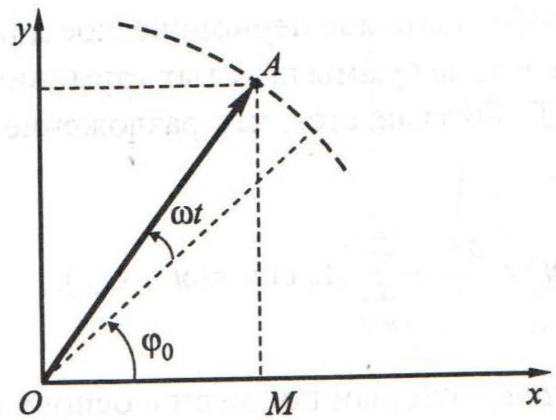
Тема 2. Сложение колебаний

1. **Методы сложения колебаний**
2. **Сложение одинаково направленных колебаний**
   - **сложение одинаково направленных колебаний с равными периодами**
   - **сложение одинаково направленных колебаний с близкими периодами. Биения**
   - **сложение одинаково направленных колебаний с кратными периодами**
3. **Сложение перпендикулярных колебаний**
   - **сложение перпендикулярных колебаний с равными периодами**
   - **сложение перпендикулярных колебаний с кратными периодами. Фигуры Лиссажу.**
4. **Сложное колебание и его гармонический спектр**

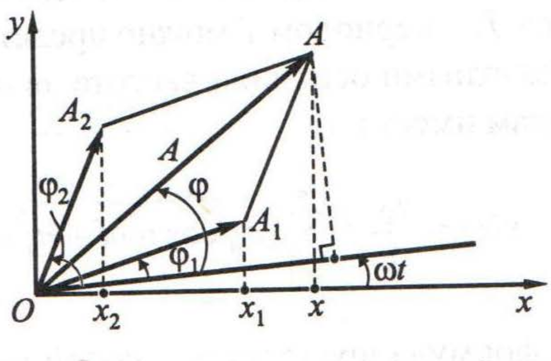
1. Методы сложения колебаний

Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующего колебания системы, участвующей одновременно в нескольких колебаниях. Различают два случая сложения колебаний: сложение одинаково направленных колебаний и сложение перпендикулярных колебаний. Методы сложения колебаний можно условно разделить на: векторный, аналитический и графический.

Векторный метод сложения колебаний основан на векторном представлении колебаний (метод векторных диаграмм). Гармоническое колебание $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ удобно представить с помощью векторной диаграммы.



векторная диаграмма гармонического колебания $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

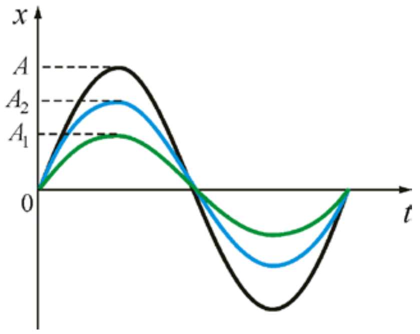


Сложение двух колебаний методом векторных диаграмм

Векторным способом можно сложить несколько колебаний:

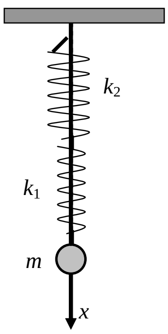
Аналитический метод сложения колебаний сводится к нахождению аналитического уравнения, определяющего результирующее колебание, получающееся в результате сложения колебаний. Например, складываются два колебания $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{0_2})$. Результирующее колебание равно их сумме $x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$. Чтобы найти уравнение результирующего колебания необходимо прибегнуть к тригонометрическим преобразованиям.

Графический метод сложения колебаний основан на сложении графиков зависимостей $x_1 = f(t)$ и $x_2 = f(t)$. Пример такого графического сложения колебаний приведен на рисунке.



