

# ГЛАВА 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

## 1.1. Основные определения

*Механизм* – система определенным образом соединенных тел (звеньев), предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел (звеньев), в требуемое движение других тел (звеньев).

*Машина* – устройство, выполняющее преобразование энергии, движения и информации, предназначенное для замены или облегчения физического или умственного труда человека.

Основными признаками машины является не только целесообразность в движении ее звеньев, но и выполнении полезной работы (например, часы и токарный станок). Применяемые в настоящее время машины можно разделить на следующие группы:

- энергетические;
- транспортные;
- технологические;
- контрольные и управляющие;
- логические.

Все машины перечисленных групп разделили на два вида: машины-двигатели и машины-орудия (рабочие машины).

*Машинами-двигателями* называются машины, в которых тот или иной вид энергии преобразуется в механическую работу, необходимую для приведения в движение рабочей машины.

*Рабочими машинами* называются машины, с помощью которых производится изменение свойств, состояния, формы и положения обрабатываемого материала или объекта.

Рабочие машины, в которых все рабочие операции выполняются соответствующими механизмами без содействия человека и которые нуждаются только в контроле со стороны человека за их работой, называются *машинами-автоматами*.

*Звеном механизма* называется деталь или несколько неподвижно соединенных между собой деталей, движущихся как одно целое. Звенья, не изменяющие свое положение с течением време-

ни, являются *неподвижными*. Неподвижное звено называется *стойкой*. Понятие стойки равносильно понятию каркаса или рамы механизма. Звенья, изменяющие свое положение в пространстве в ходе работы механизма, называются *подвижными*.

Подвижные звенья могут совершать вращательное, поступательное и сложное движения. В зависимости от вида их движения и назначения они имеют определенные названия:

*кривошип* - вращающееся звено механизма, которое совершает полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

*шатун* - звено механизма, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями;

*коромысло* - звено механизма, которое совершает только колебательные движения при неполном вращении вокруг неподвижной оси, связанной со стойкой;

*ползун* - звено, образующее поступательную пару со стойкой;

*камень* - звено, образующее поступательную пару с кулисой;

*кулиса* - подвижное звено механизма, являющееся направляющей для камня;

*кулачок* – звено, имеющее рабочий профиль переменной кривизны;

*толкатель* – звено, совершающее прямолинейное движение и образующее высшую кинематическую пару с кулачком;


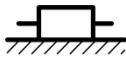
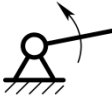


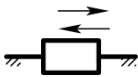
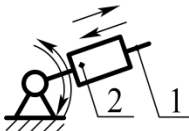
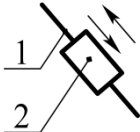
*зубчатое колесо* – звено с замкнутой на нем системой выступов, обеспечивающее взаимодействия с соответствующими выступами другого колеса;

*фрикционное колесо* – звено, которое осуществляет передачу движения за счет сил трения между прижимаемыми к нему телами;

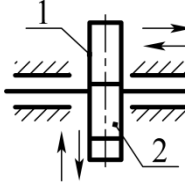
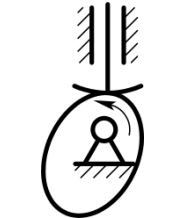
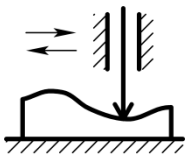

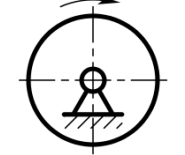
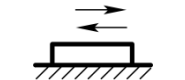
*рейка* – звено, у которого два размера значительно меньше третьего. На рейке могут быть нарезаны зубья, в этом случае она называется *зубчатой рейкой*.

Условные обозначения перечисленных звеньев с характерными особенностями их движения представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Название	Условное изображение на схемах	Движение	Особенности
1	2	3	4
Стойка		Отсутствует	
Стойка		Отсутствует	
Кривошип		Вращательное	Полный оборот
Шатун		Сложное	Нет пар, связанных со стойкой
Коромысло		Качательное	Неполный оборот, возвратно-вращательное движение
Ползун		Возвратно-поступательное	Направляющая неподвижна
1. Кулиса 2. Камень		Вращательное, колебательное	Направляющая подвижна
1. Кулиса 2. Камень		Сложное	Направляющая подвижна

Окончание табл. 1.1

1	2	3	4
<p>1. Кулиса 2. Камень</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Направляющая подвижна</p>
<p>1. Кулачок 2. Толкатель</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	<p>Профиль опре- деляет закон движения ведо- мого звена</p>
<p>1. Кулачок 2. Толкатель</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Профиль опре- деляет закон движения ведо- мого звена</p>
<p>Зубчатое колесо</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	<p>Зубчатый контур</p>
<p>Фрикционное колесо</p>		<p>Вращательное, колебательное</p>	
<p>Рейка</p>		<p>Возвратно- поступательное</p>	<p>Может иметь зуб- чатый контур</p>

Подвижные звенья разделяют: на ведущие, ведомые и соединительные (промежуточные); входные и выходные; начальные.

*Ведущим* (движущим) называют звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является положительной. Соответственно *ведомым* называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю. Все остальные звенья механизма называются *соединительными* или *промежуточными*.

*Входным* называется звено, движение которого преобразуется в заданные движения других звеньев. *Выходным* называется звено, которое совершает требуемое движение, т. е. движение, для получения которого и был создан механизм.

В большинстве случаев входное звено является и ведущим, но могут быть случаи инверсий, когда входное звено становится ведомым, т. е. выполняет тормозящую функцию.

Звено, которому при исследовании механизма приписывается обобщенная координата, называется начальным. *Обобщенная координата* – это переменная любой размерности, однозначно определяющая положение механизма. Если входное звено совершает вращательное движение, то в качестве обобщенной координаты удобно принять угол его поворота.

Обычно механизм имеют один вход и один выход. Однако бывают и механизмы с одним входным звеном и несколькими выходными звеньями. *Дифференциальный механизм*, устройство, позволяющее получать результирующее движение как сумму или разность составляющих движений. В дифференциальном механизме с одной обобщенной координатой составляющие движения кинематически связаны и осуществляются одним приводом, а результирующее получается как разность этих движений. Дифференциальный механизм с одной обобщенной координатой применяют для получения малых точных перемещений или больших сил (например, в приборах, металлорежущих станках и т. п.).

В дифференциальном механизме с двумя и более обобщенными координатами составляющие движения независимы и выполняются каждое своим звеном.

*Кинематической парой* называется подвижное соединение звеньев, допускающее их относительное движение.

*Элементом кинематической пары* называется совокупность точек, линий или поверхностей по которым звенья соприкасаются друг с другом, образуя кинематическую пару.

Кинематические пары различают и классифицируют по трем различным признакам:

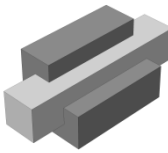

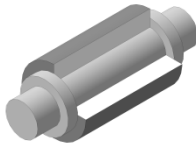

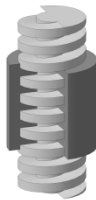

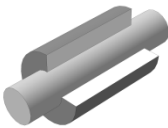

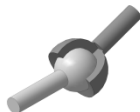

- по характеру контакта звеньев пары делятся на *низшие* и *высшие*. В низших парах звенья соприкасаются друг с другом по поверхности и в месте контакта возникают невысокие удельные давления. Элементом высшей пары является точка или линия, а следовательно, в месте контакта звеньев возникает высокое удельное давление;



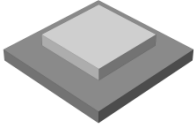

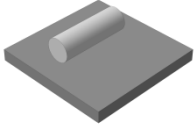

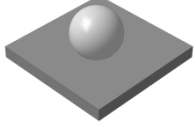



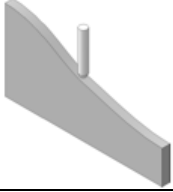

- по способу обеспечения постоянного контакта между звеньями, т. е. их замыкания друг с другом, пары делятся на две группы. Замыкание может быть *силовым* или *геометрическим* (*кинематическим*). *Силовым* называется замыкание, в котором контакт между звеньями обеспечивается действием силы тяжести или силы упругости пружины. При *геометрическом* замыкании контакт между звеньями обеспечивается за счет конструктивных решений;

- по числу связей, налагаемых на относительное движение звеньев. Всякое несвязанное абсолютно твердое тело в пространстве обладает шестью степенями свободы или шестью видами независимых возможных движений: по одному поступательному и вращательному движению вдоль каждой из трех координатных осей прямоугольной системы координат. Вхождение двух звеньев в кинематическую пару налагает на их относительное движение некоторые ограничения или условия связи. Класс кинематической пары определяется числом условий связи ( $S$ ) в паре и всегда находится в пределах от 1 до 5. Число оставшихся подвижностей ( $H$ ) дополняет число связей до шести, т. е.  $H = 6 - S$ . В этой связи пару пятого класса называют одноподвижной, четвертого – двухподвижной и т.д.

Примеры кинематических пар и их условные обозначения приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Число степеней свободы	Класс КП	Название	Рисунок	Условное обозначение
1	2	3	4	5
Низшие				
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
1	5	Винтовая		
2	4	Цилиндрическая		
3	3	Сферическая		

1	2	3	4	5
2	4	Сферическая с пальцем		
3	3	Плоскостная		
Высшие				
4	2	Цилиндр-плоскость		
5	1	Шар-плоскость		
2	4	Фрикционная передача		
2	4	Кулачек с толкателем		



Звенья механизмов и кинематические пары на схемах изображают упрощенно в виде линий или геометрических фигур. Такое условное изображение механизма называют структурной схемой механизма или структурной моделью механизма. *Структурная схема (модель)* – графическое изображение механизма с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар без соблюдения масштаба. Если структурную схему механизма выполнить в масштабе, то получим *кинематическую схему (модель)* механизма.

## 1.2. Кинематические цепи

*Кинематической цепью* называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Кинематические цепи делятся на плоские и пространственные, простые и сложные, замкнутые и незамкнутые (разомкнутые).

