Специальная теория относительности

Теория относительности - фундаментальная физическая теория, охватывающая всю физику. Создана А. Эйнштейном в 1905 г. Большой вклад в ее создание внесли Лармор, Лоренц, Пуанкаре.

Механика Ньютона (классическая механика) следует из теории относительности (релятивистской механики) в предельном случае малых по сравнению со скоростью света скоростей, как частный случай.

Мы увидим, что теория относительности противоречит здравому смыслу и повседневному опыту. Трудно поверить, что она может быть правильной. Но, оказывается, человек может понять даже то, что ему не удается представить. Это первый подобный пример.

Скорость света. Опыты по обнаружению эфирного ветра

В конце 19 века Джеймс Клерк Максвелл вывел знаменитые уравнения, описывающие все электромагнитные явления. Из этих уравнений следовало существование электромагнитных волн, которые распространяются в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Выяснилось, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Если предположить, что уравнения Максвелла имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, то во всех инерциальных СО скорость света в вакууме будет равна постоянной c. Но это несовместимо с законом сложения скоростей, который является следствием преобразований Галилея. Таким образом: 1) либо не справедливы преобразования Галилея, 2) либо уравнения Максвелла в установленном виде справедливы не во всех ИСО.

Заметим что: 1) преобразования Галилея вытекают из фундаментальных свойств пространства и времени; 2) уравнения Максвелла являются обобщением опытных данных, и только опыт может дать ответ на вопрос о системах отсчета, в которых они справедливы.

Концепция эфира. В начале 17 века, основываясь на аналогиях между звуковыми и световыми явлениями, голландский физик Гюйгенс предложил новую теорию света. Он предположил, что свет представляет собой особую форму колебательного движения, передающегося от одного тела к другому через особую упругую среду (эфир), заполняющую пространство. Эфир способен внедряться между частицами весомой материи. Теория Гюйгенса позволила весьма просто объяснить ряд оптических явлений.

Френель доказал, что световые колебания, являются не продольными, а поперечными, то есть сводятся к упругим сдвигам в направлении перпендикулярном световому лучу. Подобные упругие сдвиги могут происходить лишь в твердых телах. Поэтому эфир пришлось рассматривать не как газ, но как твердое тело. Принимая во внимание, что скорость распространения света составляет 300000 км/с, можно заключить, что эфир обладает либо колоссальной твердостью, либо необычайно малой плотностью.

Исследую электромагнитные взаимодействия, Фарадей предположил, что посредником этих взаимодействий является светоносный эфир, заполняющий пространство. Это предположение оказалось плодотворным. Уточняя основные идеи Фарадея, и облекая их в математическую форму, Максвелл в 60-х годах 19-го века пришел к своей знаменитой электромагнитной теории света.

Уравнения Максвелла не противоречат гипотезе существования эфира, если принять, что вытекающая из этих уравнений скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с определена именно относительно эфира. Можно говорить об эфире, как о некоторой выделенной инерциальной системе отсчета, и только в этой системе отсчета выполняются уравнения Максвелла.

Эфирный ветер. Если принять гипотезу о существовании эфира, то возникает вопрос: как движется Земля относительно него? Обозначим скорость такого движения $\vec{V}$. Тогда согласно классическому закону сложения скоростей в направлении вектора $\vec{V}$ скорость света относительно Земли будет $(c - V)$, а в прямо противоположном направлении $(c + V)$. Экспериментальная проверка этих соотношений являлась в конце 19 - в начале 20 века одной из центральных проблем физики.

Если допустить, что Солнце покоится относительно эфира, то под V надо понимать скорость движения Земли по своей орбите, которая равна около 30 км/с = $10^{-4}c$.

Для обнаружения "эфирного ветра" (движения Земли относительно эфира) Майкельсон воспользовался сконструированным им интерферометром. Наличие эфирного ветра должно было привести к смещению интерференционной картины. Первые эксперименты, выполненные в 1881 г, показали, что $V < 18$ км/с. В 1887 г Майкельсон повторил свой опыт совместно с Морли. Интерферометр вместе с остальной аппаратурой монтировался на тяжелой цементной плите, которая плавала в сосуде с ртутью. Показано, что $V < 7$ км/с. С появлением лазеров точность удалось существенно повысить. В 1964 г было установлено, что $V <$ 30 м/с!!.