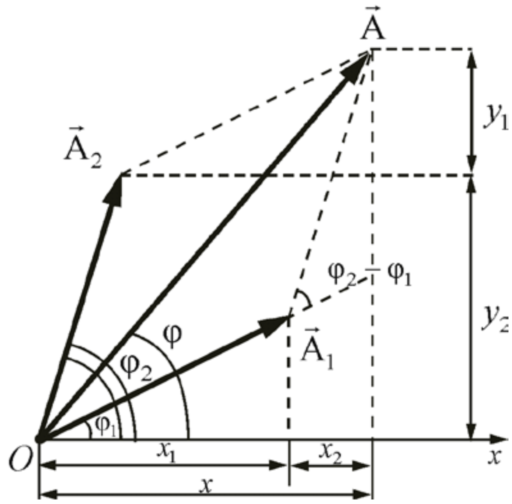
2. Сложение одинаково направленных колебаний

Материальная точка (колебательная система) может одновременно участвовать в нескольких колебаниях, направленных одинаково. Необходимо найти уравнение и траекторию результирующего движения – следует сложить колебания. Наиболее просто выполняется сложение двух гармонических колебаний.



Механической моделью системы, участвующей в двух одинаково направленных колебаниях может служить тело, прикрепленное к двум пружинам, как показано на рисунке. Тогда, тело участвует одновременно в колебании $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$ и в колебании $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$. Уравнение результирующего колебания $x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$.

• сложение одинаково направленных колебаний с равными периодами



Пусть точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях с равными периодами $T_1 = T_2$ или $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда уравнения колебаний $x_1 = A_1 \cos(\omega\, t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega\, t + \varphi_2)$, а результирующее колебание $x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Два колебания называются **когерентными** , если они согласованно протекают во времени, так что их разность фаз остается постоянной. Следовательно, два колебания с равными периодами $T_1 = T_2$ или $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, для которых $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ - называются ***когерентными***.

Воспользуемся методом векторных диаграмм и выполним сложение векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Поскольку проекция суммы векторов $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ равна сумме проекций, то проекция вектора $\vec{A}$ равна сумме проекций x_1 и x_2 векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Поэтому результирующее колебание $x = x_1 + x_2$ будет совершаться с частотой ω и амплитудой *A*, т.е. по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

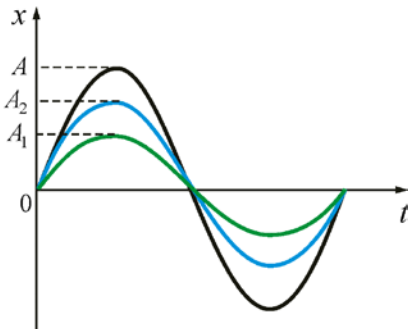
Амплитуду результирующего колебания определяем по теореме косинусов: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

Для начальной фазы результирующего колебания, как видно из рисунка, получим: $\text{tg}\phi = \dfrac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$.

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

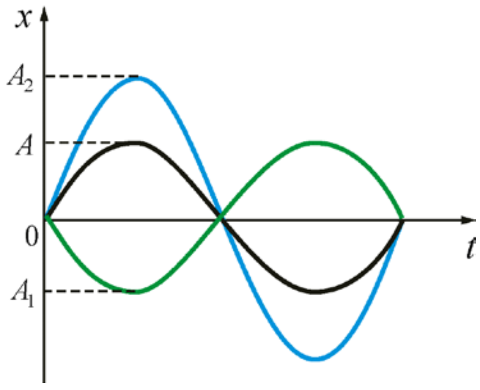
Проанализируем полученные выражения.

Амплитуду результирующего колебания определили по теореме косинусов: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. Амплитуда *A* результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$. Возможные значения *A* лежат в диапазоне $|A_2 - A_1| \le A \le A_2 + A_1$ (амплитуда не может быть отрицательной).



Если разность фаз складываемых колебаний равна нулю или четному числу π, то есть $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Тогда $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$ и $A = A_1 + A_2$, так как $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания *A* равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания *синфазны*).

Если разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу π, то есть $\phi_2 - \phi_1 = \pi(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Тогда $\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$. Отсюда $A = |A_2 - A_1|$. Тогда амплитуда результирующего колебания *A* равная разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в *противофазе*).



