Системы алгебраических уравнений и методы их решения

Основные понятия

Определение.

Решением системы уравнений с n переменными называется упорядоченный набор n чисел, при подстановке которых в каждое из уравнений системы получаем верные числовые равенства.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

Две системы называются **равносильными**, если множества их решений совпадают.

Из определения равносильности систем следует, что если в системе уравнений заменить любое из уравнений равносильным ему уравнением, то получим систему, равносильную исходной.

Основные методы решения систем уравнений

- метод подстановки;
- метод алгебраического сложения;
- метод разложения на множители (метод расщепления);
- метод замены переменных;
- графический.

Метод подстановки. Если из одного уравнения системы выразить одну переменную через другую и подставить полученное выражение во второе уравнение, то полученная система равносильна исходной, то есть следующие системы равносильны:

$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ g(x, y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(y), \\ g(\varphi(y), y) = 0. \end{cases}$$

Упражнение. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 5, \\ x^4 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Метод алгебраического сложения уравнений основан на том, что если к обеим частям одного из уравнений первоначальной системы прибавить соответствующие второе уравнение, умноженное на число, отличное от нуля, а другое уравнение системы оставить без изменений, то получим систему, равносильную данной.

Упражнение. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-7y+8=0, \\ 6x+5y-20=0. \end{cases}$

Метод разложения на множители (метод расщепления).

Основывается на переходе от системы $\begin{cases} f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases}$ к совокупности систем:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \vee \begin{cases} f_2(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \vee \ldots \vee \begin{cases} f_n(x,y)=0, \\ gf_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Заметим, что это переход по следствию, поэтому могут появиться посторонние решения.

Упражнение. Решите системы

А) $\begin{cases} x^3y-8y=0, \\ (x+y)\cdot(2x+3xy-5)=0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 2x\cdot\sqrt{2x-1}=0, \\ 2x+y-3=0. \end{cases}$

Метод замены переменной.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0, \end{cases}$$

и пусть функции $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ можно представить в виде

$$\begin{cases} F_1(x,y)=f_1(\varphi_1(x,y),\ \varphi_1(x,y)), \\ F_2(x,y)=f_2(\varphi_1(x,y),\ \varphi_1(x,y)). \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1(x,y)=u,\ \varphi_1(x,y)=v.$ Тогда первоначальная система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} f_1(u,v)=0, \\ f_2(u,v)=0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему относительно новых переменных, после чего делаем обратную замену и находим первоначальные неизвестные.

Упражнение. Решите систему $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6-8x^3\sqrt{y}+2y=2. \end{cases}$

Графический метод.

Упражнение. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Некоторые виды систем уравнений

1. *Симметрические системы уравнений.*

Опр. Выражение $F(x,y)$ называется **симметрическим,** если оно при замене переменных *x* на *y*, *y* на *x* не изменится.

Опр. Выражение $F(x,y,z)$ называется **симметрическим,** если оно не меняется при замене любых двух переменных друг на друга.

Упражнение. Приведите примеры симметрических выражений с двумя и тремя переменными.

Опр. Система, все уравнения которой симметрические, называется **симметрической.**

При решении симметрических систем уравнений используется метод замены переменных.

Случай 1. Симметрическая система двух уравнений с двумя неизвестными. Используется замена:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

Случай 2. Симметрическая система трех уравнений с тремя неизвестными. Используется замена:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+xz+yz=b, \\ xyz=c. \end{cases}$$

Упражнение. Решить систем $\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ x^3+y^3=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x^2+y^2-xy=61; \end{cases}$

2. *Однородные системы уравнений и сводящиеся к ним.*

Опр. Однородной системой уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + a_1x^1y^{n-1} + a_0y^n = d_1, \\ b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}y + b_{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + b_1x^1y^{n-1} + b_0y^n = d_2. \end{cases}$$

Пусть $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0.$

Умножив первое уравнение системы на $(-d_2)$, а второе уравнение на d_1, и сложив эти уравнения, получим уравнение-следствие

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}y + c_{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + c_1x^1y^{n-1} + c_0y^n = 0\,.$$

Полученное уравнение является однородным и имеет очевидное решение $x=y=0$. Чтобы найти не нулевое решение системы разделим обе части уравнения на y^n, тогда уравнение примет вид.

$$c_n\left(\frac{x}{y}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+c_{n-2}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2}+\ldots+c_1\left(\frac{x}{y}\right)+c_0=0.$$

Введем замену $\frac{x}{y}=t$. Дальнейшее решение не представляет сложности.

Замечание. $d_1=0$ или $d_2=0$, то соответствующее уравнение системы уже является однородным.

Упражнение. Решить систему $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ 5x^2-2xy-y^2=5. \end{cases}$