Сборник олимпиадных задач по физике 2017-2018 гг. С решениями.

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова традиционно участвует в организации и проведении олимпиад школьников по физике. Среди них «Ломоносов», «Покори Воробьевы горы!», «Московская олимпиада школьников» и «Робофест».

В 2017-2018 учебном году в соответствии с Перечнем олимпиад школьников этим олимпиадам присвоены следующие уровни по предмету «Физика»:

- «Московская олимпиада школьников» – 1 уровень
- «Покори Воробьевы горы!» – 1 уровень
- «Ломоносов» – 2 уровень
- «Робофест» – 2 уровень

Победители указанных олимпиад зачислялись в 2018 году на физический факультет МГУ без вступительных испытаний, а призеры получали 100 баллов за дополнительное вступительное испытание по физике. Всего в 2018 году на физический факультет было зачислено 178 человек, являющихся победителями и призерами олимпиад школьников, что составляет 47% от общего числа зачисленных на 1 курс абитуриентов.

Предлагаемый сборник подготовлен под редакцией членов методических комиссий олимпиад: Варламова С.Д., Парфенова К.В., Полякова П.А., Семенова М.В., Старокурова Ю.В., Чеснокова С.С., Якуты А. А.

Мы взяли интервью у ребят, поступивших на физический факультет

Артём Давыдов

Олимпиада «Ломоносов» физика, 1 степень диплома

Что послужило стимулом к участию в Олимпиаде?

К 11-ому классу я твёрдо определился с направлением при поступлении (физика), а целью было поступить на физический факультет, поэтому решил принять участия в олимпиаде Ломоносов. Но самое главное - это интерес к физике и различным сложным задачам.

Что такое быть победителем Олимпиады?

Прежде всего, это огромная радость. Ведь все силы, потраченные на олимпиадную подготовку, были потрачены не зря. Также это даёт авторитет среди одноклассников и придаёт серьёзную уверенность в успехе на ЕГЭ.

В чем секрет Вашей победы в Олимпиаде?

Самое главное - начинать пробовать свои силы на олимпиадах как можно раньше - я начал активно писать олимпиады в 9-ом классе. Немаловажно не бояться неудач и посвящать большую часть свободного времени олимпиадной подготовке. Я занимался, в том числе, и летом перед 10-ым и 11-ым классами.

Кем Вы себя видите по окончанию Московского университета?

На сегодняшний день подумываю о научной карьере, но, как известно, выпускники Физфака становились успешными в самых разных сферах деятельности, поэтому главное - заниматься любимым делом.

Мария Хмелева

Олимпиады: «Ломоносов» физика, диплом 3 степени; «Физтех» физика, диплом 1 степени; «Физтех» математика, диплом 3 степени; «Росатом» математика, диплом 2 степени; «ОММО» диплом 2 степени.

Какие моменты прошедшей олимпиады Вам запомнились больше всего?

Процесс подготовки и написания был веселым, потому что во время всех олимпиад я болела, но это мне помогло долей безразличия, я почти не волновалась. Ну и еще, наверное, запомнилось удивление от победы в олимпиаде «Физтех», это было неожиданно, но приятно.

Что послужило стимулом к участию в Олимпиаде?

Нас учили в школе, что с помощью олимпиад можно поступить в хороший университет, при этом не волнуясь за ЕГЭ. Это и послужило стимулом. Моя цель была – поступить в МГУ, и олимпиады мне в этом помогли. При этом моя нервная система осталась в сохранности, потому что я не переживала за ЕГЭ, я уже знала, что поступлю.

Что такое быть победителем Олимпиады?

Честно, не знаю. Я не чувствую себя какой-то особой или очень

умной. Победила – хорошо, но это все благодаря хорошей степени подготовки и, наверное, удаче.

В чем секрет Вашей победы в Олимпиаде?

В подготовке к этой олимпиаде. Возможно, еще в некоем спокойствии во время написания олимпиады.

Кем вы себя видите по окончанию Московского университета?

Вопрос не из легких, так как я не люблю загадывать на будущее. В любом случае – все будет хорошо. Я уверена, что поступление в МГУ – правильный выбор.

Олимпиада школьников
«Ломоносов – 2017/2018» по физике

Олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводится в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходит в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 7-го – 11-го классов может участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме. Задания каждого из туров равноценные по сложности и составляются раздельно для учащихся младших (7-х – 9-х) и старших (10-х – 11-х) классов. Эти задания размещаются в личных кабинетах участников на сайте http://olymp.msu.ru.

Доступ к условиям заданий открывается для участников дважды в год: в ноябре (1-й тур) и в декабре (2-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращается одновременно с их завершением. Победители и призеры отборочного этапа приглашаются для участия в заключительном этапе олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного этапа олимпиады Ломоносов. Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника индивидуальны, приводимые здесь решения задач и ответы к ним даны в общем виде.

Отборочный этап олимпиады школьников «Ломоносов – 2017/2018»

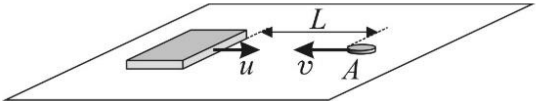
Пример задания для 7-х – 9-х классов

1. Длина нерастянутой пружины l_0, а коэффициент жесткости k. К пружине подвесили груз массой m. Найдите длину l пружины после того, как груз займет положение равновесия. Ускорение свободного падения g.

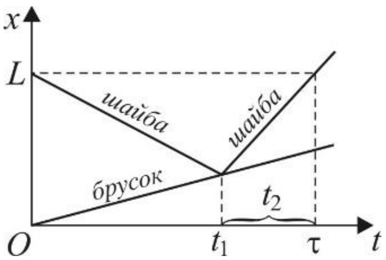
Решение. Поскольку сила тяжести, действующая на мальчика, равна mg, по закону Гука имеем $k \cdot \Delta x = mg$. Отсюда удлинение пружины под действием веса груза $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$, и $l = l_0 + \dfrac{mg}{k}$.

Ответ: $l = l_0 + \dfrac{mg}{k}$.

2. По гладкой горизонтальной поверхности скользят вдоль одной прямой навстречу друг другу массивный брусок со скоростью u и небольшая легкая шайба со скоростью v. В момент времени $t = 0$ шайба оказалась в некоторой точке A, расстояние от которой до передней грани бруска в этот момент было равно L. Через какое время τ после этого шайба снова окажется в точке A, испытав абсолютно упругое столкновение бруском? Считайте, что скорость шайбы перпендикулярна передней грани бруска, а масса шайбы пренебрежимо мала по сравнению с массой бруска.



Решение. По закону сложения скоростей скорость шайбы относительно бруска $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}$. Поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$ направлены в противоположные стороны, модуль скорости сближения шайбы с бруском равен $v_{\text{отн}} = v + u$. Время, прошедшее до столкновения шайбы с бруском, $t_1 = \dfrac{L}{v+u}$. За это время шайба переместится от точки A на расстояние $L_1 = vt_1 = \dfrac{Lv}{v+u}$. После столкновения шайбы с массивным бруском скорость бруска не изменится. Для нахождения скорости шайбы после столкновения с бруском учтем, что в системе, связанной с бруском, в момент удара сохраняется кинетическая энергия шайбы, поэтому модуль скорости шайбы относительно бруска при ударе



не изменится и остается равным $v_{\text{отн}} = v + u$, а вектор относительной скорости шайбы после удара будет направлен вперед по ходу бруска. Переходя вновь в неподвижную систему отсчета, по закону сложения скоростей получаем, что модуль скорости шайбы в этой системе станет равным $v + 2u$. После соударения с бруском шайба пройдет расстояние L_1 до точки A за время $t_2 = \dfrac{Lv}{(v+u)\,(v+2u)}$. Время, через которое шайба снова окажется в точке A, равно $\tau = t_1 + t_2 = \dfrac{2L}{v+2u}$.

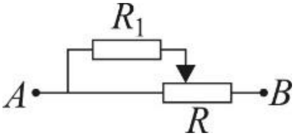
Ответ: $\tau = \dfrac{2L}{v+2u}$.

3. В калориметре находится смесь воды и льда в состоянии термодинамического равновесия. Через время τ_1 после включения спирали, подсоединенной к источнику постоянного напряжения, весь лёд растаял, а ещё через время τ_2 вода нагрелась на Δt. Пренебрегая теплоёмкостью калориметра, определите, каково было отношение n массы воды $m_{\text{в}}$ к массе льда $m_{\text{л}}$ в момент включения спирали. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}}$, удельная теплота плавления льда λ.

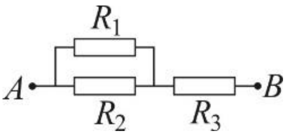
Решение. Пусть мощность, передаваемая спиралью содержимому калориметра, равна N. Поскольку в момент включения спирали смесь воды и льда находилась в состоянии термодинамического равновесия, т.е. при температуре таяния льда, то $m_{\text{л}}\lambda = N\tau_1$. По условию на нагрев образовавшейся и имевшейся ранее в калориметре воды потребовалось время τ_2. Следовательно, $(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})c\Delta t = N\tau_2$ и $n = \dfrac{m_{\text{в}}}{m_{\text{л}}} = \dfrac{\lambda\tau_2}{c\Delta t\tau_1} - 1$.

Ответ: $n = \dfrac{\lambda\tau_2}{c\Delta t\tau_1} - 1$

4. Резистор сопротивлением R_1 подключен к реостату с сопротивлением R и длиной L (см. рисунок). Найдите сопротивление R_{AB} цепи между точками A и B, если движок реостата находится на расстоянии x от его левого конца.



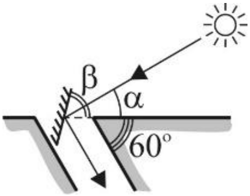
Решение. Эквивалентная схема цепи изображена на рисунке, где резисторы R_2 и R_3 представляют собой левый и правый участки реостата. При этом $R_2 = \dfrac{Rx}{L}$,



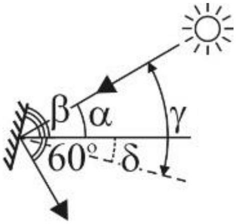
$R_3 = \dfrac{R(L-x)}{L}$. Сопротивление двух параллельно соединенных резисторов $R' = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Полное сопротивление цепи $R_{AB} = R' + R_3$.

Ответ: $R_{AB} = R \cdot \left(\dfrac{R_1 x}{R_1 L + Rx} + \dfrac{L-x}{L} \right)$.

5. Высота Солнца над горизонтом составляет угол α. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно наклонной штольни, образующей угол 60° с горизонтом?



Решение. Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рисунке. Видно, что угол γ между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен $\gamma = \dfrac{1}{2}(60° + \alpha) = 30° + \dfrac{\alpha}{2}$. Угол δ между нормалью к зеркалу и горизонтом равен $\delta = \gamma - \alpha = 30° - \dfrac{\alpha}{2}$. Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами, такой же угол зеркало образует с вертикалью. Поэтому искомый угол $\beta = 90° - \delta = 60° + \dfrac{\alpha}{2}$.



Ответ: $\beta = 60° + \dfrac{\alpha}{2}$.

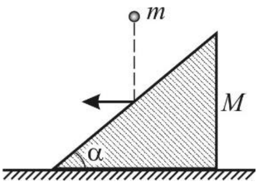
Пример задания для 10-х – 11-х классов

1. Груз массой *m*, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой *A* и периодом *T*. Определите силу натяжения пружины *F* в тот момент, когда груз достигает нижней точки. Ускорение свободного падения *g*.

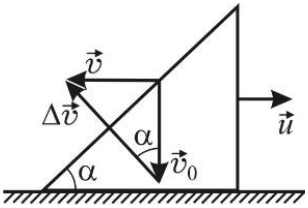
Решение. Будем отсчитывать координату груза относительно точки подвеса пружины, координатную ось *OX* направим вниз. Пусть длина недеформированной пружины l_0, а ее жесткость k. Тогда координата положения равновесия груза x_0 определится из условия: $mg = k(x_0 - l_0)$, откуда $x_0 = l_0 + mg/k$. Груз совершает колебания относительно положения равновесия с амплитудой A, поэтому в нижней точке координата груза будет $x_{\max} = x_0 + A$. По закону Гука сила растяжения пружины при этом равна: $F = k(x_{\max} - l_0) = mg + kA$. Поскольку период колебаний груза равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, жесткость пружины $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$. Следовательно, $F = m\left(g + \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\right)$.

Ответ: $F = m\left(g + \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\right)$.

2. На горизонтальном столе покоится клин массой M. Сверху на клин падает шарик массой m. Определите угол α при основании клина, если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил по горизонтали, а клин начал двигаться поступательно. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь.



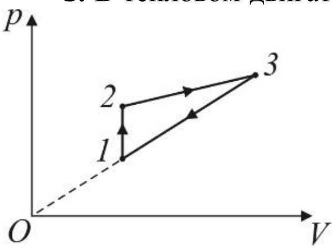
Решение. Поскольку смещения шарика и клина за время соударения пренебрежимо малы и трение отсутствует, то сила взаимодействия шарика и клина направлена по нормали к наклонной плоскости. Следовательно, изменение импульса шарика $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$ при ударе также будет направлено по нормали к наклонной плоскости клина (см. рисунок, где $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ – скорости шарика до и после удара соответственно, $\vec{u}$ – скорость клина после удара). Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v}{v_0}$. По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление $mv = Mu$. По закону сохранения кинетической энергии при упругом ударе $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Mu^2}{2}$.



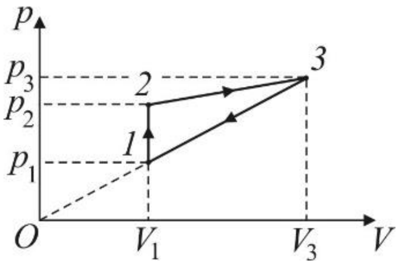
Отсюда $u = v\dfrac{m}{M}$, $v_0 = v\sqrt{1 + \dfrac{m}{M}}$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$.

3. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является ν молей идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс, *pV*-диаграмма которого изображена на рисунке. Работа газа за один цикл равна *A*, температуры газа в состояниях *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_3. Найдите коэффициент полезного действия цикла η. Универсальная газовая постоянная *R*.



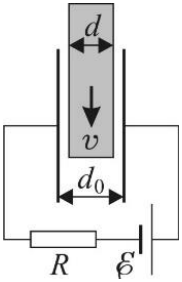
Решение. Работа газа в циклическом процессе равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с нагревателем и холодильником: $A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-1}$. Полученное газом количество теплоты $Q = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Следовательно, КПД двигателя $\eta = \dfrac{A}{A - Q_{3-1}}$, причем $Q_{3-1} < 0$. По первому закону термодинамики $Q_{3-1} = \dfrac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3) + A_{3-1}$, где



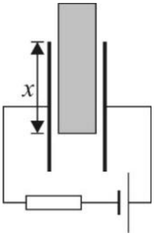
$A_{3-1} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_1 - V_3)$ – работа газа на участке *1 – 3*. Поскольку продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат, справедливо равенство: $\dfrac{p_1}{V_1} = \dfrac{p_3}{V_3}$, с учетом которого выражение для A_{3-1} преобразуется к виду: $A_{3-1} = \dfrac{1}{2}(p_1V_1 - p_3V_3)$. Используя уравнения состояния $p_1V_1 = \nu RT_1$, $p_3V_3 = \nu RT_3$, находим, что $A_{3-1} = \dfrac{1}{2}\nu R(T_1 - T_3)$. Следовательно: $Q_{3-1} = 2\nu R(T_1 - T_3)$.

Ответ: $\eta = \dfrac{A}{A + 2\nu R(T_3 - T_1)} \cdot 100\%$.

4. Плоский конденсатор включен последовательно в цепь, состоящую из резистора сопротивлением R и источника с ЭДС **Е**. В пространство между пластинами конденсатора параллельно им вдвигают с постоянной скоростью v металлическую пластинку толщиной d. Поперечные размеры вдвигаемой пластинки $l \times l$ совпадают с размерами обкладок конденсатора, а расстояние между обкладками d_0. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, найдите силу тока I в цепи. Электрическая постоянная ε_0.



Решение. Пусть пластинка вдвинута в конденсатор на расстояние x, отсчитываемое от нижнего края пластинки до верхнего края обкладок конденсатора. Емкость конденсатора при этом равна $C(x) = \dfrac{\varepsilon_0 lx}{d_0 - d} + \dfrac{\varepsilon_0 l(l-x)}{d_0} = \dfrac{\varepsilon_0 l[l(d_0 - d) + xd]}{d_0(d_0 - d)}$,

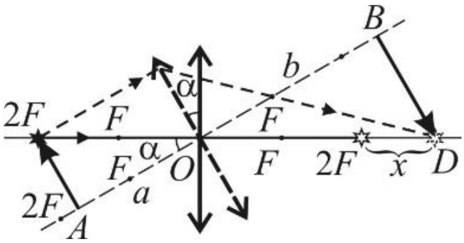


а его заряд $q(x) = \dfrac{\varepsilon_0 l[l(d_0 - d) + xd]}{d_0(d_0 - d)} U$, где U − напряжение между обкладками конденсатора. При равномерном движении пластины ток зарядки конденсатора, сначала равный нулю, довольно быстро возрастает до установившегося значения, то есть становится практически постоянным. В этом случае $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{\varepsilon_0 lvd}{d_0(d_0 - d)} U$. Учитывая, что напряжение на конденсаторе равно $U = \mathbf{E} - IR$, находим окончательно, что $I = \dfrac{\varepsilon_0 lvd\mathbf{E}}{d_0(d_0 - d) + \varepsilon_0 lvdR}$.

Ответ: $I = \dfrac{\varepsilon_0 lvd\mathbf{E}}{d_0(d_0 - d) + \varepsilon_0 lvdR}$.

5. Точечный источник света лежит на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от источника до центра линзы равно $2F$. На какое расстояние x сместится изображение источника, если линзу повернуть на угол α так, чтобы центр линзы остался неподвижным?

Решение. Когда линза не повернута, изображение находится от нее на расстоянии, равном $2F$. Ход лучей при построении изображения, даваемого повернутой линзой, приведен на рисунке штриховыми линиями. Так как один из лучей совпадает с главной оптической осью не повернутой линзы, изображение источника при повороте линзы останется на той же прямой. Введем следующие обозначения (см. рисунок): $OA = a$, $OB = b$, $OD = y$. Тогда $x = y - 2F$.



Из подобия треугольников имеем: $\frac{2F}{a} = \frac{y}{b}$, откуда $y = \frac{2bF}{a}$, причем $a = 2F\cos\alpha$. Из формулы тонкой линзы следует, что $b = \frac{aF}{a-F}$. Объединяя записанные выражения, находим, что $y = \frac{2F}{2\cos\alpha - 1}$.

Ответ: $x = \frac{4F(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1}$.

Заключительный этап олимпиады школьников «Ломоносов – 2017/2018»

Пример задания для 7-х – 8-х классов

1. Металлический брусок массой 800 г имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Если класть брусок на горизонтальную поверхность поочередно тремя разными гранями, то он будет оказывать на нее давления $p_1 = 1{,}6$ кПа, $p_2 = 5p_1$ и $p_3 = \dfrac{p_2}{2}$ соответственно. Определите плотность ρ материала бруска. Ответ выразите в г/см^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Давления, оказываемые бруском на горизонтальную поверхность, $p_i = \dfrac{F}{S_i}$, где $F = mg$ – сила тяжести, действующая на брусок, S_i – площади поверхностей его граней (i = 1, 2, 3).Имеем $S_1 = ab$, $S_2 = bc$, $S_3 = ac$. Таким образом $p_1 = \dfrac{mg}{ab}$, $p_2 = \dfrac{mg}{bc} = 5p_1 = 5\dfrac{mg}{ab}$ и $p_3 = \dfrac{mg}{ac} = \dfrac{p_2}{2} = \dfrac{5p_1}{2} = \dfrac{5mg}{2ab}$. Отсюда следует, что $a = 5c$, $b = \dfrac{5}{2}c$ и $a = 2b$. Поэтому можно записать, что $p_1 = \dfrac{mg}{ab} = \dfrac{mg}{2b \cdot b}$. Отсюда находим, что $b = \sqrt{\dfrac{mg}{2p_1}} = \sqrt{\dfrac{0{,}8 \cdot 10}{2 \cdot 1600}} = 0{,}05$ м. Так как $p_2 = \dfrac{mg}{bc} = 5p_1$, то $c = \dfrac{mg}{b \cdot 5p_1} = \dfrac{0{,}8 \cdot 10}{0{,}05 \cdot 5 \cdot 1600} = 0{,}02$ м. И, наконец, из формулы $p_1 = \dfrac{mg}{ab}$ находим, что $a = \dfrac{mg}{b \cdot p_1} = \dfrac{0{,}8 \cdot 10}{0{,}05 \cdot 1600} = 0{,}1$ м. Объем такого бруска равен $V = abc = 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}02 = 0{,}0001$ м^3. Следовательно, плотность бруска $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{0{,}8}{0{,}0001} = 8000$ кг/м^3 = 8 г/см^3.