Если разность фаз складываемых колебаний изменяется во времени произвольным образом:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos[\omega_1 t + \phi_1(t)] \\ x_2 = A_2\cos[\omega_2 t + \phi_2(t)] \end{cases}$$

То амплитуда результирующего колебания будет изменяться в соответствии с величиной $\cos(\phi_2 - \phi_1)$ и результирующее колебание не будет гармоническим.

• сложение одинаково направленных колебаний с близкими периодами. Биения

Пусть точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях с близкими периодами $T_2 = T_1 + \Delta T$ или $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega << \omega_1$. Тогда уравнения колебаний $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, а результирующее колебание $x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

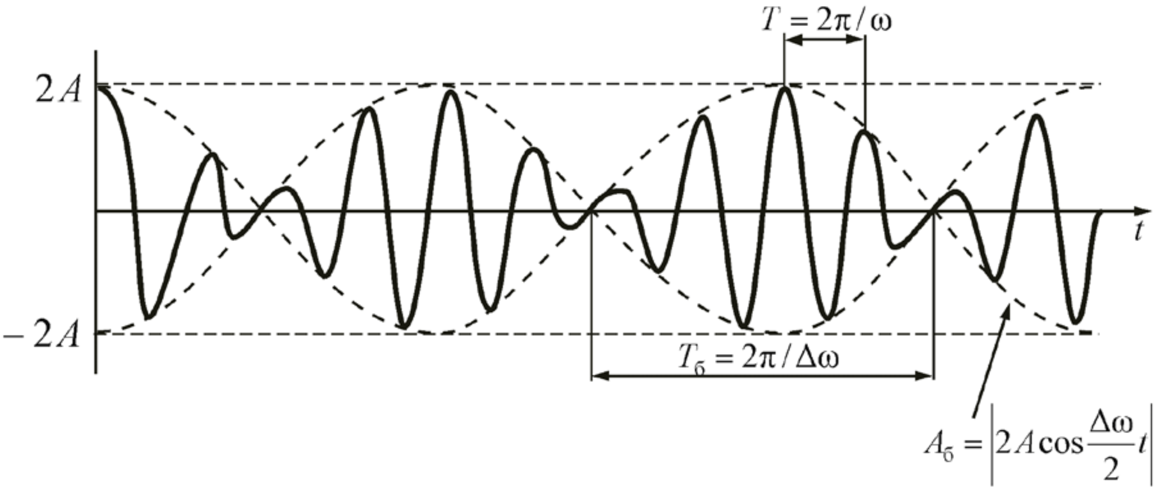
Воспользуемся методом векторных диаграмм и определим амплитуду результирующего колебания.

Для наглядности положим, что $\varphi_1=\varphi_2=0$. Тогда уравнения складываемых колебаний имеют вид: $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t)$. Изобразим эти колебания на векторной диаграмме в момент времени *t*. Тогда для этого момента времени результирующая амплитуда по теореме косинусов равна: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 t - \omega_1 t)}$. Из полученного выражения, очевидно, что амплитуда результирующего колебания зависит от времени, т.е. $A = f(t) \neq const$, следовательно, результирующее колебание не гармоническое.

Представляет интерес выяснить закон изменения амплитуды результирующего колебания со временем. Для этого рассмотрим частный случай, когда $A_1 = A_2 = A_0$, тогда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 t - \omega_1 t)} = \sqrt{2A_0^2[1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]} = 2A_0\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t,$$

учитывая, что $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, можно записать $A = 2A_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ - амплитуда результирующего колебания изменяется со временем по закону косинуса. *Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами*, называются ***биениями.*** Следовательно, амплитуда биений изменяется со временем по закону $A = A_б = 2A_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ Можно определить период изменения результирующей амплитуды (период биений): $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega/2} = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$