Итак, многочисленные опыты позволили заключить, что выделенной инерциальной СО (эфира) не существует. Экспериментально было также убедительно подтверждено, что скорость света не зависит от движения источника, что согласуется с волновыми представлениями о природе света.

Постулаты теории относительности

В основе теории относительности лежат два постулата.

Первый постулат: **Принцип относительности: все процессы природы протекают одинаково во всех инерциальных СО.**

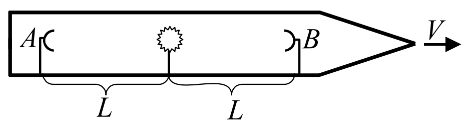
Это означает, что во всех инерциальных СО физические законы имеют одинаковую форму. Таким образом, принцип относительности классической механики обобщается на все процессы в природе.

Второй постулат: **Скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.**

Согласно принципу относительности **скорость света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одна и та же.**

Далее мы увидим, что скорость света в вакууме является предельной (максимальной) скоростью распространения взаимодействий.

Относительность одновременности



Рассмотрим космический суперкорабль, движущийся со скоростью V относительно неподвижного наблюдателя. На корабле посередине между датчиками A и B происходит вспышка. В СО, связанной с кораблем, датчики будут засвечены одновременно. Однако, неподвижный наблюдатель обнаружит, что датчик A засвечен раньше, чем датчик B, поскольку датчик A движется навстречу световому импульсу, скорость распространения которого одинакова во всех инерциальных СО.

Итак, понятие одновременности относительно. Необходимо пересмотреть понятие абсолютного времени, одинакового во всех СО.

Под временем в количественном смысле понимают показания каких-то часов. Часы – любая система тел, в которой совершается периодический процесс.

Однако убедиться в строгой периодичности можно только в том случае, если мы уже располагаем равномерно идущими часами. Выйти из этого логического круга можно только путем определения: следует считать по определению какие-то часы равномерно идущими. По таким часам должны градуироваться все остальные. До недавнего времени за эталонные часы принимались "астрономические часы". В настоящее время в качестве эталонных используются атомные часы. В них роль маятника играют колебания электромагнитного поля в узких спектральных линиях некоторых изотопов при строго определенных внешних условиях.

Для описания движения необходимо чтобы в пространственной системе отсчета были достаточно часто расставлены неподвижные часы. Тогда каждое событие можно характеризовать местом и временем. Причем часы должны быть синхронизированы. Можно все часы сначала поместить в одну точку пространства, выставить одинаковое время и затем расставить их в пространстве. **Однако есть теоретические и опытные основания утверждать, что показания "расставленных" часов будут зависеть от способа их переноса из начальной в конечную точку. Поэтому такой способ не годится.**

Эйнштейн предложил осуществить синхронизацию часов следующим образом. Пусть *C* точка находится на середине отрезка *AB*. Произведем в *C* световую вспышку. По **определению** свет достигнет точек *A* и *B* одновременно. Если в момент прихода света к часам *A* и *B* их показания сделать одинаковыми, то они будут синхронизированными между собой.

Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (СО0 *K* и *K*', из которых вторая движется относительно первой со скоростью *V*. Пусть *x*, *y*, *z*, *t* - координаты и время какого-либо события в СО *K*, а *x'*, *y*', *z*', *t*' -координаты и время того же события в СО *K*'. Возникает вопрос: как по значениям *x*, *y*, *z*, *t* найти *x'*, *y*', *z*', *t*' и наоборот. Решение этого вопроса основано на предположениях, что пространство однородно и изотропно, а время однородно.