*Плоской* называется кинематическая цепь, в которой траектории всех точек звеньев лежат в плоскостях параллельных какой-либо одной базовой плоскости (рис. 1.1).

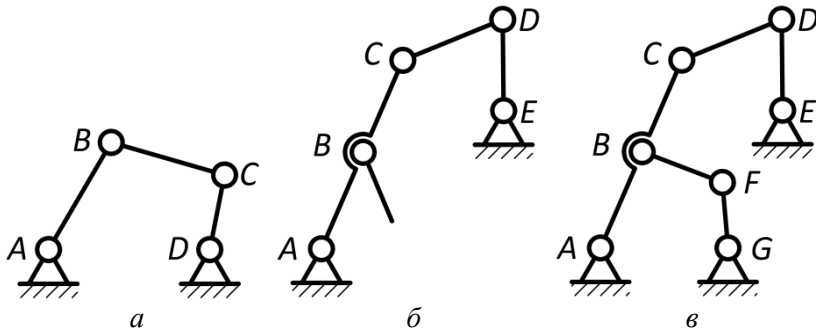


Рис. 1.1

*Пространственной* называется кинематическая цепь, в которой траектории точек звеньев лежат в пересекающихся плоскостях (рис. 1.2).

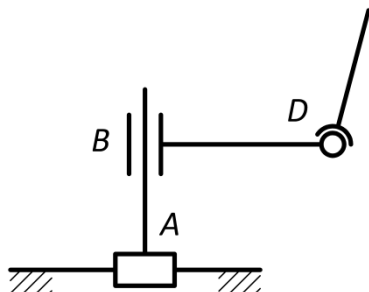


Рис. 1.2

*Простой* называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (см. рис. 1.1, а).

*Сложной* называется кинематическая цепь, в которой имеются звенья, входящие более чем в две кинематические пары (см. рис. 1.1, б и в).

*Замкнутой* называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две кинематические пары. Изображенные на см. рис. 1.1, а, в простые и сложные кинематические цепи являются также примерами замкнутых цепей.

*Незамкнутой (разомкнутой)* называется кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее только в одну кинематическую пару (см. рис. 1.1, б).

### 1.3. Структурные формулы кинематических цепей

Рассмотрим пространственную кинематическую цепь. Пусть она образована подвижными звеньями, число которых равно  $n$ . Общее число степеней свободы звеньев до тех пор, пока они не входили в кинематические пары равно  $6n$ . Каждая кинематическая пара 5-го класса накладывает 5 ограничений на возможное движение звеньев, а следовательно, уменьшает степень свободы кинематической цепи на 5. Таким образом, все кинематические пары 5-го класса уменьшают степень свободы кинематической цепи на  $5p_5$ , где  $p_5$  – число кинематических пар 5-го класса.

По аналогии все кинематические пары 4-го класса уменьшают степень свободы пространственной кинематической цепи

на  $4p_4$ , где  $p_4$  – число кинематических пар 4-го класса и т. д.

В результате степень свободы пространственной кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, определится уравнением:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Эта формула впервые, в несколько ином виде, была дана П.И. Сомовым и развита А.П. Малышевым и носит название – *формула Сомова - Малышева*.

В плоской кинематической цепи свободное звено имеет три подвижности, две из которых соответствуют поступательному движению вдоль осей прямоугольной системы координат, а третья – вращательному движению в плоскости этих осей.

Общее число степеней свободы  $n$  подвижных звеньев до образования ими плоской кинематической цепи –  $3n$ . Каждая кинематическая пара 5-го класса оставляет одну подвижность из трех возможных в кинематической паре, следовательно, накладывает 2 ограничения на возможное движение звеньев, т. е. уменьшает степень свободы плоской кинематической цепи на 2. Таким образом, все кинематические пары 5-го класса уменьшают степень свободы плоской кинематической цепи на  $2p_5$ , где  $p_5$  – число кинематических пар 5-го класса.

По аналогии все кинематические пары 4-го класса уменьшают степень свободы на  $1p_4$ , где  $p_4$  – число кинематических пар 4-го класса. Так как в плоской кинематической цепи кинематических пар третьего и ниже класса быть не может, получим:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Эта формула впервые была получена П.Л. Чебышевым и носит название – *формула Чебышева*.

#### **1.4. Принцип образования механизмов и классификация структурных групп**

Любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения к входному звену кинематических цепей, степень подвижности которых равна нулю.

*Группой Ассура* называется замкнутая плоская кинематиче-

ская цепь, включающая кинематические пары только 5-го класса и обладающая нулевой степенью подвижности, которая не распадается на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности. Установим, какое число звеньев и кинематических пар в кинематической цепи может образовывать группу Ассура. Преобразуем формулу Чебышева применительно к группе Ассура, т. е. примем  $W = 0$  и  $p_4 = 0$ . Получим:

$$0 = 3n - 2p_5 - 0,$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2}n.$$

Так как число звеньев и число кинематических пар пятого класса может быть только целым числом, можно констатировать, что только *четное число звеньев цепи может образовывать группу Ассура, а число кинематических пар в ней кратно трем*. Приведем в табл. 1.3 сочетания чисел звеньев и кинематических пар, образующих структурные группы Ассура.

Таблица 1.3

n	2	4	6	8	...
$p_5$	3	6	9	12	...

Все получаемые таким образом группы можно разбить по классам и порядкам. Деление групп по классам обусловлено различием методов кинематического и силового анализов, свойственным группам каждого класса.

Первое из этих сочетаний ( $n = 2$ ;  $p_5 = 3$ ) реализуется в представленных на рис. 1.3 двухповодковых группах Ассура различных модификаций: с тремя вращательными парами (1.3, *а*), с внешней поступательной парой (1.3, *б*), с внутренней поступательной парой (1.3, *в*), с двумя внешними поступательными парами (1.3, *г*), с двумя внешними поступательными парами (1.3, *д*).

Группа Ассура, имеющая два звена и три пары 5-го класса, называется группой Ассура II класса 2-го порядка. *Порядок группы* определяется числом внешних кинематических пар, т. е. пар, которыми группа присоединяется к основному механизму (входному звену, стойке или другим группам Ассура).

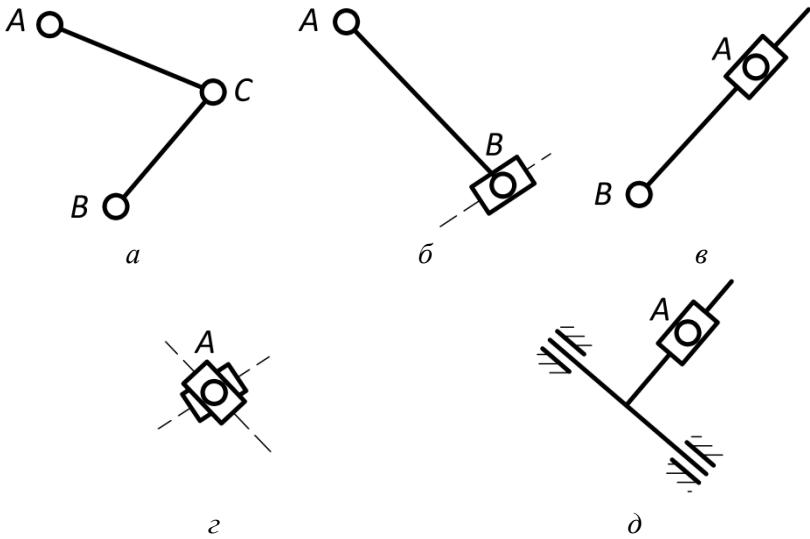


Рис. 1.3

*Класс группы Ассура* определяется числом кинематических пар, входящих в наиболее сложный замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами. Двухповодковые структурные группы, не имеющие замкнутого контура, относят ко второму классу.

Рассмотрим второе возможное сочетание чисел звеньев и кинематических, образующих группу Ассура -  $n = 4$ ;  $p_5 = 6$  (рис. 1.4).

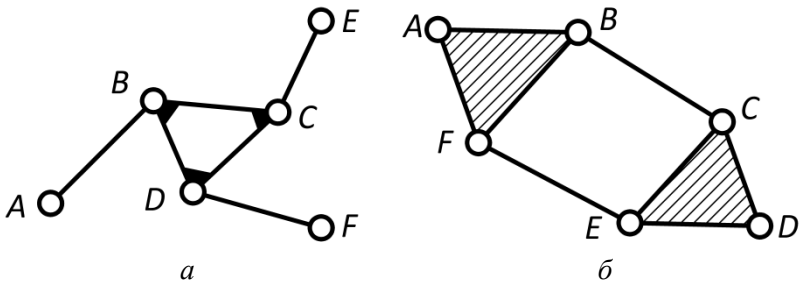


Рис. 1.4

Представленная на см. рис.1.4, *а* группа относится к III классу (внутренний замкнутый контур включает три пары *B*, *C* и *D*) и имеет третий порядок (три внешние пары *A*, *E* и *F*).

Группа, изображенная на рис. 1.4, *б*, относится к IV классу (внутренний замкнутый контур включает четыре пары *B*, *C*, *E* и *F*) и имеет второй порядок (две внешние пары *A* и *D*).

### **1.5. Структурный анализ механизмов**

Анализ структурных схем механизмов позволяет определить количество звеньев, число и класс кинематических пар, соединяющих их в кинематические цепи. По структурной схеме механизма определяют наличие избыточных связей или подвижностей. Пользуясь методами структурного анализа, можно преобразовать структурную схему, удалив звенья, изменив класс кинематических пар, вносящих избыточные связи и подвижности, произведя замену высших кинематических пар низшими. Основная задача структурного анализа – определение класса механизма.

