

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»**

**Факультет Автоматики и вычислительной техники
Кафедра Вычислительной техники**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Численные методы решение систем линейных
алгебраических уравнений**

Методические указания к лабораторной работе
для студентов II курса дневного отделения АВТФ

Образовательные программы:

09.03.01 «Информатика и ВТ»;

09.03.04 «Программная инженерия»;

12.03.01 «Приборостроение»

Содержание

1 Описание лабораторной работы.....	3
2 Варианты контрольных заданий	3
3 Краткая теория к лабораторной работе	4
3.1 Прямые методы.....	4
3.1.1 Метод Гаусса	5
3.1.2 LU–метод (Холецкого)	7
3.2 Итерационные методы.....	8
3.2.1 Метод итераций.....	8
3.2.2 Метод Зейделя.....	9
3.2.3 Условия сходимости и окончания вычислений	9
3.3 Корректность постановки задачи и понятие обусловленности.....	10
3.4 Экспериментальное исследование устойчивости решения.....	11
3.5 О вычислительных затратах	12
4 Вопросы самоконтроля	12
Литература	13
Приложение (файлы формата MathCad)	13
П1 Анализ СЛАУ ЧислОбусовл.xmcd.....	13
П2 Для ВыполниЛабРаб SLAU_ПрямМетоды.xmcd,	13
П3 Для ВыполниЛабРаб ИтерацМетоды.xmcd.	13
П4 Матричные операции.xmcd.	13

1 Описание лабораторной работы

Цель работы

1. В соответствии с вариантом контрольного задания исследуйте существование и найдите решение системы уравнений от значений a, b, c, d (a, b, c, d - последние цифры номера зачетной книжки студента) с точностью ε , не ниже $0,00001$, тремя методами из таблицы 1, например:

- методом Крамера;
- методом Гаусса;
- методом итераций.

2. Написать программы, реализующие алгоритмы решения СЛАУ прямым и итерационным методом согласно варианту Табл. 1.1

3. Для дублирования решений систем линейных алгебраических уравнений применить существующие стандартные функции МСАД, аналогичные заданным методам.

4. Для каждого метода и способа решения исследовать ресурсоемкость программ вычислений и факторы, влияющие на точность результатов.

5. Сравнить методы и способы решения СЛАУ по быстродействию и точности, выбрать наиболее эффективный вычислительный процесс поставленной задачи.

6. Проанализировать результаты работы и сделать выводы.

Результаты численных расчетов должны быть оформлены по всем правилам записи приближенных чисел, т.е. запись приближенного решения только с верными значащими цифрами и допустимой погрешностью. Анализ численных результатов должен дать ответ на вопрос, соответствуют ли полученные результаты искомому решению поставленной задачи и почему. В отчете обязательно сформулируйте необходимые и достаточные условия существования решений и сходимости методов; проверьте точность решений. Проанализируйте особенности применения рассмотренных методов, дайте рекомендации по решению соответствующих задач на ЭВМ.

2 Варианты контрольных заданий

Варианты методов решения СЛАУ

Таблица 1

Номер набора методов	Методы
1	Метод Крамера, Метод Гаусса, метод итерации
2	Метод Гаусса, метод Зейделя, по выбору
3	Метод обратной матрицы, Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, метод итерации
4	Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, метод итерации, по выбору
5	Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, метод Зейделя
6	Метод обратной матрицы, Метод LU- разложения, Метод Якоби
7	Метод Холецкого, метод итерации, по выбору
8	Метод Крамера, Метод Холецкого, метод Зейделя
9	Метод LU- разложения, Метод Якоби, по выбору

Система линейных

$$\begin{aligned} (1+a)x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 &= 5 \\ 16x_1 + (1+b)x_2 - 22x_3 + 29x_4 &= 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - (1+c)x_3 + 32x_4 &= 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + (1+d)x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Варианты систем линейных алгебраических уравнений и номер состава исследуемых методов определяются значениями a, b, c, d (a, b, c, d - последние цифры номера зачетной книжки студента). Для метода прогонки и по выбору системы уравнений выбираются студентами самостоятельно или могут быть использованы случайным образом сгенерированные основные компоненты матричной формы задания СЛАУ.

3 Краткая теория к лабораторной работе

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1,2]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

где A – матрица $n \times n$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – искомый вектор, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – заданный вектор. Будем предполагать, что определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. решение системы (1) существует.