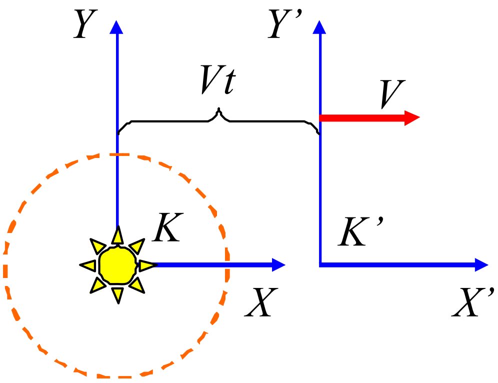
<u>Будем искать такую форму преобразований координат и времени, чтобы величина скорости света была независимой от движения источника или приемника.</u> Обозначим *K* систему отсчета, в которой источник света неподвижен. Координаты и время в *K*-СО будем обозначать *x*, *y*, *z*, *t*. Если источник света находится в начале координат, то для света, испускаемого в момент $t = 0$, уравнение сферического волнового фронта в момент *t* имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 . \qquad (1)$$

Это уравнение описывает сферическую поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью *c*.

Обозначим *K*’ систему отсчета, которая движется относительно СО-*K* в направлении +*x* с постоянной скоростью *V*. Для удобства предположим, что начало отсчета времени *t* совпадает с началом отсчета *t*’ и что при $t = t' = 0$ начало координат в *K*’ совпадает с положением источника света. В *K*’-СО источник света движется. Однако согласно постулату ТО скорость света не зависит от движения источника. Поэтому наблюдатель в *K*’-СО также должен обнаружить сферический волновой фронт, который описывается уравнением:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 . \qquad (2)$$



Если верен закон постоянства скорости света, то должно существовать какое-то преобразование, переходящее при малых скоростях в преобразование Галилея и преобразующее формулу (2) в (1).

Испытаем сначала преобразования Галилея:

$$x' = x - Vt\,,\ \ y' = y\,,\ \ z' = z\,,\ \ t' = t\,. \tag{3}$$

Если подставим (3) в (2), то получим

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2\,,$$

что, конечно, не согласуется с (1). Следовательно, преобразования Галилея не удовлетворяют указанному требованию.

Испытаем теперь преобразование вида

$$x' = x - Vt\,,\ \ y' = y\,,\ \ z' = z\,,\ \ t' = t - fx\,,$$

где f - произвольная постоянная. Тогда получим

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2c^2ftx + c^2f^2x^2\,.$$

«Перекрестные» члены уничтожаются, если принять $f = \dfrac{V}{c^2}$. В этом случае получим

$$x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Остается нежелательный масштабный множитель. Мы можем исключить его, если примем

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,} \tag{4}$$

где $\beta = V/c$. Это и есть преобразования Лоренца. Таким образом, уравнение (1) инвариантно относительно преобразований Лоренца: при помощи (4) оно преобразуется в (2). Преобразования Лоренца согласуются с постулатами СТО.

К этим же формулам несколько раньше (в 1900 г) пришел Лармор. Однако и Лармор и Лоренц принципиально стояли на точке зрения неподвижного эфира. Величина t' лишь формально играла роль времени. Настоящий вывод формул преобразования Лоренца и установление их истинного смысла дал Эйнштейн в 1905 году.

Нетрудно получить обратные преобразования Лоренца.

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t'+(V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5)$$

Напомним, что формулы (4), (5) записаны для случая, когда система отсчета *K*' движется относительно системы отсчета *K* с постоянной скоростью *V*. Координатные оси выбраны так, что оси *x* и *x*' направлены вдоль вектора скорости $\vec{V}$, а оси *y* и *y*' параллельны друг другу. Время отсчитывается от момента, когда начала координат обеих систем совпадают. Такой выбор систем координат мы будем по умолчанию предполагать и далее, условно называя инерциальную СО *K* покоящейся, а инерциальную СО *K*' – движущейся.