### **1.6. Замена высших кинематических пар низшими**

Применяется в плоских механизмах для удобства изучения их структуры и кинематики. Основными условиями замены являются сохранение первоначальной степени подвижности и относительных движений всех его звеньев, совершающихся в рассматриваемом положении. Рассмотрим четыре случая такой замены:

1. Пусть задан механизм с высшей парой, элементы звеньев которой представляют собой произвольно заданные кривые (рис.1.5, *а*). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль  $n-n$  в точке *C* касания кривых и отмечаем на ней центры кривизны *D* и *E* звеньев 1 и 2. В точки *D* и *E* помещаем шарниры вращательных кинематических пар, образованных условными звеньями. Вместо исходного механизма получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.5, *б*).

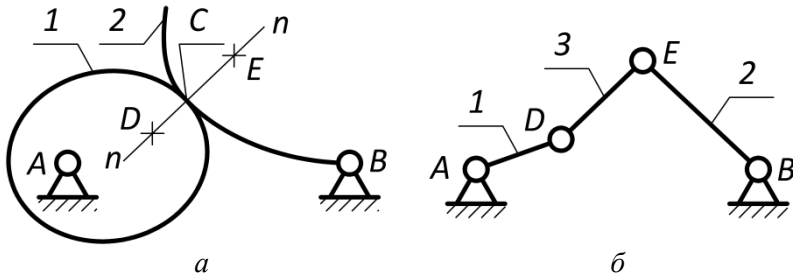


Рис. 1.5

2. Рассмотрим механизм с высшей парой, в которой один из соприкасающихся элементов представляет собой кривую (звено 1), а второй – прямую (звено 2) (рис. 1.6, а). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль  $n-n$  в точке  $C$  касания элементов пары. Отмечаем центр кривизны звена 1 – точку  $D$ , в которую помещаем шарнир вращательной пары. В точку  $C$  помещаем поступательную пару. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.6, б).

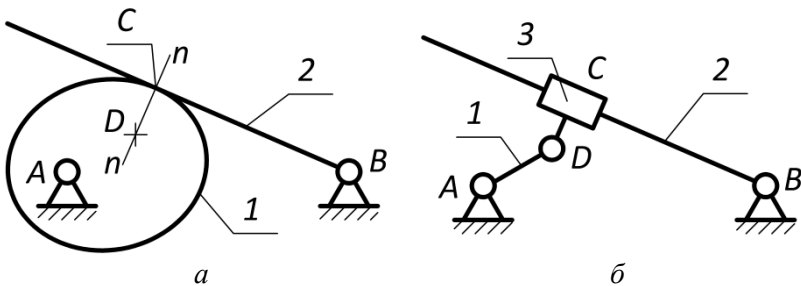


Рис.1.6

3. Рассмотрим случай, когда один из соприкасающихся элементов – кривая (звено 1) а, другой – точка  $C$  (рис. 1.7, а). Проводим нормаль  $n-n$  в точке  $C$  касания элементов пары. Отмечаем центр кривизны звена 1 – точку  $D$ , в которую помещаем шарнир вращательной пары. В точку  $C$  также помещаем шарнир вращательной пары. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.7, б).

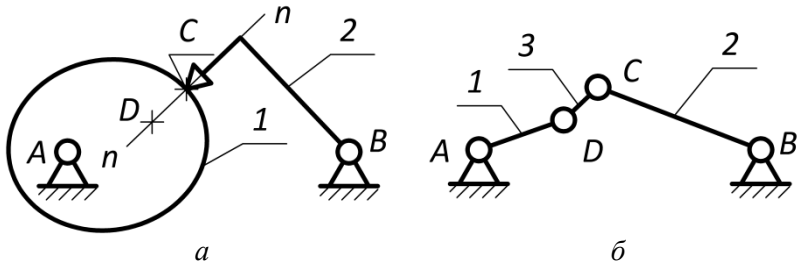


Рис. 1.7

4. Рассмотрим случай, когда одним элементом является прямая, а другим – точка  $C$  (рис. 1.8, *a*). Замена сводится к постановке в точке  $C$  условного звена, входящего в одну поступательную и одну вращательную пары. Получаем мгновенный заменяющий механизм (рис. 1.8, *б*).

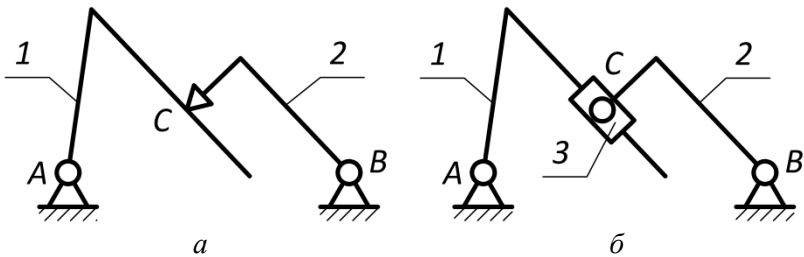


Рис. 1.8

Таким образом, любой плоский механизм с высшими парами может быть заменен механизмом, в который входят только низшие пары.

### 1.7. Избыточные связи и подвижности

Структурный синтез и анализ реального механизма сопровождается постоянной оценкой конструктивных схем соединений звеньев. Конструктивное исполнение элементов кинематических пар, обеспечивающее необходимую подвижность, может быть



различной. В этой связи соединения отличаются работоспособность. Это обусловлено тем, что в реальных механизмах из-за неизбежных неточностей изготовления и монтажа, деформаций звеньев при действии эксплуатационных нагрузок и износа поверхностей элементов кинематических пар в процессе эксплуатации появляются избыточные связи и подвижности.

*Избыточные связи* создают дополнительные ограничения на подвижность звеньев механизмов, вследствие чего конструкция становится статически неопределимой. Их удаление не изменяет кинематику звеньев, а приводит лишь к перераспределению усилий в соединениях, вызывающих дополнительную деформацию звеньев к той, которая возникла от действия эксплуатационных усилий.

Рассмотрим схему плоского четырехзвенного шарнирного механизма с тремя подвижными звеньями (рис. 1.9), соединенными между собой и со стойкой четырьмя вращательными кинематическими парами 5-го класса  $p_5=4$  (0-1; 1-2; 2-3; 3-0).

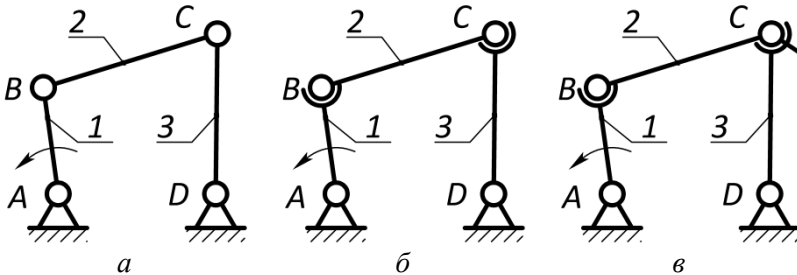


Рис. 1.9

Степень подвижности определим по формуле Чебышева

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Полученная степень подвижности механизма  $W = 1$  соответствует числу входных звеньев. Но если из-за неточностей изготовления и монтажа оси шарниров не окажутся параллельно друг другу, то звенья механизма будут двигаться в параллельных плоскостях только при условии их деформации. Рассчитаем  $W$  по формуле Сомова - Малышева как для пространственного механизма

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = -2.$$

Результат указывает на возможность потери подвижности из-за избыточных связей. Для выявления избыточных связей и подвижностей преобразуем формулы Сомова - Малышева и Чебышева.

Для пространственного механизма:

$$q = W - (6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1).$$

Для плоского:

$$q = W - (3n - 2p_5 - p_4),$$

где  $W$ - число начальных звеньев или число обобщенных координат, однозначно определяющих положение всех звеньев механизма. Если  $q > 0$ , то механизм имеет избыточные связи, если  $q < 0$ , то избыточные подвижности.

Для приведенного выше механизма (см. рис. 1.9, а) получим:

$$q = 1 - (6 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = 3,$$

что говорит о трех избыточных связях. Исходя из не параллельности осей шарниров как условия пространственного характера кинематики его звеньев, заменим пары 5-го класса  $B$  и  $C$  на пары 3-го класса - сферические шарниры (см. рис. 1.9, б). После чего получим при  $n = 3$ ,  $p_5 = 2$  и  $p_3 = 2$ :

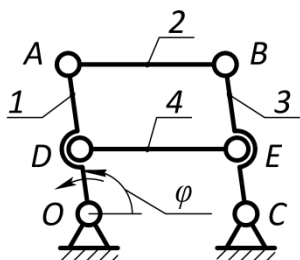
$$q = 1 - (6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -1.$$

Результат говорит о появлении *избыточной подвижности*, что проявляется в возможности свободного вращения звена 2 вокруг своей оси. Если проворачиваемость его нежелательна, то ее можно избежать, применив, вместо пары  $B$  или  $C$  3-го класса кинематическую пару 4-го класса, например сферическую с пальцем (см. рис. 1.9, в).

Таким образом, для удаления избыточной связи понижается класс соответствующей кинематической пары, принятой в плоской схеме. Механизмы, в которых удалено большинство избыточных связей, называются *рациональными*. В некоторых слу-

чаях, наоборот, целесообразно вводить избыточные связи, например, для увеличения жесткости или распределения нагрузки на несколько потоков.

Рассмотрим схему, используемую в механизмах грохотов, в приводе колес электроприводов для повышения жесткости системы и равномерного распределения нагрузки (рис. 1.10).



$$n = 4;$$

$$p_5 = 6 (0-1; 1-2; 2-3; 3-0; 1-4; 3-4);$$

$$q = 1 - (3 \cdot 4 - 2 \cdot 6) = 1.$$

Рис. 1.10

В этом механизме, называемом механизмом параллельных кривошипов с дополнительным шатуном  $DE$ , одно начальное звено, т.к. одна обобщенная координата  $\varphi_1$  однозначно определяет положение выходного звена  $BC$ . Полученное значение  $q=1$  говорит о наличии в механизме одной избыточной связи. Однако при выполнении соотношений для длин звеньев  $OA=BC$ ;  $OC=AB=DE$ ;  $OD=DA=BE=EC$  наличие звена  $DE$  не изменит движения шарнирного четырехзвенника  $OABC$ . Если из схемы удалить это звено, относительное движение остальных звеньев сохранится прежним, поэтому связь  $DE$  называется избыточной.