Определим теперь уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения одинаково направленных колебаний с близкими периодами. Воспользуемся аналитическим методом сложения колебаний. Для упрощения тригонометрических преобразований, рассмотрим частный случай, пусть складываются колебания $x_1 = A_0\cos(\omega\ t)$ и $x_2 = A_0\cos(\omega + \Delta\omega)t$, тогда результирующее колебание $x = x_1 + x_2 = A_0\cos\omega t + A_0\cos(\omega + \Delta\omega)t$, после небольших тригонометрических преобразований, получим: $x = A_0[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t] = 2A_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\omega_{ср}t$, где $\omega_{ср} = \frac{\omega + \omega + \Delta\omega}{2} \approx \omega$. Если учесть ранее полученное выражение для амплитуды результирующего колебания $A = A_б = 2A_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$, то уравнение результирующего колебания можно записать $x = A(t)\cos\omega t$ - данное колебание периодическое, но не гармоническое. Особенность этого колебания в том, что его амплитуда периодически изменяется со временем.

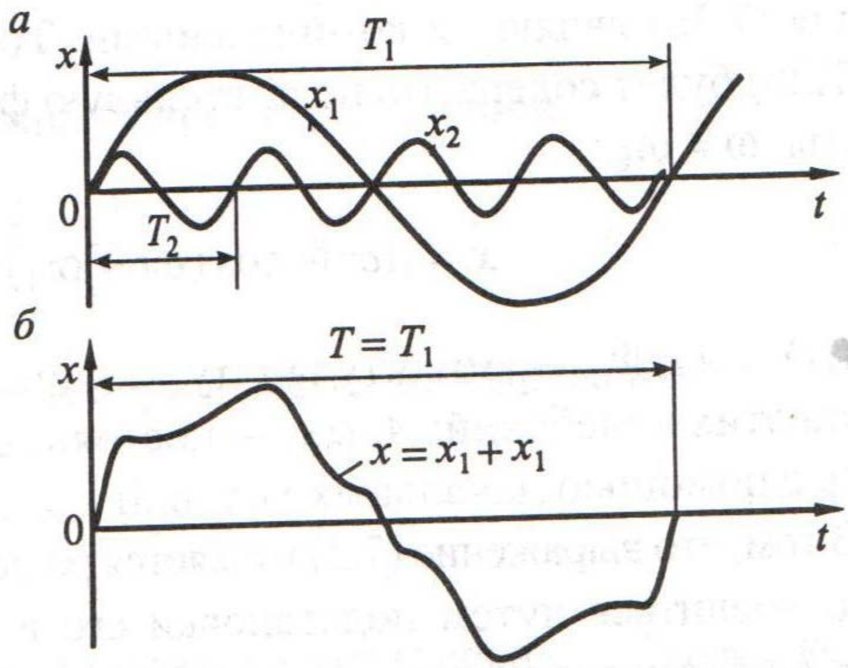
- **сложение одинаково направленных колебаний с кратными периодами**

Пусть точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях с кратными периодами $T_2 = nT_1$ или $\omega_2 = n\omega_1$,где n=2,3.4,….. Тогда уравнения колебаний $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, а результирующее колебание $x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Сложить такие колебания векторным методом или аналитически довольно проблематично, поэтому чаще всего используется графический способ.

Например, сложим аналитически два колебания, частоты которых отличаются в 2 раза $\omega_2 = 2\omega_1$, а амплитуды одинаковы $A_1 = A_2 = A_0$. Тогда

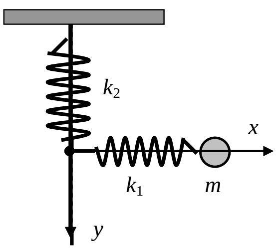
$$x = A_0\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_0\cos(2\omega_1 t + \varphi_2) = 2A_0\cos\left(\frac{\omega}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{3\omega}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\right).$$

Из анализа полученного выражения можно сделать вывод, что результирующее колебание не гармоническое, однако это периодическое колебание. Пример такого колебания, получающегося в результате сложения одинаково направленных колебаний с кратными периодами, приведен на рисунке.



5. Сложение перпендикулярных колебаний

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях одно направлено по оси OX, другое по оси OY. Колебания описываются уравнениями $x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Результирующее колебание равно сумме колебаний по оси OX и оси OY. Механической моделью системы, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях может служить тело, прикрепленное к двум пружинам, как показано на рисунке. Такая система представляет собой двумерный осциллятор, который описывается уравнениями $x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.