Относительность одновременности

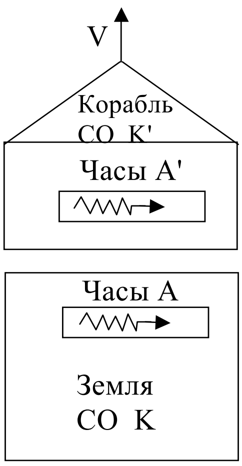
Пусть в *K*-СО происходят два каких-то события $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Найдем время между этими событиями в *K*'-СО, движущейся со скоростью *V* вдоль оси *x*. Из преобразований Лоренца получим

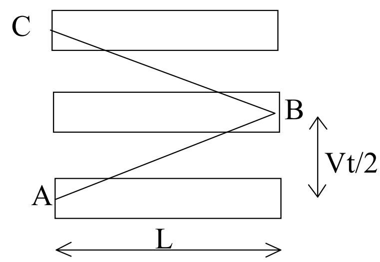
$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - (V/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Отсюда следует, что события одновременные в *K*-СО, не одновременны в *K*'-СО. Исключением является случай, когда оба события происходят в *K*-системе одновременно в одной точке (в точках с одинаковыми координатами *x*). Тогда эти события одновременны и в любой другой инерциальной СО. Итак, одновременность – понятие относительное. События одновременный в одной СО, в общем случае не одновременны в другой СО.

Замедление времени

Рассмотрим сначала эффект замедления времени на специальном примере, а затем получим общую формулу из преобразований Лоренца.





Пусть космический корабль (система *K*′) движется относительно Земли (система *K*) со скоростью *V*. На Земле и на корабле есть одинаковые часы, например, световые часы. Свет отражается от оснований цилиндра: часы "тикают".

Пусть часы *A*' один раз "тикнули", то есть световой импульс прошел расстояние 2*L* в *K*' системе. Соответствующее время в *K*' системе $t_0 = 2L/c$.

Наблюдатель в СО *K* "увидит" картину, изображенную на правом рисунке, и отсчитает время *t* по своим часам *A*. Время *t* во столько раз больше t_0, во сколько раз ABC больше 2*L*:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2\sqrt{L^2 + V^2t^2/4}}{2L} = \sqrt{1 + \frac{V^2t^2}{4L^2}}\,.$$

Учитывая, что $2L = ct_0$, получим

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 = 1 + \frac{V^2t^2}{c^2t_0^2}\,,$$

$$\boxed{t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}}\,. \qquad (6)$$

Время t_0 называют собственным временем. Это время между двумя событиями, которые наблюдатель видит в одной и той же точке пространства, то есть время, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами.

Собственное время t_0 меньше времени измеренного неподвижным наблюдателем, для которого события происходят в разных точках пространства. Этот эффект называют замедлением времени: с точки зрения неподвижного наблюдателя время в быстро движущемся относительно него космическом корабле течет медленнее (движущиеся относительно наблюдателя часы идут медленнее, чем неподвижные).

Но может быть этот эффект связан с особым устройством световых часов? Оказывается это не так. Представим себе любые другие, например механические часы, которые движутся вместе со световыми. Предположим, что световые часы замедляются, а обычные нет. Тогда мы получили бы простой детектор абсолютного движения: если показания обоих часов совпадают, то они покоятся, если световые часы отстают, то можно заключить, что они движутся.

Поскольку замедление времени - это свойство самого времени, то замедляются все процессы, включая биологические.

Получим теперь формулу (6) из преобразований Лоренца. Пусть в некоторой фиксированной точке x' системы K' протекает некоторый процесс (например, рождение и распад частицы) длительностью $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$ (собственное время). Найдем длительность этого процесса $\Delta t = t_2 - t_1$ в K системе, относительно которой K' система движется со скоростью V. Из преобразований Лоренца получим

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{V}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

или

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}\,.$$

Получили формулу для замедления времени.

Экспериментальное подтверждение эффекта замедления времени

Мюон (μ-мезон) -нестабильная заряженная частица. Образуется в космических лучах в верхних слоях атмосферы (на высоте примерно 10 км). Их скорость близка к скорости света. Измерив интенсивность потока этих частиц на разных высотах, определили их среднее время жизни ($t = 10$ мкс). Космические мюоны можно замедлить в свинцовом блоке и отфильтровать медленные мюоны. Измерения показали, что время жизни медленного мюона 2,2 мкс. Согласие с формулой (6) хорошее.