В кулачковом механизме (рис. 1.11, *a*) избыточная подвижность появляется при введении в схему механизма (рис. 1.11, *б*) дополнительного звена – ролика 2, не влияющего на относительное движение толкателя 3.

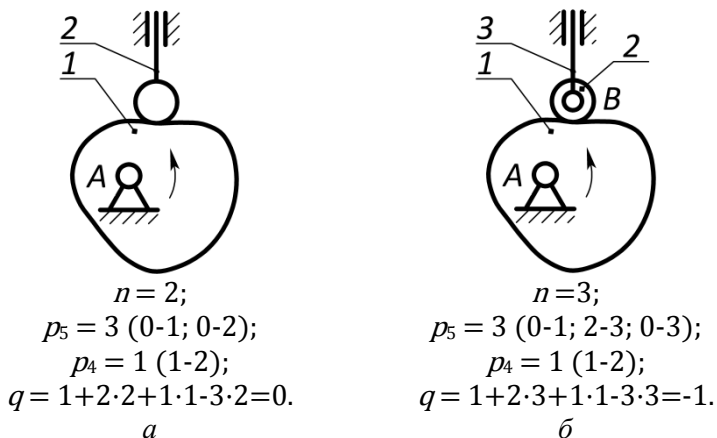


Рис. 1.11

В данных конкретных условиях избыточная подвижность является полезной, т. к. уменьшает трение в высшей кинематической паре между кулачком и толкателем, переводя его из трения скольжения в трение качения.

### 1.8. Классификация механизмов

Класс механизма определяется по наивысшему классу группы Ассура, входящей в его состав. Входное звено, соединенное со стойкой, называют простейшим (элементарным) механизмом I класса (рис. 1.12).



Рис. 1.12

Последовательность определения класса механизма обратная последовательности его образования и заключается в установлении всех групп Ассура, входящих в его состав.

Для определения класса механизма необходимо:

- убедиться, что предлагаемая кинематическая цепь является механизмом (цепь замкнута, имеется стойка, степень подвижности равняется числу входных звеньев);

- начиная с наиболее удаленного от входного звена, пытаемся выделить группу Ассра II класса ( $n=2, p_5=3$ ). В результате отсоединения этой группы оставшаяся кинематическая цепь должна быть замкнутой;
- если группу Ассра II класса выделить не удастся, то отсоединяют группу Ассра более высокого класса;
- после отсоединения первой группы Ассра отсоединяют следующую;
- в результате отсоединения всех групп Ассра в остатке должны оказаться только входные звенья.

Определим класс механизма с одним входным звеном, представленным на рис. 1.13.

По формуле Чебышева установим соответствие между  $W$  и числом входных звеньев.

$$n=7;$$

$$p_5=10 (0-1; 1-2; 2-3; 3-4; 3-0; 4-5; 5-7; 7-0; 5-6; 6-0);$$

$$p_4=0;$$

$$W=3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

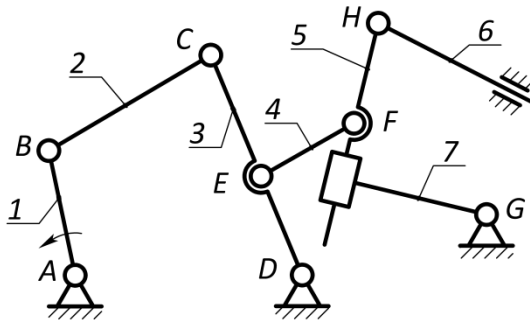


Рис. 1.13

Попытка отсоединить группу Ассра второго класса ( $n=2$ ) не удалась, так как в этом случае цепь размыкается. Выделим структурную группу из четырех звеньев  $n=4$  (4; 5; 6; 7) и шести кинематических пар  $p_5=6$  (3-4; 4-5; 5-6; 6-0; 5-7; 7-0) (рис. 1.14, а).

Это структурная группа третьего класса (внутренний замкнутый контур включает три пары 4-5, 5-6, 5-7) и имеет третий порядок (три внешние пары 3-4, 6-0 и 7-0). Изобразим оставшуюся кинематическую цепь (рис. 1.14, б).

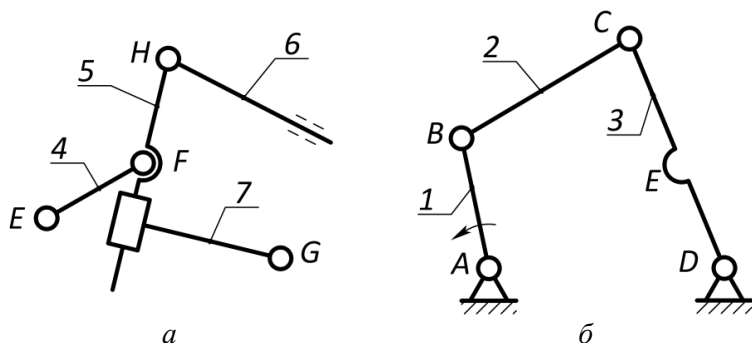


Рис. 1.14

Выделим из нее структурную группу, включающую два подвижных звена (2, 3) и три кинематические пары пятого класса (1-2; 2-3; 3-0) (рис. 1.15, а).

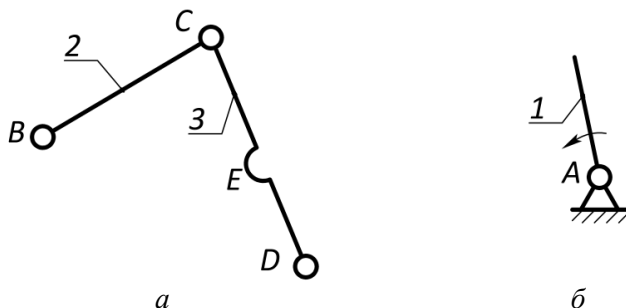


Рис. 1.15

Это группа Ассура II класса 2-го порядка. Оставшаяся кинематическая цепь представляет простейший механизм (рис. 1.15, б), т. е. входное звено, присоединенное к стойке.

В результате исследуемый механизм образован путем последовательного присоединения к входному звену группы Ассура II класса и группы Ассура III класса. Наивысший класс структурной группы входящей в состав механизма третий, следовательно, механизм относится к третьему классу.

Таким образом, схема образования исследуемого механизма записывается следующим образом:

$$I(1)+II(2,3)+III(4,5,6,7)=M(III).$$

## **ГЛАВА 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ**

Цели кинематического анализа:

- определение траекторий точек и положений звеньев механизма в различные моменты времени;
- определение линейных скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма;
- определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Кинематический анализ проводится тремя методами:

- 1) аналитическим;
- 2) графическим;
- 3) графоаналитическим.

Аналитический метод подробно рассматривался в теоретической механике. Основным его преимуществом является высокая точность получаемых результатов. К числу недостатков следует отнести сложность и громоздкость. Более подробно остановимся на графическом и графоаналитическом методах.

### **2.1. Графоаналитический метод исследования**

Сущность метода заключается в том, что для точки, являющейся элементом внутренней кинематической пары каждой группы Ассур, записываются векторные уравнения по определению ее скорости и ускорения. Затем эти векторные уравнения решаются графически - посредством построения планов скоростей или ускорений.

Преимущество метода – скорости и ускорения всех названных точек механизма определяются одновременно и как по величине, так и по направлению.

### **2.2. Формальный метод записи векторных уравнений**

Рассмотрим формальный метод записи векторных уравнений, позволяющий получить единый подход составления уравнений для различных структурных групп. Ключевой его задачей является определение трех характерных точек для каждой струк-

турной группы Ассура второго класса и установлении вида движения их относительно друг друга.

Для решения этой задачи:

- разбираем механизм на группы Ассура, причем буквами на схеме обозначаем *только вращательные кинематические пары* (разберем метод на примере группы Ассура с внутренней кинематической парой табл. 2.1);

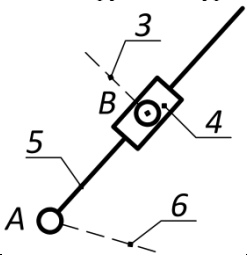
- записываем попарно номера звеньев, образующих между собой одну внутреннюю кинематическую пару (4-5), в которой соединяются между собой звенья, входящие в состав данной группы Ассура, и две внешние, в которых соединяются между собой звенья рассматриваемой группы, со звеньями, не принадлежащими данной группе – (3-4; 5-6);

- предварительно обозначаем буквой *I* точку, являющуюся характерной для внутренней кинематической пары, а буквами  $J_1$  и  $J_2$  - характерные точки для внешних кинематических пар;

- устанавливаем вид относительного движения в каждой из кинематических пар – вращательный (*вращ.*) или поступательный (*пост.*);



Таблица 2.1

Группа Ассура с внутренней поступательной парой			
			
Образована звеньями 4 и 5. Звенья 3 и 6 в группу Ассура не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	3-4	4-5	5-6
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$B_3 = B_4$	$B_4 \neq B_5$	$A_5 = A_6$
Характерные точки КП	$B_3(B_4)$	$B_5$	$A_5(A_6)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		1

- для каждой кинематической пары указываем две точки, принадлежащие разным звеньям с указанием номера звена, на котором лежит каждая из них. Если указанные точки являются элементами вращательной кинематической пары, то назовем их совмещенными, т. е. не изменяющими своего относительного положения, и поставим между ними знак равенства ( $B_3=B_4$ ;  $A_5=A_6$ ; индексы указывают номер звена, которому принадлежит точка). Если же указанные точки являются элементами поступательной кинематической пары то назовем их не совмещенными и поставим между ними знак неравенства ( $B_4 \neq B_5$ );

- устанавливаем характерные точки для каждой из двух внешних кинематических пар, обозначенные нами предварительно как  $J_1$  и  $J_2$ . Если внешняя кинематическая пары является вращательной, то для нее в качестве характерной может быть выбрана любая из двух выделенных выше для нее точек, так как они являются совмещенными ( $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$ ,  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ ). Если же внешняя кинематическая пара является поступательной, то для нее в качестве ха-

рактерной необходимо выбрать только ту, которая принадлежит звену не входящему в рассматриваемую группу Ассура;

- устанавливаем характерную точку для внутренней кинематической пары, обозначенную выше как  $I$ . Если внутренняя кинематическая пара является вращательной, то для нее также в качестве характерной может быть выбрана любая из двух выделенных для нее точек ввиду их совмещенности. Если же внутренняя кинематическая пара является поступательной, то для нее в качестве характерной выбирается та из двух выделенных точек ( $B_4 \neq B_5$ ), что не могла быть использована в качестве характерной для двух внешних кинематических пар (в нашем случае  $I \rightarrow B_5$ , т.к.  $B_4$  принадлежит внешней кинематической паре);

- определяем вид движения характерной точки внутренней кинематической пары ( $I$ ), относительно условно неподвижных характерных точек внешних кинематических пар ( $J_1$  и  $J_2$ ). Если точка  $I$  по отношению к точке  $J$  движется по окружности, то такое движение отнесем к первому виду. Если же точка  $I$  по отношению к точке  $J$  движется поступательно вдоль какой-либо направляющей, то такое движение отнесем ко второму виду.