• сложение перпендикулярных колебаний с равными периодами

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях одно направлено по оси OX, другое по оси OY. Периоды колебаний $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ равны. Колебания описываются уравнениями $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. результирующее колебание равно сумме колебаний по оси OX и оси OY.

Сложим колебания аналитическим методом. Для упрощения решения выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна 0. Тогда φ– разность (сдвиг) фаз складываемых колебаний. Для получения траектории движения материальной точки решим два уравнения совместно, исключая время. Кроме того воспользуемся тригонометрическими преобразованиями в виде $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\,; \;\; \frac{y}{A_2}\cos\omega t\cdot\cos\varphi - \sin\omega t\cdot\sin\varphi\,; \quad \sin\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}$$

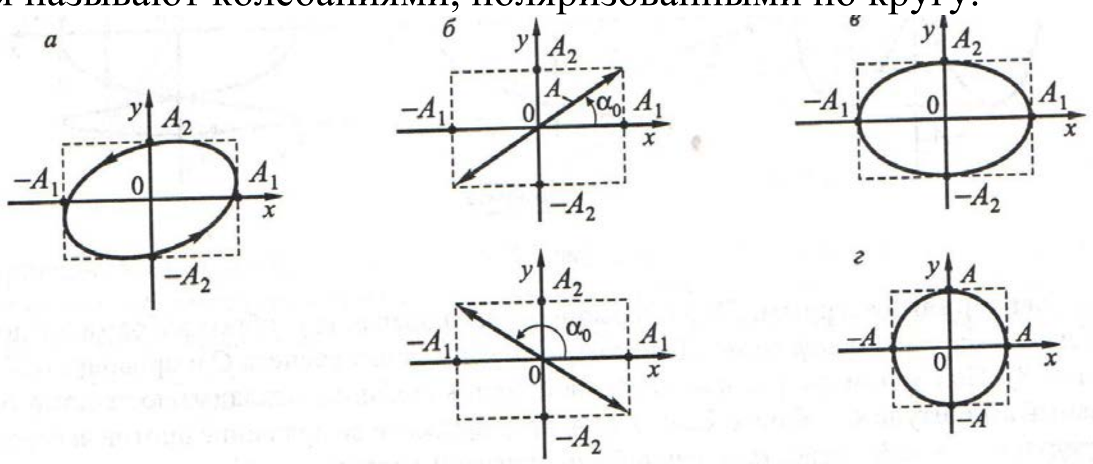
После несложных преобразований получим уравнение траектории результирующего движения:

$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$. Траектория результирующего движения представляет собой в общем случае эллипс. Колебания, описываемые подобным уравнением, называют эллиптически поляризованными.

Проанализируем полученное выражение $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$.
Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $\varphi=n\pi$ (n=0,±1,±2,±3,….). В этом случае эллипс вырождается в отрезок прямой $y=\pm\frac{A_2}{A_1}x$, где знак «плюс» соответствует четным, а знак «минус» - нечетным значениям числа *n*. Результирующее движение является линейным гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$. Колебания такого типа часто называют линейно-поляризованными.

2. Пусть φ=(2n+1)π/2 (n=0,±1,±2,±3,….). Уравнение $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$ примет вид $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$. Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а полуоси равны соответствующим амплитудам (эллиптически поляризованные колебания). Если $A_1=A_2$, то эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называют колебаниями, поляризованными по кругу.