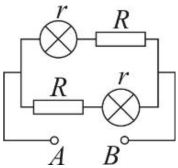
Ответ: ρ = 8 г/см^3.

2. Школьник решил приготовить чай. Он налил в чайник некоторое количество воды, поставил его на электрическую плитку и стал наблюдать за процессом нагрева воды. Школьник обнаружил, что за время t_1 = 1 мин температура воды повысилась на ΔT = 1 ºС. Решив продолжить наблюдения, он снял чайник с плитки, после чего температура воды в чайнике за время t_2 = 0,5 мин понизилась на ту же величину ΔT. Какова масса m воды в чайнике, если тепловая мощность, идущая на нагрев воды при работающей плитке, W = 500 Вт? Считайте, что тепловые потери воды за счет рассеяния энергии в окружающую среду пропорциональны времени, а теплоемкость чайника пренебрежимо мала. Удельная теплоемкость воды c = 4,2 Дж/(г·°С).

Решение. Поскольку по условию тепловые потери пропорциональны времени, количественной характеристикой потерь является их мощность w. Обозначив через m массу воды, по первому закону термодинамики имеем: $Wt_1 = cm\Delta T + wt_1$ (при нагревании воды), $cm\Delta T = wt_2$ (при остывании воды). Исключая отсюда w и m, получаем, что $m = \frac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1+t_2)}$.

Ответ: $m = \frac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1+t_2)} \approx 2{,}4$ кг.

3. Схема электрической цепи, состоящей из двух одинаковых ламп и двух резисторов, изображена на рисунке. Между точками A и B поддерживается постоянное напряжение. Сопротивление каждого резистора равно R = 3 Ом. Известно, что если в этой цепи вместо одной из ламп подключить резистор с сопротивлением R, то мощность, выделяемая во всей цепи, увеличится в k = 2 раза. Найдите сопротивление лампы r.

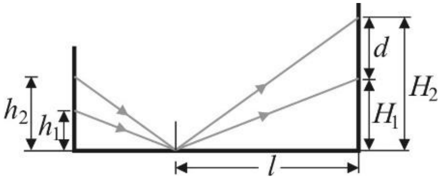


Решение. Общее сопротивление цепи в первом случае равно $R_1 = \frac{R+r}{2}$ R_1, а мощность, выделяемая в цепи в этом случае $P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2U^2}{R+r}$, где U − напряжение между точками A и B. После того как одну из ламп заменили резистором, общее сопротивление цепи стало равным $R_2 = \frac{2R(R+r)}{3R+r}$, а мощность, выделяемая в ней, $P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2(3R+r)}{2R(R+r)}$. По условию задачи $P_2 = kP_1$, т.е. $\frac{U^2(3R+r)}{2R(R+r)} = k \cdot \frac{2U^2}{R+r}$. Отсюда получаем, что $r = (4k - 3)R$.

Ответ: $r = (4k - 3)R$ = 15 Ом.

4. На лабораторном штативе закреплены две лазерные указки, одна из них на высоте h_1 = 25 см, а вторая − на высоте h_2 = 37 см от уровня стола. Лучи света от указок направлены на маленькое плоское зеркало, лежащее плашмя на столе на расстоянии l = 60 см от стены. Найдите расстояние d между двумя световыми пятнами, образованными светом от лазерных указок на стене, если расстояние от штатива до стены равно L = 1 м. Считайте, что лазерные указки и зеркало расположены в одной вертикальной плоскости, перпендикулярной стене.

Решение. Ход лучей до и после отражения от зеркала представлен на рисунке. Расстояния от уровня стола до световых пятен на стене H_1 и H_2.



Найти значения H_1 и H_2 можно из подобных треугольников. Имеем следующие равенства: $\frac{h_1}{L-l}=\frac{H_1}{l}$ и $\frac{h_2}{L-l}=\frac{H_2}{l}$.

Искомое расстояние равно $d=H_2-H_1=\frac{l}{L-l}(h_2-h_1)$.

Ответ: $d=\frac{l}{L-l}(h_2-h_1)=18\,\text{см}$.

Пример задания для 9-х классов

1. Маленький шарик бросают от поверхности Земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В точке падения шарика, находящейся на одном уровне с точкой бросания, установлена тяжелая гладкая пластинка. Под каким углом β к горизонту нужно расположить эту пластинку, чтобы после абсолютно упругого соударения с ней шарик вернулся в точку бросания?

Решение. Из выражения для дальности полета шарика $L=\frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ следует, что при фиксированной начальной скорости v_0 существуют две траектории, двигаясь по которым шарик попадет в заданную точку. Эти траектории соответствуют двум углам бросания α_1 и α_2, связанным соотношением $\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\alpha_1$. Поскольку модуль скорости шарика после упругого соударения с пластинкой не изменяется, вектор скорости шарика после удара должен составлять с горизонтом один из этих углов. Таким образом, пластинку следует установить либо перпендикулярно к направлению скорости шарика перед ударом, т. е. под углом $\beta_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$ к горизонтали, либо перпендикулярно биссектрисе угла между двумя возможными направлениями скорости, т. е. под углом $\beta_2=\frac{\pi}{4}$

к горизонтали. Таким образом, $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta_2 = \frac{\pi}{4}$.

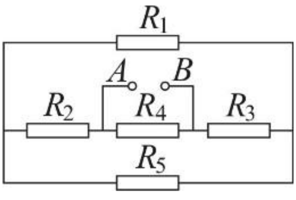
Ответ: $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 45°$.

2. В калориметре находится кусок льда при температуре t_0 = 0 °С. В калориметр доливают воду массой m = 10 кг, взятую при температуре t_1 = 9,9 °С. Чтобы удержать кусок льда под водой сразу после добавления в калориметр воды, к нему требуется приложить направленную вертикально вниз силу F_1 = 3 Н. Какую силу F_2, направленную вертикально вниз, необходимо приложить к куску льда для его удержания под водой после установления теплового равновесия в калориметре? Теплообменом с калориметром и окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплота плавления льда λ = 0,33 МДж/кг, удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4,2 кДж/(кг·°С), плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

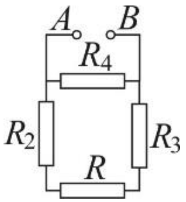
Решение. Если V_0 – начальный объём льда, то согласно закону Архимеда должно выполняться условие: $F_1 + \rho_л V_0 g = \rho_в V_0 g$. Отсюда $V_0 = \frac{F_1}{(\rho_в - \rho_л)g} = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3, а начальная масса льда $m_л = \frac{\rho_л F_1}{(\rho_в - \rho_л)g} = 2{,}7$ кг. Количество теплоты, которое отдаст вода при охлаждении до t_0 = 0 °С, равно $Q_1 = mc_в(t_1 - t_0) = 415{,}8$ кДж. Количество теплоты, которое требуется для расплавления всего льда, $Q_2 = m_л\lambda = 891$ кДж. Из сопоставления этих данных следует, что тепловое равновесие в калориметре установится при температуре t_0 = 0 °С, и расплавится не весь лед. После установления термодинамического равновесия в калориметре останется лед объемом V, который согласно уравнению теплового баланса можно определить из условия $\lambda\rho_л(V_0 - V) = mc_в(t_1 - t_0)$. Согласно закону Архимеда при этом справедливо равенство $F_2 + \rho_л V g = \rho_в V g$. Из приведённых соотношений получаем, что $F_2 = F_1 - \frac{mgc_в(t_1 - t_0)(\rho_в - \rho_л)}{\lambda\rho_л}$.

Ответ: $F_2 = F_1 - \frac{mgc_в(t_1 - t_0)(\rho_в - \rho_л)}{\lambda\rho_л} = 1{,}6$ Н.

3. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, между точками A и B поддерживают постоянное напряжение U = 10 В. Сопротивления резисторов равны соответственно $R_1 = R_5$ = 20 Ом, $R_2 = R_4$ = 10 Ом, а R_3 = 5 Ом. Определите мощность N, выделяющуюся на резисторе R_1.



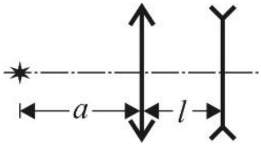
Решение. Поскольку резисторы R_1 и R_5 соединены параллельно, их можно заменить одним резистором сопротивлением $R = \dfrac{R_1 R_5}{R_1 + R_5}$, который соединён последовательно с резисторами R_2 и R_3. Согласно закону Ома, сила тока I через резисторы R_2, R и R_3 равна $I = \dfrac{U}{R_2 + R_3 + R} = \dfrac{U(R_1 + R_5)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_5) + R_1 R_5}$. Токи, текущие



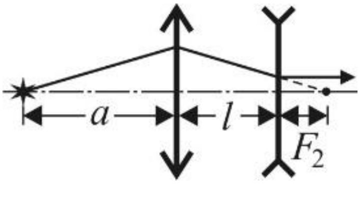
через параллельно соединенные резисторы R_1 и R_5, распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям. Поэтому ток I_1, текущий через резистор R_1, равен $I_1 = I\dfrac{R_5}{R_1 + R_5} = \dfrac{UR_5}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_5) + R_1 R_5}$. Согласно закону Джоуля – Ленца искомая мощность $N = I_1^2 R_1 = \dfrac{U^2 R_5^2 R_1}{[(R_2 + R_3)(R_1 + R_5) + R_1 R_5]^2}$.

Ответ: $N = \dfrac{U^2 R_5^2 R_1}{[(R_2 + R_3)(R_1 + R_5) + R_1 R_5]^2} = 0{,}8$ Вт.

4. На расстоянии $a = 20$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см на её главной оптической оси находится точечный источник света. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 10$ см расположена рассеивающая линза, причем главные оптические оси обеих линз совпадают. Определите модуль фокусного расстояния рассеивающей линзы F_2, если известно, что из неё выходит параллельный пучок света.



Решение. Из рассеивающей линзы будет выходить параллельный пучок света, если изображение источника, создаваемое собирающей линзой, будет находиться в правом фокусе рассеивающей линзы. По формуле тонкой линзы имеем $\dfrac{1}{F_1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{l + F_2}$. Отсюда $l + F_2 = \dfrac{a \cdot F_1}{a - F_1}$. Следовательно, $F_2 = \dfrac{a \cdot F_1}{a - F_1} - l$.

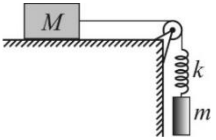


Ответ: $F_2 = \dfrac{a \cdot F_1}{a - F_1} - l = 10$ см.

Пример задания для 10-х – 11-х классов

1. Дайте определение механической работы. Чему равна кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек?

Задача. На шероховатом горизонтальном столе находится брусок массой $M = 500$ г с прикрепленной к нему легкой нерастяжимой нитью,



перекинутой через невесомый неподвижный блок, причем отрезок нити от бруска до блока горизонтален. Ко второму концу нити привязана легкая пружина жесткостью $k = 10$ Н/м с подвешенным на ней грузом массой $m = 100$ г. В начальном состоянии груз удерживают в таком положении, что нить слегка натянута, а пружина не деформирована, причем правый конец нити и пружина занимают вертикальное положение. В некоторый момент груз отпускают из состояния покоя. Спустя время $\tau = \pi/30$ с $\approx 0{,}105$ с после этого брусок сдвигается с места. Найдите коэффициент трения μ между бруском и столом.

Решение. Брусок сдвинется с места, когда сила натяжения нити T превысит максимальное значение силы трения покоя между бруском и столом, т.е. при $T > \mu Mg$, где g – ускорение свободного падения. В свою очередь по закону Гука $T = ky$, где y – удлинение пружины. Найдем величину $y(\tau) = y_0$ в момент времени τ. Совместим начало отсчета с нижним концом недеформированной пружины, координатную ось OY направим вертикально вниз. По второму закону Ньютона для груза имеем уравнение движения $m\ddot{y} = mg - ky$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, где точками над буквами обозначены производные по времени. Заменой переменных $\eta = y - \dfrac{mg}{k}$ уравнение движения груза приводится к уравнению $\ddot{\eta} + \dfrac{k}{m}\eta = 0$, описывающему гармонические колебания с круговой частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. С учетом начальных условий $\eta(0) = -\dfrac{mg}{k}$, $\dot{\eta}(0) = 0$ решение этого уравнения имеет вид $\eta(t) = -\dfrac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.

Переходя вновь к переменной y, находим, что $y_0 = \dfrac{mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\tau\right)\right]$.

Подставляя это значение в уравнение $\mu Mg = ky_0$, получаем, что искомый коэффициент трения $\mu = \frac{m}{M}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau\right)\right]$.

Ответ: $\mu = \frac{m}{M}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\tau\right)\right] = 0{,}1$.

2. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. Над одноатомным идеальным газом совершают процесс, в котором давление газа линейно уменьшается с ростом его объема. При этом отношение конечного объема газа к начальному $\frac{V_2}{V_1} = m = 4$, а отношение конечного давления к начальному $\frac{p_2}{p_1} = n = \frac{1}{2}$. Найдите, во сколько раз k количество теплоты, полученное газом в этом процессе, больше изменения его внутренней энергии.

Решение. Работа, совершенная газом в рассматриваемом процессе, $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$, изменение внутренней энергии газа $\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$. Согласно первому закону термодинамики $\Delta Q = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$. Искомое отношение равно

$$k = \frac{4p_2V_2 - 4p_1V_1 + p_1V_2 - p_2V_1}{3(p_2V_2 - p_1V_1)} = \frac{4\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} - 4 + \frac{V_2}{V_1} - \frac{p_2}{p_1}}{3\left(\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} - 1\right)} = \frac{4mn - 4 + m - n}{3(mn-1)}.$$

Ответ: $k = \frac{4nm - 4 + m - n}{3(mn-1)} = \frac{5}{2}$.

3. Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника? Сформулируйте закон Ома для замкнутой цепи.

Задача. На двух длинных параллельных рельсах, расположенных на горизонтальной поверхности на расстоянии $l = 1$ м друг от друга, лежит перпендикулярно рельсам проводящий стержень массой $m = 0{,}5$ кг. Коэффициент трения между стержнем и рельсами $\mu = 0{,}1$. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально и по модулю равен $B = 0{,}1$ Тл. Рельсы подключают к источнику с ЭДС $\mathbf{E} = 10{,}1$ В, в результате чего стержень приходит в движение. Пренебрегая сопротивлением рельсов и внутренним сопротивлением источника, а также считая сопротивление отрезка стержня между точками его контакта с рельсами равным R = 2 Ом, найдите, с какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться стержень. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.

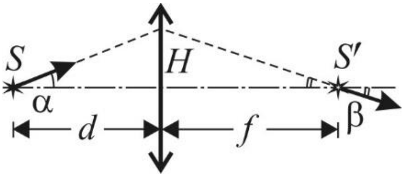
Решение. Стержень придет в движение под действием силы Ампера $F_\text{А} = IBl$, где I – сила тока в цепи. Используя закон электромагнитной индукции и правило Ленца, находим, что при движении стержня со скоростью v на его концах возникает ЭДС индукции $\mathsf{E}_\text{инд} = Bvl$, направленная против ЭДС источника. По закону Ома для замкнутой цепи имеем: $I = \dfrac{\mathsf{E} - \mathsf{E}_\text{инд}}{R}$. По второму закону Ньютона уравнение движения стержня имеет вид $ma = F_\text{А} - F_\text{тр}$, где a – ускорение стержня, а $F_\text{тр} = \mu mg$ – модуль силы трения скольжения. При установившемся движении стержня $a = 0$, а $v = v_0$. Из записанных выражений следует равенство $\dfrac{(\mathsf{E} - Bv_0 l)Bl}{R} = \mu mg$, откуда $v_0 = \dfrac{1}{Bl}\left(\mathsf{E} - \dfrac{\mu mgR}{Bl}\right)$.

Ответ: $v_0 = \dfrac{1}{Bl}\left(\mathsf{E} - \dfrac{\mu mgR}{Bl}\right) = 1$ м/с. При $\mathsf{E} \le \dfrac{\mu mgR}{Bl} = 10$ В стержень не сдвинется с места и его скорость будет равна нулю.

4. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Светящаяся точка S приближается к собирающей тонкой линзе и пересекает ее главную оптическую ось на расстоянии d = 30 см от линзы. В этот момент скорость точки составляет угол $\alpha = 30°$ с осью линзы. Найдите угол β между скоростью изображения S' точки S и главной оптической осью линзы в тот же момент времени. Фокусное расстояние линзы F = 20 см.

Решение. При прямолинейном движении светящейся точки её изображение будет двигаться также по прямой. Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{H}{d}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{H}{f}$. Отсюда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{d}{f}\operatorname{tg}\alpha$.



Применив формулу тонкой линзы $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$, находим, что $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{d - F}{F} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ:
$\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{d - F}{F} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right) \approx \operatorname{arctg}(0{,}29) \approx 16°$; изображение удаляется от линзы.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по физике

Олимпиада проводится Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова совместно с Издательским Домом «Московский комсомолец». Официальный портал олимпиады размещен в сети Интернет по адресу: www.pvg.mk.ru

Олимпиада включает два обязательных этапа: – первый этап – отборочный, который проводится в заочной форме с применением дистанционных образовательных технологий в период с ноября по декабрь; – второй этап – заключительный, который проводится в очной форме в период с февраля по март.

Для участия в отборочном этапе необходимо пройти регистрацию на официальном портале Олимпиады, получить задания, отправить свои решения в электронном виде через личный кабинет на портале Олимпиады.

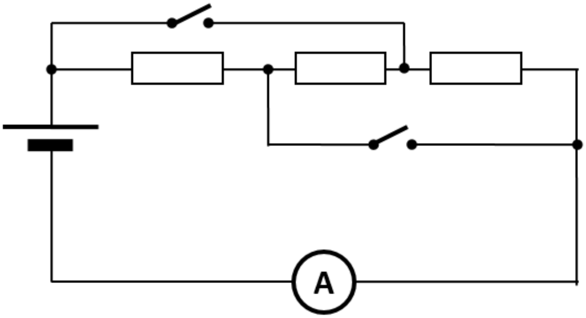
К участию в заключительном этапе допускаются победители и призеры отборочного этапа, а также победители и призеры Олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» предыдущего года по данному предмету, продолжающие освоение общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования. Транспортные расходы участников заключительного этапа, а также проживание участников и сопровождающих их лиц, традиционно оплачиваются оргкомитетом Олимпиады. При этом вопрос о выборе города, где школьники участвуют в заключительном этапе Олимпиады, решается Оргкомитетом.

Отборочный этап олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!»

Пример задания для 7-х – 9-х классов

Тестовая задача:

В схеме, показанной на рисунке, сопротивление всех соединительных проводов и контактов ключей пренебрежимо мало. Все три резистора одинаковы. Пока оба ключа были разомкнуты, амперметр показывал силу тока в цепи, равную 1 А. Когда один из ключей замкнули, сила тока возросла до 2 А. Какой станет сила тока, если замкнуть и второй ключ? Считать, что провода и приборы не выйдут из строя.



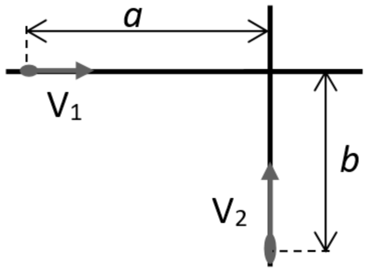
Решение: Пока оба ключа были разомкнуты, то ток тек через три последовательно соединенных резистора. Поэтому ток в первом случае $I_1 = \dfrac{\mathrm{E}}{3R + r}$, где мы обозначили: E – ЭДС источника (равную напряжению, которое источник создает на своих клеммах при разомкнутой цепи), r – внутреннее сопротивление источника, а R – сопротивление каждого из резисторов. После замыкания одного из ключей (любого) два резистора оказываются закороченными, и ток течет только через один резистор. Поэтому $I_2 = \dfrac{\mathrm{E}}{R + r} \Rightarrow \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{3R + r}{R + r} = 2$, и поэтому $r = R$. После замыкания второго ключа оказывается, что ток опять течет через все три резистора, но они оказываются подключены к клеммам источника параллельно. Поэтому $I_3 = \dfrac{\mathrm{E}}{(R/3) + r}$, и мы можем найти, что $\dfrac{I_3}{I_1} = \dfrac{3(3R + r)}{R + 3r} = 3$, то есть $I_3 = 3$ А.