К определению вида относительного движения можно отнестись формально: если буквы, соответствующие характерным точкам  $I$  и  $J$  разные ( в нашем случае  $I \rightarrow B_5$  и  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ ), а индексы, определяющие принадлежность звену, одинаковые (звено 5), то *вид движения первый*. Если же буквы, соответствующие характерным точкам  $I$  и  $J$  разные одинаковые (в нашем случае  $I \rightarrow B_5$  и  $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$ ), а индексы, определяющие принадлежность звену, разные - *вид второй*.

В дальнейшем к процедуре записи векторных уравнений подходим формальным образом.

Если установлено, что вид относительного движения первый, то, как было отмечено выше, точка  $I$  по отношению к точке  $J$  движется по окружности радиуса  $l_{IJ}$  (рис. 2.3).

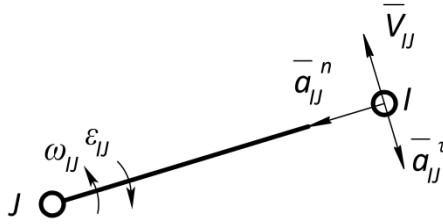


Рис. 2.3

В этом случае ее скорость и ускорение определяются приведенными ниже векторными уравнениями (условимся подчеркивать вектор дважды, если он полностью определен, т. е. известен по направлению и по величине, один раз, если известна только линия, на которой он расположен):

$$\bar{V}_I = \bar{V}_J + \bar{V}_{IJ}, \bar{a}_I = \bar{a}_J + \bar{a}_{IJ}^n + \bar{a}_{IJ}^\tau,$$

$\underline{\underline{\text{изв.}}}$ 
 $\underline{\underline{\perp IJ}}$ 
 $\underline{\underline{\text{изв.}}}$ 
 $\underline{\underline{\parallel IJ}}$ 
 $\underline{\underline{\perp IJ}}$

где  $\bar{V}_I$  и  $\bar{a}_I$  – векторы скорости и ускорения характерной точки I внутренней кинематической пары (они неизвестны ни по величине, ни по направлению);

$\bar{V}_J$  и  $\bar{a}_J$  – известные по величине и направлению векторы скорости и ускорения характерной точки J внешней кинематической пары;

$\bar{a}_{IJ}^n$  – известная по направлению и величине нормальная составляющая вектора ускорения точки I по отношению к точке J в относительном движении. Ее численное значение определяется уравнением  $a_{IJ}^n = V_{IJ}^2/L_{IJ}$ , а направлена она вдоль отрезка  $IJ$  ( $\parallel IJ$ ) от точки I к точке J;

$\bar{V}_{IJ}$  и  $\bar{a}_{IJ}^\tau$  – известные только по направлению соответственно скорость и касательная составляющая ускорения точки I по отношению к точке J в относительном движении. Векторы  $\bar{V}_{IJ}$  и  $\bar{a}_{IJ}^\tau$  лежат на прямой перпендикулярной отрезку  $IJ$  (в какую сторону заранее неизвестно).

В случае второго вида относительного движения точка  $I$  по отношению к условно неподвижной точки  $J$  перемещается поступательно вдоль направляющей кулисы (рис. 2.4). На рис. 2.4 точка  $I$  принадлежит направляющей, точка  $J$  – ползуну.

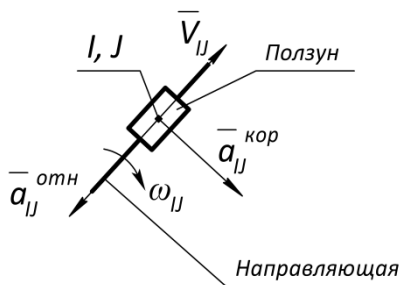


Рис. 2.4

В этом случае ее скорость и ускорение определяются следующими векторными уравнениями:

$$\vec{V}_I = \underbrace{\vec{V}_J}_{\text{изв.}} + \underbrace{\vec{V}_{IJ}}_{\parallel \text{направл.}} \quad , \quad \vec{a}_I = \underbrace{\vec{a}_J}_{\text{изв.}} + \underbrace{\vec{a}_{IJ}^{кор}}_{\perp \text{направл.}} + \underbrace{\vec{a}_{IJ}^{отн}}_{\parallel \text{направл.}} .$$

где  $\vec{a}_{IJ}^{кор}$  – известный по направлению и величине вектор кориолисова ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$ . Его численное значение определяется уравнением  $a_{IJ}^{кор} = 2\omega_{напр} V_{IJ} \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором угловой скорости направляющей (кулисы) и вектором относительной скорости  $V_{IJ}$ . В случае плоского движения  $\alpha=90^\circ$  и, следовательно,  $a_{IJ}^{кор} = 2\omega_{напр} V_{IJ}$ . Направление вектора ускорения Кориолиса определяется по правилу Жуковского посредством поворота вектора  $\vec{V}_{IJ}$  на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости направляющей кулисы ( $\omega_{напр}$ );

$\vec{a}_{IJ}^{отн}$  – вектор относительного ускорения точки  $I$  по отношению к точке  $J$ . Известно только его направление - вдоль направляющей кулисы, по которой перемещается камень (в какую именно сторону заранее определить нельзя).

Величина и направление векторов  $\bar{V}_J$  и  $\bar{a}_J$  определяются в каждом конкретном случае по одному из трех подходов.

*Первый подход* используется, когда точка  $J$  принадлежит входному звену (рис. 2.5), вращающемуся с  $\omega_1 = \text{const}$ . В этом случае их численные значения определяются уравнениями  $V_J = \omega_1 \cdot L_{OJ}$ ,  $a_J = \omega_1^2 \cdot L_{OJ}$ , где  $L_{OJ}$  – длина входного звена,  $\omega_1$  – угловая скорость вращения входного звена. Вектор  $\bar{V}_J$  направлен перпендикулярно входному звену ( $\perp OJ$ ), в сторону его вращения, а вектор  $a_J$  направлен вдоль входного звена к центру его вращения ( $\parallel OJ$  от точки  $J$  к точке  $O$ ).

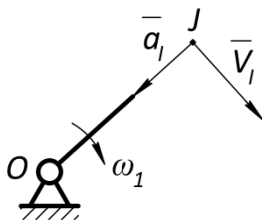


Рис. 2.5

*Второй подход* используется, когда точка  $J$  принадлежит стойке (неподвижному звену). В этом случае ее скорость и ускорение равны нулю.

*Третий подход* используется в том случае, когда точка  $J$  является элементом кинематической пары, соединяющей две группы Ассур между собой. Тогда ее скорость и ускорение определяются по теореме подобия.

**Теорема.** Одноименные точки, принадлежащие одному звену, образуют на плане скоростей и на плане ускорений фигуры, подобные той, которую они образуют на кинематической схеме механизма.

Таким образом, в каждом из векторных уравнений, определяющих скорость и ускорение точки  $I$ , содержатся три неизвестные величины (формально – недостает трех подчеркиваний). По-

этому каждое из них самостоятельно не разрешимо. Однако для каждой точки  $I$  структурной группы Ассура можно записать по два уравнения, определяющих ее скорость и ускорение, приняв в качестве полюсов точки  $J_1$  и  $J_2$ .

Для скорости:

$$\bar{V}_I = \underline{\underline{\bar{V}_{J1}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ1}}}, \quad \bar{V}_I = \underline{\underline{\bar{V}_{J2}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ2}}}.$$

В этих уравнениях левые части одинаковые. Приравняв правые части, получим общее векторное уравнение с двумя неизвестными (недостает двух подчеркиваний), которое является разрешимым:

$$\bar{V}_I \rightarrow \underline{\underline{\bar{V}_{J1}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ1}}} = \underline{\underline{\bar{V}_{J2}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{IJ2}}}.$$

Применительно к рассматриваемой структурной группе (см. табл. 2.1) последнее уравнение имеет вид

$$\bar{V}_{B5} \rightarrow \underline{\underline{\bar{V}_{B4}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{B5B4}}} = \underline{\underline{\bar{V}_{A5}}} + \underline{\underline{\bar{V}_{B5A5}}}.$$

В случае, когда характерной точкой оказываются две совмещенные, в нашем случае  $J_1 \rightarrow B_3(B_4)$  и  $J_2 \rightarrow A_5(A_6)$ , для краткости записи в уравнениях будем писать одну из них, например  $J_1 \rightarrow B_4$  и  $J_2 \rightarrow A_5$ , принимая в дальнейшем во внимание, что  $\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B4}$  и  $\bar{V}_{A5} = \bar{V}_{A6}$ .