После построения мощных ускорителей подобные опыты проводились с заряженными частицами в более контролируемых условиях.

Парадокс близнецов

Из двух братьев близнецов *A* остается на Земле, а *B* отправляется в путешествие на межзвездном корабле, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света. Через 5 лет по своим часам брат *B* возвращается обратно и находит брата *B* глубоким стариком. Оказалось, что за время путешествия по часам на Земле прошло 50 лет.

Но с точки зрения брата *A* движется земной шар: он вместе с близнецом *B* «отчаливает» от космического корабля, путешествует и возвращается обратно. При таком рассмотрении в момент встречи теперь окажется более молодым брат *B*. Налицо противоречие.

Ошибка в этих рассуждениях состоит в том, что СО, связанная с космическим кораблем, не является инерциальной (корабль сначала удаляется с ускорением, затем разворачивается и возвращается). Мы не имеем права в данном случае использовать результаты, относящиеся только к инерциальным СО. Детальный расчет, выходящий за рамки специальной теории относительности, показывает, что младше окажется близнец *A*, который стартовал на космическом корабле: кто больше путешествует, тот дольше живет!

Сокращение длины

Длина тела относительна, то есть зависит от того, в какой СО она измеряется. Пусть стержень покоится в СО *K*’. Его длина l_0 получается путем откладывания вдоль стержня единичного масштаба (эталона длины), покоящегося относительно этого стержня. Длину l_0 называют собственной длиной стержня.

Если стержень движется относительно СО *K*, то описанная процедура измерения его длины не годится. Для определения длины стержня l в этом случае нужно отметить неподвижными метками *A* и *B* положения концов движущегося стержня в рассматриваемой СО в один и тот же момент времени. Расстояние между этими неподвижными точками и будет, по определению, длиной движущегося стержня l. Длиной движущегося стержня в покоящейся СО называется расстояние между двумя точками в этой системе, мимо которых концы стержня проходят одновременно.

Если взять другую СО, то, ввиду относительности одновременности, концы стержня пройдут в этой СО мимо точек *A* и *B*, вообще говоря, не одновременно. Роль *A* и *B* будут играть другие точки *A*' и *B*' , неподвижные в новой СО. Расстояние между этими точками будет иным. Таким образом, как и промежутки времени, длины отрезков также относительны.

Найдем длину движущегося вдоль оси x стрежня при помощи преобразований Лоренца. Пусть стержень покоится в СО *K*'. Тогда разность координат его концов в системе *K*' есть собственная длина l_0. Разность же координат тех же концов x_2 - x_1 в "неподвижной" СО *K*, взятая в один и тот же момент времени t, будет длиной движущегося стержня l. Тогда из первой формулы преобразований Лоренца следует

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Таким образом, длина l движущегося стержня оказывается меньше его собственной длины l_0, и в разных системах отсчета она будет иметь свое значение.

Преобразование скорости

Пусть в K-СО в плоскости x, y движется частица со скоростью $\vec{\upsilon}_x$, проекции которой υ_x и υ_y. Найдем при помощи преобразований Лоренца проекции скорости этой частицы υ_x' и υ_y' в K' системе, движущейся со скоростью V вдоль оси x:

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dt' = \frac{dt - Vdx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Найдем отношения

$$\boxed{\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - Vdx/c^2} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - V\upsilon_x/c^2}}, \tag{7}$$

$$\boxed{\upsilon_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - Vdx/c^2} = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2}}. \tag{8}$$

Эти формулы выражают релятивистский закон преобразования скорости. При малых скоростях ($V << c$ и $\upsilon_x << c$) они переходят в формулы преобразования скорости ньютоновской механики

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - V, \ \upsilon_y' = \upsilon_y.$$