Ответ: 3 А.

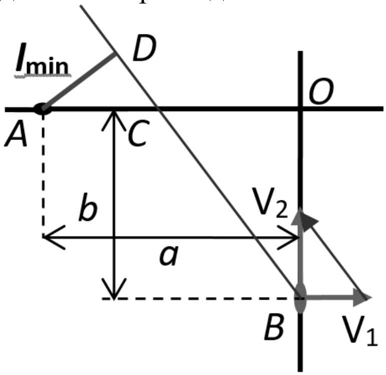
Творческие задачи:

1. **«Перекресток»**

Два автомобиля подъезжают по разным дорогам к перекрестку (дороги пересекаются под прямым углом – см. рисунок). Скорость «первого» автомобиля $V_1 = 54$ км/час, а второго – $V_2 = 72$ км/час. В тот момент времени, когда первому автомобилю осталось проехать до перекрестка расстояние $a = 400$ м, второму осталось до перекрестка $b = 300$ м. В дальнейшем скорости автомобилей не изменяются. Найдите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения.



Решение: Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей. Рассмотрим движение в СО «автомобиль 1». Отметим характерные точки так, как показано на рисунке. В этой СО автомобиль 1 покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построив векторный треугольник скоростей (см. рисунок), мы находим положение линии BD, вдоль которой движется автомобиль 2 в этой системе отсчета. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра AD, опущенного на эту линию. Далее используем подобие треугольников. Треугольник OBC подобен треугольнику скоростей, поэтому $|OC| = \dfrac{V_1}{V_2} b$. Значит, $|AC| = a - \dfrac{V_1}{V_2} b$.



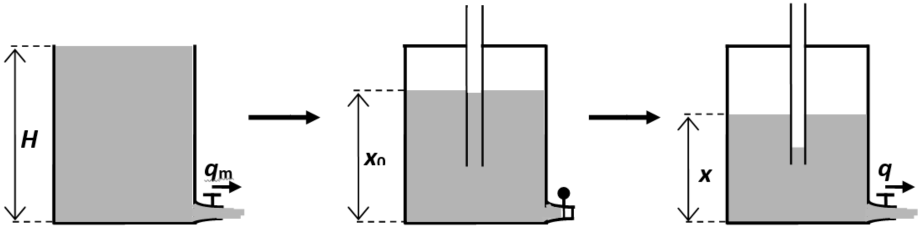
Треугольник ACD тоже подобен треугольнику скоростей, поэтому $l_{\min} = |AD| = \dfrac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} |AC| = \dfrac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$.

Подставляя скорости, находим: $l_{\min} = \dfrac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

Ответ: $l_{\min} = \dfrac{V_2 a - V_1 b}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \dfrac{4a - 3b}{5} = 140$ м.

2. «Очень большой сифон»

В архивах одной секретной лаборатории был найден отчет о необычном эксперименте. Для него была построена вертикальная колонна высотой $H = 6$ м. Колонна снабжена вентилем небольшого диаметра, расположенным в самом низу колонны и снабженным очень точным



электронным счетчиком расхода воды (*расход воды* – это объем воды, проходящей через вентиль в единицу времени). Если колонну заполнить целиком и открыть вентиль, то расход воды будет максимален и равен некоторой величине q_m. В ходе эксперимента колонну заполняли водой частично при запертом вентиле, закрывали сверху крышкой с тонкостенной трубкой, идущей сквозь крышку внутрь колонны, тщательно герметизировали все стыки (стенок колонны с крышкой и крышки с трубой), а затем открывали вентиль. В архиве сохранилась таблица данных о связи расхода воды (в процентах от q_m) и высоты

x, …	5,62	5,50	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00
q/q_m, %	81,6	71,4	57,7	57,8	57,8	57,7	57,7	54,4	48,7

уровня воды в колонне.

Правда, в таблице не указаны единицы измерения высоты, но в пояснениях сообщается, что погрешность всех данных равна единице последнего указанного разряда. Пользуясь имеющимися данными, ответьте на следующие вопросы:

- На какой высоте над дном колонны находится нижний конец трубы?
- Каков был начальный уровень воды в колонне в этом эксперименте?
- В каких единицах могут быть приведены высоты в таблице?
- При каком атмосферном давлении проводился эксперимент?

Атмосферное давление считайте неизменным и найдите его в мм.рт.ст. (плотность ртути примерно в 13,546 раза больше плотности воды). Все высоты нужно найти в метрах. Для всех найденных величин постарайтесь обеспечить наилучшую возможную точность, и укажите ее. Известно, что в рамках требуемой точности вязкое трение, поверхностное натяжение и сжимаемость воды можно не учитывать.

Решение: Расход воды связан со скоростью вытекания воды v и площадью поперечного сечения потока через вентиль S соотношением $q = v \cdot S$. Скорость вытекания проще всего определить из уравнения Бернулли: если давление на уровне вентиля (то есть у дна колонны) равно p, а давление снаружи (атмосферное давление) равно p_0, то (сечение колонны много больше сечения вентиля, и скорость движения воды на уровне вентиля в колонне много меньше скорости вытекания) $p \approx p_0 + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}$, где ρ – плотность воды. Значит, $q \approx S\sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}$. При открытой полностью заполненной колонне давление у дна $p \approx p_0 + \rho g H$, и поэтому $q_m \approx S\sqrt{2gH}$. При закрытой колонне в первый момент давление над поверхностью воды равно p_0, и давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x_0$, поэтому начальный расход $q_0 \approx S\sqrt{2gx_0}$. Следовательно, $\frac{q_0}{q_m} = \sqrt{\frac{x_0}{H}}$. Согласно таблице, $\frac{q_0}{q_m} = 0{,}816 \pm 0{,}001$. Поэтому $\frac{x_0}{H} \approx 0{,}6659 \pm 0{,}0016$ (в промежуточных результатах для повышения точности расчетов сохраняем «лишний» разряд), и $x_0 = (4{,}00 \pm 0{,}01)$ м. По таблице $x_0 = 5{,}62 \pm 0{,}01$ неизвестных единиц длины, поэтому используемая единица длины равна $0{,}712 \pm 0{,}002$ м. В этот диапазон попадает <u>аршин</u> (1 аршин $\approx 0{,}7112$ м), так что лаборатория скорее всего располагалась в России. По мере вытекания воды давление над поверхностью уменьшается обратно пропорционально объему воздушного промежутка (при неизменной температуре), поэтому давление у дна $p \approx p_0 \frac{H - x_0}{H - x} + \rho g x$, поэтому скорость вытекания и расход воды через вентиль изменяются:

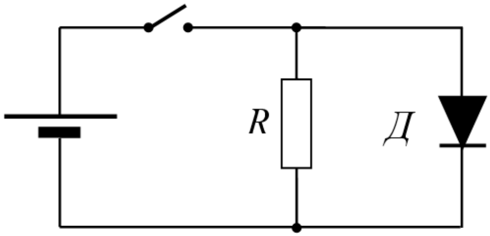
$q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H} - \frac{p_0}{\rho g H}\frac{x_0 - x}{H - x}}$ (как видно из таблицы, расход убывает). Однако при этом уменьшается давление у нижнего конца трубки, и когда оно достигнет p_0, то уровень воды в трубке опустится до ее нижнего конца, и дальше воздух начнет поступать через трубку в колонну, поддерживая давление, равное p_0 на уровне нижнего конца трубки). Поэтому давление у дна будет постоянно и равно $p \approx p_0 + \rho g h$ (где h и – высота нижнего конца трубы над дном колонны). На этом этапе расход должен быть постоянен и равен $\bar{q} = q_m \sqrt{\frac{h}{H}}$. Из таблицы видно, что расход действительно постоянен в пределах точности измерений в диапазоне $3{,}00 \le x \le 5{,}00$. Усредняя имеющиеся значения, находим: $\frac{q}{q_m} \approx 0{,}5774$, и поэтому $\frac{h}{H} \approx 0{,}3334 \pm 0{,}0011$, что дает для высоты нижнего конца трубы над дном колонны $h = (2{,}000 \pm 0{,}007)$ м. Этот этап прекращается, когда уровень воды достигает нижнего конца трубы. Далее воздух поступает в колонну, поддерживая над поверхностью воды давление p_0, при этом давление у дна $p \approx p_0 + \rho g x$, и поэтому $q(x) = q_m \sqrt{\frac{x}{H}}$ – расход воды уменьшается, как и видно из таблицы. Как видно, атмосферное давление можно найти только по одному из значений расхода – при $x = (5{,}50 \pm 0{,}01)$ аршин $\approx (3{,}912 \pm 0{,}007)$ м. Из формулы для расхода жидкости на этом этапе найдем, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$, что позволяет найти атмосферное давление в мм водяного столба. Ясно, что для перевода в мм.рт.ст. нужно учесть различие плотностей: $\frac{p_0}{\rho_{PT} g} = \frac{\rho}{\rho_{PT}}\frac{H(H-x)}{x_0 - x}\left(\frac{x}{H} - \frac{q^2}{q_m^2}\right)$. Подставляя численные значения находим, что $p_0 = (1500 \pm 300)$ мм.рт.ст. (точность оказывается низкой, так как при вычислении величины $x_0 - x$ возникает очень большая ошибка – это величина около 9 см, и ошибка может быть близка к ней по порядку величины: $x_0 - x = (8{,}8 \pm 1{,}7)$ см!

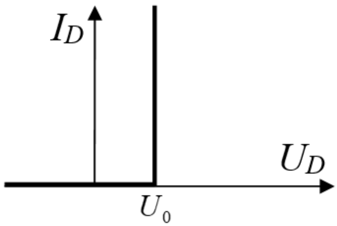
Обнаруживается, что в любом случае давление значительно превышало нормальное атмосферное (760 мм.рт.ст). Можно сделать вывод, что эксперимент проводился в барокамере очень значительных размеров.

Пример задания для 10-х – 11-х классов

Тестовая задача:

В схеме, показанной на рисунке, диод не является идеальным – его вольтамперная характеристика (зависимость силы тока от приложенного напряжения) показана на рисунке. Как видно, у диода есть некоторое пороговое напряжение, ниже которого он заперт даже при прямом включении, а при его превышении он пропускает любой ток (считаем, что это справедливо для токов, характерных для этой схемы). Известно, что величина ЭДС источника в 6 раз больше порогового напряжения диода, а





внутреннее сопротивление источника во столько же раз меньше сопротивления резистора. Найдите отношение мощности, выделяемой на диоде, к мощности, выделяемой на резисторе. Ответ запишите в виде числа.

Решение: Источник подключен к диоду в «правильной» полярности, и в отсутствие диода напряжение на резисторе равнялось бы $U'_R = \dfrac{6U_0}{R + R/6} R = \dfrac{36}{7} U_0 > U_0$, то есть диод будет открыт. Значит, напряжение на диоде и резисторе на самом деле $U_R = U_D = U_0$, и отношение мощностей рано отношению токов: $\dfrac{P_D}{P_R} = \dfrac{I_D}{I_R}$. Ток через резистор $I_R = \dfrac{U_0}{R}$, а ток в ветви с источником определяется из уравнения

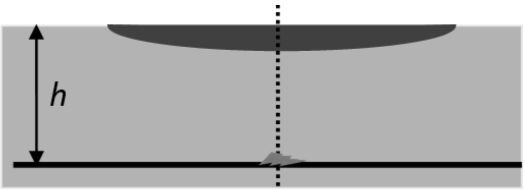
$6U_0 - I\dfrac{R}{6} = U_0 \Rightarrow I = 30\dfrac{U_0}{R}$. Следовательно, $I_D = I - I_R = 29\dfrac{U_0}{R}$. В итоге $\dfrac{P_D}{P_R} = 29$.

Ответ: 29.

Творческие задачи: «Архивы профессора Челленджера»

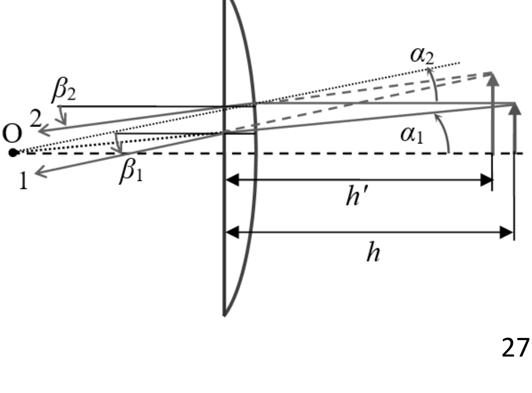
1. «Подводная оптика»

Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую линзу, фокусное расстояние которой в воздухе равнялось $F = 30$ см. Линза размещалась на поверхности воды (см. рисунок). Профессор рассматривал мелкий объект, находившийся точно под центром линзы на глубине $h = 63$ см. С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_{Л} = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1{,}414$.



С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_{Л} = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Решение: Рассмотрим два луча, падающей от крайней точки наблюдаемого объекта на линзу. Первый луч – идущий по радиусу сферической поверхности линзы. Он не преломляется на сферической поверхности линзы, и падает под углом $\alpha_1 \approx \dfrac{l}{R+h}$ на ее плоскую поверхность. Здесь l – размер объекта, а R – радиус сферической поверхности (в этой и последующих выкладках мы считаем все углы малыми, а



толщиной линзы везде будем пренебрегать). После преломления на границе раздела стекло-воздух этот луч будет направлен под углом $\beta_1 \approx n_Л \alpha_1 \approx \dfrac{n_Л l}{R+h}$ к главной оптической оси линзы. Второй луч – идущий параллельно главной оптической оси линзы. Угол его падения на сферическую поверхность равен $\alpha_2 \approx \dfrac{l}{R}$, и после преломления на границе раздела вода-стекло он будет идти под углом $\alpha_2' \approx \dfrac{l}{R} - \dfrac{n}{n_Л}\dfrac{l}{R} = \dfrac{n_Л - n}{n_Л}\dfrac{l}{R}$ к главной оптической оси. После преломления на плоской поверхности этот угол станет равным $\beta_2 \approx n_Л \alpha_2 \approx \dfrac{(n_Л - n)l}{R}$. Численный анализ позволяет заметить, что $\beta_1 > \beta_2$, и поэтому пересекаются продолжения этих лучей (то есть изображение объекта – мнимое). Обозначив h' расстояние от линзы до изображения, запишем два выражения для величины изображения: $l' \approx \dfrac{Rl}{R+h} + \beta_1 h' \approx l + \beta_2 h'$. Используя полученное соотношение как уравнение для h', находим: $h' = \dfrac{Rh}{nR - (n_Л - n)h}$. Подставляя это значение во второе выражение, определяем размер изображения $l' \approx l \cdot \left(1 + \dfrac{(n_Л - n)h}{nR - (n_Л - n)h}\right) = l \cdot \dfrac{nR}{nR - (n_Л - n)h}$. Следовательно, увеличение изображения $\Gamma = \dfrac{l'}{l} \approx \dfrac{nR}{nR - (n_Л - n)h}$. Отметим, что для плоско-выпуклой линзы с показателем преломления стекла $n_Л$ в воздухе фокусное расстояние $F = \dfrac{R}{n_Л - 1} \Rightarrow R = (n_Л - 1)F$. Поэтому окончательно $\Gamma = \dfrac{l'}{l} \approx \dfrac{n(n_Л - 1)F}{n(n_Л - 1)F - (n_Л - n)h} \approx 7{,}7$.

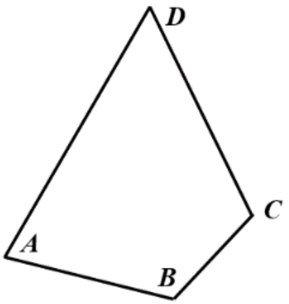
Примечание: В этой задаче есть целый ряд «альтернативных» путей: можно мысленно добавить «над» линзой бесконечно тонкий слой воды.

Как известно, бесконечно тонкая параллельная пластина не вызовет смещения или преломления лучей, и задача сводится к анализу комбинации «линза в воде + преломление на границе раздела вода-воздух (в этом случае ключевые формулы – это $\Gamma = n\dfrac{h'}{h}$, формула линзы $\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{nh'} = \dfrac{1}{F'}$ и формулы для оптической силы линзы в воде $\dfrac{1}{F'} = \dfrac{n_Л - n}{nR}$ и в воздухе $\dfrac{1}{F} = \dfrac{n_Л - 1}{R}$). Также можно использовать «обобщенную формулу линзы» для системы преломляющих поверхностей $-\dfrac{1}{h'} + \dfrac{n}{h} = \dfrac{n_Л - n}{R}$ вместе с анализом хода одного из рассмотренных лучей. Но все эти пути должны приводить к тому же ответу.

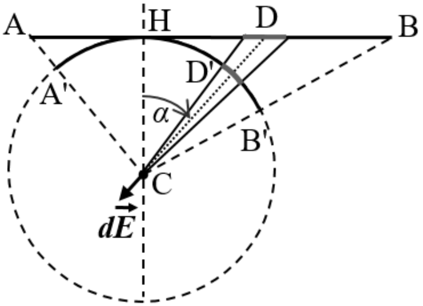
Ответ: $\Gamma = \dfrac{l'}{l} \approx \dfrac{n(n_Л - 1)F}{n(n_Л - 1)F - (n_Л - n)h} \approx 7{,}7$.

2. «Поиски нуля»

В одной из записных книжек профессора Челленджера найдено упоминание об «особенном четырехугольнике». Плоский четырехугольный каркас ABCD был изготовлен из непроводящего жестокого стержня и имел стороны с длинами $|AB| = 3$ см, $|BC| = 2$ см, $|CD| = 4$ см, и $|DA| = 5$ см. Площадь четырехугольника равнялась $S \approx 10{,}78$ см^2. На этот каркас по всему периметру был равномерно нанесен заряд. В записной книжке утверждалось, что у этого четырехугольника есть точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю. Найдите эту точку, определите расстояние от нее до каждой из сторон четырехугольника и укажите еще хотя бы один пример равномерно заряженного четырехугольника, имеющего такую точку.



Решение: Докажем сначала следующее утверждение: вектор напряженности электростатического поля $\vec{E}$, созданного равномерно заряженным с плотностью λ отрезком AB в точке C, не лежащей на прямой AB, равен вектору напряженности $\vec{E}'$, создаваемому равномерно заряженной с той же плотностью λ дугой A'B' окружности радиуса CH с центром C. Непосредственный расчет доказывает это утверждение. Действительно, для бесконечно малого элемента dl отрезка AB, расположенного в точке D, имеем следующее выражение для проекции электростатического поля $\vec{E}$ на направление от этого элемента к точке C:

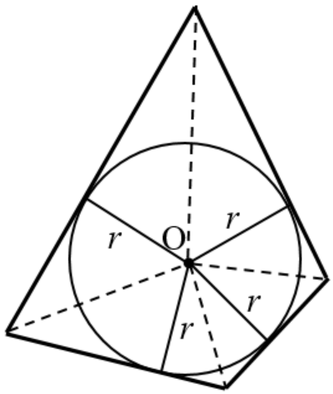


$dE = \dfrac{k\,dq}{R^2} = \dfrac{k\lambda\,dl}{R^2}$, где $R \equiv |CD|$. Для соответствующего малого элемента dl' дуги A'B' аналогичное выражение для электростатического поля $dE' = \dfrac{k\,dq'}{r^2} = \dfrac{k\lambda\,dl'}{r^2}$, где $r \equiv |CH|$ – радиус кривизны дуги. Учитывая соотношения $dl' = \dfrac{r}{R} dl \cdot \cos(\alpha)$ и $r = R\cos(\alpha)$, получим, что

$$dE' = \frac{k\lambda}{(R \cdot \cos(\alpha))^2} \frac{R\cos(\alpha)}{R} dl \cos(\alpha) = \frac{k\lambda\,dl}{R^2} = dE.$$

Направление этих векторов совпадает, поэтому $d\vec{E}' = d\vec{E}$. Таким образом, поля, созданные соответственно малыми элементами dl и dl', равны друг другу. Суммируя поля всех малых элементов отрезка AB и дуги A'B', доказываем равенство полей, созданными ими: $\vec{E}' = \vec{E}$, т.е. утверждение доказано. Можно отметить, что из него сразу же следует, что поле равномерно заряженного отрезка направлено вдоль биссектрисы угла ACB.