- **сложение перпендикулярных колебаний с кратными периодами. Фигуры Лиссажу.**

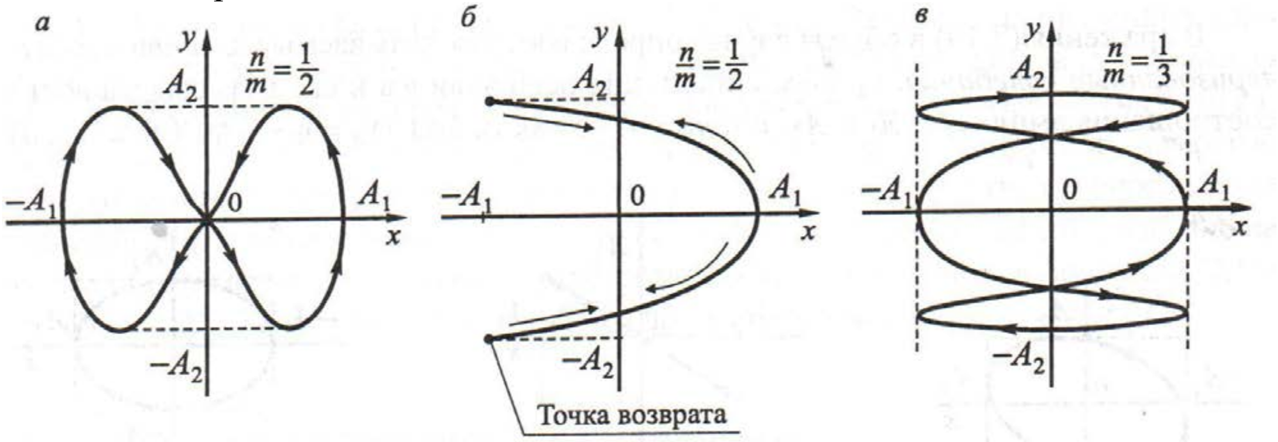
Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях одно направлено по оси OX, другое по оси OY. Колебания описываются уравнениями $x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. результирующее колебание равно сумме колебаний по оси OX и оси OY. Если частоты двух складываемых колебаний не одинаковы, но кратны друг другу ($x = A_1\cos m\omega t$, а $y = A_2\cos(n\omega t + \varphi)$), то траектория результирующего движения имеет в общем случае вид достаточно сложных замкнутых кривых, которые называют фигурами Лиссажу. Приведем пример простейшей замкнутой кривой (фигура Лиссажу), получающаяся при сложении перпендикулярных колебаний с частотами $\omega_1=\omega$, а $\omega_2=2\omega$. Для простоты примем $\varphi=0$. Тогда складываются два перпендикулярных колебания:

$x = A_1\cos\omega t$ $y = A_2\cos 2\omega t$. После несложных преобразований, получим:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t; \quad \frac{y}{A_2}\cos 2\omega t = 2\cos^2\omega t - 1 = \frac{2x^2}{A_1^2} - 1.$$

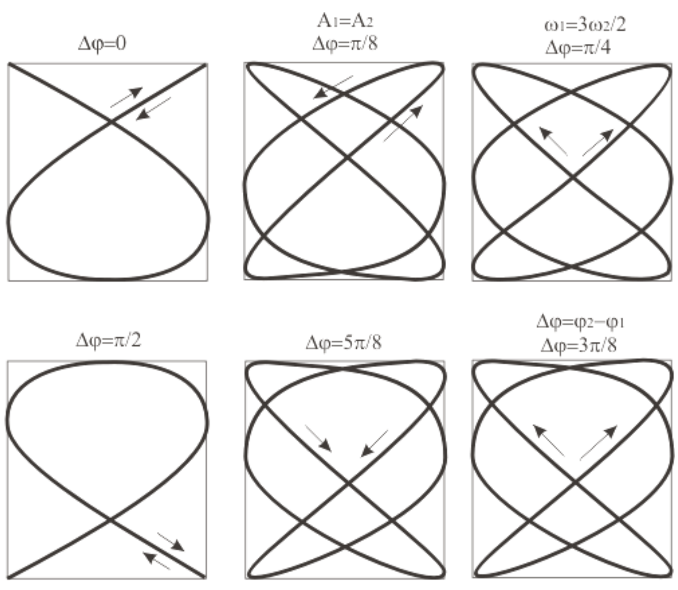
Или $y = \frac{2A_2}{A_1^2}x^2 - A_2$ - уравнение параболы. Таким образом, траектория движения материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях – парабола, график которой приведен на рисунке.