Методы численного решения системы (1) делятся на две группы: прямые методы («точные») и итерационные методы.

Прямыми методами называются методы, позволяющие получить решение системы (1) за конечное число арифметических операций. К этим методам относятся метод Крамера, метод Гаусса, LU-метод и т.д.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение системы (1) находится как предел последовательных приближений $\bar{x}^{(m)}$ при $m \rightarrow \infty$, где m номер итерации. При использовании методов итерации обычно задается некоторое малое число $\varepsilon > 0$ и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка $\|\bar{x}^{(m)} - \bar{x}\| < \varepsilon$. К этим методам относятся метод Зейделя, Якоби, метод верхних релаксаций и т.д.

Следует заметить, что реализация прямых методов на компьютере приводит к решению с погрешностью, т.к. все арифметические операции над переменными с плавающей точкой выполняются с округлением. В зависимости от свойств матрицы исходной системы эти погрешности могут достигать значительных величин.

3.1 Прямые методы.

3.1.1 Метод Гаусса

Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему (2.1) приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Последовательно умножая первое уравнение на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и складывая с i -м уравнение, исключим x_1 из всех уравнений кроме первого. Получим систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{n,n}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}, \end{aligned} \quad \text{где } a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}b_1}{a_{11}}, \quad i, j = 2, 3, \dots, n.$$

Аналогичным образом из полученной системы исключим x_2 . Последовательно, исключая все неизвестные, получим систему треугольного вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_k + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)}, \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Описанная процедура называется прямым ходом метода Гаусса. Заметим, что ее выполнение было возможно при условии, что все $a_{i,i}^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, n-1$ не равны нулю.

Выполняя последовательные подстановки в последней системе, (начиная с последнего уравнения) можно получить все значения неизвестных.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{i,i}^{(i-1)}} \left(b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i-1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j \right).$$

Эта процедура получила название обратный ход метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса преобразуют так эту ступенчатую матрицу, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса может быть легко реализован на компьютере. При выполнении вычислений, как правило, не интересуют промежуточные значения матрицы A . Поэтому численная реализация метода сводится к преобразованию элементов массива размерности $(n \times (n+1))$, где $n+1$ столбец содержит элементы правой части системы.

Для контроля ошибки реализации метода используются так называемые контрольные суммы. Схема контроля основывается на следующем очевидном положении. Увеличение значения всех неизвестных на единицу равносильно замене данной системы контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующей строки. Создадим дополнительный столбец, хранящий сумму элементов матрицы по строкам. На каждом шаге реализации прямого хода метода Гаусса будем выполнять преобразования и над элементами этого столбца, и сравнивать их значение с суммой по строке преобразованной матрицы. В случае не совпадения значений счет прерывается.

Один из важных факторов, предопределяющих выбор того или иного метода при решении конкретных задач, является вычислительная эффективность метода. Один из основных недостатков метода Гаусса связан с тем, что при его реализации накапливается вычислительная погрешность. Известно, что для больших систем порядка n число действий умножений и делений близко к $n^3/3$.

Для того, чтобы уменьшить рост вычислительной погрешности применяются различные модификации метода Гаусса. Например, метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцам, в этом случае на каждом этапе прямого хода строки матрицы переставляются таким образом, чтобы диагональный угловой элемент был максимальным. При исключении соответствующего неизвестного из других строк деление будет производиться на наибольший из возможных коэффициентов и, следовательно, относительная погрешность будет наименьшей.

Существует метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. В этом случае переставляются не только строки, но и столбцы. Использование модификаций метода Гаусса приводит к усложнению алгоритма увеличению числа операций и соответственно к росту времени счета. Поэтому целесообразность выбора того или иного метода определяется непосредственно программистом.

Выполняемые в методе Гаусса преобразования прямого хода, приведшие матрицу A системы к треугольному виду позволяют вычислить определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}^{(n-1)} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,n}^{(n-1)}.$$

Метод Гаусса позволяет найти обратную матрицу. Для этого необходимо решить матричное уравнение

$$A \cdot X = E,$$

где E – единичная матрица. Его решение сводится к решению n систем

$$A\bar{x}^{(j)} = \bar{\delta}^{(j)}, \quad (j=1,2,\dots,n),$$

у вектора $\bar{\delta}^{(j)}$ j -я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю.