Процедура графического решения векторного уравнения по определению скорости точки  $I$  называется построением плана скоростей. Из построенного плана определяются неизвестные: численные значения  $\bar{V}_{IJ1}$  и  $\bar{V}_{IJ2}$ , а также величина и направление  $\bar{V}_I$  (для рассматриваемого примера  $\bar{V}_{B5B4}$ ,  $\bar{V}_{B5A5}$  и  $\bar{V}_{B5}$  соответственно).

Варианты характерных точек и виды их относительных движений для различных групп Ассура второго класса приведены в табл. 2.2 - 2.5.

Таблица 2.2

Группа Ассура с внешней поступательной парой

Образована звеньями 3 и 4.  
Звенья 2 и 5 в группу Ассура не входят

Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	2-3	3-4	4-5
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$B_2 \neq B_3$	$B_3 = B_4$	$A_4 = A_5$
Характерные точки КП	$B_2$	$B_3 (B_4)$	$A_4 (A_5)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		1

Таблица 2.3

Группа Ассура с тремя вращательными парами

Образована звеньями 3 и 4.  
Звенья 2 и 5 в группу Ассура не входят

Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	2-3	3-4	4-5
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Вращ.</i>
Точки элементов КП	$A_2 = A_3$	$B_3 = B_4$	$C_4 = C_5$
Характерные точки КП	$A_2 (A_3)$	$B_3 (B_4)$	$C_4 (C_5)$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	1		1

Таблица 2.4

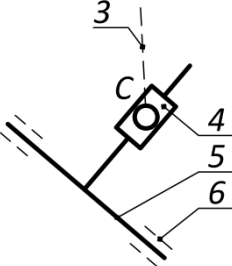
Группа Ассура с внешней и внутренней поступательными парами			
			
Образована звеньями 4 и 5. Звенья 3 и 6 в группу Ассура не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	3-4	4-5	5-6
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>	<i>Пост.</i>
Точки элементов КП	$C_3 = C_4$	$C_4 \neq C_5$	$C_5 \neq C_6$
Характерные точки КП	$C_3 (C_4)$	$C_5$	$C_6$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		2

Таблица 2.5

Группа Ассура с двумя внешними поступательными парами			
			
Образована звеньями 2 и 3. Звенья 1 и 4 в группу Ассура не входят			
Кинематическая пара	Внеш.	Внутр.	Внеш.
Номера звеньев, образующих КП	1-2	2-3	3-4
Общее обозначение характерных точек КП	$J_1$	$I$	$J_2$
Вид относительного движения в КП	<i>Пост.</i>	<i>Вращ.</i>	<i>Пост.</i>
Точки элементов КП	$B_1 \neq B_2$	$B_2 = B_3$	$B_3 \neq B_4$
Характерные точки КП	$B_1$	$B_2 (B_3)$	$B_4$
Вид движения точки $I$ относительно $J$	2		2



### 2.3. Пример кинематического анализа

Рассмотрим кинематический анализ механизма на примере четырехзвенного механизма, образованного посредством присоединения к входному звену группы Ассур второго класса с внутренней поступательной парой (рис. 2.6).

Применим рассмотренную выше методику (см. табл. 2.1) для определения характерных точек кинематических пар и видов их относительных движений. Полученные результаты и записанные на их основе векторные уравнения представим в табл. 2.6.

Таблица 2.6

I	J	Вид	Уравнения для точки $C_2$	Объединенные уравнения
$C_2$	$B_1(B_2)$	1	$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C_2B}$ $\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C_2B}^n + \vec{a}_{C_2B}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{C_2B}}{\perp CB} = \frac{\vec{V}_{C_2}}{=0} + \frac{\vec{V}_{C_2C_3}}{\parallel CB}$
	$C_3(C_0)$	2	$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_3} + \vec{V}_{C_2C_3}$ $\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_3} + \vec{a}_{C_3C_2}^{\text{кор}} + \vec{a}_{C_3C_2}^{\text{отн}}$	$\frac{\vec{a}_B}{\parallel BA} + \frac{\vec{a}_{C_2B}^n}{\parallel CB} + \frac{\vec{a}_{C_2B}^\tau}{\perp CB} =$ $= \frac{\vec{a}_{C_3}}{=0} + \frac{\vec{a}_{C_3C_2}^{\text{кор}}}{\perp CB} + \frac{\vec{a}_{C_3C_2}^{\text{отн}}}{\parallel CB}$

Решим графически векторное уравнение для скорости.

Величину и направление вектора скорости  $V_B$ , м/с, определим как для точки, принадлежащей входному звену (первый подход к определению скорости  $V_j$ ):

$$\text{величина } -V_B = \omega_1 \cdot L_{AB};$$

направление – перпендикулярно кривошпилю  $AB$  в сторону  $\omega_1$ .

Изобразим вектор скорости на чертеже. Из произвольно выбранного полюса «р» плана скоростей проводим линию, перпендикулярную звену  $AB$  с учетом направления  $\omega_1$ . На проведенном перпендикуляре откладываем произвольный отрезок  $pb$ , мм, изображающий на плане вектор  $V_B$ . Определяем масштабный коэффициент  $\mu_V$ , м·с<sup>-1</sup>·мм<sup>-1</sup>, в котором изображен вектор  $V_B$ :

$$\mu_V = \frac{V_B}{pb}.$$

Дальнейшие построения ведем в этом масштабе.

Переходим ко второму вектору ( $V_{C2B}$ ) левой части уравнения. Известна только линия, вдоль которой он направлен - перпендикуляр  $CB$ . Поэтому из точки « $b$ » плана проводим прямую перпендикулярную  $CB$ .

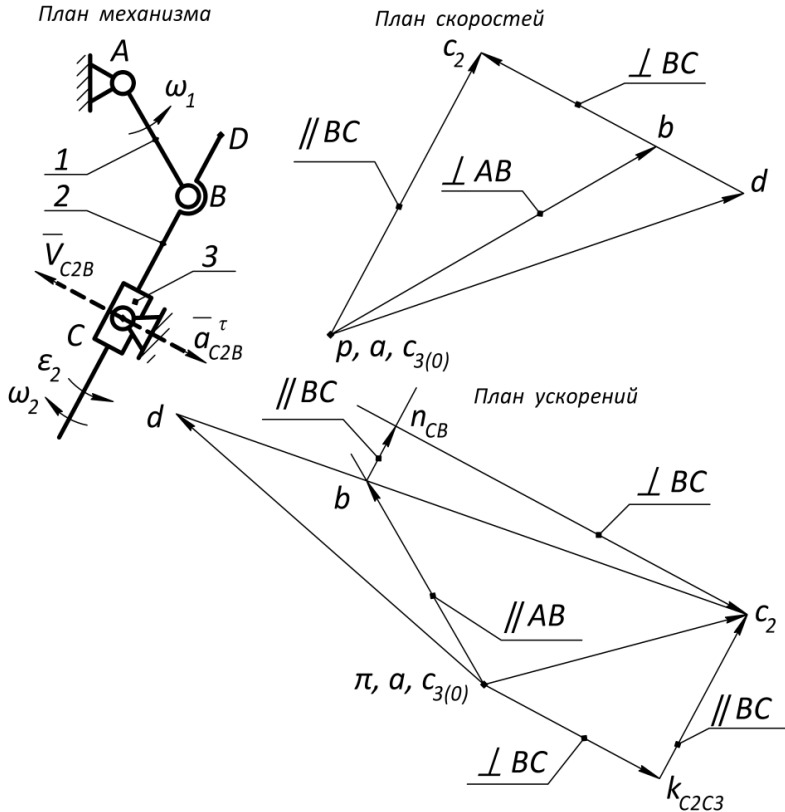


Рис. 2.6

Переходим к графическому изображению правой части векторного уравнения.

Скорость точки  $C_3(C_0)$  равна нулю, так как точка принадлежит неподвижному звену – стойке (второй подход к определению скорости  $V_J$ ). Следовательно, вектор  $V_{C3}$  выродится на плане скоростей в точку « $c_{3(0)}$ », совпадающую с полюсом плана « $p$ ».

Переходим ко второму вектору ( $V_{C_2C_3}$ ) левой части уравнения. Известна только линия, вдоль которой он направлен - параллель  $CB$ . Поэтому из точки « $c_{3(0)}$ » плана проводим прямую параллельную  $CB$ .

Место пересечения прямых, соответствующих направлению векторов  $V_{C_2B}$  и  $V_{C_2C_3}$ , определяет на плане положение точки « $c_2$ ». На этом построение плана скоростей завершено.

Обозначим на кулисе 2 произвольную точку  $D$  и определим ее скорость  $V_{D_2}$ . Для нахождения положения точки « $d_2$ » на плане скоростей воспользуемся *теоремой подобия*.

На звене 2 располагаются также точки  $B$  и  $C$ , являющиеся характерными точками кинематических пар, которые уже обозначены на построенном плане скоростей - точки « $b$ » и « $c_2$ ». На звене они лежат на прямой в такой последовательности -  $C$  потом  $B$  и далее  $D$ . Следовательно, на плане скоростей одноименные им точки также должны лежать на одной прямой в той же последовательности - « $c_2$ » потом « $b$ » и далее « $d_2$ ». Длину отрезка  $bd_2$  определим из пропорции, записанной из свойства подобных фигур:

$$\frac{bd_2}{bc_2} = \frac{BD}{BC},$$

откуда

$$bd_2 = bc_2 \frac{BD}{BC}.$$

Отметим, что длина отрезка  $bc_2$  измеряется с плана скоростей, а длины  $BD$  и  $BC$  с плана механизма.

Положение точки « $d_2$ » на плане определится на продолжении прямой, соединяющей точки « $c_2$ » и « $b$ » плана скоростей на рассчитанном расстоянии  $bd_2$  (мм) от точки « $b$ ». Соединив точку « $d_2$ » с полюсом, получим вектор  $V_{D_2}$  на плане.