Теперь заметим, что в данном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, следовательно, существует вписанная в него окружность. Рассмотрим ее центр O. Согласно доказанному утверждению, можно заменить при расчете поля в точке O каждую сторону четырехугольника соответствующей дугой вписанной



окружности. Сделав это, убеждаемся, что поле четырехугольника в точке О равно полю вписанной в него окружности в ее центре, а из соображений симметрии ясно, что поле в центре равномерно заряженной окружности равно нулю. Таким образом, требуемая точка – это центр вписанной окружности. Расстояние от этой точки до всех сторон четырехугольника равно радиусу вписанной окружности, который можно найти как отношение площади четырехугольника к его полупериметру: $r = \frac{2S}{P} \approx 1{,}54$ см. Кроме того, понятно, что для любого равномерно заряженного по периметру выпуклого многоугольника, у которого существует вписанная окружность, центр этой окружности – это точка, в которой напряженность электростатического поля равна нулю. Поэтому в качестве примера подойдет любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны. Вместе с тем можно найти и другие примеры. Например, такая точка очевидно существует у любого прямоугольника – это его центр.

Ответ: центр вписанной в ABCD окружности (он же – точка пересечения биссектрис), расстояние до всех сторон $r \approx 1{,}54$ см, любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны или прямоугольник.

Заключительный этап олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!»

Пример задания для 7-х – 9-х классов

Задание 1.

Вопрос: Два тела одинаковой массы летели во взаимно-перпендикулярных направлениях с одинаковой по модулю скоростью. Произошло абсолютно неупругое столкновение. Какая часть кинетической энергии перешла в тепло?

Задача: Снаряд, летевший со скоростью $V = 300$ м/с, разорвался на три осколка. Два осколка имели одинаковые массы $m = 2$ кг каждый, и они полетели с одинаковой по модулю скоростью. Масса третьего осколка была в два раза больше, и он полетел вдоль линии движения снаряда до взрыва. Известно, что в результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на $W = 810$ кДж. Движение всех осколков поступательное, а масса пороховых газов пренебрежимо мала. Найдите максимально возможную величину скорости третьего осколка при таких условиях.

Ответ на вопрос: При неупругом ударе сохраняется импульс – проекции импульса образовавшегося тела удвоенной массы ($2m$) на взаимно-перпендикулярные направления движения тел до удара равны импульсам тел (mv). Поэтому проекции скорости этого тела равны $\frac{v}{2}$, а модуль скорости $v' = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v$. Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии: $Q = E_0 - E' = 2\frac{mv^2}{2} - \frac{2m(v/\sqrt{2})^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = 0{,}5 \cdot E_0$. Таким образом, в тепло перешло 50% начальной кинетической энергии.

Решение задачи: Из условия задачи следует, что масса снаряда равнялась $4m$, и поэтому закон сохранения импульса для процесса взрыва можно записать как $4m\vec{V} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + 2m\vec{v}_3$ (здесь $\vec{v}_{1,2,3}$ – скорости осколков, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \equiv v$). Закон сохранения энергии дает: $\frac{4mV^2}{2} + W = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{2mv_3^2}{2}$. Как видно, возможность передать третьему осколку как можно большую долю начальной энергии ограничивается требованиями закона сохранения импульса (например, с точки зрения одного закона сохранении энергии можно подумать – как сделали некоторые участники – что максимум v_3 достигается при $v = 0$; однако легко убедиться, что при таком значении v закон сохранения импульса не может быть выполнен). Поэтому для достижения максимума v_3 необходимо обеспечить передачу ему как можно большего импульса. Это достигается, если 3-й осколок полетит в направлении движения снаряда до взрыва, а 1-й и 2-й – в противоположном направлении. В этом случае из закона сохранения импульса в проекции на линию движения снаряда $4mV = -2mv + 2mv_3$ находим, что $v = v_3 - 2V$. Значит, с учетом уравнения закона сохранения энергии

$$V^2 + \frac{W}{2m} = \frac{(v_3 - 2V)^2}{2} + \frac{v_3^2}{2} = v_3^2 - 2Vv_3 + 2V^2 \Rightarrow (v_3 - V)^2 = \frac{W}{2m}.$$

Выбирая наибольший корень этого уравнения, получаем:

$$(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\frac{W}{2m}} = 750\ \text{м/с}.$$

Ответ: $(v_3)_{\max} = V + \sqrt{\dfrac{W}{2m}} = 750$ м/с.

<u>Возможный вариант решения</u>: рассмотреть процесс взрыва в системе отсчета, связанной со снарядом перед взрывом.

Задание 2.

Вопрос: Каким образом можно добиться, чтобы вода оставалась жидкой при температуре – 5°C? Предложите один вариант, объяснив его.

Задача: В трехлитровую банку массой $m = 250$ г набросали доверху мокрого снега, не утрамбовывая его. Оказалось, что масса банки со снегом равна $M = 2550$ г. Если снег плотно утрамбовать, его объем станет равен $V = 2{,}5$ л. Какое количество теплоты нужно сообщить снегу, чтобы он полностью растаял? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3; плотность ледяных кристаллов, из которых состоит сухой снег, $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ Дж/г.

Ответ на вопрос: Таких вариантов достаточно много (допустим любой), но самый естественный – добавить в воду «антифриз» (например, поваренную соль). Молекулы соли, проникая между молекулами воды, изменяют их взаимодействие и препятствуют кристаллизации. Другой вариант – изолировать чистую воду от внешних воздействий, исключив образование «центров кристаллизации». В этом случае вода из-за невозможности «старта» кристаллизации может при соблюдении необходимых предосторожностей задерживаться на достаточно длительное время в жидком состоянии и при отрицательных температурах и нормальном атмосферном давлении (это состояние называют «переохлажденной» водой).

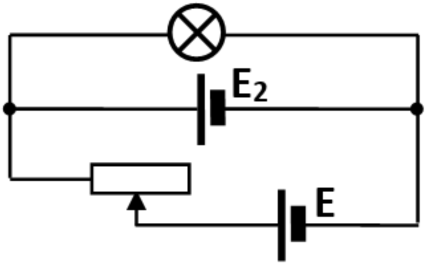
Решение задачи: В процессе утрамбовывания мокрого снега из него вытеснили воздух, и осталась смесь воды (массой m_0) и ледяных кристаллов (массой $M-m-m_0$). Поэтому $V=\dfrac{M-m-m_0}{\rho}+\dfrac{m_0}{\rho_0}$. Выражаем из этого соотношения массу воды: $m_0=\dfrac{\rho_0}{\rho_0-\rho}\left(M-m-\rho V\right)=0{,}5\,\text{кг}$ и массу льда $M-m-m_0=\dfrac{\rho}{\rho_0-\rho}\left(\rho_0 V-M+m\right)=1{,}8\,\text{кг}$. Для плавления льда потребуется количество теплоты $Q=\dfrac{\lambda\rho}{\rho_0-\rho}\left(\rho_0 V-M+m\right)=612\,\text{кДж}$.

Ответ: $Q=\dfrac{\lambda\rho}{\rho_0-\rho}\left(\rho_0 V-M+m\right)=612\,\text{кДж}$.

Задание 3.

Вопрос: Две лампы, имеющие одинаковую мощность $P=4{,}5\,\text{Вт}$, рассчитаны на разные напряжения: $U_1=3\,\text{В}$ и $U_2=6\,\text{В}$. Чему равны их сопротивления в номинальном режиме?

Задача: Исследуя поведение лампы в цепи, изображенной на рисунке, школьник обнаружил, что яркость свечения лампы не зависит от положения движка реостата – лампа всегда работает в номинальном режиме, в котором ее мощность $P=90\,\text{Вт}$. Номинальное напряжение лампы $U=36\,\text{В}$. Внутренние сопротивления обоих



источников одинаковы и равны $r = 2$ Ом.

Чему равны напряжения, которые каждый из источников создает на своих клеммах при разомкнутой цепи?

Ответ на вопрос: Поскольку мощность лампы $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$, то

$R = \frac{U^2}{P}$. Значит, $R_1 = \frac{U_1^2}{P} = 2$ Ом, а $R_2 = \frac{U_2^2}{P} = 8$ Ом.

Решение задачи: Обозначим полное сопротивление ветви с реостатом R. Сопротивление лампы в номинальном режиме $R_Л = \frac{U^2}{P} = 14{,}4$ Ом. Ток в ветви реостатом $I_1 = \frac{\mathrm{E} - U}{R}$ и ток в ветви со вторым источником $I_2 = \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r}$ в сумме дают ток через лампу $I = I_1 + I_2 = \frac{\mathrm{E} - U}{R} + \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r}$, который не зависит от R только в том случае, когда $\mathrm{E} = U = 36$ В (ток через реостат не течет). Но тогда $I = \frac{U}{R_Л} = \frac{\mathrm{E}_2 - U}{r} \Rightarrow \mathrm{E}_2 = U + U\frac{r}{R_Л} = U + \frac{rP}{U} = 41$ В.

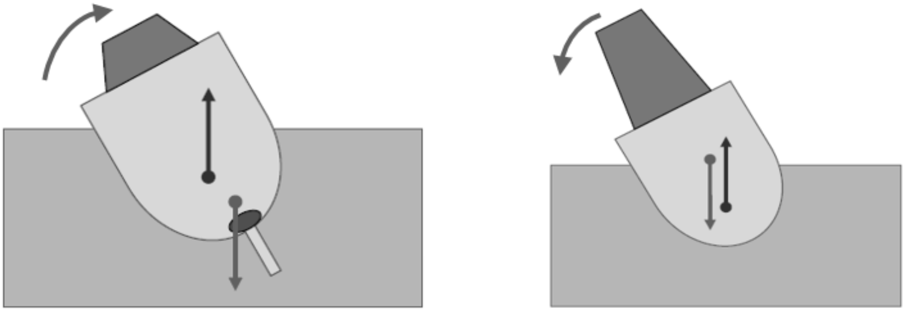
Ответ: $\mathrm{E} = U = 36$ В, $\mathrm{E}_2 = U + U\frac{r}{R_Л} = U + \frac{rP}{U} = 41$ В.

Задание 4.

Вопрос: Существует «золотое правило кораблестроения», согласно которому центр плавучести (точка приложения силы Архимеда, действующей на корабль) в положении равновесия должен находиться выше центра масс корабля. Объясните смысл этого правила.

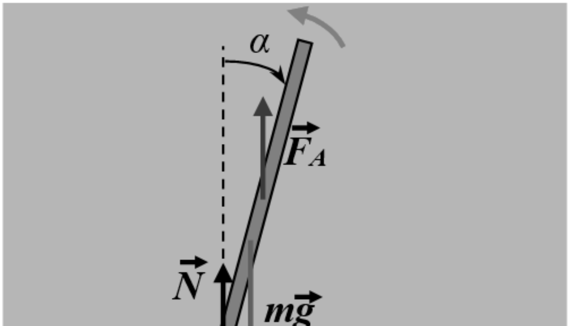
Задача: Стержень, имеющий форму тонкого цилиндра постоянного сечения, неоднороден. Его центр масс находится на расстоянии $x = \frac{1}{3}$ части его длины от одного из концов. Средняя плотность стержня равна ρ. Его опускают в большой сосуд с жидкостью с плотностью ρ_0. Глубина жидкости в сосуде заметно больше длины стержня. При каких значениях ρ_0 стержень после установления равновесия расположится вертикально?

Ответ на вопрос: Для объяснения рассмотрим два корабля: один (рисунок слева) удовлетворяет «золотому» правилу, а другой (рисунок справа) – нет. В положении равновесия сила Архимеда равна по



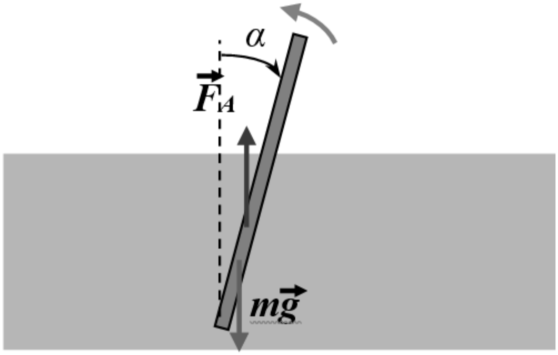
модулю и противоположна по направлению силе тяжести. Пусть корабль немного отклонился от вертикального положения. В первом случае, как видно из рисунка слева, момент этой пары сил возвращает корабль в вертикальное положение, а во втором – увеличивает отклонение корабля от вертикали. Следовательно, выполнение «золотого» правила обеспечивает устойчивость равновесия корабля в вертикальном положении.

Решение задачи: Важно обратить внимание, что вертикальное положение стержень может занять в двух случаях: когда плотность жидкости <u>меньше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 < \rho$), и стержень тонет и опирается на дно, и когда плотность жидкости <u>больше</u> средней плотности стержня ($\rho_0 > \rho$), и стержень плавает на поверхности. Рассмотрим сначала первый случай: вычислим сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки опоры, при отклонении стержня от вертикали на небольшой угол α. Плечо силы нормальной реакции дна $\vec{N}$ равно нулю, плечо силы Архимеда (точка приложения – середина стержня длиной L)



$l_A = \frac{L}{2}\sin(\alpha)$, плечо силы тяжести (точка приложения – центр масс) $l_g = \frac{L}{3}\sin(\alpha)$. Кроме того, $F_A = \rho_0 LSg$, а $mg = \rho LSg$. Поэтому суммарный момент, возвращающий стержень к вертикальному положению, $M = +F_A l_A - mgl_g = \left(\frac{\rho_0}{2} - \frac{\rho}{3}\right) L^2 Sg\sin(\alpha)$. Поэтому $M > 0$ при $\rho_0 > \frac{2}{3}\rho$, и стержень будет устойчив в вертикальном положении при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \rho$.

Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае в вертикальном положении равновесия $F_A = \rho_0 L'Sg = mg = \rho LSg$, откуда следует, что длина погруженной части $L' = \rho L / \rho_0$. Теперь плечо силы Архимеда относительно нижнего конца стержня $l_A = \frac{L'}{2}\sin(\alpha)$, и суммарный момент $M = \left(\frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{1}{3}\right)\rho L^2 Sg\sin(\alpha) > 0$, при $\rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.



Значит, вертикальный стержень устойчив и при $\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$. Нетрудно понять, что устойчивость сохранится и при $\rho_0 = \rho$ (стержень целиком погружен в воду, но не опирается на дно). Объединяя все случаи, находим: стержень займет вертикальное положение при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

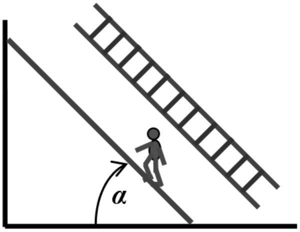
Ответ: при $\frac{2}{3}\rho < \rho_0 < \frac{3}{2}\rho$.

Пример задания для 10-х – 11-х классов

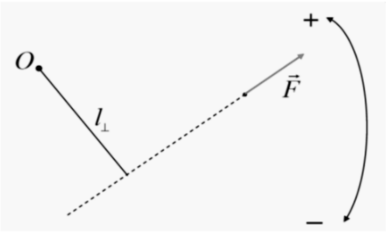
Задание 1.

Вопрос: Сформулируйте условия равновесия твердого тела. Что такое «момент силы»?

Задача: У лестницы 11 одинаковых ступеней, распределенных равномерно: расстояние от нижнего конца до нижней ступени, расстояния между соседними ступенями и расстояние от верхней ступени до верхнего конца одинаковы. Ее поставили в угол, образованный стеной и полом. Коэффициент трения между стеной и лестницей $\mu = 0{,}25$, а коэффициент трения между лестницей и полом $2\mu = 0{,}5$. Человек с массой, равной удвоенной массе лестницы, поднимается по ступеням. Когда он перенес весь свой вес на девятую ступень, лестница, немного постояв, начала скользить. Чему равнялся угол между лестницей и полом?



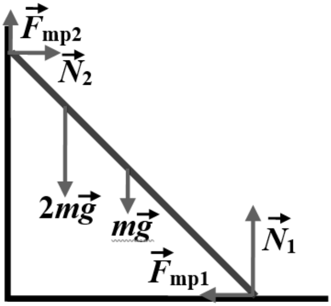
Ответ на вопрос: Необходимыми условиями нахождения твердого тела в равновесии являются: (1) равенство нулю векторной сумм внешних сил, приложенных к телу; (2) равенство нулю алгебраической суммы моментов внешних сил, приложенных к телу. Во втором условии используются определения:



Плечо силы $l_\perp$ – расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Момент силы – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm |\vec{F}| \cdot l_\perp$

Решение задачи: Искомый угол α - в точности «критический» угол наклона, при котором силы трения, удерживающие лестницу от проскальзывания, еще обеспечивают равновесие (лестница «немного постояла»), но уже достигли своих максимальных значений. Пусть масса лестницы равна m, а масса человека – $2m$. Укажем на рисунке силы, действующие на лестницу в «критическом» положении (человек на 9-й



ступени). Запишем условие равновесия сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и найдем $N_{1,2}$:

$$\begin{Bmatrix} N_1 + \mu N_2 = 3mg \\ N_2 - 2\mu N_1 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{3mg}{1+2\mu^2} \\ N_2 = \dfrac{6\mu mg}{1+2\mu^2} \end{cases}$$

Теперь запишем условие моментов относительно нижнего конца лестницы (учитывая, что точка приложения веса человека находится на расстоянии $\dfrac{3L}{4}$ от него, где L – длина лестницы): $mg\dfrac{L}{2}\cos(\alpha) + 2mg\dfrac{3L}{4}\cos(\alpha) - N_2 L[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)] = 0$. Из этого уравнения находим, что $\mathrm{tg}(\alpha) + \mu = \dfrac{2mg}{N_2} \Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{1-\mu^2}{3\mu} = \dfrac{5}{4}$. Итак, $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\mu^2}{3\mu}\right) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\mu^2}{3\mu}\right) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

Задание 2.

Вопрос: При расширении одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведенной им работы оказалась линейной: $T = T_0 - b\dfrac{A}{R}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная). При каких значениях b теплоемкость газа в этом процессе отрицательна?

Задача: Вертикальный цилиндрический теплоизолирующий гладкий сосуд разделен на две части массивным горизонтальным поршнем. В нижней части сосуда находится гелий под давлением $p_1 = 100$ кПа, а верхняя часть вакуумирована. Поршень удерживается в этом положении. Затем его отпускают. После установления равновесия оказалось, что объем, занятый гелием, увеличился на 40%. Найти давление гелия в этом состоянии равновесия.

Ответ на вопрос: Согласно I Началу термодинамики, изменение внутренней энергии газа $\Delta U = Q - A = \frac{3}{2}R\Delta T$ (здесь Q – количество теплоты, подведенной к газу). По условию $A = -\frac{R}{b}(T - T_0) = -\frac{R}{b}\Delta T$. Следовательно, $Q = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{b}\right)R\Delta T$. Из этого соотношения находим теплоемкость $c \equiv \frac{Q}{\Delta T} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{b}\right)R$. Таким образом, $c < 0$ при $0 < b < \frac{2}{3}$.

Решение задачи: Пусть количество молей гелия в сосуде равно ν, а его начальный объем равен V. Тогда конечный объем равен $\frac{7V}{5}$, и высота подъема поршня $x = \frac{\Delta V}{S} = \frac{2V}{5S}$ (S – сечение сосуда). В конечном состоянии давление гелия уравновешивается весом поршня $p_2 S = mg \Rightarrow \frac{5\nu RT_2}{7V}S = mg$. В процессе сжатия газом пружины внутренняя энергия газа переходит в энергию поршня в поле тяжести: $-\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = mgx$. Подставив сюда полученные выражения для mg и x, получим: $\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{5\nu RT_2}{7V}S\frac{2V}{5S} \Rightarrow 21(T_1 - T_2) = 4T_2$. Следовательно, $T_2 = \frac{21}{25}T_1$. Согласно объединенному газовому закону, отношение давлений $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$, и $p_2 = \frac{3}{5}p_1 = 60$ кПа.