Метод Гаусса может оказаться неустойчивым по отношению к росту вычислительной погрешности.

Теорема 1. Для устойчивости метода Гаусса достаточно диагонального преобладания, т. е. выполнения неравенств

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}| + \delta,$$

$$\delta > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

При расчете на реальной ЭВМ с заданным числом разрядов, наряду с влиянием неточного задания входных данных на каждой арифметической операции, вносятся ошибки округления. Влияние последних на результат зависит не только от разрядности машины, но и от числа обусловленности матрицы системы, а также от выбранного алгоритма. Существуют алгоритмы, учитывающие влияние ошибок округления и позволяющие получить результат с гарантированной точностью, если система не обусловлена настолько плохо, что при расчете с заданной разрядностью эта точность не может быть гарантирована.

3.1.2 LU-метод (Холецкого)

LU-метод основан на том, что если главные миноры матрицы A отличны от нуля, тогда матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде произведения $A=LU$,

где L —нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами и U —верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Рассмотрим СЛАУ $Ax=b$.

Пусть матрица $A(n \times n)$ допускает LU-разложение.

$$A=LU$$

где

$$L = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & \dots & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{m1} & e_{m2} & e_{m3} & \dots & e_{mm} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1m} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или

$$\sum_{j=1}^m e_{ij} u_{jk} = a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m,$$

$$e_{ij} = 0, \quad i < j$$

$$u_{jk} = 0, \quad j > k$$

Окончательно запишем

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k e_{ij} u_{jk} = a_{ik}, & k \leq i \\ \sum_{j=1}^i e_{ij} u_{jk} = a_{ik}, & i < k \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_{ik}u_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} e_{ij}u_{jk} = a_{ik}, & k \leq i \\ e_{ii}u_{ik} + \sum_{j=1}^{i-1} e_{ij}u_{jk} = a_{ik}, & i < k \end{cases}$$

Полагая $u_{kk} = 1$, получим следующие рекуррентные формулы для вычисления элементов матрицы L и U

$$\begin{cases} e_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} e_{ij}u_{jk}, & k \leq i \\ u_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} e_{ij}u_{jk} \right) / e_{ii}, & i < k \\ u_{kk} = 1, \end{cases}$$

Если найдены матрицы L и U, то решение исходной системы (1) сводится к последовательному решению двух систем уравнений с треугольными матрицами

$$L\tilde{b} = b$$

$$UX = \tilde{b}.$$

LU – метод позволяет вычислить определитель матрицы **A**

$$\det A = \det L \det U = e_{11} \cdot e_{22} \cdot \dots \cdot e_{nn}.$$

3.2 Итерационные методы.

Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и скорости сходимости процесса.

3.2.1 Метод итераций

Пусть дана линейная система (1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты a_{ii} не равны 0 ($i=1,2, \dots, n$), разрешим первое уравнение системы (1) относительно x_1 , второе - относительно x_2 и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases} \quad (3)$$

где $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$; $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

систему (3) можно записать в матричной форме $X = \beta + \alpha X$, а любое $(k+1)$ приближение вычисляется по формуле $X^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k)}$. Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} = 0; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (4)$$

3.2.2 Метод Зейделя.

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k + 1)$ -го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k + 1)$ -е приближения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Пусть получена эквивалентная система (3). Выберем произвольно начальные приближения корней $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Далее, предполагая, что k -ые приближения $x_n^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить $(k + 1)$ -е приближения корней по формулам:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \alpha_{13} x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \alpha_{23} x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= \beta_n + \alpha_{n1} x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2} x_2^{(k+1)} + \dots + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Для некоторых классов систем линейных уравнений число арифметических действий, необходимых для получения решения с разумной точностью итерационными методами много меньше, чем $O(n^3)$.

3.2.3 Условия сходимости и окончания вычислений

Нормой квадратной матрицы A называется функционал, обозначаемый $\|A\|$, удовлетворяющий условиям:

1. $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$
2. $\|A\gamma\| = |\gamma| \cdot \|A\|$, для любого γ
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условие сходимости). Для того, чтобы итерационный процесс (4) сходился при любом начальном приближении, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы α (матрица коэффициентов при неизвестных эквивалентной системы (3)) лежали внутри единичного круга.

Процесс итерации для приведенной линейной системы (1) сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше единицы, т.е. для итерационного процесса (4) достаточное условие есть $\|\alpha\| < 1$

Нормы матриц

1. $\|\alpha\|_m = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}| < 1$ (m -норма или неопредел. норма: функция MathCad - **norm1** (A))
2. $\|\alpha\|_l = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}| < 1$ (l -норма или норма LI : функция MathCad - **norm2** (A))
3. $\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{ij} \alpha_{ij}^2} < 1$ (k -норма или Евклидова норма: функция MathCad - **norme** (A))

Следствие. Процесс итерации сходится, если выполнены неравенства:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{l=i+1}^n |a_{il}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1}^{j-1} |a_{ij}| + \sum_{l=j+1}^n |a_{lj}|, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

В качестве условия окончания итерационного процесса можно взять условие $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ε - заданная погрешность приближенного решения $X \approx X^{(k+1)}$.

3.3 Корректность постановки задачи и понятие обусловленности.

При использовании численных методов для решения тех или иных математических задач необходимо различать свойства самой задачи и свойства вычислительного алгоритма, предназначенного для ее решения.

Говорят, что задача поставлена *корректно*, если решение существует и единственно и если оно непрерывно зависит от входных данных. Последнее свойство называется также устойчивостью относительно входных данных.

Корректность исходной математической задачи еще не гарантирует хороших свойств численного метода ее решений и требует специального исследования.

Известно, что решение задачи (1) существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В этом случае можно определить обратную матрицу A^{-1} и решение записать в виде: $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Исследование устойчивости задачи (1) сводится к исследованию зависимости ее решения от правых частей \bar{b} и элементов a_{ij} матрицы A . Для того чтобы можно было говорить о непрерывной зависимости вектора решений от некоторых параметров, необходимо на множестве n -мерных векторов принадлежащих линейному пространству L , ввести метрику.

В линейной алгебре предлагается определение множества метрик l_p – норма

$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}$ из которого легко получить наиболее часто используемые метрики

при $p=1$, $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$,

при $p=2$, $\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right)^{1/2}$,

при $p \rightarrow \infty$, $\|\bar{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_{i \leq m} |x_i|$.

Подчиненные нормы матриц определяемые как $\|A\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$, соответственно

запишутся в следующем виде:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}.$$

Обычно рассматривают два вида устойчивости решения системы (1): первый – по правым частям, второй – по коэффициентам системы(1) и по правым частям..

Наряду с исходной системой (1) рассмотрим систему с «возмущенными» правыми частями

$$A \cdot \tilde{x} = \tilde{b},$$

где $\tilde{b} = \bar{b} + \delta\bar{b}$ – возмущенная правая часть системы, а $\tilde{x} = \bar{x} + \delta\bar{x}$ возмущенное решение. Можно получить оценку, выражающую зависимость относительной погрешности решения от относительной погрешности правых частей

$$\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq M_A \frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|},$$

где $M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы A (в современной литературе это число обозначают как $condA$) Если число обусловленности велико ($M_A \sim 10^k$ $k > 2$), то говорят, что матрица A плохо обусловлена. В этом случае малые возмущения правых частей системы (1), вызванные либо неточностью задания исходных данных, либо вызванные погрешностями вычисления существенно влияют на решение системы. Грубо говоря, если погрешность правых частей 10^{-l} , то погрешность решения будет 10^{-l+k} . Более подробно о свойствах числа обусловленности и оценка его величины можно прочитать в [3].

Если возмущение внесено в матрицу A , то для относительных возмущений решения запишем

$$\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} \right).$$

3.4 Экспериментальное исследование устойчивости решения

При решении задач на практике часто бывает трудно оценить число обусловленности матрицы A . Поэтому существует ряд приемов, которые хотя и не дают строгий ответ об устойчивости применяемого метода и полученного решения, но все же позволяют сделать

некоторые предположения о характере решения. Уточнить полученное решение и оценить его погрешность можно осуществить следующим образом.