Численные значения неизвестных по величине скоростей (м/с) определим, умножив длины соответствующих им векторов (мм) на масштабный коэффициент  $\mu_V$ :

$$V_{C_2B} = bc_2 \cdot \mu_V; \quad V_{C_2C_3} = c_3 c_2 \cdot \mu_V; \quad V_{C_2} = pc_2 \cdot \mu_V; \quad V_{D_2} = pd_2 \cdot \mu_V.$$

Угловую скорость кулисы 2 определим через относительную скорость любых двух точек, принадлежащих ей, например:

$$\omega_2 = \frac{V_{C2B}}{L_{CB}},$$

где  $L_{CB}$  – расстояние между выбранными точками ( $L_{CB} = CB \cdot \mu_L$ ;  $CB$ , мм, измеряется с плана механизма, а  $\mu_L$ , м/мм, – масштабный коэффициент плана механизма).

Направление угловой скорости кулисы ( $\omega_2$ ) определяем следующим образом: находим на построенном плане скоростей вектор относительной скорости  $V_{C2B}$ . На плане скоростей ему соответствует отрезок  $bc_2$ . Переносим этот вектор в соответствующую точку  $C$  звена 2, мысленно закрепляя при этом точку  $B$ . Направление вектора скорости  $V_{C2B}$ , с учетом закрепления точки  $B$ , определяет направление вращения звена 2 – по часовой стрелке (см. рис. 2.4).

Решим графически векторное уравнение для ускорений (см. табл. 2.6).

Величину и направление вектора ускорения  $a_B$  определим как для точки, принадлежащей входному звену (первый подход к определению скорости  $a_j$ ):

$$\text{величина } -a_B = \omega_1^2 \cdot L_{AB}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

направление – вдоль кривошипа  $AB$  к центру его вращения, т. е. от точки  $B$  к точке  $A$ .

Изобразим вектор ускорения на чертеже. Из произвольно выбранного полюса « $\pi$ » плана ускорений проводим линию, параллельную звену  $AB$  в направлении от точки  $B$  к  $A$ . На проведенной линии откладываем произвольный отрезок  $\pi b$ , мм, изображающий на плане вектор  $a_B$ . Определяем масштабный коэффициент  $\mu_a$ ,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{мм}^{-1}$ , в котором изображен вектор  $a_B$ :

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b}.$$

Дальнейшие построения ведем в этом масштабе  $\mu_a$ .

Переходим к изображению второго вектора -  $a_{C2B}^n$ . Рассчитаем его численное значение по формуле,

$$a_{C2B}^n = \frac{V_{C2B}^2}{L_{CB}}.$$

Рассчитаем длину отрезка  $bn_{C2B}$ , мм, изображающего вектор  $a_{C2B}^n$  на плане ускорений в выбранном масштабе  $\mu_a$ :

$$bn_{C2B} = \frac{a_{C2B}^n}{\mu_a}.$$

Строим вектор на плане: из точки « $b$ » проводим прямую параллельную кулисе  $CB$  в направлении от  $C$  к  $B$ , на которой откладываем отрезок рассчитанной длины  $bn_{C2B}$ .

Переходим к третьему вектору -  $a_{C2B}^{\tau}$ . Известна только линия, вдоль которой он направлен – перпендикуляр  $CB$ . Поэтому из точки « $n_{C2B}$ » проводим прямую перпендикулярную  $CB$ .

Изобразим графически векторы правой части уравнения.

Ускорение точки  $C_3(C_0)$  равно нулю, так как точка принадлежит неподвижному звену – стойке (второй подход к определению ускорения  $a_j$ ). Следовательно, вектор  $a_{C3}$  выродится на плане ускорений в точку « $c_{3(0)}$ », совпадающую с полюсом плана « $\pi$ ».

Далее, переходим ко второму вектору правой части решаемого уравнения -  $a_{C2C3}^{\text{кор.}}$ . Рассчитаем его численное значение,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ,

$$a_{C2C3}^{\text{кор.}} = 2\omega_2 V_{C2C3}.$$

Рассчитаем длину отрезка  $c_2 k_{C2C3}$ , мм, изображающего вектор  $a_{C2C3}^{\text{кор.}}$  на плане ускорений в выбранном масштабе  $\mu_a$ :

$$c_2 k_{C2C3} = \frac{a_{C2C3}^{\text{кор.}}}{\mu_a}.$$

Направление вектора ускорения кориолиса  $a_{C2C3}^{\text{кор.}}$  определяется по правилу Жуковского: вектор относительной скорости  $V_{C2C3}$  (на плане скоростей отрезок  $c_3 c_2$ ) поворачиваем на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости ( $\omega_2$ ) направляющей кулисы, т. е. в нашем случае по часовой стрелке (см. рис. 2.4). На проведенном в этом направлении из точки « $c_3$ » перпендикуляре к  $CB$  откладываем отрезок  $c_2 k_{C2C3}$  рассчитанной длины.

Наконец, переходим к последнему вектору -  $a_{C2C3}^{\text{отн.}}$ . Известна только линия, вдоль которой он направлен – параллель кулисе  $CB$ . Поэтому из точки « $k_{C2C3}$ » проводим прямую параллельную  $CB$ .

Место пересечения прямых, соответствующих направлению векторов  $a_{C2B}^{\tau}$  и  $a_{C2C3}^{\text{отн.}}$ , определяет на плане положение точки

«с<sub>2</sub>». На этом построение плана ускорений завершено.

Рассчитаем ускорение произвольно выбранной точки *D* кулисы 2. Для нахождения положения точки «*d*<sub>2</sub>» на плане ускорений также воспользуемся *теоремой подобия*. Рассуждения аналогичны приведенным для плана скоростей.

Положение точки «*d*<sub>2</sub>» на плане определится на продолжении прямой, соединяющей точки «с<sub>2</sub>» и «*b*» плана ускорений на рассчитанном расстоянии *bd*<sub>2</sub> (мм) от точки «*b*»:

$$bd_2 = bc_2 \frac{BD}{BC}.$$

Отметим, что длина отрезка *bc*<sub>2</sub>, мм, измеряется с плана ускорений, а длины *BD* и *BC*, мм, с плана механизма.

Соединив точку «*d*<sub>2</sub>» с полюсом «*π*», получим вектор *a*<sub>*D*2</sub> на плане.

Численные значения неизвестных по величине ускорений определим, умножив длины соответствующих им векторов на масштабный коэффициент *μ*<sub>*a*</sub>:

$$a_{C_2B}^T = n_{C_2B} c_2 \cdot \mu_a; \quad a_{C_2C_3}^{OTH} = k_{C_2C_3} c_2 \cdot \mu_a; \quad a_{C_2} = \pi c_2 \cdot \mu_a; \quad a_{D_2} = \pi d_2 \cdot \mu_a.$$

Угловое ускорение кулисы 2 (*ε*<sub>2</sub>, с<sup>-2</sup>) определим через касательную составляющую ускорения любых двух точек, принадлежащих ей, например:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{C_2B}^T}{L_{CB}}.$$

Направление углового ускорения кулисы определяем следующим образом: находим на построенном плане ускорений вектор касательного ускорения точки *C* относительно *B* - *a*<sub>*C*2*B*</sub><sup>T</sup>. На плане ускорений ему соответствует отрезок *n*<sub>*C*2*B*</sub>*c*<sub>2</sub>. Переносим этот вектор в соответствующую точку *C* звена 2, мысленно закрепляя при этом точку *B*. Направление вектора ускорения *a*<sub>*C*2*B*</sub><sup>T</sup>, с учетом закрепления точки *B*, определяет направление углового ускорения звена 2 – против часовой стрелки (см. рис. 2.4).

Разное направление *ω*<sub>2</sub> и *ε*<sub>2</sub> говорит о том, что кулиса 2 вращается замедленно.

На рис. 2.7-2.10 представлены результаты кинематического анализа для различных групп Ассура присоединенных к вращающемуся с постоянной угловой скоростью кривошипу.

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_{C3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C3B}$ $\vec{a}_{C3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C3B}^n + \vec{a}_{C3B}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{C3B}}{\perp BC} = \frac{\vec{V}_{C0}}{=0} + \frac{\vec{V}_{C3C0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\vec{V}_{C3} = \vec{V}_{C0} + \vec{V}_{C3C0}$ $\vec{a}_{C3} = \vec{a}_D + \vec{a}_{C3C0}^{кор} + \vec{a}_{C3C0}^{отн}$	$\frac{\vec{a}_B}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{C3B}^n}{\parallel BC} + \frac{\vec{a}_{C3B}^\tau}{\perp BC} = \frac{\vec{a}_D}{=0} + \frac{\vec{a}_{C3C0}^{кор}}{=0} + \frac{\vec{a}_{C3C0}^{отн}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$\omega_2 = \frac{V_{C3B}}{L_{BC}}, \quad a_{C3B}^n = \frac{V_{C3B}^2}{L_{CB}}, \quad a_{C3C0}^{кор} = 2\omega_0 V_{C3C0} = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{C3B}^\tau}{L_{BC}}$	