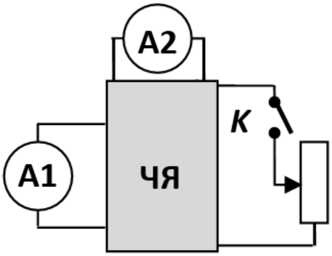
Ответ: $p_2 = \frac{3}{5}p_1 = 60$ кПа.

Задание 3.

Вопрос: 50 аккумуляторов с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями r соединены последовательно в замкнутую цепь.

Вольтметр подключен к участку, содержащему 20 аккумуляторов. Каковы его показания? Ответ объяснить.

Задача: В «Черном Ящике» находится схема, составленная из резисторов и источников постоянного тока. У «ЧЯ» есть шесть выводов. К двум парам выводов подключены амперметры, а к двум оставшимся – ветвь, содержащая ключ и реостат. При разомкнутом ключе показания амперметра А1 равны 1А, а амперметра А2 – 5А. После замыкания ключа А1 стал показывать силу тока 2А, а А2 – силу тока 4А. Движок реостата передвинули. После этого показания А2 стали равны 2,4 А. Какой ток при этом течет через А1?



Ответ на вопрос: Ток в такой замкнутой цепи $I = \dfrac{50\mathcal{E}}{50r} = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$.

Поэтому напряжение на каждом из аккумуляторов $U_1 = \mathcal{E} - Ir = 0$. Значит, равно нулю и напряжение на любом участке цепи, и показания вольтметра также должны быть нулевыми.

Решение задачи: Поскольку схема в «Черном Ящике» содержит только линейные элементы (резисторы и источники), то токи в ветвях являются решениями линейной системы уравнений, и поэтому являются линейными функциями ЭДС и обратных сопротивлений элементов схемы. При изменении сопротивления одной из ветвей (при неизменных значениях остальных параметров) токи во всех ветвях оказываются линейным функциями обратного сопротивления этой ветви, и поэтому между самими токами тоже должно быть линейное соотношении. Значит, существуют такие постоянные коэффициенты (обозначим их A и B), что при любом изменении сопротивления ветви с реостатом показания амперметров связаны соотношением $I_1 = A + B \cdot I_2$. Используя известные значения токов, находим:

$$\begin{Bmatrix} 1\text{A} = A + B \cdot 5\text{A} \\ 2\text{A} = A + B \cdot 4\text{A} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A = 6\text{A} \\ B = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow I_1 = 6\text{A} - I_2 .$$

Таким образом, при $I_2 = 2{,}4$ А через А1 течет ток $I_1 = 3{,}6$ А.

Ответ: $I_1 = 6\text{A} - I_2 = 3{,}6$ А

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1 = -10$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2 = +2{,}5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от одной из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (рассеивающей) линзы пучок станет расходящимся – продолжения лучей будут пересекаться в точке, лежащей в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (собирающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. Поэтому расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз: $L = F_2 - |F_1| = \dfrac{1}{D_2} - \dfrac{1}{|D_1|} = 30$ см.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы. Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы: $a_2 = L - b_1 = L - \dfrac{a_1 F_1}{a_1 - F_1} = \dfrac{La_1 - F_1(L + a_1)}{a_1 - F_1}$. Вторично применяя формулу линзы, получим:

$$b_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - F_2} = \frac{F_2\left[L a_1 - F_1(L + a_1)\right]}{L a_1 - F_1(L + a_1) - F_2 a_1 + F_1 F_2} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow (L + a_1 + b_2) F_1 F_2 - (L + a_1) b_2 F_1 - (L + b_2) a_1 F_2 + L a_1 b_2 = 0$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние линзы с большей оптической силой F_1 (т.е. считаем $F_1 < F_2$):

$$\begin{cases} 4 F_1 F_2 - 4 L F_1 - 3 L F_2 + 2 L^2 = 0 \\ \dfrac{7}{2} F_1 F_2 - \dfrac{5}{2} L F_1 - 3 L F_2 + \dfrac{3}{2} L^2 = 0 \end{cases}.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2. Она имеет два решения: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$ и $F_1 = 3L/8$, $F_2 = L/3$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

Ответ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

«Московская олимпиада школьников»

Организаторами «Московской олимпиады школьников по физике» являются Департамент образования г. Москвы и Физический факультет МГУ. «Московская олимпиада школьников по физике» состоит из отборочных этапов и заключительного этапа.

Отборочный этап состоит из нескольких независимых друг от друга туров, каждый из которых может проводиться в очной (в Москве и в регионах) или заочной форме. Победителями отборочного этапа считаются участники очного отборочного тура, набравшие максимально возможное количество баллов. Призерами отборочного этапа считаются участники хотя бы одного из отборочных туров, набравшие на этом туре установленный оргкомитетом олимпиады проходной балл.

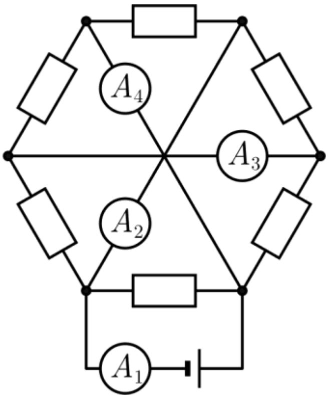
К заключительному этапу олимпиады допускаются победители и призеры отборочного этапа олимпиады, а также прошлогодние победители и призеры заключительного этапа, продолжающие обучение в образовательных организациях. Все мероприятия заключительного этапа олимпиады, кроме второго тура 11-го класса, проводятся как в Москве, так и в регионах. Второй тур 11-го класса, влияющий на льготы при поступлении в вузы, организовывается только в Москве.

На сайте http://mosphys.olimpiada.ru размещается актуальная информация, касающаяся данной олимпиады. Задачи и ответы заключительного этапа также можно найти на сайте олимпиады в разделе «Олимпиады прошлых лет». Разбор некоторых задач предлагается ниже.

Пример задания для 9-го класса (2 тур)

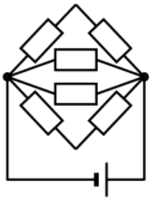
Задача 1 (А.И. Бычков)
Сопротивление каждого из резисторов в цепи, схема которой изображена на рисунке, одинаково и равно 3 Ом. Напряжение между полюсами идеального источника равно 6 В. Все амперметры идеальные, в центре шестиугольника контакта между проводами нет. Найдите показания всех амперметров.

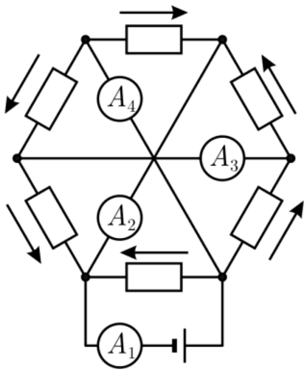
Решение: Из симметрии электрической цепи следует, что через



амперметр A_3 ток не течет, и проводник, который соединяет точки, между которыми включен этот амперметр, можно убрать.

На рисунке слева представлена эквивалентная схема цепи. Она построена с учетом того, что все амперметры идеальные, и, следовательно, точки цепи, между которыми они включены, просто соединены друг с другом проводниками. Общее сопротивление такой цепи легко ищется – оно равно 1 Ом. Значит, амперметр A_1 показывает 6 А.





Следовательно, через резисторы, изображенные на схеме исходной цепи сверху и снизу, текут токи по 2 А, а через резисторы, изображенные слева и справа, текут токи по 1 А. На рисунке справа указаны направления токов, текущих через резисторы. Из закона сохранения электрического заряда следует, что каждый из амперметров A_2 и A_4 показывает 3 А.

Ответ: амперметр A_1 показывает 6 А, амперметры A_2 и A_4 показывают по 3 А, амперметр A_3 показывает 0 А.

Пример задания для 10-го класса (2 тур)

Задача 2 (А.И. Бычков)

На фотографии, сделанной камерой мобильного телефона, представлен вращающийся пропеллер самолета. Наблюдаемый эффект «смазывания» изображения обусловлен способом обработки светового потока матрицей фотокамеры. Во время срабатывания фотокамеры матрица «захватывает» не всю снимаемую сцену целиком одновременно, а происходит очень быстрое поэтапное сканирование кадра в направлении слева направо (с точки зрения фотографа). В результате в память фотокамеры последовательно попадают узкие вертикальные «полоски» изображения, причем «линия сканирования» движется с постоянной скоростью.

1) В каком направлении вращается пропеллер с точки зрения фотографа?

2) Сколько лопастей у пропеллера?

3) Оцените, сколько оборотов в секунду делает пропеллер, если процесс получения всего изображения занял 1/8 секунды?

Решение:

1) Пропеллер вращается против часовой стрелки, так как изображения лопастей в верхней части фотографии расположены ближе друг к другу (в этой области лопасти движутся навстречу «линии сканирования»), чем в нижней области фотографии.

2) В левой части фотографии расположены «смазанные» изображения двух ближайших друг к другу лопастей пропеллера. Вертикальной линии на рисунке 1 соответствует момент, когда концы этих двух лопастей находились на одной вертикали. Непосредственно видно, что угол между лопастями больше 90 градусов. Менее очевидно, что этот угол близок к 120 градусам (но в этом можно убедиться при наличии транспортира). Следовательно, у пропеллера три лопасти.

Рис. 1.

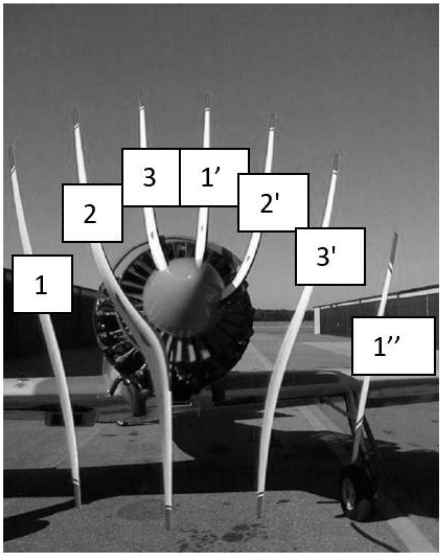


Рис. 2.

3) Поскольку лопастей три, то каждая третья полоса на рисунке – это изображение, полученное при сканировании одной и той же лопасти в разные моменты времени. На рисунке 2 цифрами без штрихов отмечены положения соседних лопастей, а цифрами со штрихами – положения этих же лопастей в последующие моменты времени.

Найдем время *t*, за которое «линия сканирования» прошла расстояние, равное длине отрезка, изображенного в средней части фотографии (см. рис. 3). Отношение этого времени к времени получения полного кадра равно отношению длины

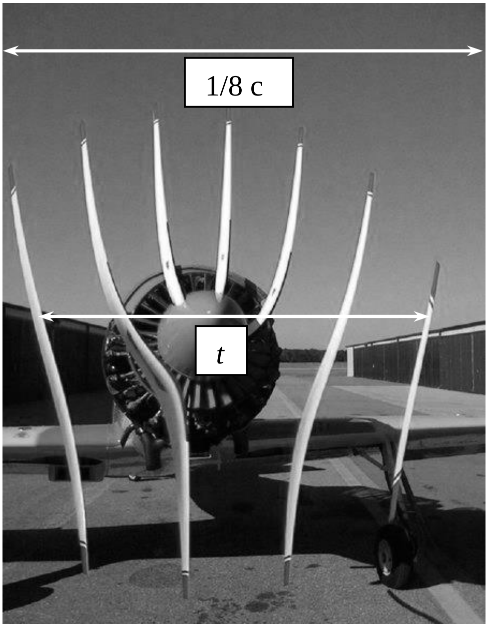


Рис. 3.

упомянутого отрезка к ширине кадра. Поэтому $t \approx 0{,}1$ с.
За это время лопасть 1 сделала полтора оборота. Следовательно, за одну секунду лопасть делает примерно 15 оборотов.

Возможен и другой способ поиска ответа на данный вопрос. Рассмотрим некоторый непрерывный след, который получился на фотографии в результате сканирования одной и той же вращающейся лопасти. Найдем на этом следе два изображения наиболее удаленного от оси вращения элемента лопасти – изображение, попавшее под «сканирование» раньше, и изображение, попавшее под «сканирование» позже. По фотографии, пользуясь описанным выше способом, можно оценить промежуток времени, за который эта лопасть повернулась на определенный угол, который тоже можно определить по фотографии (например, при помощи транспортира). Два этих значения позволяют вычислить угловую скорость вращения лопасти. Таких непрерывных следов лопастей на фотографии четыре. Можно определить угловую скорость, используя каждый из них, а затем найти среднее значение угловой скорости – получится приблизительно 14 оборотов в секунду.

Ответ:

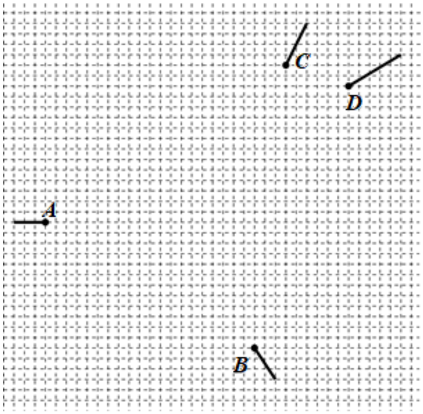
1) с точки зрения фотографа пропеллер вращается против часовой стрелки;

2) у пропеллера три лопасти;

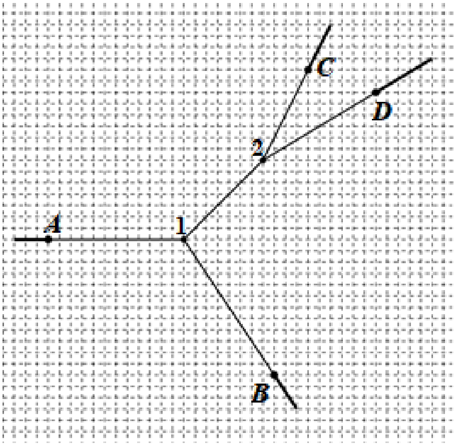
3) пропеллер делает примерно (15 ± 1) оборотов в секунду.

Задача 3 (И.И. Воробьев)

Регистрирующая аппаратура установила положения элементарных частиц *A*, *B*, *C* и *D* в некоторый момент, а также их перемещения за время τ, считая с этого момента (перемещения показаны на рисунке отрезками). Массы частиц *C* и *D* одинаковы. Была высказана догадка, что эти частицы появились при распаде одной единственной частицы, и что она сначала распалась на три частицы, а затем одна из трёх образовавшихся частиц распалась на две частицы. Установите, верна ли эта гипотеза, и если да, то определите, через какое время после первого распада произошёл второй распад? Считайте, что частицы движутся свободно.



Решение: Так как, согласно условию задачи, частицы движутся свободно, то можно считать скорости всех частиц неизменными по модулю и по направлению. Найдем скорости частиц по их перемещениям за время τ: $\vec{V}_A = \vec{l}_A / \tau$, $\vec{V}_B = \vec{l}_B / \tau$, $\vec{V}_C = \vec{l}_C / \tau$, $\vec{V}_D = \vec{l}_D / \tau$.



Здесь $\vec{l}_i$ – вектор перемещения *i*-й частицы за время τ.

Если две частицы вылетели одновременно из одной точки (места распада), то их траектории – отрезки, выходящие из этой точки, а модули перемещений за любое время полета относятся как модули скоростей (а значит, как модули векторов $\vec{l}_i$). Восстановим на чертеже траектории частиц, продолжая отрезки, задающие перемещения за время τ. Получится всего 6 точек пересечения траекторий. Но из них как места распада годятся только две (точки 1 и 2 на рисунке), поскольку только для них отношение перемещений совпадает с отношением скоростей. Другие точки пересечения на рисунке не показаны.

Для частиц *A* и *B* время полёта от места распада 1 до конечных положений, указанных точками *A* и *B*, одинаково и равно 4τ. Для частиц *C* и *D* время полёта от точки 2 до конечных положений равно 2τ. Поэтому второй распад происходит позже первого на время 4τ – 2τ = 2τ.

Из закона сохранения импульса в случае равных масс частиц *C* и *D* найдём вектор скорости $\vec{V}$ частицы, распавшейся в точке 2 на *C* и *D*: $2m\vec{V} = m\vec{V}_C + m\vec{V}_D$, откуда $\vec{V} = (\vec{V}_C + \vec{V}_D)/2$. Если эта частица появилась при первом распаде в точке 1, то ее перемещение от точки 1 до точки 2 должно совпасть с вектором $\vec{V} \cdot 2\tau = (\vec{V}_C + \vec{V}_D)\tau = \vec{l}_C + \vec{l}_D$. И это совпадение, как видно из чертежа, действительно обнаруживается.
Таким образом, высказанная догадка верна.

Ответ: гипотеза верна, второй распад произошел позже первого на время 2τ.

Задача 4 (А.И. Бычков, С.Д. Варламов)

На горизонтальном участке поля Вася очистил от чистого белого снега площадку с размерами 1 м × 1 м. Под лучами весеннего солнца черная земля прогревается и нагревает расположенный над ней воздух. Тепловая мощность, получаемая воздухом от площадки, равна $W = 0{,}3$ кВт – поскольку солнце зимой находится довольно низко над горизонтом. В безветренную и сухую погоду при температуре воздуха $T_0 = 273$ К и давлении возле поверхности земли $p = 10^5$ Па столб теплого воздуха, поднимающийся над площадкой, имеет на высоте $h = 10$ м температуру $T_1 = 275$ К и поперечное сечение, равное $S = 2$ м^2. Температура окружающего воздуха не зависит от высоты и равна T_0. Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль, его молярная теплоемкость при постоянном давлении равна $c_p = 7R/2$.

1) Оцените, с какой скоростью поднимается поток воздуха на высоте h, если процесс уже установился?

2) Оцените, на какую высоту поднялся бы теплый воздух, если бы отсутствовал теплообмен между теплым воздухом и окружающим его холодным воздухом?

Примечание. Справедлива приближенная формула: $\Delta\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}$.

Решение:

1) Поток теплого воздуха уносит с собой от места нагревания некоторое количество теплоты, и мощность этой теплоотдачи равна мощности, поступающей к воздуху от очищенного от снега участка. Воздух нагревается при постоянном давлении. Плотность воздуха равна $\rho = \mu p/(RT)$ и она мало отличается для теплого и для холодного воздуха. Если скорость подъема потока на высоте h обозначить через u, то масса воздуха, поднимающегося в потоке в единицу времени, равна $\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \rho S u = \dfrac{Su\mu p}{RT_1}$. Для того чтобы нагревать этот воздух на $\Delta T = T_1 - T_2 = 2$ К, нужна мощность

$$W = \frac{c_p}{\mu}\frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta T = \frac{7Sup(T_1 - T_2)}{2T_1},$$

откуда $u = \dfrac{2T_1 W}{7Sp(T_1 - T_2)} \approx 0{,}06$ м/с.

2) Столб воздуха будет подниматься вверх до тех пор, пока его плотность не станет равной плотности окружающего воздуха на той же высоте. Кроме того, на этой высоте давление воздуха в столбе равно давлению окружающего воздуха, а значит, одинаковы и их температуры. Температура воздуха в столбе снижается с увеличением высоты из-за адиабатического расширения.

Из уравнения Клапейрона-Менделеева следует, что изменение объема расширяющейся порции воздуха равно

$$\Delta V = \nu R \Delta\left(\frac{T}{p}\right) = \nu R \frac{p\Delta T - T\Delta p}{p^2},$$

где ν – количество вещества в рассматриваемой порции.

Запишем для этой порции первое начало термодинамики, учитывая, что процесс является адиабатическим: $c_V \nu \Delta T + p\Delta V = 0$. Здесь c_V – молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме. С учетом предыдущего равенства получаем:

$$(c_V + R)\frac{\Delta T}{T} - R\frac{\Delta p}{p} = 0.$$

Поскольку $c_V + R = c_p$, то $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{R}{c_p}\dfrac{\Delta p}{p}$.

Оценим изменение давления на высоте h: оно равно $\Delta p \approx \rho g h = \dfrac{\mu p g h}{R T_0}$.