И, наконец, проверим непосредственно, что релятивистские формулы соответствуют утверждению второго постулата Эйнштейна относительно неизменности скорости света во всех инерциальных системах отсчета. Пусть вектор $\vec{c}$ имеет в K-СО проекции c_x и c_y, то есть $c^2 = c_x^2 + c_y^2$. Тогда в K'-СО получим

$$(\upsilon')^2 = \frac{(c_x - V)^2 + (c^2 - c_x^2)(1-\beta^2)}{(1 - V\upsilon_x/c^2)^2} = \ldots = c^2$$

<u>Предельные случаи</u>

1. При медленных движениях, когда $(V/c)^2 << 1$ *и* $V\upsilon/c^2 << 1$ (υ - скорость движения тела), преобразования Лоренца, и формулы преобразования скорости, как и следовало ожидать, переходят в преобразования Галилея.

2. При $\beta > 1$ формулы преобразований дали бы мнимые значения для координат и времени. Поэтому нет смысла говорить о движении одной инерциальной СО относительно другой со скоростью V, превышающей скорость света. Отсюда следует, что скорость любого тела не может превышать c, так как с каждым телом можно связать СО.

Интервал. Причинность.

Преобразования Лоренца не сохраняют ни величину интервала времени, ни длину пространственного отрезка. Однако можно показать, что при преобразованиях Лоренца сохраняется величина

$$s_{12}^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2 \tag{9}$$

где s_{12} называется интервалом между событиями 1 и 2 ($\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$).

Если $s_{12}^2 > 0$, то интервал между событиями называют <u>времениподобным</u>, так как в этом случае существует инерциальная СО, в которой $\Delta\vec{r} = 0$, т. е. события происходят в одном месте, но в разное время. Такие события могут быть причинно связанными.

Если, наоборот, $s_{12}^2 < 0$, то интервал между событиями называют <u>пространственноподобным.</u> В этом случае существует инерциальная СО, в которой $\Delta t = 0$, т.е. события происходят одновременно в разных точках пространства. Между такими событиями не может существовать причинной связи. Условие $c\,|\Delta t| < |\vec{r}\,|$ означает, что луч света, испущенный в момент более раннего события (например, t_1) из точки $\vec{r}_1$, не успевает достигнуть точки $\vec{r}_2$ к моменту времени t_2.

События, отделенные от события 1 времениподобным интервалом, представляют по отношению к нему или абсолютное прошлое ($t_2 - t_1 < 0$), или абсолютное будущее ($t_2 - t_1 > 0$); порядок следования этих событий одинаковый во всех ИСО. Порядок следования событий, отделенных пространственноподобным интервалом, может быть разным в разных ИСО.

События можно отображать в четырехмерной пространственно временной системе координат. Вместо времени удобно ввести величину, имеющую размерность длины

$$\tau = ct\,, \quad \tau' = ct'.$$

Тогда преобразования Лоренца можно записать в симметричном виде

$$\boxed{x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad (10)}$$

<u>Пример 1</u>. В инерциальной две частицы двигаются с одинаковыми скоростями υ навстречу друг другу. В момент времени $t_1 = t_2$ первая частица пролетает мимо метки *A* (событие 1), а вторая – мимо метки *B* (событие 2). Расстояние между метками равно l. Определите а) время между событиями 1 и 2 в инерциальной *K*'-СО, которая движется вместе с первой частицей, б) интервал между событиями.

<u>Решение.</u>

1) В *K*-СО: $\Delta t = 0$, $\Delta x = x_2 - x_1 = l$.

2) В *K*'-СО:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon\Delta t}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\,, \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \upsilon\Delta x/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = -\frac{\upsilon l}{c^2\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

Видно, что $t_2' < t_1'$, следовательно, вторая частица «опередит» первую: она пересечет метку *B* раньше, чем первая пересечет метку *A*. Заметим, что интервал между событиями в обеих инерциальных системах отсчета одинаков:

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = -l^2,$$

$$(s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \frac{(\upsilon/c)^2 l^2 - l^2}{1-(\upsilon/c)^2} = -l^2.$$

Квадрат интервала отрицательный, следовательно, он пространственноподобный. Поэтому события причинно не связаны и для разных наблюдателей их порядок следования может быть разным.