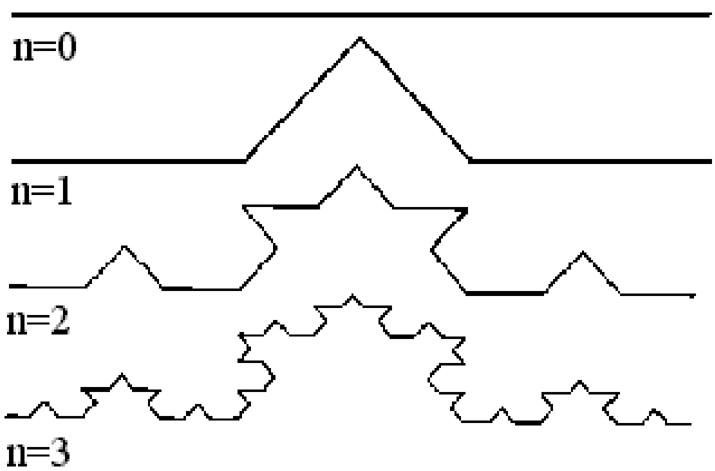
Тема 6. Фрактальные изображения

Понятия фракталы, фрактальная геометрия и фрактальная графика, появившиеся в конце 70-х, сегодня прочно вошли в обиход математиков и компьютерных художников. Слово «фрактал» образовано от латинского «fractus» и в переводе означает «состояние из фрагментов». Фрактал можно определить как объект довольно сложной формы, полученный в результате выполнения простого итерационного цикла. Одним из его основных свойств является само подобие, т.е. отдельные элементы похожи по форме на весь фрактал в целом. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале. Фракталы приходят на помощь, если требуется с помощью нескольких коэффициентов задать линии и поверхности очень сложной формы

В настоящее время алгоритмы, используемые для генерации изображений фрактальной графики, находят применение и в традиционных видах компьютерной графики: растровой и векторной. Например, в CorelDRAW эти алгоритмы используются для создания текстурных заливок. В относительно недавно появившейся на рынке программного обеспечения растровой программе PhotoDraw 2000 фирмы Microsoft кроме стандартных градиентных заливок контуров можно сгенерировать фрактальный узор и воспользоваться им в качестве заливки. С точки зрения машинной графики фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически благодаря фрактальной геометрии найден способ эффективной реализации сложных неевклидовых объектов, конечные образы которых весьма похожи на природные объекты.

Геометрические фракталы – наиболее наглядные фракталы. В двухмерном случае их получают с помощью изображения некоторой ломаной прямой (или поверхности в трехмерном случае), называемой *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.

Рассмотрим один из таких фрактальных объектов – триадную кривую Кох.



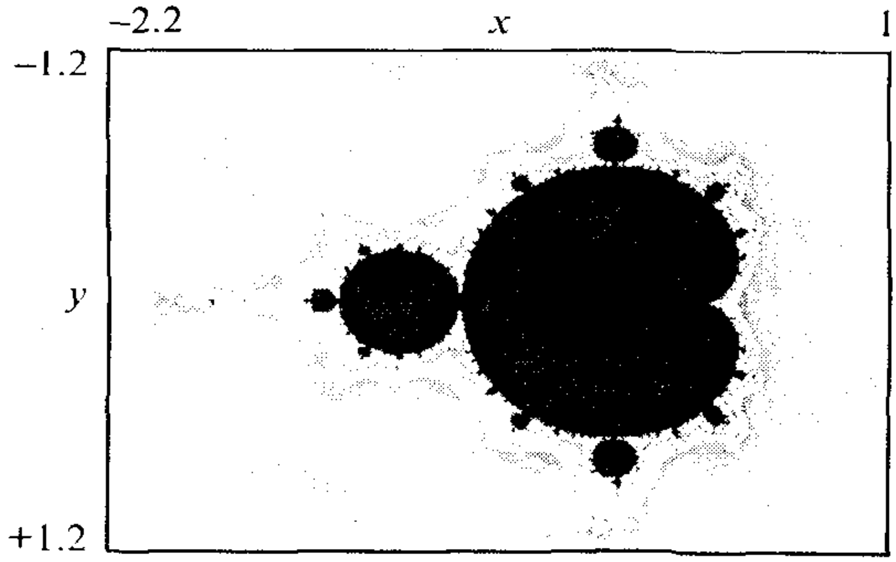
Построение данного фрактала начинается с отрезка единичной длины – это 0-е поколение кривой Кох. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент, обозначенный на рисунке через $n=1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Кох. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по 1/3. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия – каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент.

Для изображения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n-го поколения при любом конечном n называется *предфракталом*.

Алгебраические фракталы – самая крупная группа фракталов, получаемая их с помощью моделей нелинейных процессов в n-мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: *фазовый портрет*, *установившийся процесс*, *аттрактор* и т.д.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на *области притяжения* аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить *цветовой фазовый портрет* этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами.

Рассмотрим алгоритм построения фрактала Мандельброта.



Для создания этого фрактала для каждой точки его изображения необходимо выполнить цикл итераций по формуле:

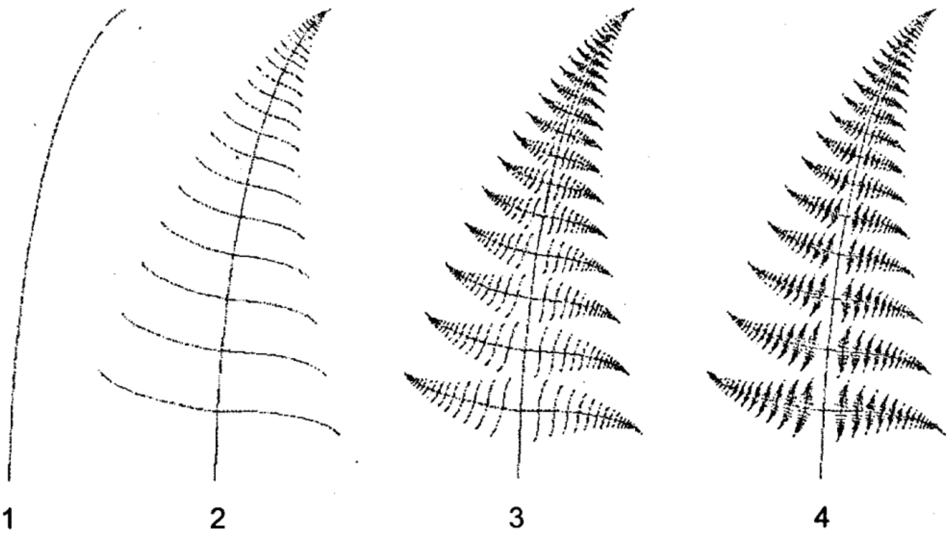
$$Z_{k+1} = Z_k^2 + Z_0$$
$$k = 0, 1, ..., n$$
$$Z_k = X_k + iY_k$$

где Z_k – комплексные числа, X_0 и Y_0 – координаты точки изображения.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока Z_k не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке (0,0), (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например, 200-500) Z_k сойдется к какой-нибудь точке окружности.

В зависимости от количества итераций, в течении которых Z_k оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки (если Z_k остается внутри окружности в течение достаточно большого количества итераций, то итерационный процесс прекращается и эта точка растра окрашивается в черный цвет).

Стохастические фракталы – фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.



Существуют и другие классификации фракталов, например, деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).