Тогда для максимальной высоты подъема воздуха получаем оценку:

$$h \approx \frac{R T_0 \Delta p}{\mu p g} = \frac{c_p \Delta T}{\mu g} = \frac{7R\Delta T}{2\mu g} \approx 200 \text{ м}.$$

Ответ:

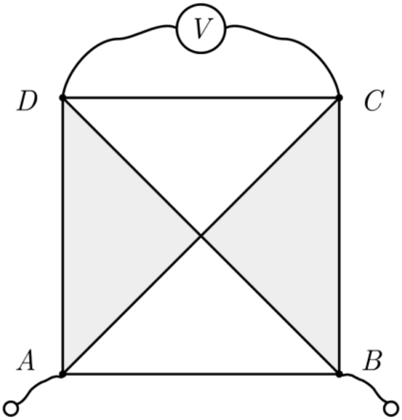
1) поток воздуха на высоте 10 м поднимается со скорость $u = \dfrac{2T_1 W}{7Sp(T_1 - T_2)} \approx 0{,}06$ м/с;

2) поток теплого воздуха в отсутствие теплообмена поднялся бы на высоту $h \approx \dfrac{7R\Delta T}{2\mu g} \approx 200$ м.

Пример задания для 11-го класса (2 тур)

Задача 5 (А.И. Бычков)

Квадратная пластина составлена из проводников двух сортов: серого и белого (см. рисунок). Удельное сопротивление белого проводника вдвое меньше, чем серого. Сопротивление пластины между вершинами A и B равно r_1. Если через эти вершины пропускать ток силой I, то идеальный вольтметр, подключенный к вершинам C и D, показывает значение напряжения U_1. После охлаждения пластины удельное сопротивление белых проводников уменьшилось вдвое, а серых – в восемь раз. Сопротивление пластины между вершинами A и B при этом стало равным r_2, а при пропускании через эти вершины прежнего тока силой I тот же вольтметр стал показывать значение U_2.



1) Найдите сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения.

2) Найдите сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения.

Решение: Пусть потенциал точки A до охлаждения пластины равен $\varphi_A = \frac{1}{2}Ir_1$ (при пропускании через вершины A и B тока силой I). Тогда потенциал точки B равен $\varphi_B = -\frac{1}{2}Ir_1$. Из симметрии пластины следует, что вдоль линии O_1O_2 (рис. 1) потенциал постоянен и равен нулю.

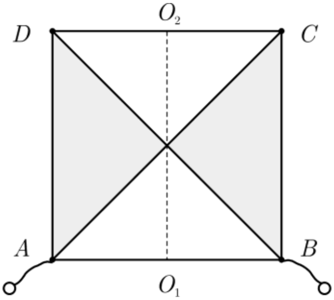


Рис. 1.

Следовательно, потенциал точки D равен $\varphi_D = \frac{1}{2}U_1$, а потенциал точки C равен $\varphi_C = -\frac{1}{2}U_1$.

Если удельное сопротивление обоих проводников уменьшится в одинаковое количество раз (в n раз), то и сопротивление пластины уменьшится в то же количество раз. На рисунке 2 показана ситуация для

$n = 4$. Цифрами обозначены удельные сопротивления проводников в относительных единицах; слева изображена пластина до уменьшения удельного сопротивления в $n = 4$ раза, а справа – после этого. При этом при пропускании прежнего тока разности потенциалов между любыми парами точек пластины уменьшатся в n раз.

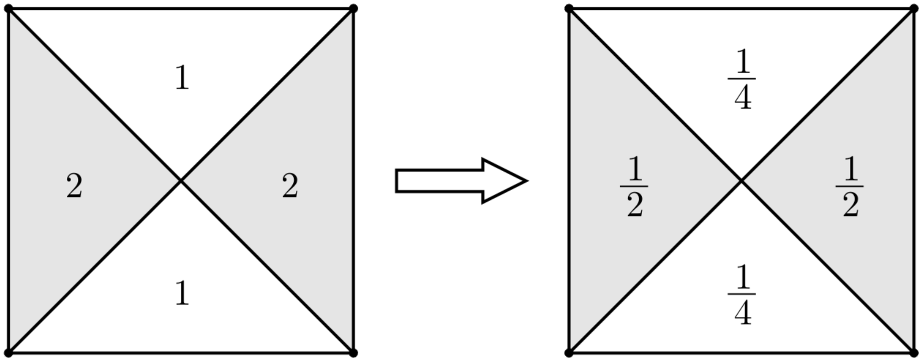


Рис. 2.

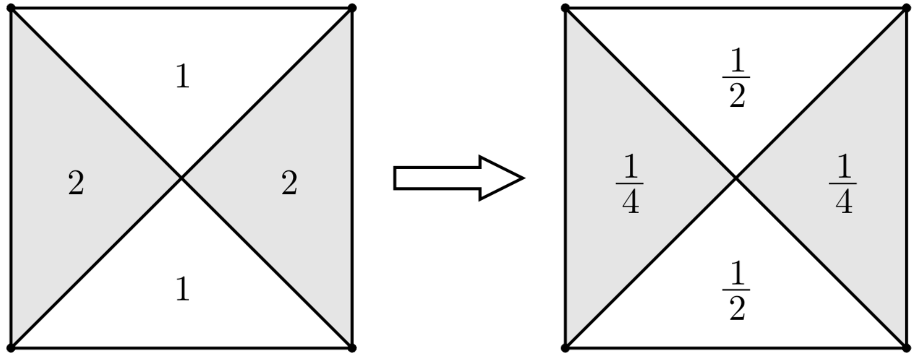


Рис. 3.

Рассмотрим теперь, как будут изменяться сопротивления участков нашей пластины вследствие охлаждения, заданного в условии задачи. На рисунке 3 слева показана пластина до охлаждения, справа – после него. Заметим, что на рисунках 2 и 3 справа изображены одинаковые пластины – с точностью до поворота рисунка на 90 градусов.

Это означает, что если в исходной пластине уменьшить сопротивления всех участков в 4 раза, ток силой I пропускать через вершины B и C, а вольтметр подключить к вершинам A и D, то получится ситуация, изображенная на рис. 2 справа – она соответствует пластине после охлаждения, в которой ток протекает через вершины A и B. Но, согласно условию задачи, в последнем случае сопротивление пластины

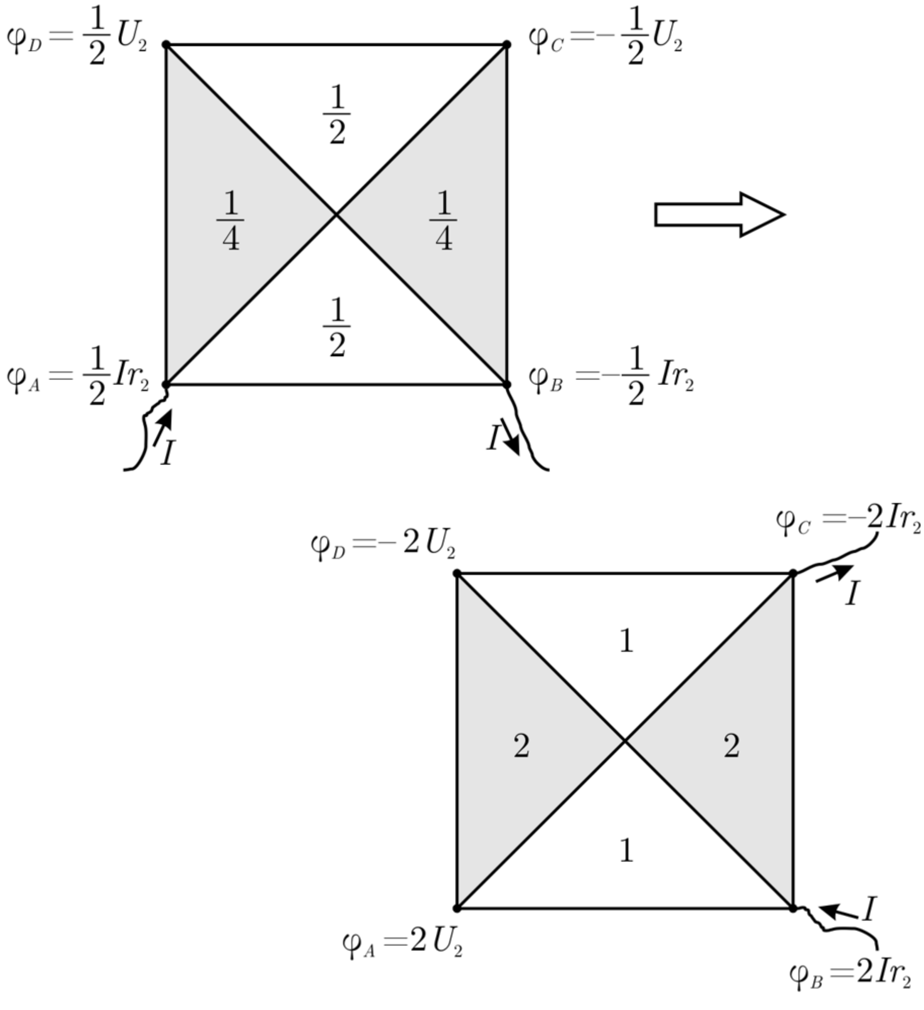


Рис. 4.

равно r_2. Если теперь обратно увеличить сопротивление всех участков пластины в 4 раза, то получится исходная пластина до охлаждения, в которой ток пропускается через вершины B и C. Следовательно, сопротивление в этом случае равно $4r_2$ – это ответ на первый вопрос задачи.

Обозначим потенциалы в вершинах пластины для двух ситуаций: а) пластина после охлаждения, ток протекает через вершины A и B (рис. 4, слева); б) пластина до охлаждения, ток протекает через вершины B и C (рис. 4, справа). Правый рисунок получается из левого путем умножения всех удельных сопротивлений и потенциалов на 4 и последующего поворота на 90 градусов.

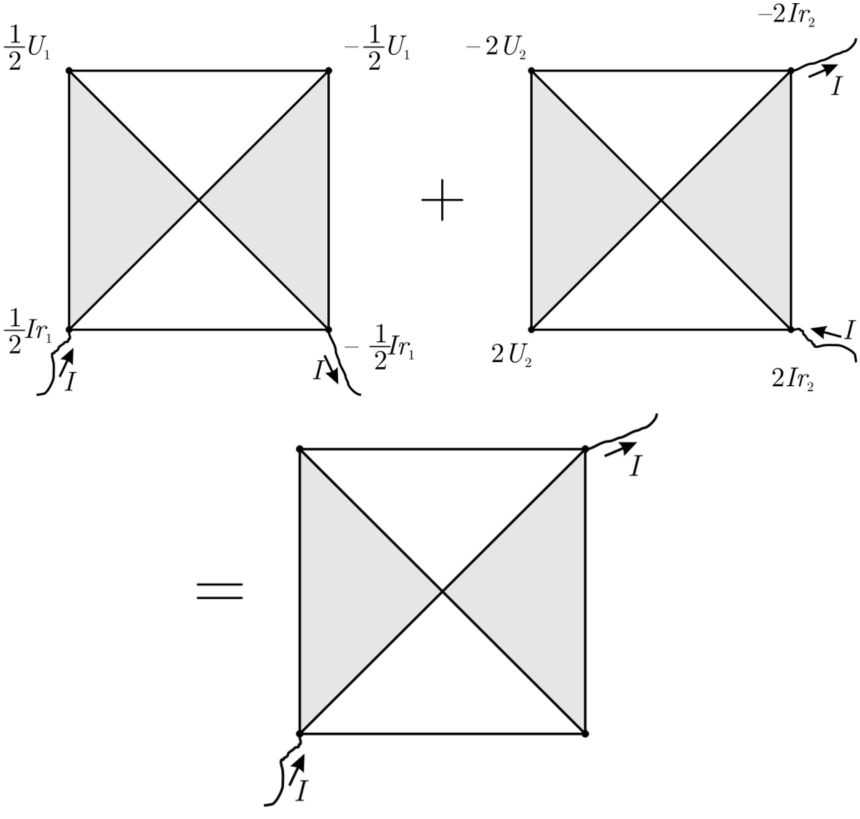


Рис. 5.

Рассмотрим теперь (рис. 5) суперпозицию (наложение друг на друга) двух исходных не охлажденных пластин – при пропускании тока силой I через вершины A и B и при пропускании того же тока через вершины B и C. Эта суперпозиция приводит как раз к ситуации, когда ток силой I пропускается в исходной неохлажденной пластине между вершинами A и

C. Ввиду линейности закона Ома, потенциалы складываются. Поэтому окончательно получаем:

$$R_{AC} = \frac{\left(\frac{1}{2}Ir_1 + 2U_2\right) - \left(-\frac{1}{2}U_1 - 2Ir_2\right)}{I} = \frac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \frac{U_1 + 4U_2}{2I}.$$

Ответ:

1) сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения равно $4r_2$;

2) сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения равно $R_{AC} = \frac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \frac{U_1+4U_2}{2I}$.

Пример задания для 11-го класса (1 тур)

Задача 6 (Ю.А. Черников)

Школьник Вася пошел в комнату смеха и обнаружил там большое круглое вогнутое зеркало, стоящее на полу и закрепленное так, что центр зеркала находился на уровне H = 1,5 м над полом, а ось симметрии зеркала была горизонтальной. Насмеявшись вдоволь, Вася заметил, что его изображение в зеркале при определенных расстояниях до него либо сильно расплывается, либо получается нечетким, и он не может себя разглядеть. Для того чтобы исследовать это явление, Вася начал приближаться к зеркалу, идя издалека вдоль его оптической оси и наблюдая при этом за изображениями своих глаз. Оцените, в каком диапазоне расстояний от глаз до центра отражающей поверхности зеркала школьник мог видеть четкое изображение своих глаз. Диаметр зеркала $2H$ = 3 м, радиус кривизны отражающей поверхности R = 15 м, расстояние от пола до глаз у Васи $h = H$ = 1,5 м. Наименьшее расстояние, с которого Вася может рассматривать что-либо в подробностях (например, читать условие этой задачи), равно a = 0,2 м. Будем также считать для упрощения задачи, что бесконечно удаленные от глаз объекты Вася может разглядеть вне зависимости от их размеров.

Решение: В первую очередь отметим, что глаза Васи всё время находятся на одном уровне с главной оптической осью зеркала. Рассмотрим процесс приближения Васи к зеркалу. Если школьник находится очень далеко от зеркала, то изображение его глаз будет располагаться в фокусе зеркала, и Вася сможет его разглядеть. По мере приближения Васи к зеркалу изображение его глаз будет приближаться к точке, удаленной от зеркала на два его фокусных расстояния. Крайним положением, из которого Вася сможет разглядеть изображение своих глаз, будет такое, при котором расстояние между глазами школьника и их изображением будет равно a. Расстояние d от глаз Васи до зеркала в этом случае можно найти, используя формулу сферического зеркала (она совпадает с формулой тонкой линзы при замене фокусного расстояния F линзы на $R/2$):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d-a}=\frac{2}{R}.$$

Выбирая больший корень этого уравнения и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получаем оценку для расстояния от глаз Васи до зеркала $d \approx R+\frac{a}{2}$.

При дальнейшем приближении Васи к зеркалу изображение его глаз сначала располагается слишком близко к глазам, а затем и вовсе оказывается позади Васи (то есть на расстоянии большем, чем расстояние от глаз Васи до зеркала). В этом случае школьник будет воспринимать изображение размытым.

Однако, когда глаза Васи оказываются в области перед фокусом зеркала (то есть при расстоянии до зеркала меньшем $R/2$), то изображение глаз становится мнимым, и оно располагается так, что Вася может его разглядеть. Ограничение на диапазон видимости изображения глаз в этом случае связано с тем, что при слишком сильном приближении глаз Васи к зеркалу расстояние между его глазами и их изображением может стать меньше, чем a. При таких расстояниях зеркало можно считать плоским, и поэтому минимальное расстояние от глаз до зеркала, при котором Вася еще сможет рассмотреть изображение, должно составлять $a/2$ – при этом изображение глаз будет находиться на границе видимости. Этот ответ соответствует меньшему корню записанного выше уравнения (опять же, при пренебрежении слагаемыми второго порядка малости).

Таким образом, искомый диапазон видимости изображения глаз состоит из двух интервалов: $[a/2;\ R/2]$ и $[R + (a/2);\ \infty)$ или [0,1 м ÷ 7,5 м] и [15,1 м ÷ ∞).

Ответ: школьник мог видеть четкое изображение своих глаз при следующих расстояниях от глаз до центра отражающей поверхности зеркала: $[a/2;\ R/2]$ и $[R + (a/2);\ \infty)$ или [0,1 м ÷ 7,5 м] и [15,1 м ÷ ∞).

Олимпиада школьников «Робофест» по физике 2017-2018

Олимпиада школьников «Робофест» – новая олимпиада по физике в МГУ. Она была впервые проведена в 2015/16 учебном году в рамках Всероссийского робототехнического фестиваля «РобоФест» по инициативе учредителя Фонда поддержки социальных инноваций «Вольное Дело» О.В. Дерипаска и ректора МГУ академика В.А. Садовничего. Эта инициатива получила поддержку Правительства Российской Федерации.

Отборочный этап олимпиады школьников «Робофест» проходит в рамках муниципальных, региональных и окружных мероприятий Фестиваля. Финальный этап проводится в г. Москва, и состоит из двух туров: на первом туре школьники участвуют в робототехнических соревнованиях в рамках Фестиваля в г.Москве и на «FIRST Russia Open», на втором - выполняют задания по физике в МГУ.

Следует отметить, что Всероссийский робототехнический фестиваль «РобоФест» является ключевым мероприятием Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России». Программа реализуется с осени 2008 года Фондом «Вольное Дело» при поддержке Министерства образования и науки РФ и Агентства стратегических инициатив. За это время Фестиваль стал крупнейшим в России (и в Европе) мероприятием такого рода, в нем участвуют школьники и студенты из разных стран мира.

Олимпиада «Робофест» дает возможность школьникам, увлеченным робототехникой, проявить себя и в решении задач по важнейшей для них дисциплине – физике, и получить льготы при поступлении в профильные ВУЗы. В 2017/18 учебном году олимпиада «Робофест» включена в Перечень олимпиад школьников и является олимпиадой II уровня.

Отборочный этап олимпиады школьников «Робофест»

Пример задания

1. Робот, у которого обе пары колес являются ведущими, одинаковы по размерам и снабжены одинаковыми шинами, разгоняется по горизонтальной поверхности. При этом на робота действует, среди прочих сил, сила сопротивления воздуха. В зависимости от размеров робота, его формы и скорости, величина этой силы может быть либо пропорциональна скорости (малые размеры, обтекаемая форма, небольшие скорости), либо пропорциональна квадрату скорости (большие размеры, угловатая форма, высокие скорости). В первом случае будем говорить о движении робота «в режиме вязкого трения», во втором – о движении «в режиме лобового сопротивления». В данном задании нужно исследовать общие и различные черты этих двух режимов.

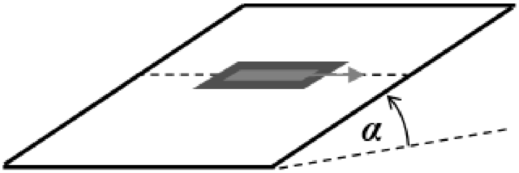
1) Коэффициент трения шин робота о поверхность μ не зависит от «режима» движения. Различаются ли максимально возможные ускорения двух роботов с одинаковыми μ, если один из них во всем рассматриваемом диапазоне скоростей движется «в режиме вязкого трения», а другой – «в режиме лобового сопротивления»? Ответ объяснить.

2) Допустим, что двух роботов из пункта 3.1 перенесли на другую («новую») поверхность, на которой для обоих коэффициент трения в два раза больше, чем на «старой». Во сколько раз у каждого из роботов возрастет максимальная скорость, достижимая при достаточно длительном разгоне?

3) На самом деле взаимодействие движущегося тела с воздухом не сводится к силе сопротивления. Вокруг движущегося тела создаются потоки воздуха, из-за которых может возникать направленная вверх «подъемная» сила (при этом говорят, что тело имеет *аэродинамический профиль* типа «крыло») или направленная вниз «прижимающая» сила (тело имеет *аэродинамический профиль* типа «антикрыло»). Если не возникает ни подъемной, ни прижимающей силы, то аэродинамический профиль тела называют «нейтральным». Пусть робот с нейтральным аэродинамическим профилем, вес которого равен 30 Н, разгоняется на горизонтальной поверхности до максимальной скорости 4 м/с. Размеры и форма роботы таковы, что при подобных скоростях сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. На робота устанавливает легкое антикрыло. Создаваемая им прижимающая сила растет

пропорционально скорости, и при 4 м/с равна 25 Н. Как установка антикрыла повлияет на максимальную достижимую скорость робота – увеличит или уменьшит? Ответ объяснить. Найдите величину максимальной скорости робота на той же поверхности после установки антикрыла.