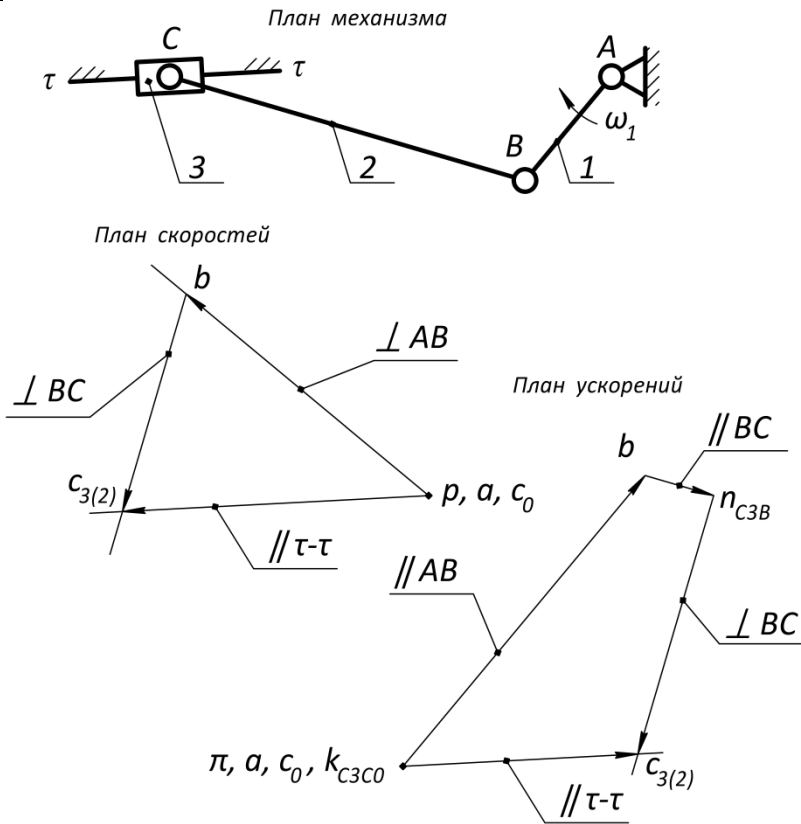


Рис. 2.7

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$ $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$	$\frac{\vec{V}_B}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{CB}}{\perp BC} = \frac{\vec{V}_D}{=0} + \frac{\vec{V}_{CD}}{\perp CD}$
$\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}$ $\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^\tau$	$\frac{\vec{a}_B}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{CB}^n}{\parallel BC} + \frac{\vec{a}_{CB}^\tau}{\perp BC} = \frac{\vec{a}_D}{=0} + \frac{\vec{a}_{CD}^n}{\parallel DC} + \frac{\vec{a}_{CD}^\tau}{\perp DC}$
Формулы для расчета параметров	
$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{L_{BC}}, \quad \omega_3 = \frac{V_{CD}}{L_{DC}}, \quad a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{L_{CB}}, \quad a_{CD}^n = \frac{V_{CD}^2}{L_{CD}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{L_{BC}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{L_{DC}}$	

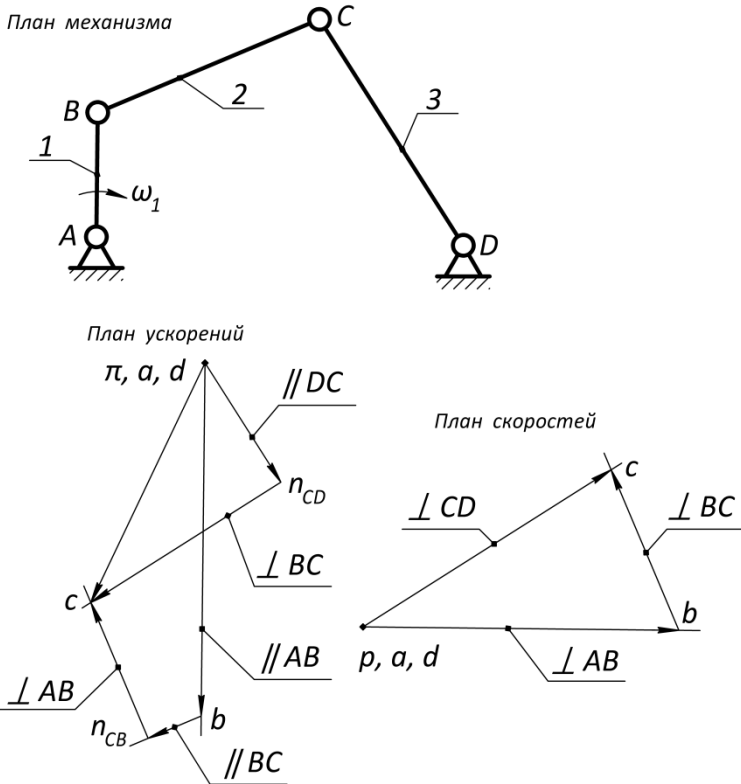


Рис. 2.8



Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B2} + \bar{V}_{B3B2}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B2} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}$	$\frac{\bar{V}_{B2}}{\perp AB} + \frac{\bar{V}_{B3B2}}{\parallel BC} = \frac{\bar{V}_{B0}}{=0} + \frac{\bar{V}_{B3B0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B0} + \bar{V}_{B3B0}$ $\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B0} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}} + \bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}$	$\frac{\bar{a}_{B2}}{\parallel AB} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B2}^{\text{отн}}}{\parallel BC} = \frac{\bar{a}_{B0}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\bar{a}_{B3B0}^{\text{отн}}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$a_{B3B2}^{\text{кор}} = 2\omega_3 V_{B3B2} = 0, \quad a_{B3B0}^{\text{кор}} = 2\omega_0 V_{B3B0} = 0$	

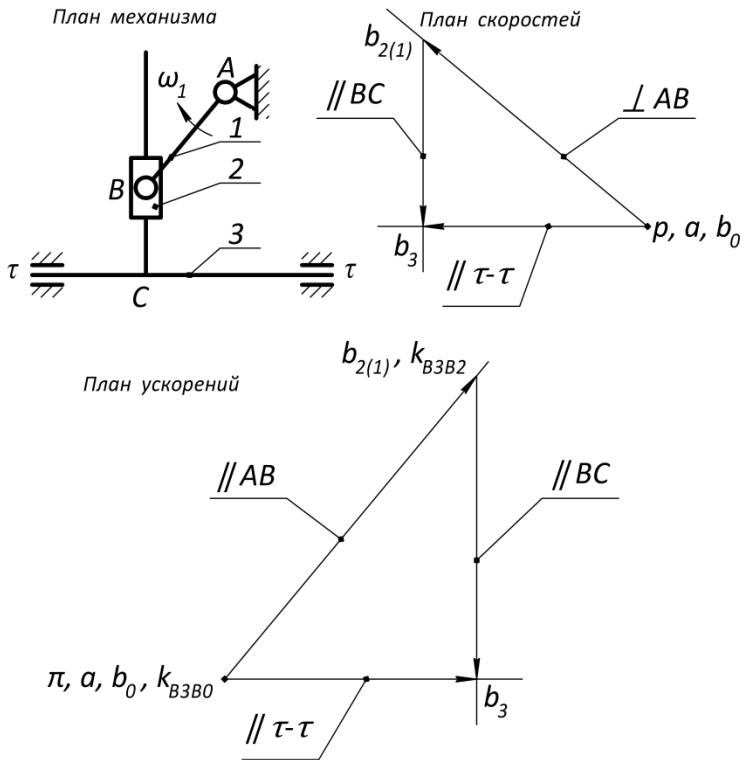


Рис. 2.9

Уравнения для точки I	Объединенные уравнения
$\vec{V}_{B3} = \vec{V}_{B2} + \vec{V}_{B3B2}$ $\vec{a}_{B3} = \vec{a}_{B2} + \vec{a}_{B3B2}^{\text{кор}} + \vec{a}_{B3B2}^{\text{отн}}$	$\frac{\vec{V}_{B2}}{\perp AB} + \frac{\vec{V}_{B3B2}}{\parallel AB} = \frac{\vec{V}_{B0}}{=0} + \frac{\vec{V}_{B3B0}}{\parallel \tau-\tau}$
$\vec{V}_{B3} = \vec{V}_{B0} + \vec{V}_{B3B0}$ $\vec{a}_{B3} = \vec{a}_{B0} + \vec{a}_{B3B0}^{\text{кор}} + \vec{a}_{B3B0}^{\text{отн}}$	$\frac{\vec{a}_{B2}}{\parallel AB} + \frac{\vec{a}_{B3B2}^{\text{кор}}}{\perp AB} + \frac{\vec{a}_{B3B2}^{\text{отн}}}{\parallel AB} = \frac{\vec{a}_{B0}}{=0} + \frac{\vec{a}_{B3B0}^{\text{кор}}}{=0} + \frac{\vec{a}_{B3B0}^{\text{отн}}}{\parallel \tau-\tau}$
Формулы для расчета параметров	
$a_{B3B2}^{\text{кор}} = 2\omega_1 V_{B3B2}, \quad a_{B3B0}^{\text{кор}} = 2\omega_0 V_{B3B0} = 0$	

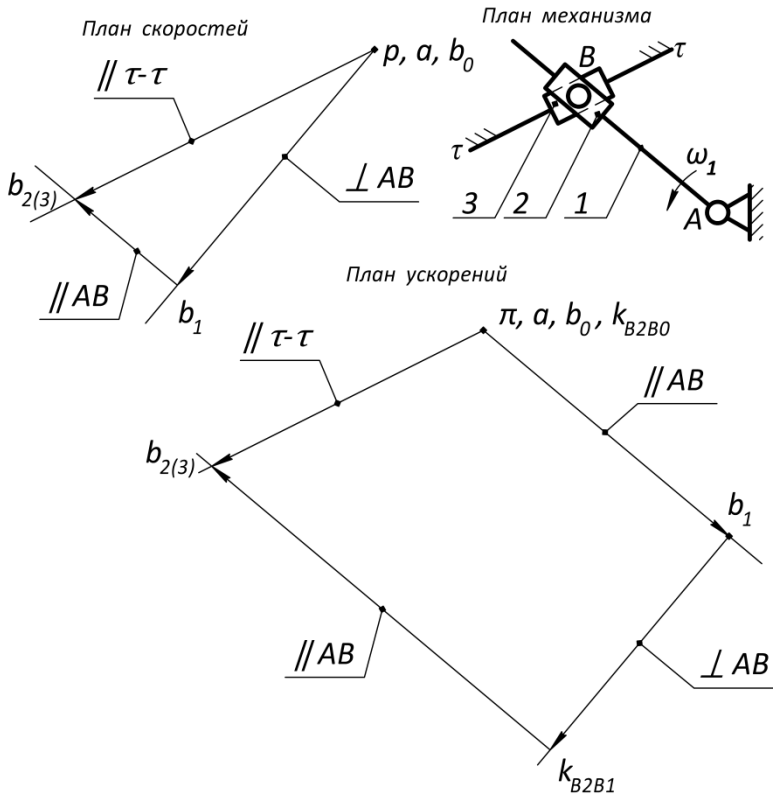


Рис. 2.10