Пусть получено приближенное решение системы (1) $\bar{x}^{(0)}$. Вычислим невязку уравнения $\bar{\xi} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}$. Если $\bar{\xi}$ велико, то можно искать вектор-поправку \bar{p} такой, что точное решение системы $\bar{x} = \bar{x}^{(0)} + \bar{p}$. Следовательно

$$A \cdot (\bar{x}^{(0)} + \bar{p}) = \bar{b},$$

отсюда

$$A\bar{p} = \bar{\xi}.$$

Можно видеть, что для нахождения поправки можно использовать алгоритм метода и соответствующую программу, по которой находилось основное решение. После этого

можно уточнить решение системы $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \bar{p}$. Если относительная погрешность $\frac{\|\bar{p}\|}{\|\bar{x}^{(1)}\|}$

велика, то можно повторить процесс уточнения. Если процесс уточнения, повторенный два три раза, не приводит к повышению точности, то это говорит скорей всего о том, что данная система плохо обусловлена и ее решение не может быть найдено с требуемой точностью.

3.5 О вычислительных затратах

Один из важных факторов, предопределяющих выбор того или иного метода при решении конкретных задач, является вычислительная эффективность метода.

Учитывая, что операция сложения выполняется намного быстрее, чем операция умножения и деления, обычно ограничиваются подсчетом последних.

Для решения СЛАУ методом Гаусса без выбора главного элемента требуется

$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$ умножений и делений, решение СЛАУ методом квадратного корня требует $\frac{n^3}{6} + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{3}$ и n операций извлечения корней. Метод вращения предполагает вчетверо больше операций умножения, чем в методе Гаусса. При больших значениях размерности m , можно сказать, что вычислительные затраты на операции умножения и деления в методе Гаусса составляют величину $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$, в методе квадратных корней

$O\left(\frac{n^3}{6}\right)$, в методе вращений $O\left(\frac{4}{3}n^3\right)$.

Для некоторых классов систем линейных уравнений число арифметических действий, необходимых для получения решения с разумной точностью итерационными методами много меньше, чем $O(n^3)$.

Экспериментально производительность программ можно оценить путем измерения интервала времени между началом и завершением вычислений, на пример используя системную переменную MathCad - Time.

4 Вопросы самоконтроля

1. В чем состоят особенности прямых методов решения СЛАУ.

2. Идея метода Гаусса.
3. Последовательность действий прямого хода метода Гаусса.
4. Содержание обратного хода метода Гаусса?
5. Область применения и сущность метода прогонки.
6. В каких случаях необходимо использовать итерационные методы?
7. Что значит решить СЛАУ итерационным методом?
8. Из каких этапов состоит задача решения СЛАУ итерационным методом?
9. В чем состоит итерационный процесс решения СЛАУ?
10. Как в Mathcad организовать итерационный процесс?
11. Что влияет на скорость сходимости итерационного процесса?
12. В чем сущность метода простой итерации, как еще называют этот метод?
13. Какие виды итерационных процессов вам известны?
14. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода итерации?
15. Назовите точные методы решения систем линейных уравнений?
16. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода итерации для систем линейных уравнений.
17. Назовите функции для решения систем уравнений в Mathcad и особенности их применения.
18. В каких случаях функции Mathcad не могут найти корень СЛАУ?
19. Дайте сравнительную характеристику численным методам решения СЛАУ и функций Mathcad.
20. Как изменить точность, с которой ищутся решения СЛАУ функциям Mathcad?
21. Как символично (аналитически) решить систему уравнений в Mathcad?
22. Назовите особенности использования символического решения уравнений.

Литература

1. Вержбицкий В.М. Вычислительная линейная алгебра: Учеб. пособие для вузов/ В.М. Вержбицкий.-М.: Высш. шк., 2009 - 351 с.: ил.
2. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9/Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. - М. : ИТ Пресс, 2006. - 496 с.: ил. - {Самоучитель}.
3. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета по основам численных методов. Книга 1.— Бирск: Бирск.гос.соц.-пед.акад., 2007. – 94 с.
4. Ханова А. А. Численное решение уравнений и систем уравнений: Методическое пособие для студентов института Информационно- технологий телекоммуникаций, Астрахань -2001, -43 стр.
5. Поршнева С. В., Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. СПб.; БХВ-Петербург, 2005. 464 с: ил.

Приложение (файлы формата MathCad)

Примеры для выполнения задания лабораторной работы и применения средств MathCad для решения уравнений содержатся в файлах:

- [П1 Анализ СЛАУ ЧислОбусловл.xmcd,](#)
- [П2 Для ВыполнЛабРаб SLAU ПрямМетоды.xmcd,](#)
- [П3 Для ВыполнЛабРаб ИтерацМетоды.xmcd,](#)
- [П4 Матричные операции.xmcd.](#)