Если складывать колебаний $x = A_1\cos\omega t$ $y = A_2\cos(2\omega t + \frac{\pi}{2})$, то фигура имеет вид «восьмерки».



Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу по имени французского физика Жюля Лиссажу (1822-1880), занимавшегося изучением колебаний. Им разработан в 1855 году метод исследования сложных колебаний при помощи фигур Лиссажу.

Примеры различных фигур Лис-



сажу.

6. Сложное колебание и его гармонический спектр

Сложение колебаний приводит к более сложным формам движения. Для практических целей бывает необходимо противоположное действие: разложение сложного колебания на простые, обычно гармонические колебания.

Французский ученый Ж. Фурье (1768-1830) показал, что периодическая функция любой сложности может быть представлена в виде суммы гармонических функций. Такое разложение периодической функции на гармонические и, следовательно, разложение различных периодических процессов на гармонические колебания называется гармоническим анализом или разложением в ряд Фурье.

Сложное периодическое движение можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами . кратными основной циклической частоте ω:

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\omega t+\varphi_n\right).$$

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с частотами ω, 2ω, 3ω и т.д. называются первой(основной), второй, третьей и т.д. гармониками сложного периодического колебания. Совокупность этих гармоник образует спектр колебания. Состав спектра зависит от вида функции, описывающей сложное колебание.

Совокупность гармонических колебаний, на которые разложено сложное колебание, называется гармоническим спектром сложного колебания. Гармонический спектр удобно представлять как набор частот (или круговых частот) отдельных гармоник совместно с соответствующими им амплитудами. Периодические колебания имеют дискретный (линейчатый) спектр частот. Непериодические колебания, как правило, имеют непрерывный (сплошной) спектр частот.

Рисунок 1. Пример сложения колебаний

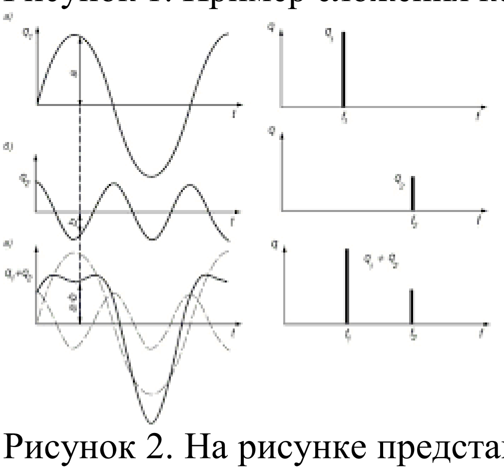
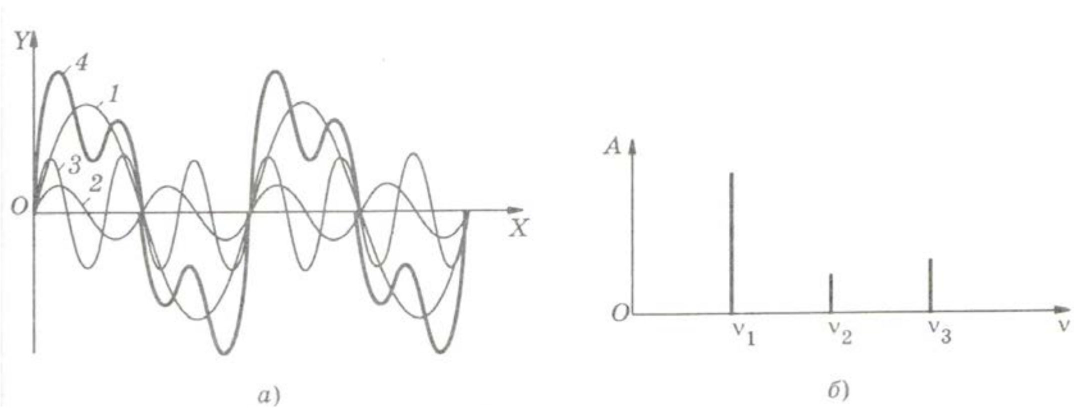


Рисунок 2. На рисунке представлено сложное колебание и его гармонический спектр.



а) б)