4) Пусть роботу из данного задания нужно проехать с постоянной скоростью вдоль горизонтальной линии на плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Опишите примерно, как должны быть ориентированы плоскости колес робота (считаем, что плоскости всех четырех колес параллельны)? Ответ объяснить. Куда при этом будут направлены силы трения колес о плоскость? Пусть сила сопротивления



воздуха на скорости движения в $2\sqrt{3}$ раз меньше веса робота. При какой величине коэффициента трения между шинами и поверхностью такое движение возможно?

Ответы:

1) **Не различаются.** Ускорение робота создается разностью сил трения о поверхность и силы сопротивления воздуха. Первая максимальна при проскальзывании шин и равна силе трения скольжения μmg. Вторая растет с ростом скорости. Поэтому максимальное ускорение достигается, когда колеса проскальзывают при почти нулевой скорости. Значит, $a_{\max} = \mu g$, и максимальная величина ускорения зависит только от коэффициента трения.

2) **У робота, движущегося в режиме вязкого трения – в 2 раза, у робота, движущегося в режиме лобового сопротивления – в $\sqrt{2}$ раз.** Максимальная скорость – та, при которой сила лобового сопротивления уравновешивает максимальную силу «отталкивания» робота от поверхности, то есть силу трения скольжения. Таким образом, при $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, такой режим наступает при $\mu mg = \alpha v \Rightarrow v_{\max} = \dfrac{\mu mg}{\alpha}$ (максимальная скорость увеличивается пропорционально коэффициенту трения). Аналогично при $\vec{F}_c = -\beta|\vec{v}\,|\vec{v}$ получаем:

$\mu mg = \beta v^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\dfrac{\mu mg}{\beta}}$ (максимальная скорость увеличивается пропорционально корню квадратному из коэффициенту трения). Отсюда получаем ответ.

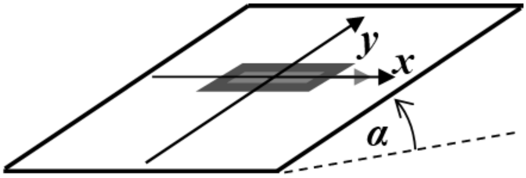
3) **Установка антикрыла увеличит максимальную достижимую скорость, и она станет равна 6 м/с.** После установки антикрыла за счет прижимной силы возрастет и сила трения скольжения. Максимальная скорость определяется условием $F_{mp} = \beta v^2$, и поэтому максимальная достижимая скорость возрастет. Теперь построим количественный анализ. До установки антикрыла $F_{mp} = \mu mg$, и из условия $\mu mg = \beta v_m^2$ находим, что $\beta = \dfrac{\mu mg}{v_m^2}$. По условию после установки антикрыла прижимная сила пропорциональна скорости и равна 25 Н (то есть $\dfrac{5}{6}mg$) при скорости $v_m = 4$ м/с, поэтому можно записать, что при произвольной скорости прижимная сила $F_{np} = \dfrac{5v}{6v_m}mg$. Тогда сила трения $F_{mp} = \mu\left(mg + \dfrac{5v}{6v_m}mg\right) = \mu mg\left(1 + \dfrac{5v}{6v_m}\right)$, и уравнение для новой максимальной скорости $\tilde{v}_m$ имеет вид:

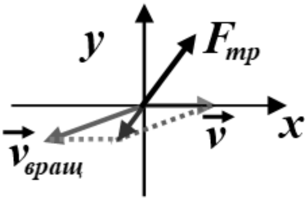
$$\mu mg\left(1 + \frac{5\tilde{v}_m}{6v_m}\right) = \beta\tilde{v}_m^2 = \mu mg\frac{\tilde{v}_m^2}{v_m^2}.$$

Следовательно, $\dfrac{\tilde{v}_m^2}{v_m^2} - \dfrac{5\tilde{v}_m}{6v_m} - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения $\dfrac{\tilde{v}_m}{v_m} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \tilde{v}_m = \dfrac{3}{2}v_m = 6$ м/с.

Примечание: участники из младших классов могут построить «грубую» оценку: сославшись на то, что за счет прижимной силы сила трения скольжения возрастает примерно в $\frac{55}{30} = \frac{11}{6}$ раз, а сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, они могут оценить новую скорость как $\tilde{v}_m \approx \sqrt{\frac{11}{6}} v_m \approx 5{,}4$ м/с. За такой ответ баллы ставятся, но в меньшем количестве.

4) **Колеса должны быть ориентированы под углом к линии движения так, чтобы «опускающаяся к плоскости» часть каждого колеса была спереди и выше линии движения. При этом сила трения будет направлена против векторной суммы скорости робота и скорости вращения точки колеса, касающейся поверхности, и тоже «вперед и вверх» по отношению к роботу. Движение возможно, если коэффициент трения не менее 2/3.** При таком движении колеса робота не могут быть выставлены параллельно линии движения – иначе у силы трения не будет составляющей, направленной «вверх» вдоль плоскости (на рисунке – вдоль оси y), и робот будет скользить вниз вдоль плоскости под действием силы тяжести. Кроме того, у силы трения должна быть составляющая, направленная «вперед» (вдоль оси x). Ясно, что колеса должны быть ориентированы под углом к линии движения, и поэтому они обязательно проскальзывают





при таком движении. Сила трения скольжения всегда направлена против относительной скорости поверхностей, а скорость точки колеса, касающейся поверхности, есть векторная сумма скорости робота и скорости вращения этой точки вокруг оси колеса. Отметим, что вектор линейной скорости вращения $\vec{v}_{вращ}$ лежит в плоскости колеса. Как видно из построения (рисунок справа), необходимо, чтобы «опускающаяся к плоскости» часть каждого колеса была спереди и выше линии движения. При движении с постоянной скоростью x–составляющая силы трения должна уравновешивать силу сопротивления воздуха $F_{тр\,x} = F_c = \frac{mg}{2\sqrt{3}}$ (по условию), а y–составляющая – компоненту силы тяжести вдоль плоскости $F_{тр\,y} = mg\sin(\alpha)$. Значит, сила трения $F_{тр} = mg\sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{1}{12}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}$. Но она должна быть не больше $\mu mg\cos(\alpha)$. Значит, $\frac{mg}{\sqrt{3}} \le \mu mg\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu \ge \frac{2}{3}$.

Теоретический тур заключительного этапа олимпиады школьников «Робофест»

Пример задания для 7-х – 9-х классов

Задание 1.

Вопрос: У небольшой обтекаемой модели автомобиля сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Ее аэродинамический профиль нейтрален (то есть при движении обтекающий поток воздуха не создает ни прижимной, ни подъемной силы), а двигатель имеет регулируемую мощность. Сначала разгон происходил при малой мощности, затем ее увеличили, а потом еще раз увеличили. При первом увеличении максимальная достижимая скорость модели $v_{\max}$ возросла, а при втором – осталась без изменения. Объясните такое поведение $v_{\max}$.

Задача: Робот с нейтральным аэродинамическим профилем разгоняется из состояния покоя по прямой на горизонтальной поверхности. При этом его максимальное ускорение оказывается равным $a_{\max} = 0{,}36$ м/с^2, а максимальная скорость, достигнутая за достаточно большое время, $v_{\max} = 2$ м/с. На робота установили антикрыло. После этого максимальная скорость робота увеличилась до $\tilde{v}_{\max} = 3$ м/с. Найти максимальное ускорение робота в процессе разгона после установки антикрыла. Считать, что величина силы сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости робота (он существенно больше по размерам, чем модель из предыдущего задания), а величина создаваемой антикрылом прижимающей силы – пропорциональна скорости. Мощность двигателя робота достаточно велика, чтобы колеса при $v = v_{\max}$ чуть-чуть проскальзывали.

Ответ на вопрос: Максимальная скорость достигается в тот момент, когда сила трения ведущих колес (которая как раз и разгоняет автомобиль) уравновешивается силой сопротивления воздуха: $F_{тр} = F_c = \alpha \cdot v_{\max}$. При этом сила трения не превышает $F_{тр}^{\max} = \mu N$. Таким образом, если колеса проскальзывают, то максимальная скорость не зависит от мощности двигателя: $v_{\max} = \dfrac{\mu N}{\alpha}$ (при нейтральном профиле сила N не зависит от скорости). В этом режиме часть мощности двигателя идет на компенсацию тепловых потерь при проскальзывании, то есть мощность двигателя должна быть не меньше, чем мощность, расходуемая на разгон: $P \ge F_{mp} v_{\max} = \dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$. Если мощность меньше этой, то скорость $v_{\max} = \dfrac{\mu N}{\alpha}$ недостижима – при меньшей скорости проскальзывание колес прекратится, и сила трения станет меньше $F_{mp} = \alpha v < \mu N$, а значит и скорость будет падать с понижением мощности: $P = F_{mp} v = \alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{P}{\alpha}}$. Как видно, при мощности меньше $\dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ максимальная скорость растет пропорционально корню квадратному из мощности, а при $P \ge \dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ максимальная скорость уже не зависит от мощности. Теперь можно объяснить наблюдаемое поведение скорости: первое значение мощности было меньше $\dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ (колеса не проскальзывали), и поэтому ее увеличении привело к увеличению максимальной скорости, а уже во втором случае колеса проскальзывали (как и в третьем), и второе увеличение мощности не изменило $v_{\max}$.

Решение задачи: В отсутствие антикрыла уравнение движения робота имеет вид $ma = \mu mg - \beta v^2$, где μ – коэффициент трения ведущих колес о поверхность, а сила сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$. Поэтому максимальное ускорение достигается при нулевой скорости и равно $a_{\max} = \mu g$, а максимальная скорость – при $a = 0$ (когда сила трения ведущих колес уравновешивается силой сопротивления воздуха) и равна $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{\mu mg}{\beta}}$. С учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальности ускорения нам снова нужен именно такой режим)

$ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu\frac{\gamma}{m}v - \frac{\beta}{m}v^2$. Выделяя из этого выражения полный квадрат $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2\gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m}\left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta}\right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение $\tilde{a}_m$ достигается при $v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $\tilde{a}_m = \mu g + \frac{\mu^2\gamma^2}{4m\beta}$. Следовательно, $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = 1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}$. Из этого соотношения находим, что $\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta} = \frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1$. Максимальная скорость по-прежнему достигается при $a = 0$, то есть при $\mu g + \mu\frac{\gamma}{m}v - \frac{\beta}{m}v^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, обнаруживаем, что $\tilde{v}_{\max} = \frac{\mu\gamma}{2\beta} + \sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{4\beta^2} + \frac{\mu mg}{\beta}}$. Таким образом,

$$\frac{\tilde{v}_{\max}}{v_{\max}} = \sqrt{1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} + \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} = \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m}} + \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1}.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{\tilde{a}_m}{a_m}$, получаем:

$$\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 = \frac{169}{144}.$$

Поэтому $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}4225$ м/с².

Ответ: $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}4225$ м/с².

Задание 2.

Вопрос: Количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционален разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционален толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но внешний имеет в три раза большую толщину и в два раза большую площадь. Между слоями, внутри и снаружи – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 10°C$, а снаружи $t_2 = 5°C$. Какова температура вещества между слоями?

Задача: Собираясь на соревнования, школьник взял с собой упаковку бутербродов в сумке с теплоизолирующими стенками и с электронным датчиком внутренней и внешней температуры. Бутерброды он положил в сумку из холодильника, где рядом с ними долго стояла кружка с водой, в которой плавала маленькая льдинка (школьник вел за ней наблюдения по заданию учителя физики, но льдинка не росла). По показаниям датчика он определил, что за время сборов $\tau = 2$ минуты внутренняя температура возросла на $\Delta t = 0{,}4°C$ при неизменной внешней температуре $t_0 = 20°C$. Когда он пришел на соревнования, внутренняя температура равнялась $t_1 = 10°C$, а внешняя – $t_0' = 25°C$. За какое время после этого внутренняя температура возрастет еще на $\Delta t' = 0{,}6°C$, если внешняя температура меняться не будет?

Ответ на вопрос: Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной. Рассмотрим установившийся режим. В нем поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев (иначе температура вещества между слоями изменялась бы). Поэтому $(t_1 - t)\dfrac{S}{d} = (t - t_2)\dfrac{2S}{3d}$, откуда находим, что $t = \dfrac{3t_1 + 2t_2}{5} = 8°C$.

Решение задачи: Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0°C$. Поэтому скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 20°C$. На соревнованиях эта скорость была пропорциональна $t_0' - t_1 = 15°C$ с тем же коэффициентом пропорциональности. Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0{,}6°C$

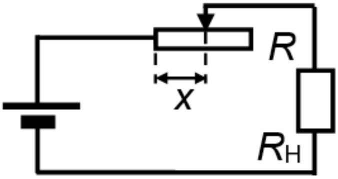
нужно в $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1{,}5$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0{,}4°C$.

Поэтому $\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1} = 2$, то есть $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1}\tau = 4$ мин.

Ответ: $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t_1}{t_0' - t}\tau = 4$ мин.

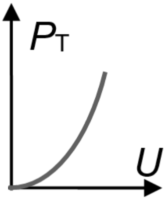
Задание 3.

Вопрос: Изобразите график зависимости мощности тепловых потерь в резисторе от приложенного напряжения (сопротивление резистора неизменно).



Задача: Постоянная (повышенная) температура датчика поддерживается с помощью нагревательного элемента, цепь питания которого показана на схеме (xR – сопротивление части реостата, включенной в цепь). При температуре внешней среды $t_1 = 23°C$ положение движка реостата соответствует $x_1 = 0{,}65$, при $t_2 = 18°C$ – $x_2 = 0{,}35$. Каким должно быть x при температуре $t_3 = 11°C$?

Ответ на вопрос: Поскольку, согласно закону Джоуля-Ленца, $P_T = U^2 / R$,то нужный график – это парабола:



Решение задачи: При перемещении движка изменяется напряжение U_H, подаваемое на нагревательный элемент. Считая источник идеальным, и обозначая его ЭДС символом E, запишем: $U_H = IR_H = \frac{\mathrm{E}}{xR + R_H}R_H$. Введем обозначение $k \equiv \frac{R}{R_H}$. Тогда $U_H = \frac{\mathrm{E}}{1 + k \cdot x}$. Затем заметим, что из условия баланса тепловыделения нагревательного элемента и потерь на теплообмен с окружающей средой следует, что $\frac{U_H^2}{R(t_0)} = k \cdot (t_0 - t) \Rightarrow U_H^2 = \alpha R(t_0) \cdot (t_0 - t)$. Здесь α –

некоторая постоянная, t_0 – температура, необходимая для работы датчика, а $R(t_0)$ – сопротивление нагревательного элемента при этой температуре. Так как t_0 по условию постоянна, то $\frac{U_2^2}{U_1^2}=\frac{t_0-t_2}{t_0-t_1}=1+\frac{t_1-t_2}{t_0-t_1}$ ($U_{1,2,3}$ – значения напряжения на нагревательном элементе при соответствующем положении движка реостата). Из этого соотношения выражаем $t_0-t_1=\frac{U_1^2}{U_2^2-U_1^2}(t_1-t_2)$.

По аналогичным соображениям $\frac{U_3^2}{U_1^2}=\frac{t_0-t_3}{t_0-t_1}=1+\frac{t_1-t_3}{t_0-t_1}$. Подставляя сюда выражение для t_0-t_1, получаем: $\frac{U_3^2}{U_1^2}=1+\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}\frac{U_2^2-U_1^2}{U_1^2}$.

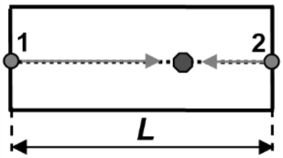
Теперь используем соотношения $\frac{U_3}{U_1}=\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_3}$ и $\frac{U_2}{U_1}=\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_2}$. В результате: $\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_3}=\sqrt{\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}\left(\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_2}\right)^2-\frac{t_2-t_3}{t_1-t_2}}$. Из этого уравнения выражается искомая величина: $x_3=\frac{(1+k\cdot x_1)(1+k\cdot x_2)}{k\sqrt{\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_1)^2-\frac{t_2-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_2)^2}}$, где $k\equiv\frac{R}{R_H}$. С учетом известных числовых значений: $x_3=\frac{(2+1{,}3k)(2+0{,}7k)\sqrt{5}}{k\sqrt{12(2+1{,}3k)^2-7(2+0{,}7k)^2}}$.

Ответ: $x_3=\frac{(2+1{,}3k)(2+0{,}7k)\sqrt{5}}{k\sqrt{12(2+1{,}3k)^2-7(2+0{,}7k)^2}}$, где $k\equiv\frac{R}{R_H}$.

Задание 4.

Вопрос: Ток фотодатчика пропорционален мощности света, попадающего на фотодатчик. В каком случае этот ток будет быстрее изменяться при изменении расстояния до источника света – (1) источник – маленькая лампа или (2) источник – плоская светящаяся панель больших размеров? Ответ объяснить.

Задача: Робот, оснащенный двумя фотодатчиками, перемещается по прямой на площадке длиной $L = 12$ м. На границах его области движения установлены две маленькие лампочки, каждая из которых испускает свет равномерно по всем направлениям внутрь площадки. Ток каждого фотодатчика пропорционален мощности излучения, попадающего в его «окно».



Логическая схема получает информацию о величине суммарного тока датчиков $I = I_1 + I_2$. В центре отрезка $I = 2$ мА. На каком расстоянии от лампы 1 может находиться робот при $I = 6$ мА?

Ответ на вопрос: В случае (1) энергия, излучаемая лампой, на расстоянии r от нее распределяется практически равномерно по сфере радиуса r, и поэтому мощность света, попадающего на датчик, будет убывать обратно пропорционально r^2. В случае (2) на расстояниях, много меньших размеров «большой» панели, площадь, по которой распределяется энергия излучения, почти не убывает, и поэтому мощность света будет изменяться очень медленно. Значит, ток датчика быстрее изменяется при изменении расстояния в случае (1).

Решение задачи: Обозначим расстояние от робота до лампы 1 r_1 . Тогда расстояние от него до лампы 2 равно $r_2 = L - r_1$. Удобно ввести «координату» x, отсчитываемую от центра отрезка движения в направлении лампы 1. Тогда $r_1 = \frac{L}{2} - x$ и $r_2 = \frac{L}{2} + x$. По условию ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2} = \frac{\alpha}{r_{1,2}^2}$ (α – некоторая постоянная величина). Поэтому суммарный ток

$$I = \alpha\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \alpha\left(\frac{4}{(L-2x)^2} + \frac{4}{(L+2x)^2}\right) = \alpha\,\frac{8(L^2+4x^2)}{(L^2-4x^2)^2}.$$

При нахождении робота в центре отрезка ($x = 0$) получаем $I_0 = \alpha\frac{8}{L^2}$.

Таким образом, $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{L^2(L^2 + 4x^2)}{(L^2 - 4x^2)^2}$. Из этого уравнения можно найти x^2: $x^2 = \dfrac{L^2}{8}\left(2 + \dfrac{I_0}{I} - \sqrt{8\dfrac{I_0}{I} + \dfrac{I_0^2}{I^2}}\right)$. Для заданных значений ($I = 6$ мА и $I_0 = 2$ мА) получается $x^2 = \dfrac{L^2}{12} \Rightarrow x = \pm\dfrac{L}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{3}$ м. Значит, расстояние до первой лампы может принимать два значения: $r_1 = \dfrac{L}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 - 2\sqrt{3})$ м и $r_1' = \dfrac{L}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 + 2\sqrt{3})$ м. Если участник знает примерное значение $\sqrt{3}$, он может получить значения $r_1 \approx 2{,}54$ м и $r_1' \approx 9{,}46$ м.

Ответ:

$r_1 = \dfrac{L}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 - 2\sqrt{3})$ м, и

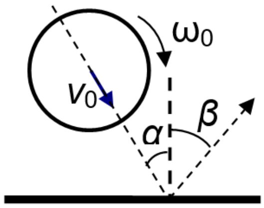
$r_1' = \dfrac{L}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 + 2\sqrt{3})$ м (или $r_1 \approx 2{,}54$ м и $r_1' \approx 9{,}46$ м).

Пример задания для 10-х – 11-х классов

Задание 1.

Вопрос: Цилиндрическая труба радиусом 10 см катится по ровной поверхности без проскальзывания, вращаясь с угловой скоростью 10 с$^{-1}$. С какой скоростью движется относительно поверхности ось трубы?

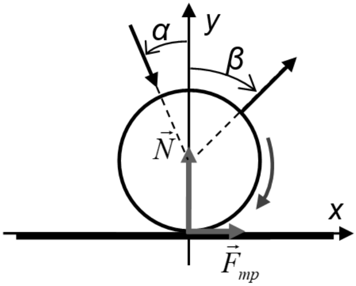
Задача: Отрезок тонкостенной цилиндрической трубы падает на горизонтальную поверхность под углом $\alpha = 30°$ к вертикали (см. рисунок). Перед ударом скорость оси трубы равнялась v_0. Кроме того, перед ударом труба вращалась вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = v_0 / r$ (где r – радиус трубы). Под каким углом β к вертикали будет двигаться ось трубы после удара? Удар считать «мгновенным», а деформации поверхности – упругими (то есть при нормальном падении без вращения удар был бы



упругим). Коэффициент трения между трубой и поверхностью $\mu = 0{,}25$.

Ответ на вопрос: При качении без проскальзывания скорость нижней ее точки (касающейся покоящейся поверхности) равна нулю, а она есть векторная сумма скорости оси трубы v_0 и скорости вращения трубы вокруг оси ωr. Так как эти скорости направлены в разные стороны, то $v_0 = \omega r = 1$ м/с.

Решение задачи: Рассмотрим взаимодействие трубы с поверхностью. На трубу будут действовать силы нормальной реакции поверхности и сила трения скольжения (в момент касания обязательно будет проскальзывать по поверхности – скорость ее нижней точки в момент касания в проекции на ось x $v_0 \sin(\alpha) - \omega_0 r = -v_0 / 2$).



По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости оси трубы на ось y просто меняет знак, и изменение импульса трубы в проекции на ось y $mv_y - (-mv_0 \cos(\alpha)) = 2mv_0 \cos(\alpha) = N\Delta t$, где $\vec{v}$ - скорость центра масс трубы после удара, а Δt - малое время удара. Тут возможны две ситуации. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса трубы в проекции на ось x равно $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = \mu N \Delta t = 2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Кроме того, <u>та же сила трения</u> тормозит вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Изменение линейной скорости вращательного движения в этом случае можно найти из соотношения $m\omega r - m\omega_0 r = -\mu N \Delta t = -2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Из этих соотношений следует, что $v_x = v_0[\sin(\alpha) + 2\mu\cos(\alpha)] = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а $\omega r = \omega_0 r - 2\mu v_0 \cos(\alpha) = v_0\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Проскальзывание прекращается при выравнивании линейной скорости вращения и скорости движения оси трубы: $v_x = \omega r$, и поэтому этот ответ верен, если $v_x < \omega r \Rightarrow \frac{v_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} v_0 < v_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} v$, что неверно для нашего случая! Поэтому на самом деле проскальзывание прекратится раньше, чем завершится соударение (некоторые из соотношений неверны – например, теперь $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = \mu N \Delta t' < \mu N \Delta t$, где $\Delta t'$ – время скольжения). С другой стороны, это означает, что теперь после удара проскальзывания нет, и $v_x = \omega r$. С учетом того, что $v_x = v_0 \sin(\alpha) + \frac{\mu N}{m} \Delta t'$, а $\omega r = v_0 - \frac{\mu N}{m} \Delta t'$, находим: : $\frac{\mu N}{m} \Delta t' = \frac{v_0}{2} (1 - \sin(\alpha))$. Таким образом, $v_x = \frac{v_0}{2} (1 + \sin(\alpha))$. Теперь понятно, что

$$tg(\beta) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1 + \sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: под углом $\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задание 2.

Вопрос: Холодильным коэффициентом называют отношение $k \equiv Q_X / A$, где Q_X – количество теплоты, отнятое за цикл рабочим телом у содержимого холодильника, а A – работа, совершаемая двигателем установки над рабочим телом за цикл. Чему равен холодильный коэффициент установки, которая сбрасывает в окружающую среду на 10% больше тепла, чем отнимает у содержимого холодильника?

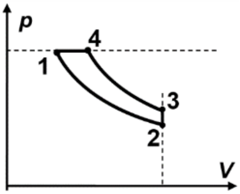
Задача: Для охлаждения процессора используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл гелия состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. Известно, что в ходе изобарического сжатия температура гелия уменьшается на $\Delta t_1 = 20°C$, а в ходе изохорического нагревания – увеличивается на $\Delta t_2 = 30°C$. Какую мощность должен потреблять двигатель холодильника, если его

КПД равен 75%, а для поддержания постоянной температуры от процессора нужно отводить тепло с мощностью $P_X = 270$ Вт?

Ответ на вопрос: уравнение энергетического баланса $Q_H = 1{,}1 \cdot Q_X = A + Q_X \Rightarrow A = 0{,}1 Q_X$.

Следовательно, $k = 10 = 1000\%$.

Решение задачи: Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок).



Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X, как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H, выражаются через теплоемкости гелия в изобарном и изохорном процессах: $Q_X = c_V \nu (T_3 - T_2) = \frac{3}{2}\nu R \Delta t_2$ и $Q_H = c_p \nu (T_4 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R \Delta t_1$, где R – универсальная газовая постоянная. Из условия энергетического баланса $Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = \frac{\nu R}{2}(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)$. Значит, холодильный коэффициент этой установки $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{3\Delta t_2}{5\Delta t_1 - 3\Delta t_2} = 9$. С другой стороны, за один цикл, проходящий за время τ, $Q_X = P_X \cdot \tau$, а произведенная над гелием работа $A = 0{,}75 \cdot P\tau$, где P – искомая мощность двигателя.

Значит, $0{,}75 \cdot P = P_X / k$, то есть $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40$ Вт.

Ответ: $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40$ Вт.

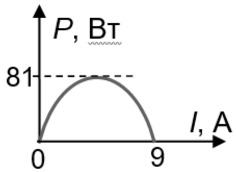
Задание 3.

Вопрос: Изобразите график зависимости максимальной полезной мощности электродвигателя от величины тока, потребляемого им от аккумулятора с ЭДС 36 В. Сопротивление цепи питания ротора равно 4 Ом.

Задача: Некоторые электродвигатели можно использовать в качестве генератора: при совершении работы по вращению ротора в нем создается ЭДС индукции. При достаточной величине эта ЭДС может заряжать аккумулятор, подключенный к электродвигателю. Пусть ротор электродвигателя вращается за счет натяжения троса с массивным грузом, который плавно (и почти равномерно) опускается с некоторой высоты. В этом случае аккумулятор приобретает заряд $Q_1 = 3000$ мА·час. Если подключить этот генератор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям, и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, вращающих роторы обоих электродвигателей, то приобретаемый заряд $Q_2 = 4000$ мА·час. Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки четыре таких электродвигателя?

Ответ на вопрос: Мощность сторонних сил аккумулятора $P_a = \mathrm{E}I$ равна сумме полезной мощности P, мощности тепловых потерь на сопротивлении ротора $P_T = I^2R$ и мощности прочих потерь. Если «прочих» потерь нет, то полезная мощность максимальна и равна $P = \mathrm{E}I - RI^2$. График это функции – парабола с нулями при $I = 0$ и $I = \dfrac{36\,\text{В}}{4\,\text{Ом}} = 9$ А с максимальным значением $P = 81$ Вт при $I = 4{,}5$ А:

Решение задачи: Рассмотрим сначала случай одного генератора. При опускании груза, согласно условию, его потенциальная энергия переходит в работу по дозарядке источника и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки. Работа над источником равна $A_u = \mathrm{E}Q_1$, а мощность тепловыделения $P_T = I^2R$. Поскольку груз опускается равномерно, то сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q_1 \approx I \cdot t$. Таким образом, $mgH \approx \mathrm{E}Q_1 + I^2Rt = Q_1\left(\mathrm{E} + \dfrac{RQ_1}{t}\right)$. В случае



с двумя генераторами они делят нагрузку поровну, то есть сила натяжения каждого троса равна половине силы натяжения для одного троса. Поскольку магнитные силы, действующие на ротор, пропорциональны току через него, то токи через генераторы в этом случае будут равны $I' = I/2$. Суммарный ток остался тем же, то есть теперь $Q_2 \approx I \cdot t'$

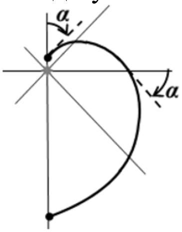
Значит, $mgH \approx \mathrm{E}Q_2 + 2\left(\dfrac{I}{2}\right)^2 Rt' = \mathrm{E}Q_2 + R\dfrac{I}{2}It' = Q_2\left(\mathrm{E} + \dfrac{RQ_1}{2t}\right)$. Сопоставляя два выражения, находим, что $Q_2 = \frac{2(\text{E}t + RQ_1)}{2\text{E}t + RQ_1} Q_1 = \frac{2(x+1)}{2x+1} Q_1$, где введено обозначение $x \equiv \frac{\text{E}t}{RQ_1}$. Из этого соотношения выражаем $x = \frac{2Q_1 - Q_2}{2(Q_2 - Q_1)}$. Повторив аналогичные рассуждения для случая четырех аккумуляторов, получим $Q_4 = \frac{4(x+1)}{4x+1} Q_1 = \frac{2Q_1Q_2}{3Q_1 - Q_2} = 4800$ мА·час.

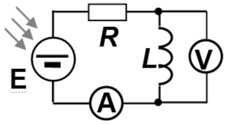
Ответ: $Q_4 = \frac{2Q_1Q_2}{3Q_1 - Q_2} = 4800$ мА·час.

Задание 4.

Вопрос: В каком случае напряжение на катушке индуктивности равно величине ЭДС индукции в ней?

Задача: В архивах был найден отчет о прохождении роботом трассы в виде участка спирали. Форма спирали такова, что все лучи, проведенные из «центра», она пересекает под одним и тем же углом $\alpha = 45°$. В «центре» размещена небольшая лампа, а робот снабжен датчиком с фотоэлементом, ЭДС которого пропорциональна мощности поступления световой энергии. Фотоэлемент датчика включен в цепь, показанную на схеме. Индуктивность L = 50 мГн мала ($L << R\,t$, где t – время движения робота), вольтметр и амперметр практически идеальны. Информация о времени была утеряна, но были данные о показаниях приборов. Обнаружилась, что значения напряжения на вольтметре и силы тока через амперметр были пропорциональны друг другу: $U \approx I \cdot 6{,}28$ мОм. Как в ходе движения робота изменялось отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра»? Найдите время прохождения роботом трассы.





Ответ на вопрос: В общем случае напряжение на катушке отличается от ЭДС индукции в ней на величину напряжения на омическом сопротивлении катушки. Значит, напряжение на катушке примерно равно ЭДС индукции, если напряжение на омическом сопротивлении много меньше этой ЭДС по величине, то есть при очень малом омическом сопротивлении катушки.

Решение задачи: При малой индуктивности ЭДС индукции будет мала, и ток через катушку будет определяться ЭДС фотоэлемента. Пусть коэффициент пропорциональности между ЭДС фотоэлемента и мощностью светового потока равен α. Тогда напряжение на индуктивности

$$E_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0} = -\frac{L}{R}\frac{\Delta E_{\phi}}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0} = -\alpha\frac{L}{R}\frac{\Delta P_{св}}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0}$$

Мощность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поскольку при условиях задачи ЭДС индукции можно пренебречь по сравнению с ЭДС фотоэлемента, то так же изменяется и ток в цепи: $I = I_0\frac{r_0^2}{r^2}$ (и поэтому $r = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I}}$). Заметим, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{(r+\Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2-(r+\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2} = -\frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2}.$$

При малых изменениях расстояния $\Delta r << r$ получаем: $\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) \approx -\frac{2\Delta r}{r^3}$. Значит,

$$U = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = -LI_0r_0^2\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{\Delta t} \approx LI_0r_0^2\frac{2}{r^3}\frac{\Delta r}{\Delta t} = 2\frac{LI_0r_0^2}{r^3}v,$$

где $v \equiv \frac{\Delta r}{\Delta t}$ – скорость удаления источника и датчика. С учетом выражения для расстояния находим, что $U \approx 2\frac{LI^{3/2}}{r_0\sqrt{I_0}}v \Rightarrow v = \frac{r_0\sqrt{I_0}}{2LI^{3/2}}U$.

Следовательно, отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра» $\frac{v}{r} = \frac{U}{2LI} \approx 6{,}28\cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$ – эта величина остается постоянной! С другой стороны, при движении по заданной траектории отношение скорости робота вдоль радиуса v и скорости вращения ωr есть тангенс угла, под которым спираль пересекает радиальные лучи, то есть $\frac{v}{\omega r} = tg(\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}ctg(\alpha) = 6{,}28\cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$. Итак, вращение робота вокруг «центра» происходит с постоянной угловой скоростью, и за время прохождения трассы он поворачивается на угол в π радиан. Значит, $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.

Ответ: $t = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.

Рекомендации по подготовке к олимпиадам по физике

Задачи, которые предлагаются участникам олимпиад, несколько отличаются от типовых школьных задач. Главная характерная особенность олимпиадной задачи – ее нестандартность, то есть внешняя непохожесть на типовые задачи. Для решения большинства олимпиадных задач практически никогда не требуется знание материала, изучение которого не предусмотрено школьными программами физики и математики. Однако решение олимпиадных физических задач требует умения строить физические модели, глубокого понимания физических законов, умения самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также свободного владения математическим аппаратом (без последнего получение решения большинства физических задач невозможно).

В настоящее время издано большое количество литературы, которая может быть использована для подготовки учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике (как при самостоятельных занятиях, так и при работе с учителем). Сделаем краткий обзор литературы, которая может быть рекомендована для подготовки к участию в различных олимпиадах по физике (список литературы приведен ниже).

Одной из первых физических олимпиад в нашей стране была ***Московская городская олимпиада школьников по физике***. Материалы Московских городских олимпиад по физике разных лет частично содержатся в книгах [1], [2] и [3]. В книге [4], вышедшей в серии «Библиотечка "Квант"», опубликованы задачи Московских городских олимпиад по физике 1968–1985 годов. В книге [5] содержатся условия задач, которые предлагались ученикам 8-х – 11-х классов на теоретических турах Московских городских олимпиад по физике в 1986–2007 гг. Большая часть помещенных в этих книгах задач снабжена подробными решениями.

К задачам олимпиадного уровня трудности можно также отнести задачи, опубликованные в пособиях и сборниках [6], [7], [8]. Особо следует отметить задачник [9], созданный на основе опыта преподавания физики старшеклассникам в Новосибирском специализированном учебно-научном центре при НГУ. В этом задачнике собрано большое количество довольно трудных школьных задач и отсутствуют решения (есть только ответы). Самостоятельная работа с этой книгой при подготовке к олимпиадам является особенно эффективной, но она возможна только при довольно высоком исходном уровне знаний учащегося.

Для подготовки к ***олимпиаде учащихся 7-х – 8-х классов*** можно рекомендовать книгу [10] (следует помнить, что на момент ее издания в нашей стране было введено десятилетнее полное среднее образование, поэтому 6-й и 7-й классы того времени соответствуют нынешним 7-му и 8-му классам).

Весьма полезным, особенно на начальном этапе подготовки к олимпиадам, является классический задачник [11].

Информацию, которая может быть полезна при подготовке к различным олимпиадам по физике, также можно почерпнуть в сети Internet, обратившись по адресам [12], [13], [14] и [15].

Для целенаправленной подготовки к олимпиадам по физике «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы!» можно рекомендовать сборники заданий [18] – [20], в которых собраны задачи, предлагавшиеся на этих олимпиадах с 2001 года. Также для этой цели можно рекомендовать книгу [21], которая, кроме того, будет полезна и при подготовке к сдаче ЕГЭ по физике.

Подготовка к участию в олимпиадах по физике должна включать в себя несколько составляющих. Прежде всего, необходимо полно и всесторонне освоить материал школьной программы соответствующего класса по физике и математике – без этого достичь высоких результатов при выступлении на физической олимпиаде невозможно. В дополнение к материалу школьной программы необходимо осваивать дополнительные разделы школьного курса физики. Критерием успешности подготовки к олимпиаде «Ломоносов» по физике и к олимпиаде «Покори Воробьевы горы!» может служить способность учащегося к решению задач по соответствующим темам из задачников [1], [2], [3], [11] и [18] – [21].

При подготовке к Московской олимпиаде школьников по физике учащемуся необходимо разбирать задачи из сборников [4] и [5] (пытаться решать задачи, а в случае возникновения затруднений – знакомиться с их решениями), а также самостоятельно решать задачи из сборника [9] и задачи федерального окружного этапа Всероссийской олимпиады по физике из книги [22]. При работе с последней книгой учащемуся следует обратить внимание на задачи экспериментальных туров и попытаться решить и самостоятельно выполнить хотя бы некоторые из них. Это послужит хорошей подготовкой к возможному участию в экспериментальном туре олимпиады.

На данной стадии подготовки большую пользу может принести посещение специальных занятий, которые проводятся опытными преподавателями специально для школьников, желающих принимать участие в олимпиадах высокого уровня по физике. Такие занятия, организованные Департаментом образования г. Москвы для учеников 8-х – 11-х классов, проходят в Московском институте открытого образования, на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, а также в ряде школ и лицеев г. Москвы.

Готовясь к олимпиадам по физике, нужно помнить о том, что олимпиада – это всего лишь интеллектуальное соревнование, которое проводится, прежде всего, с целью повышения интереса школьников к изучению предмета. Поэтому не следует расстраиваться, если стать победителем олимпиады не удалось. В любом случае подготовка к олимпиаде позволяет глубже освоить школьную программу, изучить дополнительные вопросы курса физики, научиться решать различные типы задач (в том числе, весьма трудных). В конечном итоге, все это принесет ощутимую пользу в плане получения хорошего образования и положительно скажется при сдаче итоговой аттестации в форме ЕГЭ и дополнительных вступительных испытаний при поступлении в Московский университет.

Список рекомендуемой литературы

Ниже приведен список пособий и ресурсов сети «Интернет», которые могут быть полезны при подготовке к олимпиадам по физике. Также очень полезно познакомиться с публикациями в журнале «Квант», в особенности – со статьями и задачами, опубликованными в рубриках «Задачник "Кванта"», «Физический факультатив», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных испытаний» и «Олимпиады».

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. Задачи по физике. – М.: Гостехиздат, 1952. – 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1980. – 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).
3. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1964. – 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).
4. Буздин А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С. С. Кротова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 60.) % 1968-1985 гг.
5. Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007. (изд. 2-е, испр. и доп.) / Под ред. Семёнова М.В. , Якуты А.А. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.
6. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. Раз задача, два задача... – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)
7. Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 176 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).
8. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. – М.: Просвещение, 1964 (и все последующие издания до 4-го, М.:, Просвещение, 1983).
9. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О. Я. Савченко. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.
10. Лукашик В. И. Физическая олимпиада в 6--7 классах средней школы: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.

11. Гольдфарб Н. И. Физика. Задачник. 10--11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2006. – 398 с. (и все предыдущие издания).

12. Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ: http://genphys.phys.msu.ru/ol/

13. Веб-сайт «Олимпиады для школьников»: http://info.olimpiada.ru/

14. Материалы журнала «Квант» в интернете: http://kvant.mccme.ru/

15. Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»): http://fiz.1september.ru

16. Интернет-библиотека МЦНМО: http://ilib.mccme.ru/

17. IPhO – International Physics Olympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке). http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/ /

18. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ (сборники за 2001–2017 гг.). – М.: Физический ф-т МГУ.

19. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.

20. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: «Макс пресс», 2009. – 456 с.

21. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.

22. Всероссийские олимпиады по физике. 1992--2004 / Под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – 2-е изд., доп. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

Содержание

Сборник олимпиадных задач
по физике 2017-2018 гг.
С решениями.

Оригинал-макет: отдел нового приема и работы со школьниками физического факультета МГУ

Редакционная коллегия: