решения систем специального вида. Скорость сходимости итерационного процесса зависит от свойств матрицы коэффициентов перед неизвестными и выбора начального приближения

Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Позволяет найти приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений с заданной точностью ε

Условия сходимости метода

Все коэффициенты $\boldsymbol{a_{ii}}$ отличны от нуля и справедливы неравенства

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

Метод простой итерации

Перепишем уравнения системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \ldots - a_{1n} \cdot x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_{21} - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \ldots - a_{2n} \cdot x_n\right) \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_{n1} - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}\right) \end{cases}$$

Возьмем приближенное решение системы x_1^0, x_2^0, x_3^0,… x_n^0 – нулевое приближение, подставим в формулы и вычислим первое приближение x_1^1, x_2^1, x_3^1,… x_n^1

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_{21} - a_{21} \cdot x_1^{(0)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_{n1} - a_{n1} \cdot x_1^{(0)} - a_{n2} \cdot x_2^{(0)} - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(0)}\right) \end{cases}$$

подставим x_1^1, x_2^1, x_3^1,... x_n^1 в формулы и вычислим второе приближение x_1^2, x_2^2, x_3^2,... x_n^2. *Повторяем вычисления до выполнения условия достижения точности для всех* x_i

$$\max\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon$$

Задание

Имеется система линейных алгебраических уравнений

$$.\quad \begin{cases} 20\cdot x_1 - x_2 - 3\cdot x_3 - 5\cdot x_4 = 15 \\ 2\cdot x_1 + 18\cdot x_2 + 5\cdot x_4 = 83 \\ x_1 + 5\cdot x_2 + 32\cdot x_3 + 6\cdot x_4 = 18 \\ 3\cdot x_2 + x_3 + 12\cdot x_4 = 8 \end{cases}$$

Найти решение системы методом итерации с точностью 10^{-3}.

проверка условия сходимости

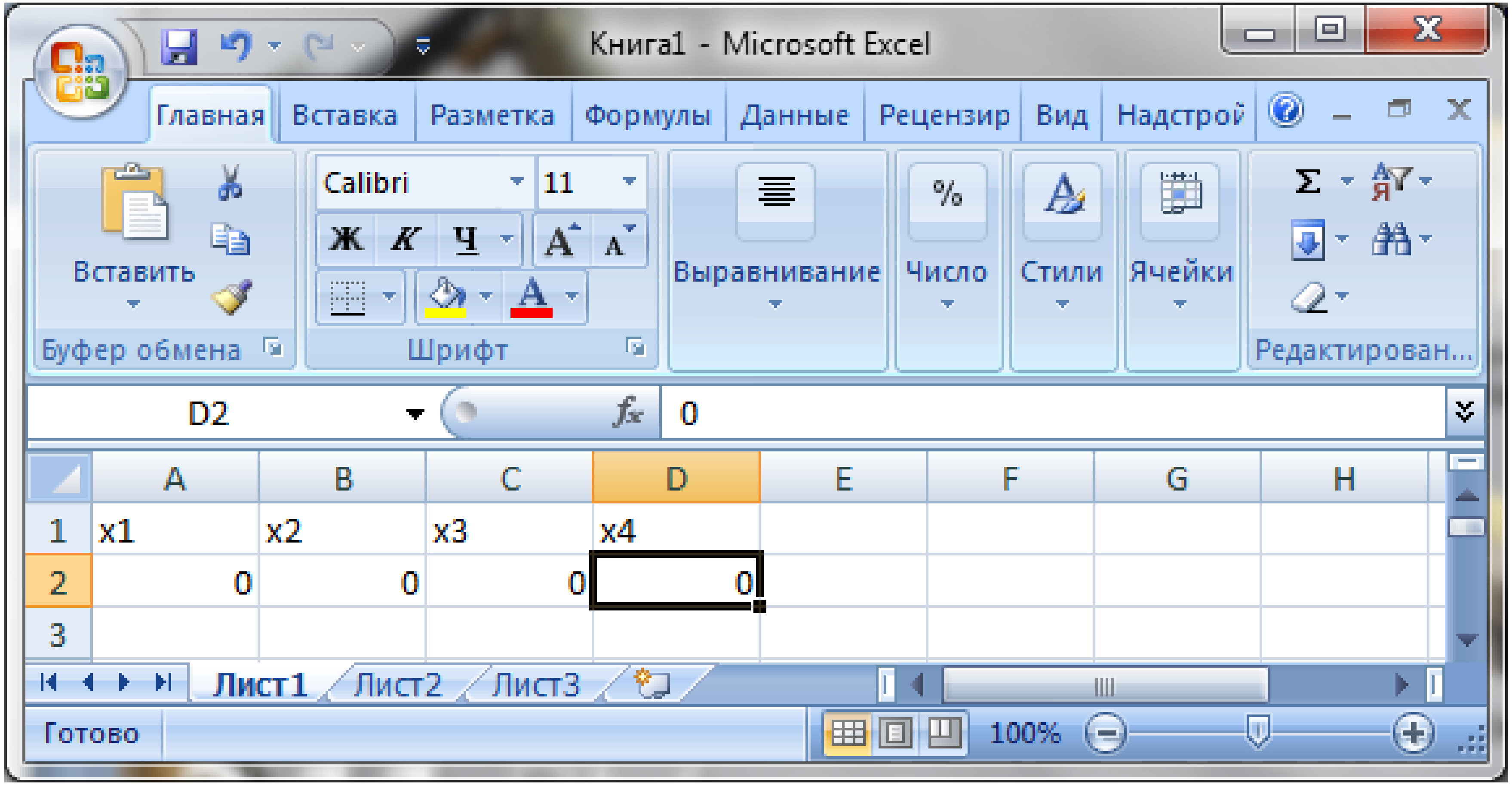
$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

- Первое уравнение 20 сравниваем с суммой 1+1+3+5 $\Rightarrow$ условие справедливо
- Второе уравнение 18 сравниваем с суммой 2+5 $\Rightarrow$ условие справедливо
- Третье уравнение 32 сравниваем с суммой 1+5+6 $\Rightarrow$ условие справедливо
- Четвертое уравнение 12 сравниваем с суммой 3+2 $\Rightarrow$ условие справедливо.

Перепишем уравнения системы в виде

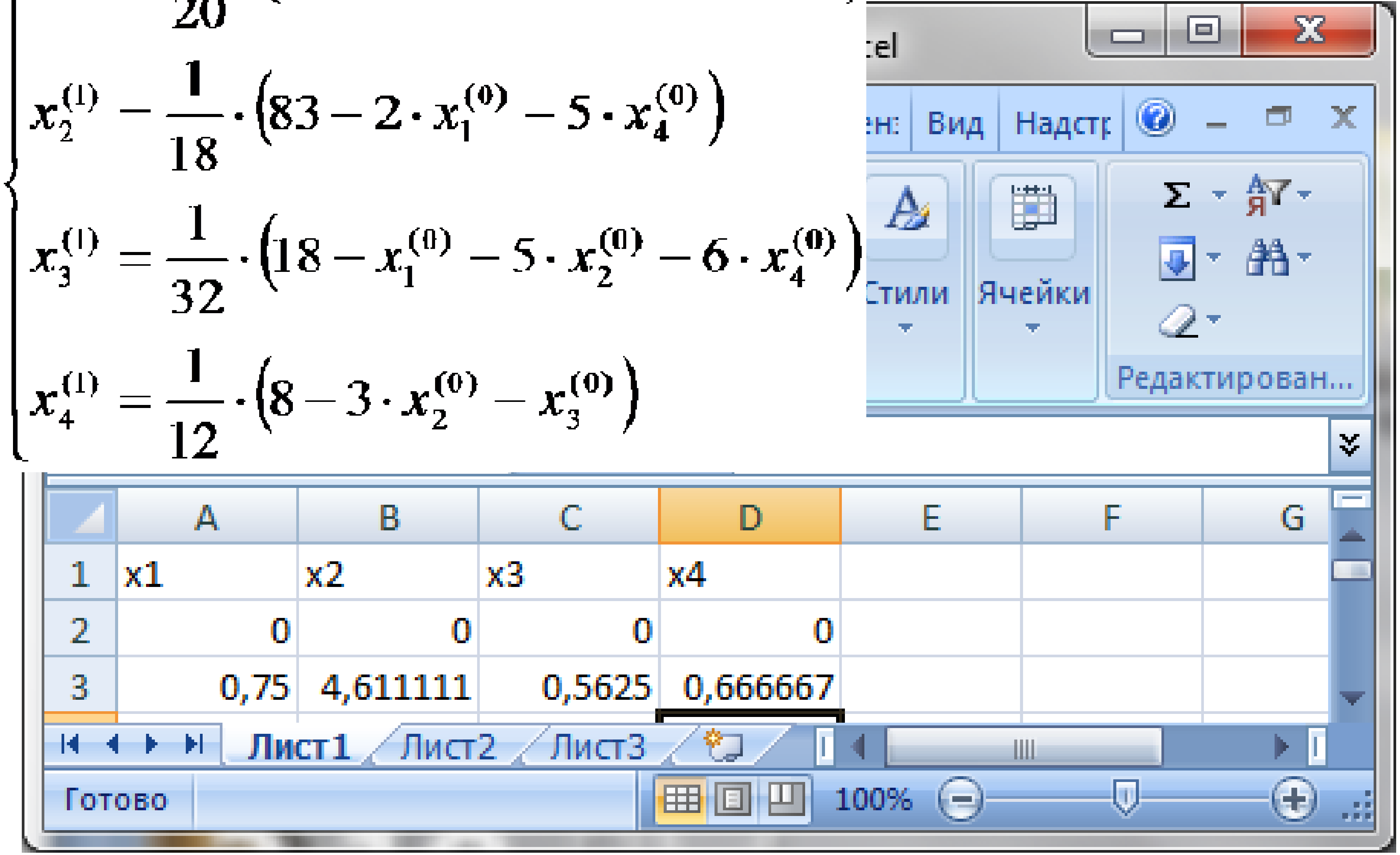
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{20} \cdot \left(15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{18} \cdot \left(83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{32} \cdot \left(18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_4^{(1)} = \dfrac{1}{12} \cdot \left(8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \end{cases}$$

Решение в Microsoft Excel.
Занесение в ячейки таблицы нулевого приближения



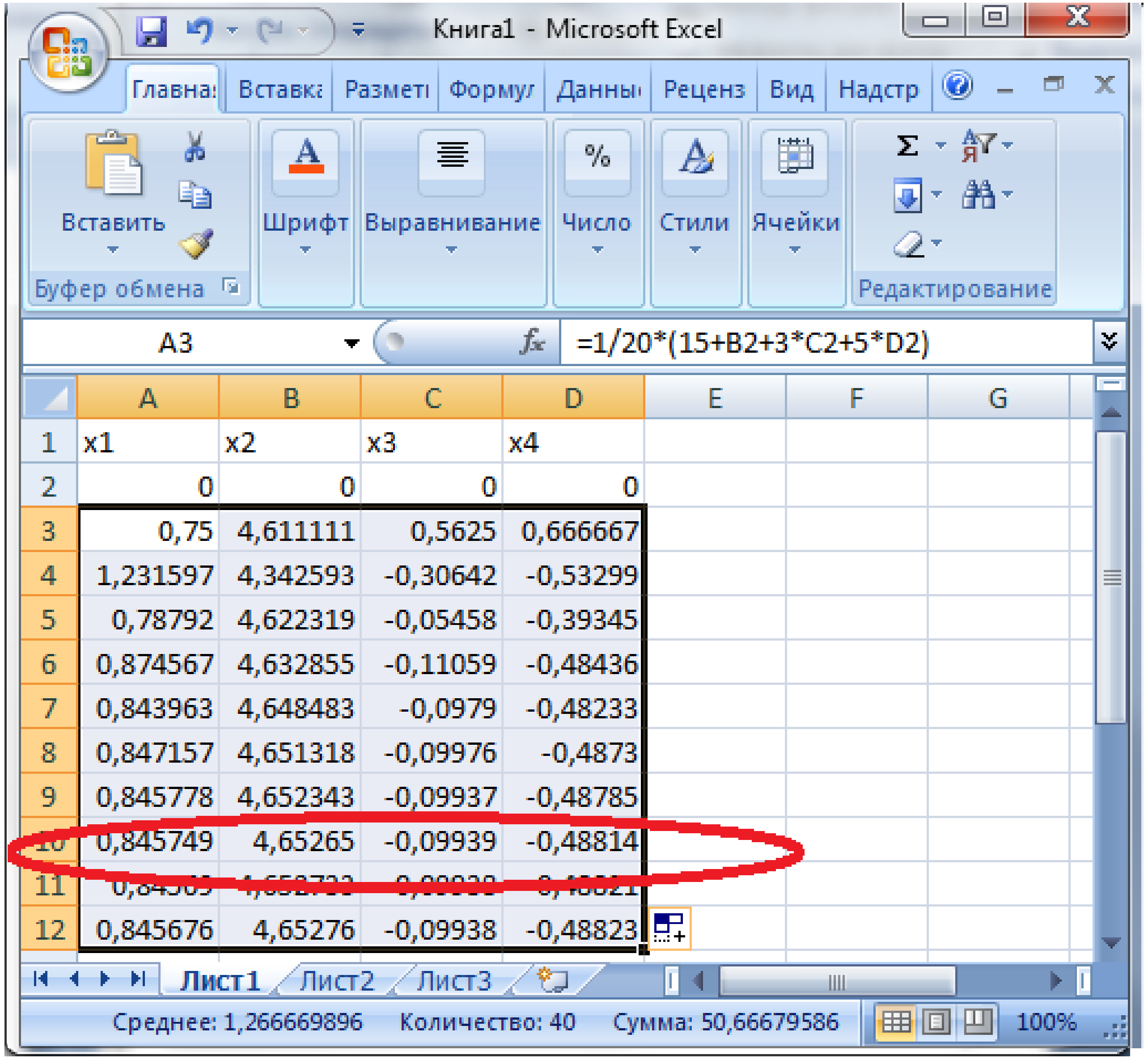
Вычисление первого приближения

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{1}{20} \cdot \left(15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\
x_2^{(1)} = \dfrac{1}{18} \cdot \left(83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\
x_3^{(1)} = \dfrac{1}{32} \cdot \left(18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}\right) \\
x_4^{(1)} = \dfrac{1}{12} \cdot \left(8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)
\end{cases}
$$



	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3	x4			
2	0	0	0	0			
3	0,75	4,611111	0,5625	0,666667			

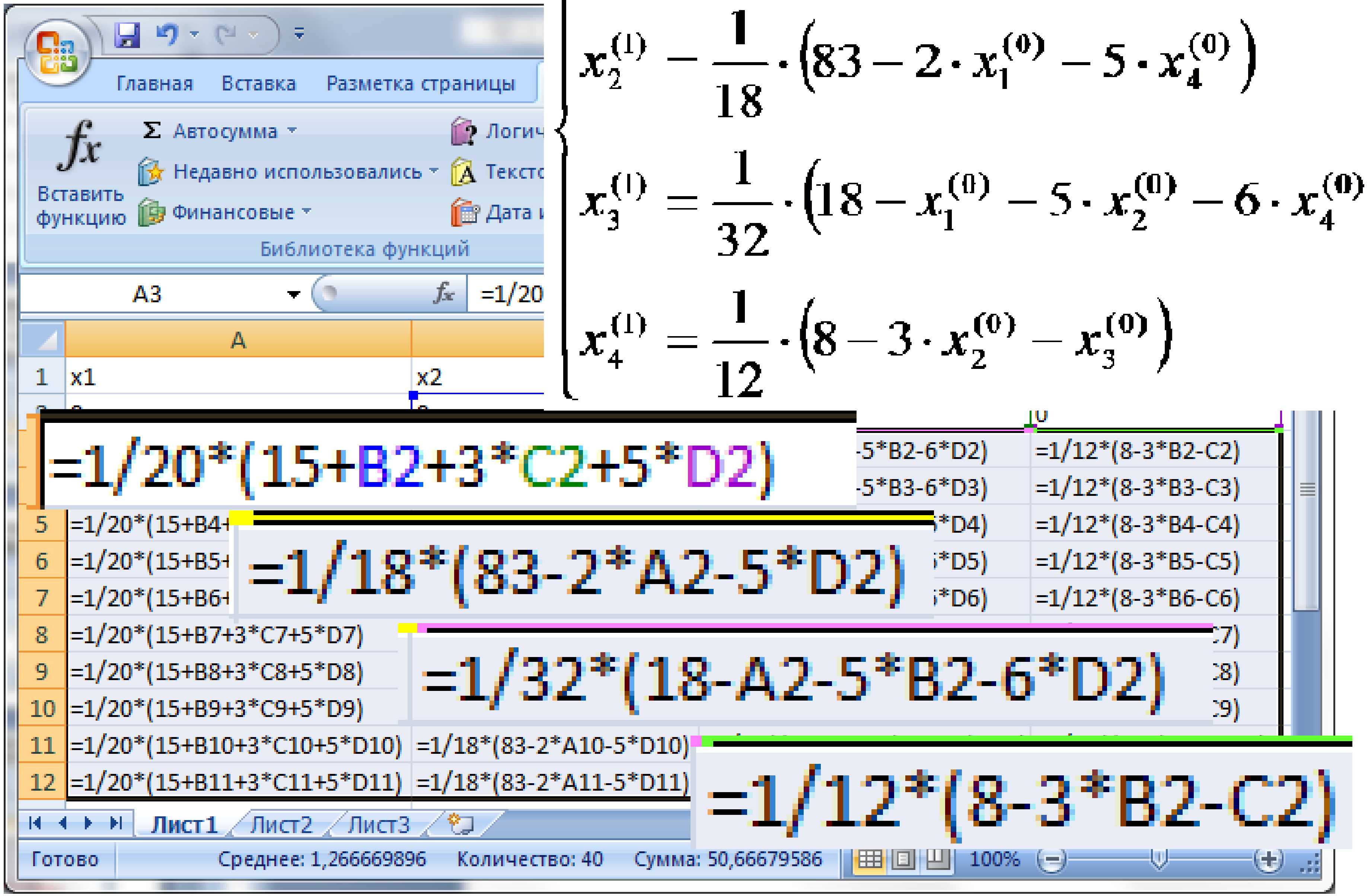
Получение следующих приближений копированием формул



	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	x4
2	0	0	0	0
3	0,75	4,611111	0,5625	0,666667
4	1,231597	4,342593	-0,30642	-0,53299
5	0,78792	4,622319	-0,05458	-0,39345
6	0,874567	4,632855	-0,11059	-0,48436
7	0,843963	4,648483	-0,0979	-0,48233
8	0,847157	4,651318	-0,09976	-0,4873
9	0,845778	4,652343	-0,09937	-0,48785
10	0,845749	4,65265	-0,09939	-0,48814
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	0,845676	4,65276	-0,09938	-0,48823

Режим отображен

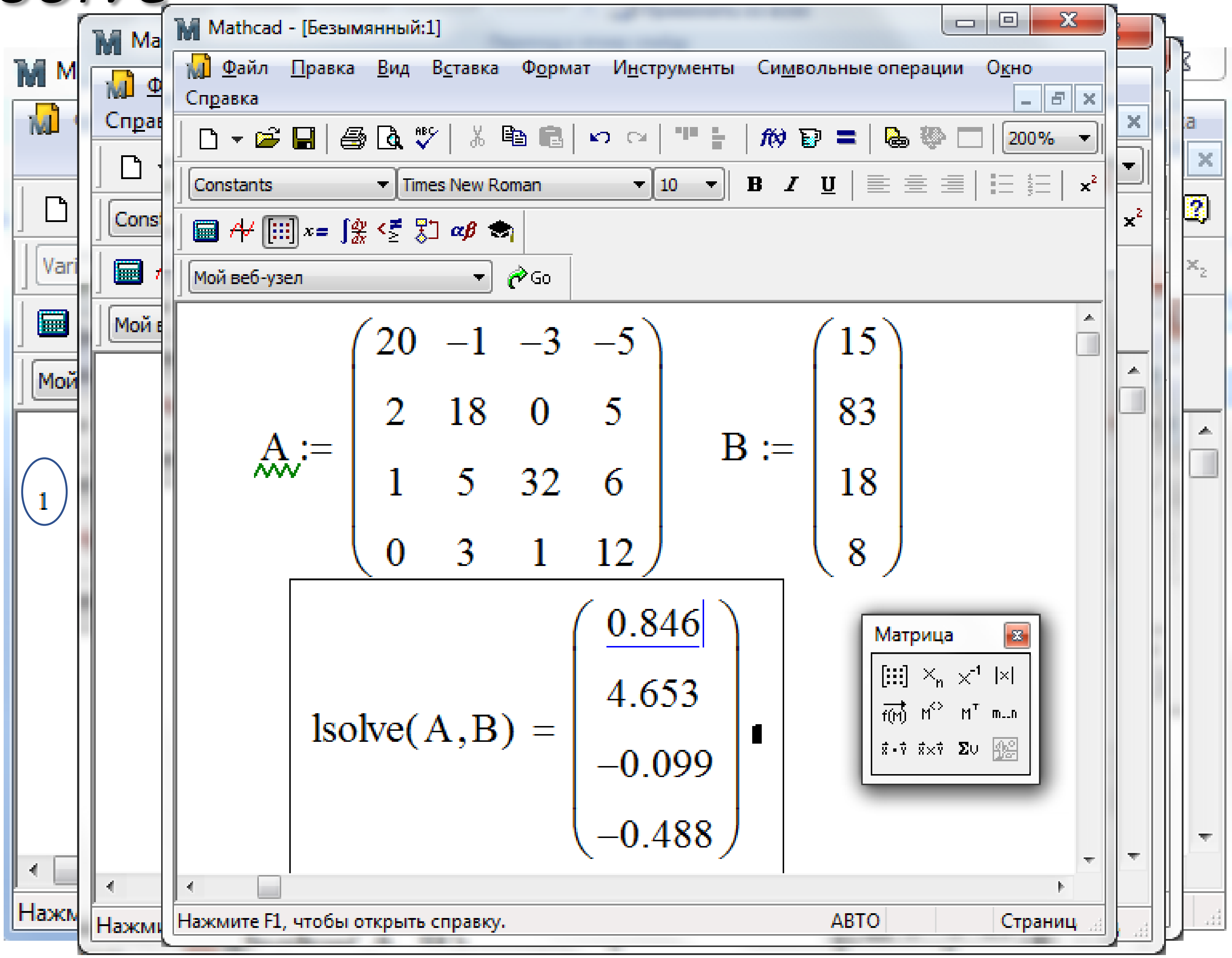
$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{1}{20}\cdot\left(15 + x_2^{(0)} + 3\cdot x_3^{(0)} + 5\cdot x_4^{(0)}\right)\\[2ex]
x_2^{(1)} = \dfrac{1}{18}\cdot\left(83 - 2\cdot x_1^{(0)} - 5\cdot x_4^{(0)}\right)\\[2ex]
x_3^{(1)} = \dfrac{1}{32}\cdot\left(18 - x_1^{(0)} - 5\cdot x_2^{(0)} - 6\cdot x_4^{(0)}\right)\\[2ex]
x_4^{(1)} = \dfrac{1}{12}\cdot\left(8 - 3\cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)
\end{cases}
$$



Решение в MathCAD **методом Гаусса** с использованием функции *lsolve*

1. Задать матрицу коэффициентов перед неизвестными системы
2. Задать столбец свободных членов системы
3. Написать имя функции с аргументами
4. Нажать знак равенства для вывода решения

lsolve


Mathcad - [Безымянный:1]
Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно
Справка
200%
Constants
Times New Roman
10
Мой веб-узел
Go
A := (20 −1 −3 −5; 2 18 0 5; 1 5 32 6; 0 3 1 12)
B := (15; 83; 18; 8)
lsolve(A,B) = (0.846; 4.653; −0.099; −0.488)
Матрица
Нажмите F1, чтобы открыть справку.
АВТО
Страниц

Решение в MathCAD **методом итерации** с использованием функции find

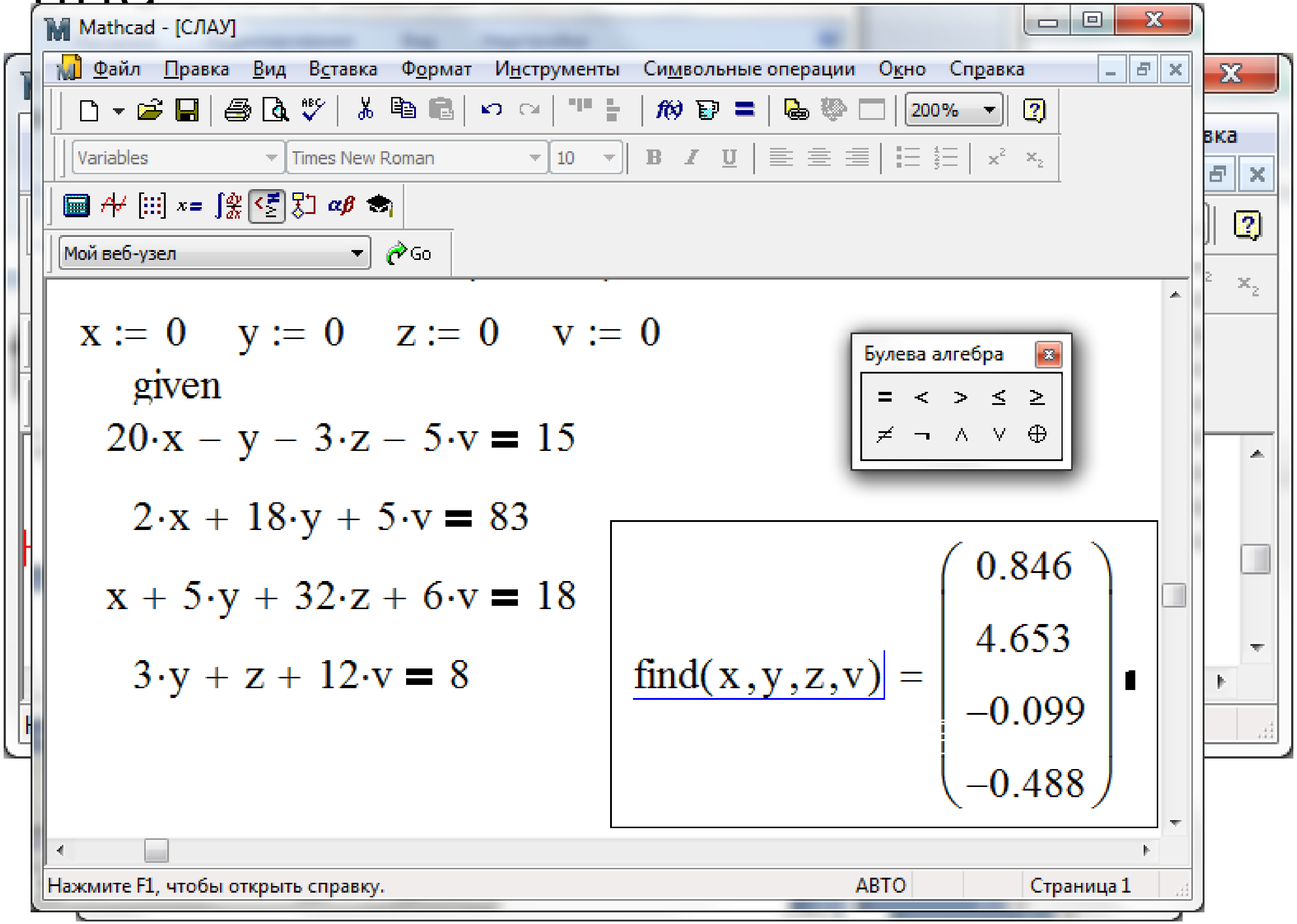
функция ***Find*** позволяет находить

- ✓Значения корней нелинейных уравнений
- ✓решения системы линейных алгебраических уравнений
- ✓решения системы линейных уравнений

Реализация функции find

- Задание начальных приближений (нулевых): $x{:=}x_0$, $y{:=}y_0$, $z{:=}z_0$,…
- Ввод слова ***Given****,* указывающего на то, что далее следует система уравнений
- Ввод системы уравнений; (знак равенства ставится «**жирный**» с палитры «**логический**»
- Ввод функции ***Find(x,y,z,…)***
- Получение решения нажатием клавиши **=**.

find


Mathcad - [СЛАУ]
Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка
200%
Variables
Times New Roman
10
Мой веб-узел
Go
x := 0 y := 0 z := 0 v := 0
given
20·x − y − 3·z − 5·v = 15
2·x + 18·y + 5·v = 83
x + 5·y + 32·z + 6·v = 18
3·y + z + 12·v = 8
Булева алгебра
find(x,y,z,v) = (0.846, 4.653, −0.099, −0.488)
Нажмите F1, чтобы открыть справку.
АВТО
Страница 1

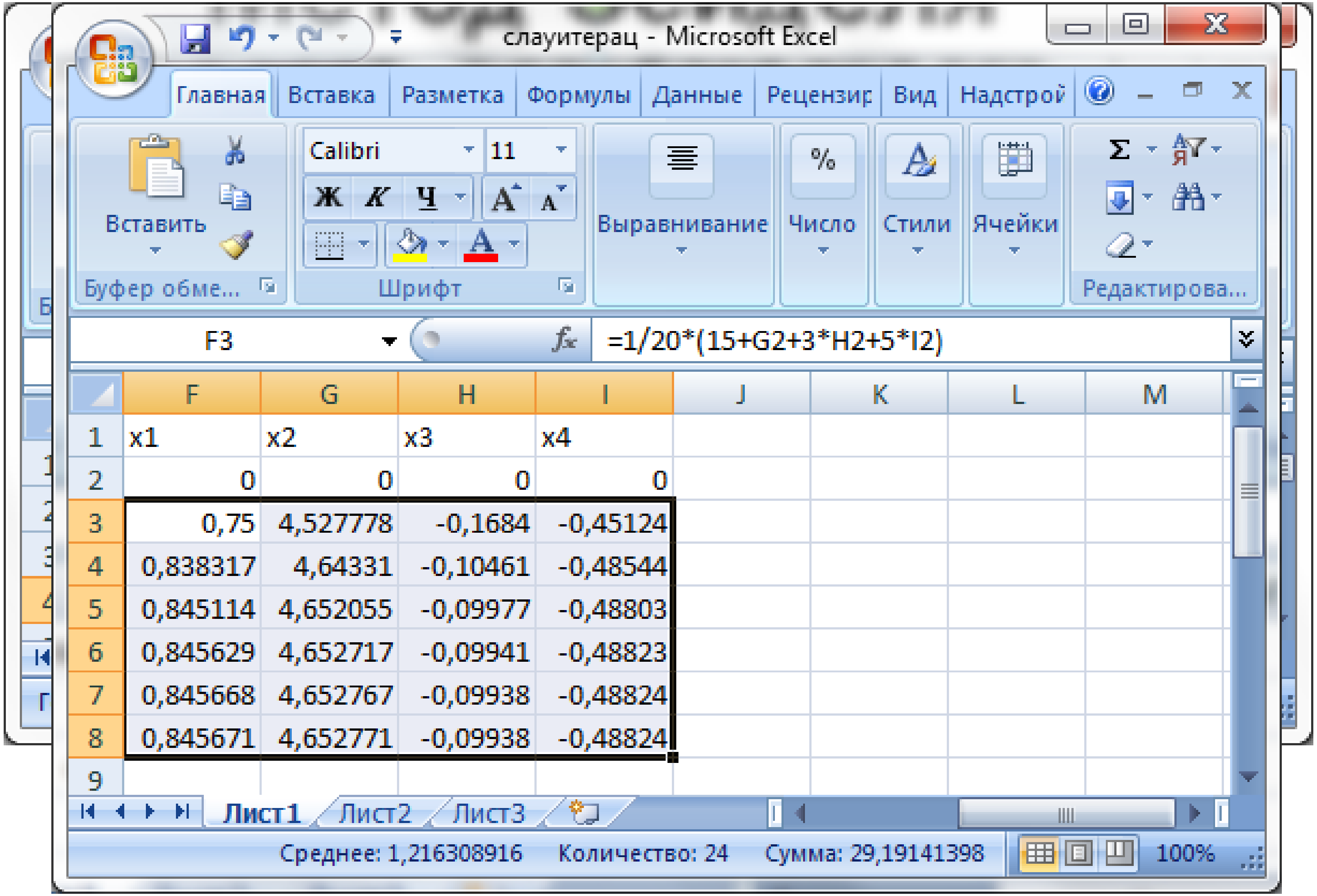
Метод итерации Зейделя

В методе простой итерации при вычислении следующего приближения используются значения предыдущего. В методе Зейделя предложено при получении следующего приближения использовать не только значения предыдущего шага итерации, но и уже полученные значения текущей итерации

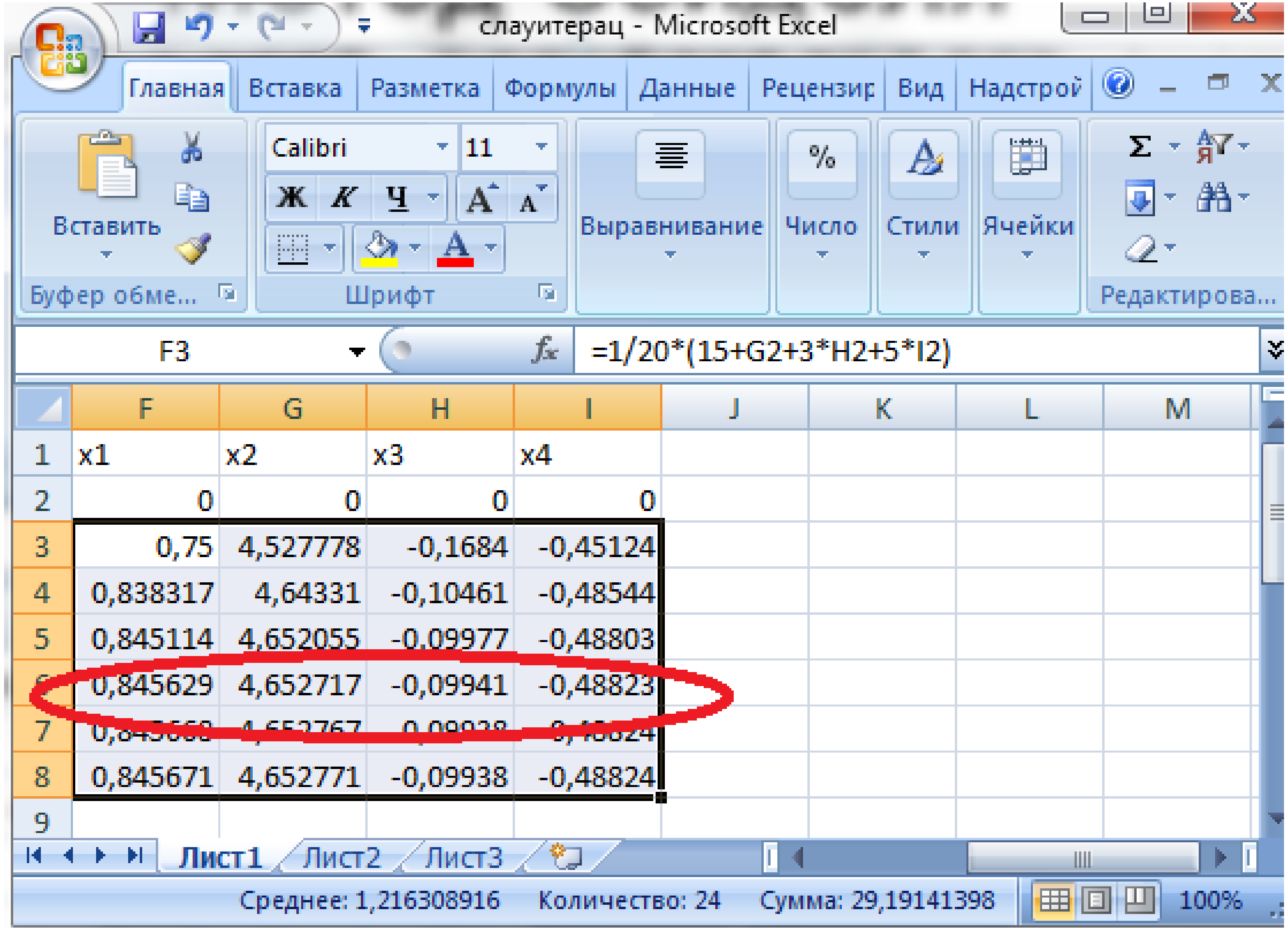
Формулы итерации Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(1)} - a_{n2} \cdot x_2^{(1)} - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(1)}\right) \end{cases}$$

Метод Зейделя

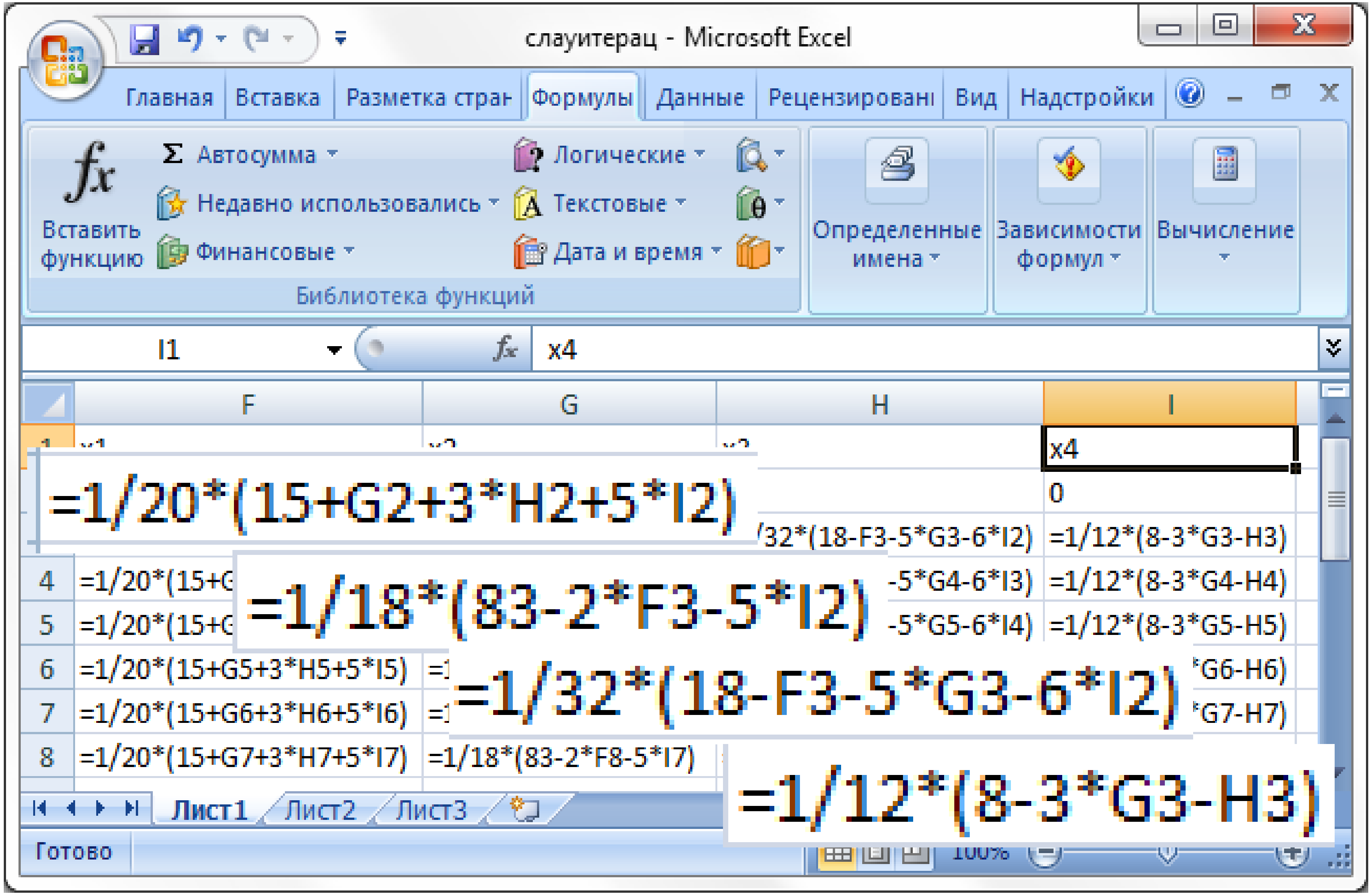


Точность вычислений достигнута



	F	G	H	I
1	x1	x2	x3	x4
2	0	0	0	0
3	0,75	4,527778	-0,1684	-0,45124
4	0,838317	4,64331	-0,10461	-0,48544
5	0,845114	4,652055	-0,09977	-0,48803
6	0,845629	4,652717	-0,09941	-0,48823
7	[illegible]	4,652767	-0,09938	-0,48824
8	0,845671	4,652771	-0,09938	-0,48824
9				

Режим отображения формул



Метод прогонки

Метод **Гаусса** заключается в приведении матрицы коэффициентов перед неизвестными к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1' \\ \qquad\qquad a_{22}'x_2 + ... + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \qquad\qquad\qquad ..... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}'x_n = b_n' \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса

$$x_n = b_n' \qquad x_{n-1} = b_n' - a_{n-1n}' \cdot x_n$$

<u>Метод прогонки –</u> метод Гаусса для систем специального вида:

матрица коэффициентов трехдиагонального вида (n=4)

$$\begin{cases} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 = f_1 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ \qquad\qquad a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases}$$

Прямой ход метода прогонки

Как в прямом ходе метода Гаусса, мы достигаем треугольного вида матрицы коэффициентов умножением всех элементов строки на число и вычитанием ее из нижестоящей строки системы.

Результат прямого хода прогонки

$$\begin{cases} x_1 + s_1 \cdot x_2 = g_1 \\ \qquad x_2 + s_2 \cdot x_3 = g_2 \\ \qquad\qquad x_3 + s_3 \cdot x_4 = g_3 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = g_4 \end{cases}$$

$$s_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad g_1 = \frac{f_1}{b_1} \qquad\qquad g_i = \frac{f_i - a_i \cdot g_{i-1}}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}}$$

$$s_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \cdot s_{i-1}} \qquad i=2,\ 3,\ 4$$

Получение ответа обратным ходом прогонки по формулам

$$x_4 = g_4$$

$$x_i = g_i - s_i \cdot x_{i+1}$$ i=3, 2, 1.

Задание

Найти решение системы методами итерации и прогонки

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 6\cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10\cdot x_4 - 3\cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7\cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

Решение методом прогонки

Систему приводим к виду, когда коэффициент в первом уравнении перед первой неизвестной равняется единице

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}33 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7 \cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

Решение в Microsoft Excel

$$\begin{cases} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 = f_1 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}33 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7 \cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

Буфер обм... Шрифт Выравнивание Числ

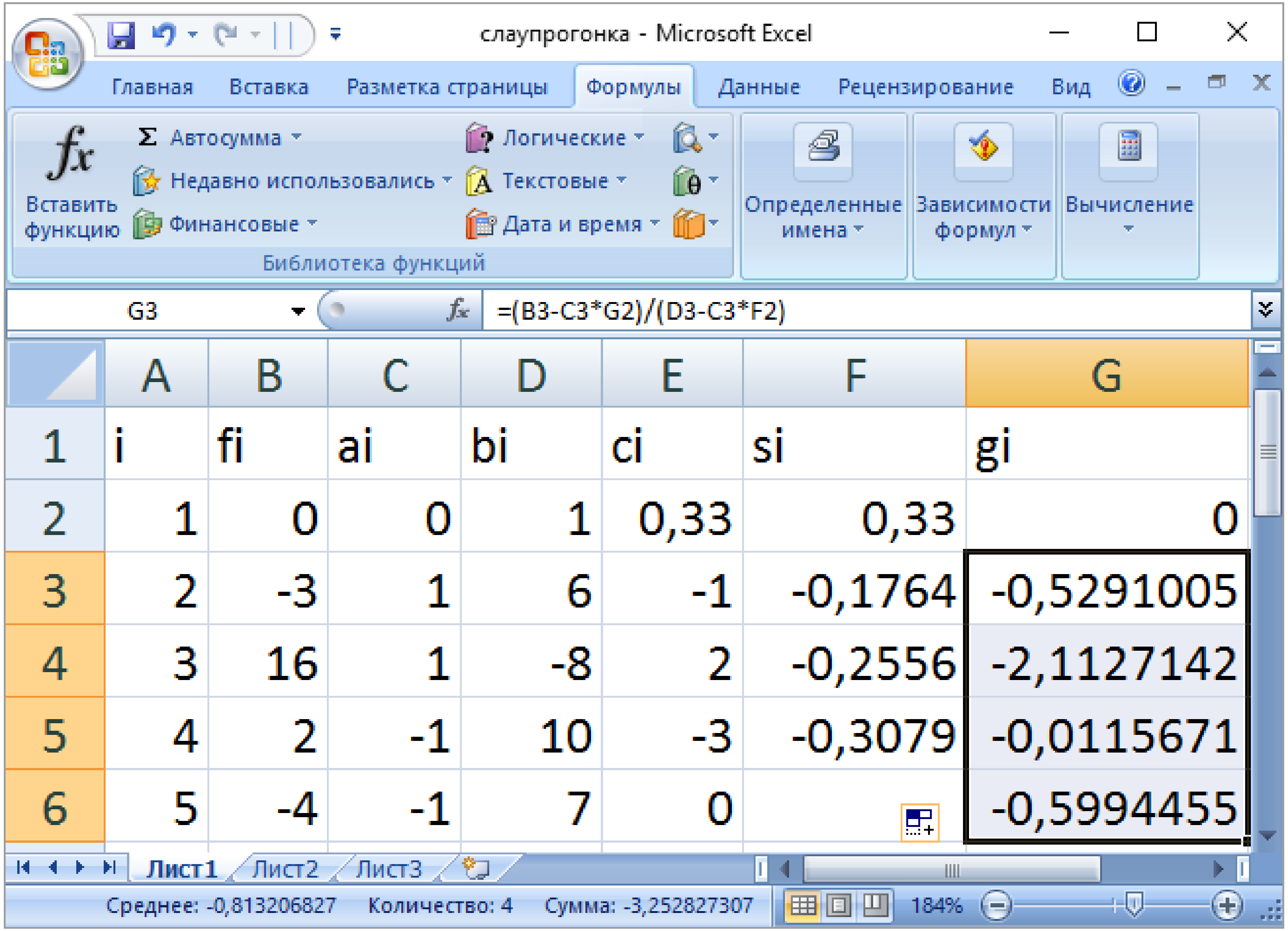
E6 f_x 0

	A	B	C	D	E
1	i	fi	ai	bi	ci
2	1	0	0	1	0,33
3	2	-3	1	6	-1
4	3	16	1	-8	2
5	4	2	-1	10	-3
6	5	-4	-1	7	0

Лист1 Лист2 Лист3

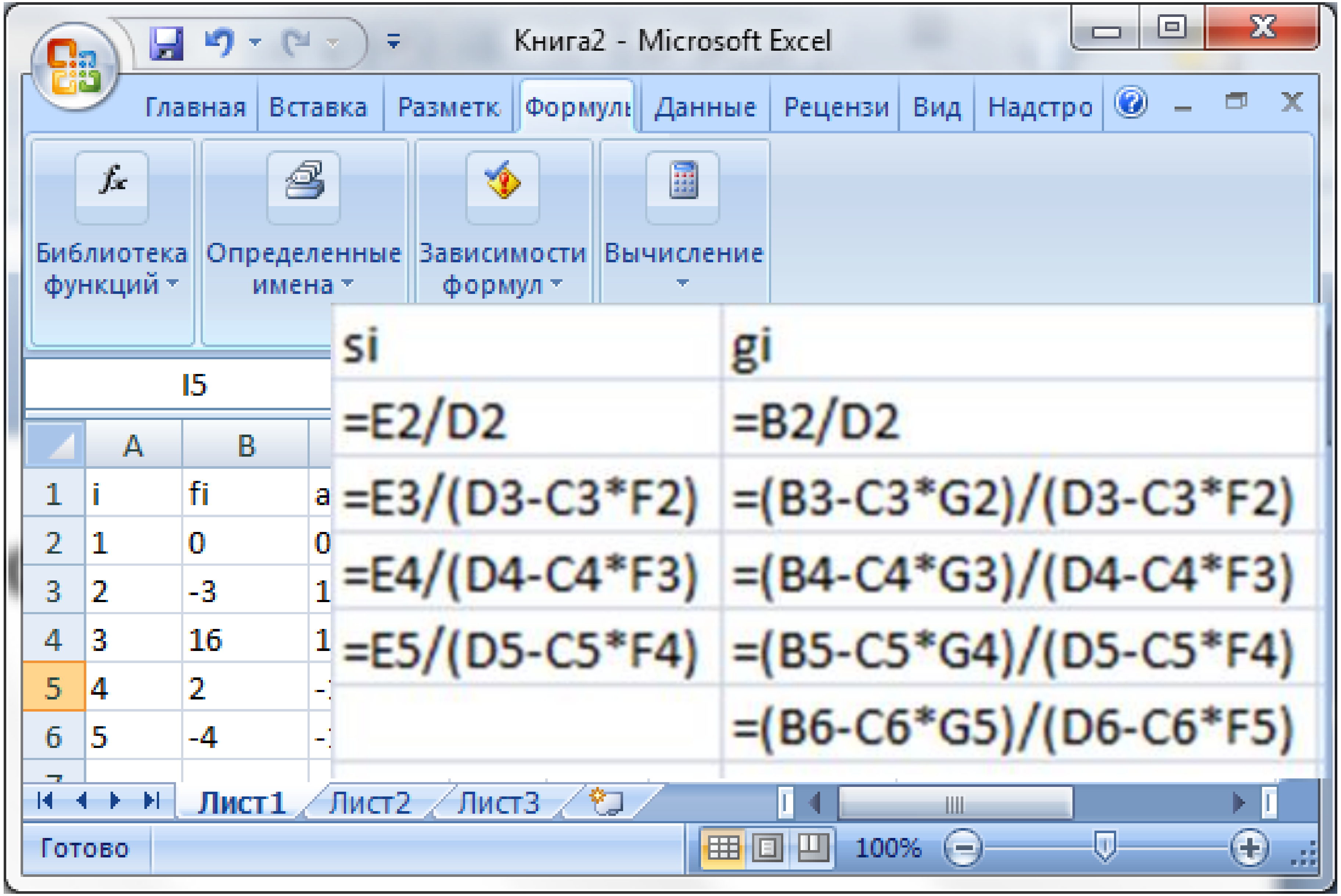
Готово 178%

Выполнение прямого хода



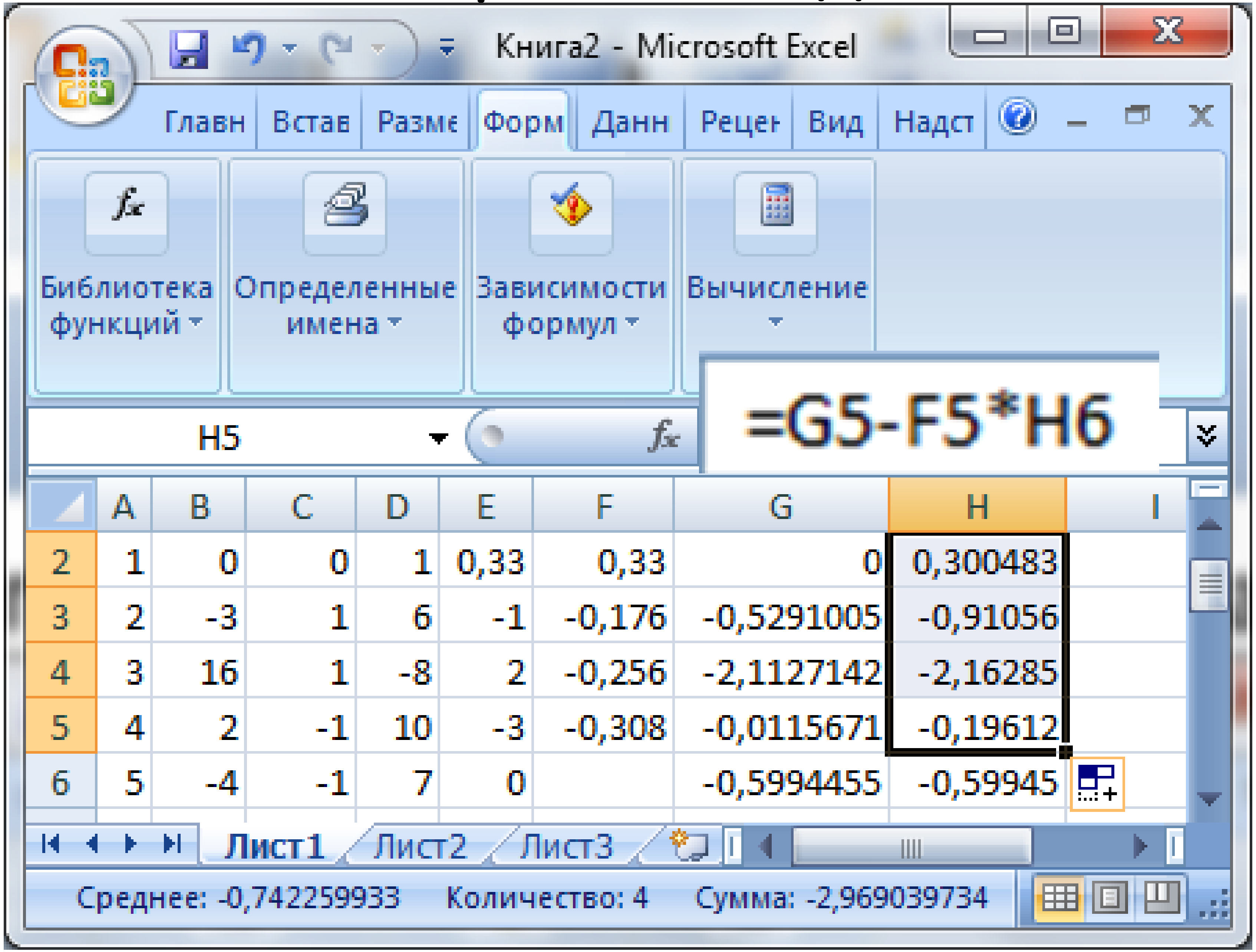
	A	B	C	D	E	F	G
1	i	fi	ai	bi	ci	si	gi
2	1	0	0	1	0,33	0,33	0
3	2	-3	1	6	-1	-0,1764	-0,5291005
4	3	16	1	-8	2	-0,2556	-2,1127142
5	4	2	-1	10	-3	-0,3079	-0,0115671
6	5	-4	-1	7	0		-0,5994455

Формулы прямого хода



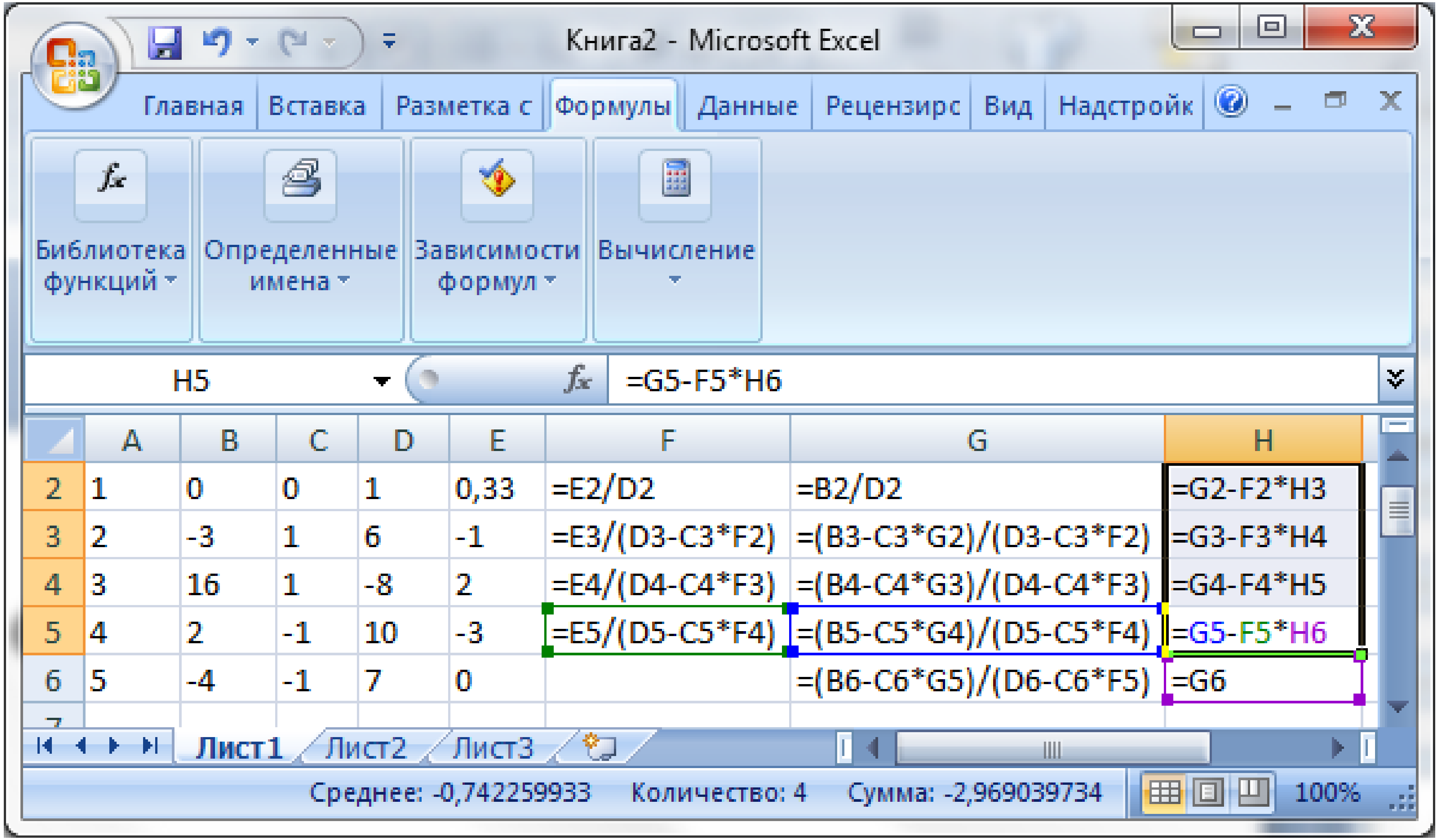
si	gi
=E2/D2	=B2/D2
=E3/(D3-C3*F2)	=(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)
=E4/(D4-C4*F3)	=(B4-C4*G3)/(D4-C4*F3)
=E5/(D5-C5*F4)	=(B5-C5*G4)/(D5-C5*F4)
	=(B6-C6*G5)/(D6-C6*F5)

Выполнение обратного хода



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	1	0	0	1	0,33	0,33	0	0,300483	
3	2	-3	1	6	-1	-0,176	-0,5291005	-0,91056	
4	3	16	1	-8	2	-0,256	-2,1127142	-2,16285	
5	4	2	-1	10	-3	-0,308	-0,0115671	-0,19612	
6	5	-4	-1	7	0		-0,5994455	-0,59945	

Решение в режиме отображения формул



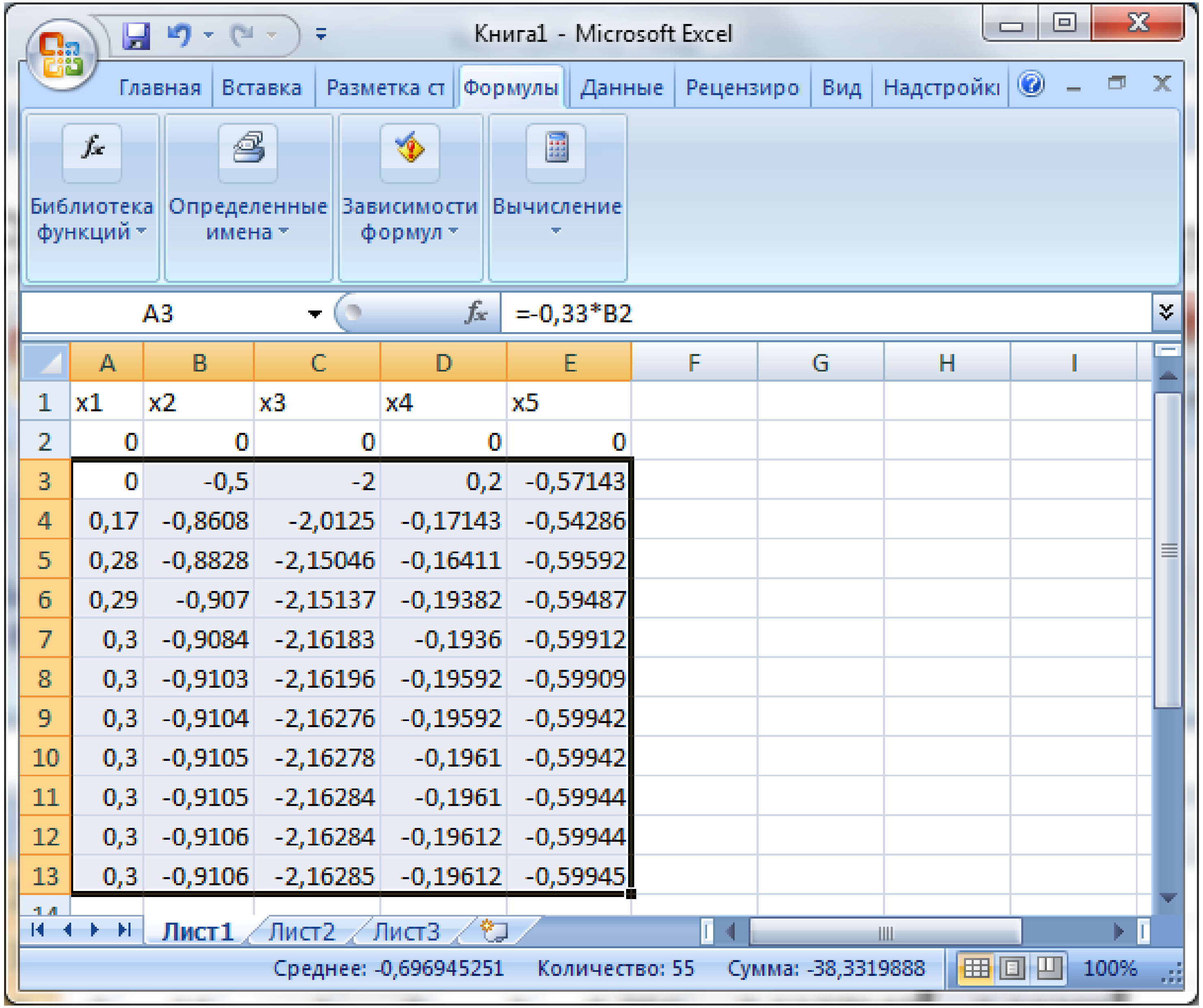
	A	B	C	D	E	F	G	H
2	1	0	0	1	0,33	=E2/D2	=B2/D2	=G2-F2*H3
3	2	-3	1	6	-1	=E3/(D3-C3*F2)	=(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)	=G3-F3*H4
4	3	16	1	-8	2	=E4/(D4-C4*F3)	=(B4-C4*G3)/(D4-C4*F3)	=G4-F4*H5
5	4	2	-1	10	-3	=E5/(D5-C5*F4)	=(B5-C5*G4)/(D5-C5*F4)	=G5-F5*H6
6	5	-4	-1	7	0		=(B6-C6*G5)/(D6-C6*F5)	=G6

Сопоставление с решением методом итерации

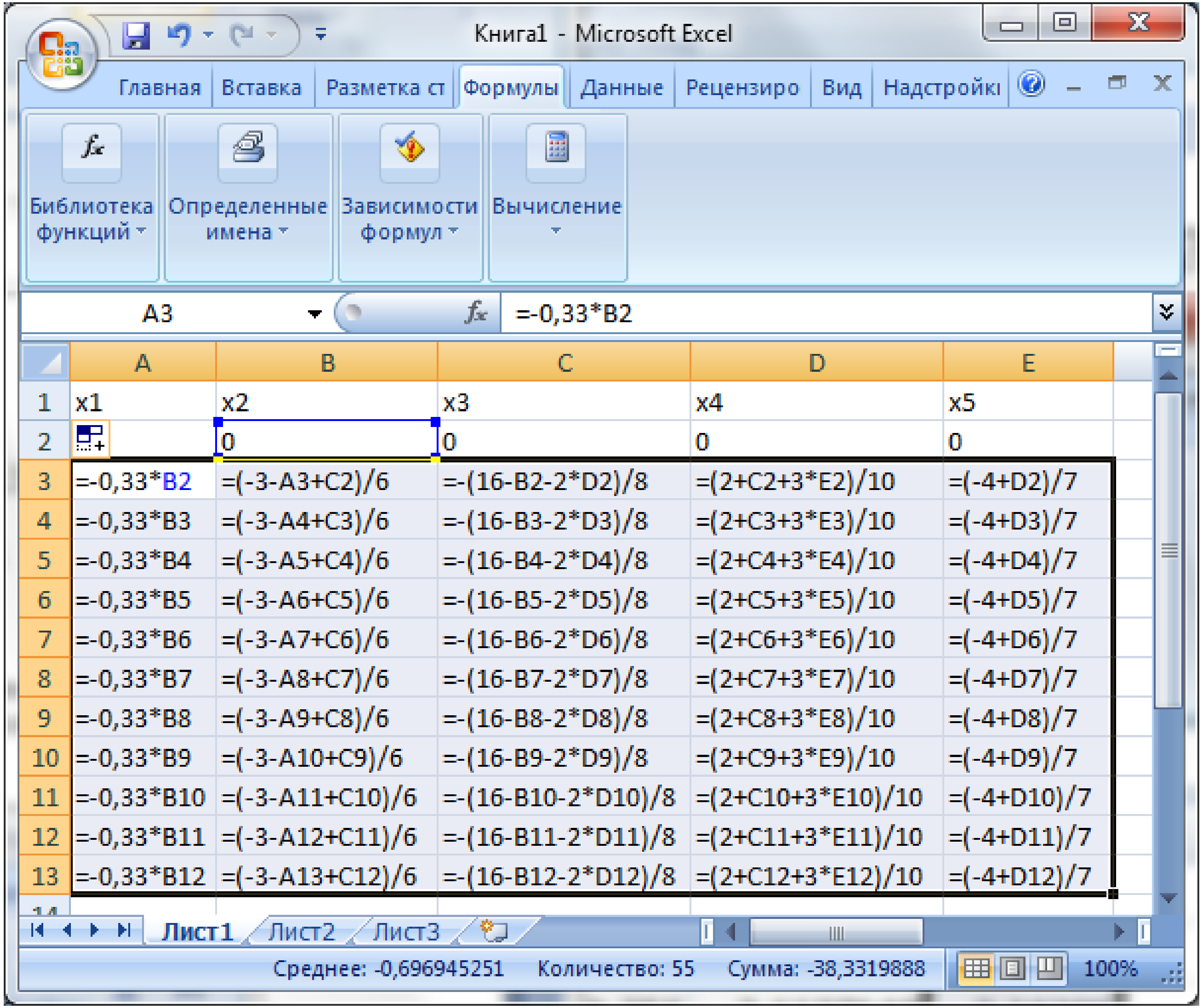
Преобразуем уравнения системы применения метода итерации

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}33 \cdot x_2 \\ x_2 = \dfrac{-3 - x_1 + x_3}{6} \\ x_3 = -\dfrac{16 - x_2 - 2 \cdot x_4}{8} \\ x_4 = \dfrac{2 + x_3 + 3 \cdot x_5}{10} \\ x_5 = \dfrac{-4 + x_4}{7} \end{cases}$$

Решение методом итерации

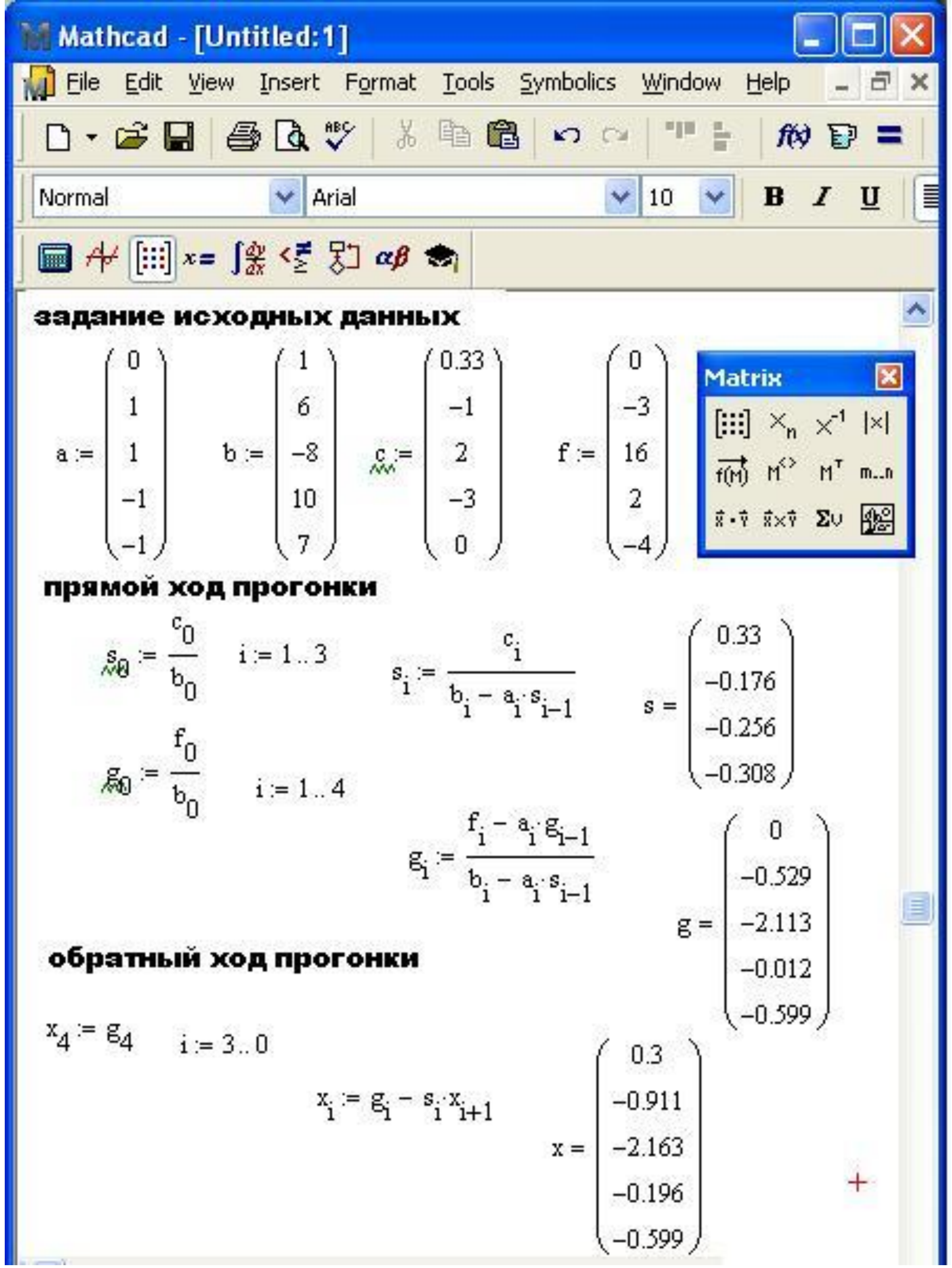


	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3	x4	x5
2	0	0	0	0	0
3	0	-0,5	-2	0,2	-0,57143
4	0,17	-0,8608	-2,0125	-0,17143	-0,54286
5	0,28	-0,8828	-2,15046	-0,16411	-0,59592
6	0,29	-0,907	-2,15137	-0,19382	-0,59487
7	0,3	-0,9084	-2,16183	-0,1936	-0,59912
8	0,3	-0,9103	-2,16196	-0,19592	-0,59909
9	0,3	-0,9104	-2,16276	-0,19592	-0,59942
10	0,3	-0,9105	-2,16278	-0,1961	-0,59942
11	0,3	-0,9105	-2,16284	-0,1961	-0,59944
12	0,3	-0,9106	-2,16284	-0,19612	-0,59944
13	0,3	-0,9106	-2,16285	-0,19612	-0,59945



	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3	x4	x5
2		0	0	0	0
3	=-0,33*B2	=(-3-A3+C2)/6	=-(16-B2-2*D2)/8	=(2+C2+3*E2)/10	=(-4+D2)/7
4	=-0,33*B3	=(-3-A4+C3)/6	=-(16-B3-2*D3)/8	=(2+C3+3*E3)/10	=(-4+D3)/7
5	=-0,33*B4	=(-3-A5+C4)/6	=-(16-B4-2*D4)/8	=(2+C4+3*E4)/10	=(-4+D4)/7
6	=-0,33*B5	=(-3-A6+C5)/6	=-(16-B5-2*D5)/8	=(2+C5+3*E5)/10	=(-4+D5)/7
7	=-0,33*B6	=(-3-A7+C6)/6	=-(16-B6-2*D6)/8	=(2+C6+3*E6)/10	=(-4+D6)/7
8	=-0,33*B7	=(-3-A8+C7)/6	=-(16-B7-2*D7)/8	=(2+C7+3*E7)/10	=(-4+D7)/7
9	=-0,33*B8	=(-3-A9+C8)/6	=-(16-B8-2*D8)/8	=(2+C8+3*E8)/10	=(-4+D8)/7
10	=-0,33*B9	=(-3-A10+C9)/6	=-(16-B9-2*D9)/8	=(2+C9+3*E9)/10	=(-4+D9)/7
11	=-0,33*B10	=(-3-A11+C10)/6	=-(16-B10-2*D10)/8	=(2+C10+3*E10)/10	=(-4+D10)/7
12	=-0,33*B11	=(-3-A12+C11)/6	=-(16-B11-2*D11)/8	=(2+C11+3*E11)/10	=(-4+D11)/7
13	=-0,33*B12	=(-3-A13+C12)/6	=-(16-B12-2*D12)/8	=(2+C12+3*E12)/10	=(-4+D12)/7

Прогонка в пакете Mathcad



На практике часто приходится сталкиваться не только с системами линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей A, но и с прямоугольной матрицей размера MxN, т. е. системами, в которых число неизвестных не равно числу уравнений (как больше, так и меньше него). Такие системы для решения требуют специфического подхода.

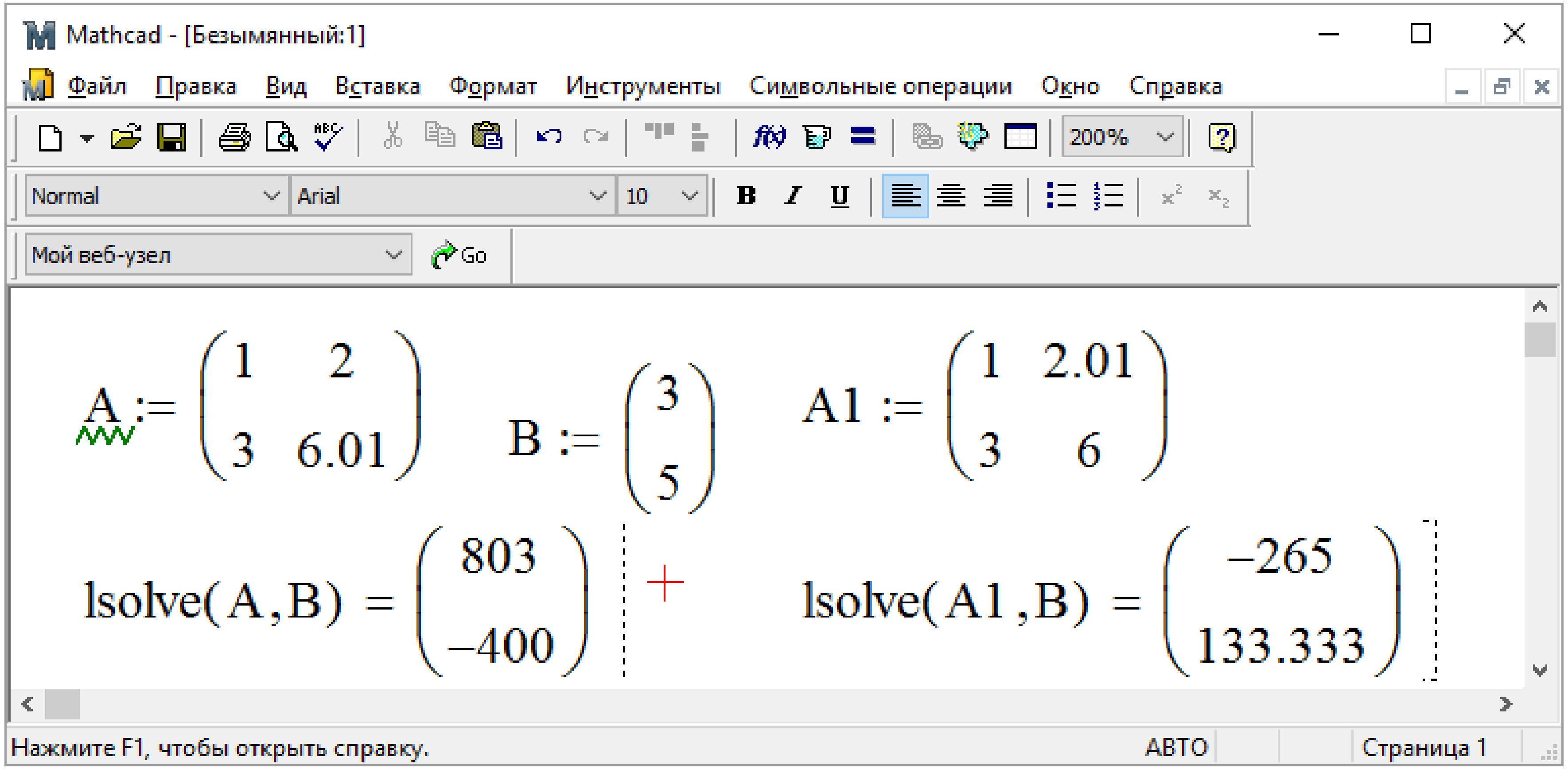
Неклассические системы

Рассмотренные выше системы предполагают равно количество уравнений и неизвестных. Это означает, что матрица из коэффициентов перед неизвестными (А) квадратная. Для таких систем доказано, что решение существует и единственно, если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$). **Плохо обусловленная система** – система, у которой определитель отличен от нуля, но очень близок к нулю.

Несмотря на то, что и плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике искать их чаще всего не имеет смысла

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6.01y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2.01y = 3 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$


Mathcad - [Безымянный:1]
Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка
200%
Normal
Arial
10
Мой веб-узел
Go
$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6.01 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A1 := \begin{pmatrix} 1 & 2.01 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
$\mathrm{lsolve}(A,B) = \begin{pmatrix} 803 \\ -400 \end{pmatrix}$ $\mathrm{lsolve}(A1,B) = \begin{pmatrix} -265 \\ 133.333 \end{pmatrix}$
Нажмите F1, чтобы открыть справку.
АВТО
Страница 1

Переопределенные и недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений

- <u>Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений</u> – системы, в которых число уравнений больше числа неизвестных
- <u>Недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений</u> – системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных