

*Ф.Харари*  
**ТЕОРИЯ ГРАФОВ**

М.: Мир, 1973, 300 стр.

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее, — экономику, социологию, лингвистику и др. Давно известии тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. Особенно важная взаимосвязь существует между теорией графов и теоретической кибернетикой (особенно теорией автоматов, исследованием операций, теорией кодирования, теорией игр). Широко используется теория графов при решении различных задач на вычислительных машинах.

За последние годы тематика теории графов стала значительно разнообразней; резко увеличилось количество публикаций.

Предлагаемая книга написана одним из видных специалистов по дискретной математике. Несмотря на небольшой объем и конспективный характер изложения, книга достаточно полно освещает современное состояние теории графов. Она, безусловно, будет полезна студентам университетов и технических вузов и, несомненно, заинтересует широкие круги научных работников, занимающихся приложениями дискретной математики.

Предисловие редактора перевода	6
Введение	9
Глава 1. Открытие!	13
Задача о кёнигсбергских мостах	13
Электрические цепи	14
Химические изомеры	15
«Вокруг света»	16
Гипотеза четырех красок	17
Теория графов в двадцатом веке	18
Глава 2. Графы	21
Типы графов	21
Маршруты и связность	26
Степени	27
Задача Рамсея	28
Экстремальные графы	30
Графы пересечений	33
Операции над графами	35
Упражнения	38
Глава 3. Блоки	41
Точки сочленения, мосты и блоки	41
Графы блоков и графы точек сочленения	45
Упражнения	46

Глава 4. Деревья	48
Описание деревьев	48
Центры и центроиды	51
Деревья блоков и точек сочленения	53
Независимые циклы и коциклы	54
Матроиды	57
Упражнения	59
Глава 5. Связность	60
Связность и реберная связность	60
Графические варианты теоремы Менгера	64
Другие варианты теоремы Менгера	70
Упражнения	74
Глава 6. Разбиения	76
Упражнения	81
Глава 7. Обходы графов	83
Эйлеровы графы	83
Гамильтоновы графы	85
Упражнения	88
Глава 8. Реберные графы	91
Некоторые свойства реберных графов	91
Характеризация реберных графов	94
Специальные реберные графы	99
Реберные графы и обходы	101
Тотальные графы	103
Упражнения	104
Глава 9. Факторизация	106
1-факторизация	106
2-факторизация	111
Древесность	113
Упражнения	116
Глава 10. Покрытия	117
Покрытия и независимость	117
Критические вершины и ребра	120
Реберное ядро	122
Упражнения	124
Глава 11. Планарность	126
Плоские и планарные графы	126
Внешнепланарные графы	131
Теорема Понтрягина — Куратовского	133
Другие характеристики планарных графов	138
Род, толщина, крупность, число скрещиваний	141
Упражнения	148
Глава 12. Раскраски	151
Хроматическое число	152

Теорема о пяти красках	155
Гипотеза четырех красок	156
Теорема Хивуда о раскраске карт	162
Однозначно раскрашиваемые графы	164
Критические графы	167
Гомоморфизмы	169
Хроматический многочлен	172
Упражнения	175
Глава 13. Матрицы	178
Матрица смежностей	178
Матрица инциденций	180
Матрица циклов	183
Обзор дополнительных свойств матроидов	186
Упражнения	187
Глава 14. Группы	189
Группа автоморфизмов графа	193
Операции на группах подстановок	194
Группа графа-композиции	195
Графы с данной группой	198
Симметрические графы	201
Графы с более сильной симметрией	204
Упражнения	206
Глава 15. Перечисления	209
Помеченные графы	209
Теорема перечисления Пойа	211
Перечисление графов	216
Перечисление деревьев	219
Теорема перечисления степенной группы	224
Решенные и нерешенные задачи перечисления графов	225
Упражнения	230
Глава 16. Орграфы	232
Орграфы и соединимость	232
Ориентированная двойственность и бесконтурные орграфы	234
Орграфы и матрицы	237
Обзор по проблеме восстановления турниров	244
Упражнения	244
Приложение I. Диаграммы графов	248
Приложение II. Диаграммы орграфов	260
Приложение III. Диаграммы деревьев	266
Список литературы и именной указатель	268
Указатель обозначений	291
Предметный указатель	293

- циклов 55
- блок 41
- валентность вершины 27
- вершина графа 22, 126
- изолированная 28
- инцидентная ребру 22
- концевая 28
- критическая 121
- неподвижная 201
- орграфа 232
- периферическая 51
- центральная 51
- центроидная 52
- вершинная база 237
- вершины подобные 201
- смежные 22, 213
- вес вершины 52
- вес функции 213
- ветвь 56
- к вершине 52
- вихрь 187
- внешность цикла 134
- выпуклый полиэдр 130
- гипотеза Улама 25, 26, 48, 58, 202, 244
- Хадвигера 161, 162
- четырех красок 151, 156—162, 164, 167, 172
- гомоморфизм графа 169
- полный порядка  $l$  169
- элементарный 169
- гомоморфный образ графа 196
- граничный оператор 54
- грань 127
- внешняя 127
- внутренняя 127
- граф асимметрический 190
- ациклический 48
- базисный 132
- бесконечный 36
- блоков 45
- - и точек сочленения 53
- вершинно-критический 121
- вершинно-симметрический 201

- внешнепланарный 131
- - максимальный 131
- вполне несвязный 28
- гамильтонов 85
- геометрически двойственный 138
- Давида 29
- двудольный 31
- дополнительный 29
- интервалов 35
- клик 34
- комбинаторно двойственный 139
- критический 167
- кубический 28
- Леви 205, 206
- Мак-Джи 205
- направленный 23
- неразделимый 41
- несводимый 123
- однозначно раскрашиваемый 164
- одноциклический 58
- пересечений 33
- Петерсена 113
- планарный 127
- - максимальный 128
- плоский 127
- подразбиений 101
- полный 29
- граф полный двудольный 32
- -  $n$ -дольный 37
- полунесводимый 123
- помеченный 23
- произвольно гамильтонов 89
- - проходимый 89
- простой 197
- реберно-критический 121
- реберно-регулярный 202
- реберно-симметрический 201
- реберный 91, 94
- - итерированный 91
- регулярный 28
- самодополнительный 29
- сводимый 123
- симметрический 201
- составной 197

- тороидальный 142
- тотальный 103
- точек сочленения 45
- тривиальный 22
- Хивуда 204
- Эйлеров 83
- n-раскрашиваемый 152
- n-транзитивный 204
- n-унитранзитивный 204
- n-хроматический 152
- $\alpha$ -перестановочный 206
- граф-композиция 196
- графоид 58
- графы гомеоморфные 132
- изоморфные 24, 190
- коспектральные 188
- группа 189
- графа 190
- вершинная 190
- диэдральная 195
- знакопеременная 195
- конфигураций 213
- парная 217
- - редуцированная 218
- подстановок 190
- реберная 191
- симметрическая 195
- степенная 194
- тождественная 195
- циклическая 195
- группы идентичные 190
- изоморфные 190
- дерево 48
- блоков и точек сочленения 54
- корневое 219
- с висячим корнем 220
- входящее 235
- выходящее 235
- диагональ блока 47
- «диаграмма Хассе» 73
- диаметр 27
- длина маршрута 27
- добавление вершины 25
- ребра 25

- дополнение графа 29
- достижимость 133
- древесность графа 113
- дуга 23, 232
- животное 227
- замощение решетки, 2, 227
- звезда (лапа, гроздь) 32
- изоморфизм 24
- инвариант 24
- инцидентность ребра и вершины 22
- искаженность графа 149
- источник 235
- карта плоская 127
- - с корневым ребром 227
- квадрат графа 27
- квадратный корень графа 38
- клетка 204
- количество очков 243
- клика графа 34
- кограница 55
- кограничный оператор 54
- кодереве 56
- колесо 63
- комплекс 20
- композиция графов 37, 196
- групп 194
- компонента 27
- нечетная 108
- односторонняя 233
- сильная 233
- слабая 233
- конденсация 234
- контур 233
- Эйлеров 240
- конфигурация 213
- конъюнкция 40, 243
- корона графов 198
- коцикл 55
- крупность (зернистость, шероховатость) 146
- лемма Бернсайда 212, 214
- лес 48
- линия матрицы 71
- линейный подграф графа 180

- - орграфа 179  
Маршрут 26  
- замкнутый 26  
- несовершенный 119  
- открытый 26  
- совершенный 119  
- Y-сводимый 120  
матрица достижимостей 238  
- инцидентий ISO  
- коциклов 184  
- обходов 238  
- полустепеней захода 239  
- - исхода 239  
- разреженная 241  
- смежностей графа 179  
- - орграфа 237  
- циклов 183  
матричная теорема о деревьях 178,  
181, 239  
матроид 57  
- бинарный 188  
- графический 180  
- кографический 180  
- коциклов графа 57  
- циклов графа 57  
- эйлеров 188  
многочлен деревьев графа 187  
множество вершин 22  
- внешне устойчивое 118  
- внутренне устойчивое 118  
- независимое 57, 108, 118  
- разделяющее 64  
- ребер 22  
мост 41  
мультиграф 23  
наследственное свойство 119  
надграф 24  
независимые единицы матрицы 71  
обхват 27  
объединение графов 36  
одноцветный класс 152  
ожерелье 212—215, 224, 225  
окрестность вершины 197  
- замкнутая 197

окружение 27  
орбита 211  
орграф 232  
- бесконтурный 235  
- контрафункциональный 236  
орграф несвязный 233  
- обратный 234  
- односторонний 233  
- примитивный 246  
- реберный 245  
- сильный 233  
- слабый 233  
- строго односторонний 244  
- - слабый 244  
- функциональный 236  
- эйлеров 240  
ориентация графа 246  
остов 55  
пара связностей 62  
паросочетание 119  
- наибольшее 119  
перечисляющий ряд для  
конфигураций 213  
- - - фигур 213  
петля 23  
подграф 24  
- линейный 180  
- остовный 24  
- порожденный 24  
- четный 227  
покрытие вершинное 117  
- реберное 117  
полиэдр 127  
полная раскраска 170  
полный набор инвариантов 24  
полугруппа графа 208  
полуконтур 233  
полумаршрут 233  
полупуть 233  
полустепень захода 232  
- исхода 232  
порядок группы 190  
последователь n-пути 204

принцип ориентированной  
двойственности 234, 235  
произведение графов 36  
- групп 190  
- поэлементное 239  
пространство коциклов 55  
- циклов 55  
псевдограф 23  
путь 233  
разбиение графа 76  
- графическое 76  
- числа 76  
разрез 55  
ранг коциклический 56  
- циклический 55  
размерность симплекса 20  
расстояние в графе 27  
- - орграфе 233  
раскраска графа 152  
- плоской карты 156  
- полная 170  
- ребер 159  
- t цветами 172  
ребра кратные 23  
- независимые 108  
- подобные 01, 2  
- смежные 22  
ребро графа 22  
- инцидентное вершине 22  
- критическое 121  
- подразбитое 101  
- симметричное 221  
род графа 142  
- полиэдра 142  
сеть 70  
система различных представителей  
72  
стабилизатор 211  
степень вершины 27  
- графа 27  
- группы 190  
- ребра 202  
сток 235  
стягивание 137

- элементарное 137  
сумма графов 37  
- групп 193  
теорема Вине—Коши 181  
- об интерполяции гомоморфизмов  
171  
- о пяти красках 151, 155, 156  
- перечисления Пойа 211—215, 217,  
218  
- - степенной группы 224  
- Хивуда о раскраске Карт 162—164  
- BEST 240  
толщина графа 145  
точка сочленения 41  
транзитивная тройка 241  
треугольник 26  
- нечетный 95  
- четный 95  
турнир 241  
турнир состязаний 245  
тэта-граф 85  
удаление вершины 25  
- ребра 25  
укладка графа 126  
уравнение характеристики неподобия  
для деревьев 221  
- Эйлера—Пуанкаре 57  
фактор графа 106  
факторизация графа 106  
фигура 213  
формула Оттера 222  
- Эйлера для полиэдров 127  
функция связности 62  
связность 60  
- локальная 66  
- односторонняя 233  
- реберная 60  
- сильная 233  
- слабая 233  
хорда 55  
хроматический класс 159  
- многочлен 173  
цветной граф группы 199  
центр графа 51

центроид дерева 52  
цепи непересекающиеся 64  
- реберно-непересекающиеся 64  
цепь 26  
- альтернирующая 109  
- геодезическая 27  
- простая 26  
цикл 26  
- гамильтонов 85  
- графой да 58  
- матроида 57  
- простой 26  
- эйлеров 83  
циклическая тройка 241  
циклический вектор графа 54  
цикловой индекс группы 212  
число ахроматическое 170  
- независимости вершинное 118  
- - реберное 118  
- пересечения 33  
- покрытия вершинного 117  
- - реберного 117  
- Рамсея 30  
- - реберное 104  
- скрещиваний 148  
- Хадвигера 177

- хроматическое 152  
-  $n$ -хроматическое 177  
экспоненцирование 208  
эксцентриситет 51  
элемент графа 103  
элементы соседние 103  
эндоморфизм графа 208  
ядро вершинное 125  
- реберное 122  
цепь, 54  
база, 1, 237  
скелет, 1, 127  
цепь, 1, 54  
решетка, 2, 227  
решетка, 3, 227  
 $n$ -клетка 204  
 $n$ -компонента 63  
 $n$ -куб 37  
 $n$ -путь 204  
 $n$ -раскраска 152  
- реберная 159  
 $n$ -связность 63  
 $n$ -фактор 106  
 $n$ -факторизация 106  
 $P$ -множество 119



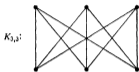
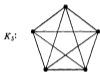
В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Наряду с традиционными приложениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее, — экономику, социологию, лингвистику и др. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. Особенно важная взаимосвязь существует между теорией графов и теоретической кибернетикой (особенно теорией автоматов, исследованием операций, теорией кодирования, теорией игр). Широко используется теория графов при решении различных задач на вычислительных машинах.

За последние годы тематика теории графов стала значительно разнообразней; резко увеличилось количество публикаций.

Предлагаемая книга написана одним из видных специалистов по дискретной математике. Несмотря на небольшой объем и конспективный характер изложения, книга достаточно полно освещает современное состояние теории графов. Она, безусловно, будет полезна студентам университетов и технических вузов и, несомненно, заинтересует широкие круги научных работников, занимающихся приложениями дискретной математики.

*Редакция литературы по математическим наукам*

Каимиру Куратовскому,  
открывшему  $K_5$  и  $K_{3,3}$  для тех,  
кто думал, что планарность  
относится лишь к топологии.



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

---

— I believe if you once made up your mind to do a thing, you would do it, no matter how hard it was, wouldn't you?

— Well, I'd — I'd make things hum, I guess, he admitted.

*F. Norris, The Pit, ch. VI 1)*

Со времени выхода русского перевода книги К. Берга «Теория графов и ее применения» — первой книги по теории графов на русском языке — прошло около десяти лет. Это был период бурного развития дискретной математики, период ее дальнейшего проникновения в самые разнообразные области знания, характерный мощным, все возрастающим потоком информации, различные стороны которого особенно ярко проявились в теории графов — одном из разделов дискретной математики. Многообразие направлений и обилие новых работ затрудняют широким кругам математиков и специалистов в смежных областях знания постоянно следить за развитием этой теории и чувствовать ее пульс, быть в курсе современной проблематики и методов. Даже специалисту, занимающемуся другим разделом дискретной математики, но проявляющему интерес к теории графов, бывает необычайно сложно систематически следить за литературой в этой области, в основном из-за трудностей чисто технического характера: статьи по теории графов и ее приложениям в последнее время можно встретить в самых разных изданиях, которые к тому же не всегда доступны.

Новые веяния и сдвиги в теории графов нашли отражение в ряде достаточно интересных работ (отечественных и переводных), выпущенных за последние годы. Среди них следует отметить монографии Оре [4] и Зыкова [2], сборник статей «Прикладная комбинаторная математика» (изд-во «Мир», М., 1968) и статью Харари [23].

Предлагаемая вниманию читателя книга естественно вписывается в этот ряд. Она принадлежит перу маститого американского математика, профессора Мичиганского университета, видного специалиста по дискретной математике. Обладая поистине изумитель-

---

<sup>1)</sup> — Я думаю, раз вы решили сделать что-либо, то и сделаете, как бы трудно ни было, не так ли?

— Да как вам сказать, мне кажется, что я в грязь лицом не ударил бы, — признался он.

ной работоспособностью, он написал огромное число статей топологического, алгебраического и теоретико-графового характера, несколько монографий по комбинаторной математике и ее приложениям в физике, социологии и экономике. Харари активно участвует во многих конференциях по теории графов и смежным с ней наукам и неизменно является редактором трудов таких конференций. Несколько лет подряд он читал курс теории графов и комбинаторного анализа в Мичиганском университете. Одна из целей (и притом весьма нелегкая), которая, как можно судить по характеру книги, поставлена Харари, состоит в попытке унифицировать обозначения и упорядочить терминологию теории графов. Однако, как признает сам автор, эта попытка, возможно, не будет очень удачной из-за большого разнобоя в терминологии и обозначениях в современной литературе в этой области. Следует отметить, что книга очень популярна среди зарубежных (особенно американских) специалистов, связанных по своей работе с дискретной математикой, и большинство ссылок в статьях и кратких сообщениях по теории графов приходится на долю этой книги.

К несомненным достоинствам книги следует отнести широту и полноту охвата методов и задач теории графов. Существенно ограниченный объем книги и большая насыщенность ее разнообразными фактами естественно привели к тому, что многие утверждения в ней сообщаются без доказательства. Однако это, наверное, наиболее приемлемый способ, позволяющий создать удобочитаемый и достаточно полный труд по теории графов в целом. По крайней мере известные до сих пор попытки дать полное и подробное, со всеми доказательствами, изложение основных результатов теории графов нельзя признать удачными. Кроме того, как правильно замечает автор, такая книга очень полезна для думающего читателя, который может самостоятельно анализировать предлагаемые доказательства, методы и идеи. Такое изложение поможет читателю глубоко освоить теорию графов и свободно ориентироваться в потоке новых публикаций. Этой же цели служат упражнения, предлагаемые после каждой главы, за исключением первой. Среди них есть и очень простые, и чрезвычайно трудные. Для последних даются ссылки на литературу, связанную с их решением.

Наиболее важные теоремы, содержащие характерные для теории графов подходы и методы, доказываются автором очень подробно, остальные либо не доказываются, либо для них приводятся только наброски доказательств; в этих случаях автор дает соответствующие ссылки.

Книга удачно дополняет переведенные на русский язык монографии Берга [2] и Оре [4]. В отличие от монографии Берга изложение здесь не является чрезмерно аксиоматизированным. Особый интерес представляют главы, посвященные вопросам связности, планарности, раскраски графов, матрицам, группам, реберным гра-

фам и перечислениям графов (гл. 5, 8, 11—15). Большинство результатов, включенных в эти главы, ранее в монографиях на русском языке не встречалось.

С тех пор как вышло американское издание книги, прошло более трех лет, и за это время опубликовано немало интересных работ в теории графов. Они достаточно полно отражены в обзоре переводчика (Козырев [1]). Стоит специально отметить монографии Вагнера [4] и Бержа [3]. Они появились в 1970—1971 гг. и, не сильно пересекаясь с книгой Ф. Харари, существенно дополняют друг друга. Обратим внимание также на обзор работ советских авторов, данный Тёрнером и Кауцем [1], в котором приводится около 250 наименований. Наиболее важные из работ последних двух-трех лет добавлены в список литературы и отмечены кружочком. Некоторые новые результаты отражены в дополнительных упражнениях, добавленных при переводе. Они также отмечены кружочком.

Ряд несущественных неточностей в изложении нами устранен без специальных оговорок, другие же снабжены подстрочными примечаниями, так как в противном случае это привело бы к нарушению цельности или затруднило бы понимание соответствующего материала. Существенно пришлось исправить только доказательство теоремы 9.4, в котором содержалось много неясностей.

К недостаткам книги, на наш взгляд, можно отнести отсутствие алгоритмов решения конкретных задач, а также отсутствие указаний о приложениях различных результатов теории графов. Их внесение в книгу не привело бы к существенному увеличению ее объема, однако привлекло бы значительно более широкий круг читателей.

Непринужденный, динамичный, занимательный стиль изложения и насыщенность книги юмором создавали дополнительные трудности при работе над переводом. Переводчик и редактор приложили немало усилий, чтобы сохранить и передать стиль автора в русском переводе. В книге много эпитафий, что вполне соответствует духу изложения основного материала. Автор считает нужным снабдить эпитафиями даже предметный указатель, список литературы и оглавление! Это вынудило нас обратиться за помощью к специалистам-филологам, которую нам и оказали сотрудница ВГБИЛ В. Г. Торшина и поэтесса О. С. Астафьева. За эту помощь мы им весьма признательны.

Остается отметить, что книга будет полезной студентам университетов, педагогических, экономических и технических институтов. Она, несомненно, заинтересует научных работников, занимающихся исследованиями в тех областях знания, которые соприкасаются с теоретической и технической кибернетикой.

*Г. П. Гаврилов*

## ВВЕДЕНИЕ

---

Когда мне было 14 лет, мой отец был так слеп, что я едва выносил его. Когда же мне стукнуло 21, я поразился, увидев, как поумнел старик за эти 7 лет.

*Марк Твен*

Существует несколько причин нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование вычислительных машин, электротехника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ. Достоверно и то, что теория графов служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение. Графы действуют притягательно и обладают эстетической привлекательностью благодаря их представлению в виде диаграмм. Хотя в теории графов много результатов, элементарных по своей природе, в ней также громадное изобилие весьма тонких комбинаторных проблем, достойных внимания самых искусственных математиков.

Ранние варианты этой книги появились в 1956 г., когда на кафедре математики Мичиганского университета началось регулярное чтение курсов по теории графов и комбинаторному анализу. Было замечено, что с методической точки зрения нецелесообразно приводить доказательства всех формулируемых утверждений. Это позволило включить в курс значительно больше известных результатов, чем было бы возможно в ином случае. Таким образом, книгу можно использовать как пособие, написанное в традиционной манере «метода Мора», когда студент умножает свои познания в математике, стремясь доказать все теоремы, сформулированные без доказательств. Заметим, однако, что некоторые из опущенных доказательств и трудны и длинные. Тот, кто овладеет содержанием этой книги, сможет продолжать изучение специальных тем и применять теорию графов в других областях.

В предлагаемой читателю книге предпринята попытка представить различные направления исследований в теории графов в их

логической последовательности, дать исторический экскурс и пояснить изложение при помощи рисунков, иллюстрирующих понятия и результаты. Кроме того, приводятся три приложения с диаграммами графов, ориентированных графов и деревьев. Основное внимание в книге уделяется теоремам, хотя иногда упоминаются и алгоритмы, и приложения.

Предлагаемые в конце каждой главы (кроме первой) упражнения существенно отличаются друг от друга по своей трудности. Номера тех упражнений, которые не являются простыми и не следуют непосредственно из приводимых ранее результатов, набраны жирным шрифтом. Особенно трудные упражнения кроме того помечены звездочкой. Для усвоения излагаемого в книге материала читателю рекомендуется ознакомиться с каждым упражнением. Многие из «более легких» упражнений могут показаться читателю очень трудными, если он не изучил материал соответствующих глав.

Советуем читателю не увязать в гл. 2 и ее многочисленных упражнениях, которая сама по себе может быть использована как сокращенный курс по теории графов для студентов первого курса или старшеклассников. Преподаватель найдет в этой книге материал для односеместрового курса по теории графов. В то же время вся книга может служить основой для годового курса. Некоторые из последних глав можно рекомендовать как темы для семинаров повышенного типа. Так как единственным условием для чтения этой книги в действительности является неупомянутое свойство, называемое «математической зрелостью», то ее можно использовать в качестве пособия для дипломников и аспирантов. Для понимания последних четырех глав полезно знакомство с элементарной теорией групп и теорией матриц.

Считаю своим долгом выразить благодарность многим моим знакомым за их неоценимую помощь и советы в подготовке этой книги. Ловелл Байнеке и Гари Чартрэнд оказывали наибольшую помощь на протяжении многих лет!

В течение последнего года мои ученики Деннис Геллер, Беннет Манвел и Поль Штокмейер с особым энтузиазмом делились своими замечаниями и предложениями. Большая помощь была также оказана мне Стефаном Хедетниemi, Эдгаром Палмером и Майклом Пламмером. В самое последнее время Бранко Грюнбаум и Доминик Уэлш оказали любезность, тщательно прочитав всю книгу. Я лично отвечаю за все ошибки и за большинство сомнительных мест в изложении.

За последние более чем двадцать лет, посвященных исследованиям в теории графов, я получал поддержку при публикации со стороны Научно-исследовательского управления Военно-воздушных сил США, Национальных институтов здоровья, Национального научного фонда, Управления научных разработок Военно-морского флота и фонда Рокфеллера. В течение этого времени я был рад

воспользоваться гостеприимством не только Мичиганского университета, но также и других учебных заведений, которые я имел возможность посетить. Среди них — Институт повышения квалификации, Принстонский университет, Тавистокский институт социологии в Лондоне, Университетский колледж в Лондоне и Лондонская экономическая школа. Квалифицированно и быстро перепечатали рукопись Алиса Миллер и Анна Дженн из Научно-исследовательского центра групповой динамики. Наконец, я особенно благодарен издательству Аддисон-Уэсли за проявленное терпение в ожидании этой рукописи в течение всех десяти лет с момента заключения контракта, а также за всестороннюю помощь в издании книги.

*Фрэнк Харари*





Эврика!  
Архимед

Не случайно теория графов «открывалась» независимо много раз: ее с полным основанием можно считать разделом прикладной математики<sup>1)</sup>. В самом деле, наиболее раннее известное упоминание этой теории встречается в работах Эйлера, и хотя проблему, которой он занимался, можно рассматривать как обычную головоломку, все же она возникла из практики.

Последующие переоткрытия теории графов Кирхгофом и Кэли также уходят своими корнями в реальную действительность. Изучение Кирхгофом электрических цепей привело к разработке им основных понятий и получению ряда теорем, касающихся деревьев в графах. В свою очередь Кэли подошел к исследованию деревьев, решая задачи перечисления органических изомеров. Другой подход к графам, связанный с рассмотрением головоломок, был предложен Гамильтоном. После этого появилась знаменитая гипотеза четырех красок, которая до сих пор пользуется широкой известностью. В наше столетие также было чрезвычайно много переоткрытий теории графов. Упомянем кратко некоторые из них, придерживаясь хронологического порядка.

### Задача о кёнигсбергских мостах

Отцом теории графов (так же как и топологии) является Эйлер (1707—1782), решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кёнигсбергских мостов. В городе Кёнигсберге было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Преголя и друг с другом так, как показано на рис. 1.1. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой из

<sup>1)</sup> Комбинаторная сущность теории графов и ключ к пониманию ее широкой применимости хорошо выражены в следующих словах Сильвестра: «Теория отростков (ramification) — одна из теорий чистого обобщения, для нее не существенны ни размеры, ни положение объекта; в ней используются геометрические линии, но они относятся к делу не больше, чем такие же линии в генеалогических таблицах помогают объяснить законы воспроизведения».

них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Легко, конечно, попытаться решить эту задачу эмпирически, производя перебор всех маршрутов, но все попытки

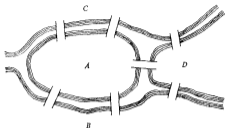


Рис. 1.1. Парк в городе Кёнигсберге, 1736 г.

окончатся неудачей. Исключительный вклад Эйлера [1] в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.

Для доказательства того, что задача не имеет решения, Эйлер обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост — линией (ребром), соединяющей соответствующие точки. Получился «граф». Этот граф<sup>1)</sup> показан на рис. 1.2, где точки отмечены теми же буквами, что и четыре части суши на рис. 1.1.

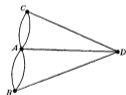


Рис. 1.2. Граф к задаче о кёнигсбергских мостах.

Утверждение о несуществовании «положительного» решения у этой задачи эквивалентно утверждению о невозможности обойти специальным образом граф, представленный на рис. 1.2.

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашел критерий существования обхода (специального маршрута) у данного графа, а именно граф должен быть связным и каждая его вершина должна быть инцидентна четному числу ребер. Граф, показанный на рис. 1.2, связный, но не каждая его вершина инцидентна четному числу ребер.

### Электрические цепи

В 1847 г. Кирхгоф [1] разработал теорию деревьев для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, позволяющую найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в

<sup>1)</sup> В действительности это «мультиграф», как мы увидим в гл. 2.

каждом контуре рассматриваемой электрической цепи. Будучи физиком по образованию, он подходил к решению задач как математик. Абстрагируясь от электрических схем и цепей, которые содержат сопротивления, конденсаторы, индуктивности и т. д., он рассматривал соответствующие комбинаторные структуры, содержащие только вершины и связи (ребра или дуги), причем для связей не нужно указывать, каким типам электрических элементов они соответствуют. Таким образом, в действительности Кирхгоф заменил каждую электрическую цепь соответствующим ей графом

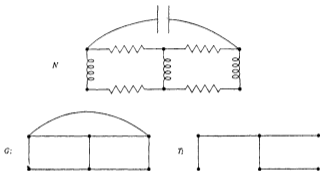


Рис. 1.3. Сеть  $N$ , соответствующий ей граф  $G$  и остов  $T$ .

и показал, что для решения системы уравнений необязательно рассматривать в отдельности каждый цикл графа электрической цепи. Вместо этого он предложил простую, но эффективную методику (ставшую позднее стандартной процедурой), в соответствии с которой достаточно ограничиться только независимыми простыми циклами графа, определяемыми любым из его «остовных деревьев». На рис. 1.3 дан пример электрической цепи  $N$ , соответствующего ей графа  $G$  и остовного дерева  $T$ .

### Химические изомеры

Занимаясь чисто практическими задачами органической химии, Кэли [1] в 1857 г. открыл важный класс графов, называемых деревьями. Он стремился перечислить изомеры предельных (насыщенных) углеводородов  $C_nH_{2n+2}$  с данным числом  $n$  атомов углерода; некоторые из таких углеводородов показаны на рис. 1.4.

Конечно, Кэли прежде всего сформулировал задачу абстрактно: найти число всех деревьев с  $p$  вершинами, каждое из которых имеет

вершины со степенями 1 и 4. Ему не удалось сразу решить эту задачу, и он стал изменять ее формулировку таким образом, чтобы можно было решить новую задачу о перечислении: а) корневых деревьев (в которых выделена одна из вершин); б) всех деревьев; в) деревьев,

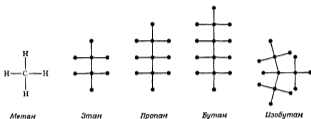


Рис. 1.4. Наименьшие насыщенные углеводороды.

у которых степени вершин не превышают 4, и, наконец, г) деревьев, у которых степени вершин равны 1 и 4 (постановка задачи «из химии») (см. Кэли [2]).

Позже Жордан (1869 г.) независимо от Кэли ввел и изучал деревья как чисто математические объекты, и, как писал Сильвестр в 1882 г., он сделал это, «совершенно не подозревая о значении своего открытия для современной химической науки» (см. Кёниг [2, стр. 48]).

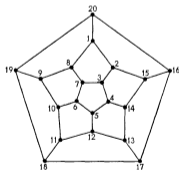


Рис. 1.5. «Вокруг света».

### «Вокруг света»

В игре, придуманной сэром Вильямом Гамильтоном <sup>1)</sup> в 1859 г., используется додекаэдр, каждой из 20 вершин которого приписано название известного города. Играющий должен обойти «вокруг света», найдя такой замкнутый путь, идущий по ребрам многогранника, который про-

ходил бы через каждую вершину ровно один раз. Гамильтон продал свою идею одному мастеру игрушек за 25 гиней; это был жестокий поступок, ибо описанная игра не сулит никакой финансовой удачи.

<sup>1)</sup> Более полное описание см. у Болла и Коксетера [1, стр. 262].

На языке теории графов задача формулируется так: найти остовный цикл в графе додекаэдра. Граф показан на рис. 1.5. Вершины графа пронумерованы числами 1, 2, ..., 20 (вместо названий городов, скажем Амстердам, Анн-Арбор, Берлин, Будапешт, Дублин, Эдинбург, Иерусалим, Лондон, Мельбурн, Москва, Новосибирск, Нью-Йорк, Париж, Пекин, Прага, Рио-де-Жанейро, Рим, Сан-Франциско, Токио и Варшава). Существование остовного цикла очевидно.

### Гипотеза четырех красок

Наиболее известная нерешенная задача в теории графов и, возможно, во всей математике — знаменитая проблема четырех красок. Эту замечательную задачу каждый математик в течение пяти минут может объяснить любому прохожему на улице. В конце объяснения оба будут хорошо понимать проблему, но не будут способны ее решить.

В следующей цитате из исторической статьи Мея [1] формулируется гипотеза четырех красок и поясняется ее роль:

«Предполагается, что любую карту на плоскости или поверхности шара можно раскрасить только четырьмя красками таким образом, чтобы никакие две смежные страны не были одного и того же цвета. Каждая страна должна состоять из одной связной области, а смежными называются страны, которые имеют общую границу в виде линии (а не просто одной общей точки). Эта гипотеза тесно связана с наиболее модными направлениями теории графов, а в разделе математики, называемом комбинаторной топологией, она действовала подобно катализатору. На протяжении более чем половины столетия многие математики (кое-кто говорит, что все) предпринимали попытки решить эту проблему, но смогли доказать справедливость гипотезы только для отдельных случаев... Единодушно признается, что гипотеза справедлива, но маловероятно, что она будет доказана в общем случае. Кажется, что ей на некоторое время предназначено сохранить отличительную черту быть одновременно и наиболее простой, и наиболее заманчивой нерешенной проблемой математики».

Гипотеза четырех красок имеет интересную историю, но в ее появлении остается много непонятого. Имеются сообщения, что Мёбиус был знаком с этой проблемой в 1840 г., но точно известно только, что о данной проблеме Гутри сообщал де Моргану примерно в 1850 г. Первое из многих ошибочных «доказательств» было дано Кемпе [1] в 1879 г. Ошибку обнаружил в 1890 г. Хивуд [1], который тогда же показал, что гипотеза становится верной, если «четыре»

заменить на «пять». Контрпример, если его найдут, обязательно будет чрезвычайно большим и сложным, поскольку совсем недавно Оре и Стемпл [1] доказали справедливость гипотезы для всех карт, содержащих меньше 40 стран.

Гипотеза четырех красок является проблемой теории графов, потому что каждая карта порождает граф, в котором страны (включая внешнюю область) — это вершины и две вершины соединяются ребром, если соответствующие им страны смежны. Ясно, что такой граф можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер (в точках, отличных от вершин графа). Таким образом, если удалось бы показать, что вершины любого планарного графа можно раскрасить четырьмя или меньшим числом красок так, чтобы смежные вершины имели разные цвета, то гипотеза четырех красок была бы обоснована.

### Теория графов в двадцатом веке

В 1936 г. психолог Левин [1] высказал предположение, что «жизненное пространство» индивидуума можно представить с помощью планарной карты<sup>1)</sup>. На такой карте области представляют различные типы деятельности человека, например, то, что он делает на работе, дома, или же его хобби.

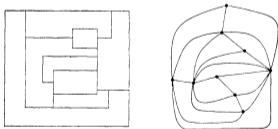


Рис. 1.6. Карта и соответствующий ей граф.

Подчеркнем, что Левин фактически имел дело с графами, как это следует из рис. 1.6. Эта точка зрения привела психологов Научно-исследовательского центра групповой динамики к другой психологической интерпретации графа, в которой люди представляются вершинами, а их отношения — ребрами. Такими отношениями являются, например, любовь, ненависть, общение, подчинение.

<sup>1)</sup> Предположение Левина относится только к планарным картам, поскольку он всегда рисовал свои рисунки на плоскости.

Именно этот подход привел автора настоящей книги к собственно-му открытию теории графов, благодаря помощи и содействию психологов Фестингера и Картрайта.

Физики-теоретики для «внутренних» нужд своей науки «открывали» теорию графов не один раз. Занимаясь статистической механикой, Уленбек [1] обозначал точками (вершинами) молекулы, а смежность вершин толковал как взаимодействие наибольшей близости (соседства) некоторого физического типа, например магнитное притяжение или отталкивание. В подобной интерпретации, предложенной Ли и Янгом [1], вершинами служат малые кубы, лежащие в евклидовом пространстве; каждый куб может быть занят или нет молекулой. Две вершины считаются смежными, если оба соответствующих куба заняты молекулами. Другой аспект использования теории графов в физике — как изобразительное средство. Фейнман [1] предложил диаграмму, в которой вершины представляют физические частицы, а ребра — пути частиц после столкновений.

Учение о цепях Маркова в теории вероятностей (см., например, Феллер [1]) связано с ориентированными графами в том смысле, что события представляются вершинами, а ориентированное ребро (дуга), идущее из одной вершины в другую, указывает на то, что вероятность прямого перехода от одного события к другому положительна. Этот подход подробно изложен в книге Харари, Нормана, Картрайта [1, стр. 371], где цепь Маркова определяется как сеть, у которой сумма весов всех ориентированных ребер, выходящих из каждой вершины, равна 1. Подобная интерпретация ориентированных графов возникает в разделах численного анализа, посвященных обращению матриц и вычислению собственных значений. Соответствующие примеры можно найти в книге Варги [1, стр. 48]. Квадратной матрице, предпочтительно редкой (с небольшим количеством ненулевых элементов в каждой строке), ставится в соответствие следующим образом ориентированный граф. Вершины соответствуют номерам строк и столбцов матрицы, и дуга идет от вершины  $i$  к вершине  $j$  тогда и только тогда, когда  $(i, j)$ -й элемент матрицы не равен нулю. Близость двух приведенных интерпретаций очевидна.

Теоретико-графовый подход используется также в быстро развивающихся разделах линейного программирования и исследования операций при изучении потоков в сетях. Применение теории графов для таких целей показано в книгах Форда и Фалкерсона [2], Вайды [1], Бержа и Гуйя-Ури [1]. Вершинам графа соответствуют пункты размещения (или выгрузки) товара; ориентированное ребро, идущее из одной вершины в другую, указывает на возможность транспортировки товара из пункта, соответствующего первой вершине, в пункт, соответствующий второй вершине. Каждому ребру приписывается некоторое положительное число — максимальная пропускная способность ребра. Она показывает, какое максималь-



ное количество товара может быть выгружено в единицу времени в соответствующем пункте.

Внутри чистой математики теория графов впервые изучалась Вебленом [1, стр. 1—35] в его классической книге по топологии. По определению *симплициальный комплекс* (или, короче, *комплекс*) состоит из множества  $V$  «точек» и некоторого (заданного) семейства  $S$  непустых подмножеств множества  $V$ , называемых «симплексами»;  $V$  и  $S$  должны удовлетворять следующим двум условиям:

- 1) каждая точка есть симплекс,
- 2) каждое непустое подмножество симплекса есть симплекс.

*Размерность* симплекса равна уменьшенному на единицу числу его вершин; размерность комплекса равна максимальной из размерностей симплексов, содержащихся в данном комплексе. В этих терминах *граф* можно определить как комплекс размерности 1 или 0. Назовем 1-мерный симплекс *ребром*. Заметим, что комплекс 0-мерен тогда и только тогда, когда он содержит некоторое множество точек, но не имеет ни ребер, ни симплексов более высокой размерности. За исключением этих «вполне несвязных» графов, остальные графы являются одномерными комплексами. Именно поэтому первая книга по теории графов (Кёниг [2]) имела подзаголовок *Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*<sup>1)</sup>.

В дальнейшем мы предпочитаем использовать слова *point* (точка) и *line* (линия), учитывая сложившуюся традицию употреблять их как неопределяемые понятия в аксиоматических системах для геометрических структур. Всякий раз, когда мы говорим о «геометрических» симплициальных комплексах как о подмножествах евклидова пространства, противопоставляя их абстрактным комплексам, определенным выше, мы применяем слова *vertex* (вершина) и *edge* (ребро)<sup>2)</sup>. Терминологические вопросы будут обсуждаться в гл. 2 вместе с некоторыми основными понятиями и элементарными теоремами теории графов.

<sup>1)</sup> *Комбинаторная топология линейных комплексов (нем.)*.— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> В предлагаемом переводе, чтобы уменьшить расхождение с терминологией, принятой в отечественной литературе, мы поступаем как раз наоборот: слова «вершина» и «ребро» употребляем при рассмотрении «абстрактных комплексов», а «точка» и «линия» — при рассмотрении «геометрических комплексов». — *Прим. ред.*

Что значит имя? Роза пахнет розой,  
Хоть розой назови ее, хоть нет.

*Уильям Шекспир, Ромео и Джульетта<sup>1)</sup>*

Большинство специалистов по теории графов употребляют в книгах, статьях и лекциях свою собственную терминологию. На конференциях по теории графов каждый выступающий, чтобы избежать неправильного понимания, считает необходимым определить прежде всего язык, которым он будет пользоваться. Даже само слово «граф» не является священным. Некоторые авторы действительно определяют «граф» как граф<sup>2)</sup>, другие же имеют в виду такие понятия, как мультиграф, псевдограф, ориентированный граф или сеть. Нам кажется, что единообразие в терминологии теории графов никогда не будет достигнуто, но, может быть, оно и не к чему.

Увы, необходимо сформулировать ряд определений, чтобы в дальнейшем иметь возможность использовать основные понятия и терминологию теории графов. После этого мы дадим краткое введение в учение о полных подграфах, в теорию экстремальных графов (которая изучает графы с запрещенными подграфами), в исследование свойств графов пересечений (в которых вершинами являются множества, а непустые пересечения представляют смежность); будут определены также полезные операции на графах.

## Типы графов

Прежде чем дать определение графа, мы покажем на рис. 2.1 все 11 графов с четырьмя вершинами. Позже мы увидим, что:

- 1) любой граф с четырьмя вершинами изоморфен одному из них;
- 2) пять графов, которые на рисунке расположены слева от штриховой линии, не связны;
- 3) шесть графов, расположенные справа от штриховой линии, связны;
- 4) последний граф — полный;

<sup>1)</sup> Перевод Б. Пастернака, акт 2, сцена 2, изд-во «Искусство», 1951, стр. 57.  
— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Чаще всего это сразу провозглашается стандартным предложением: «В этой статье мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер».

- 5) первый граф — пустой или вполне несвязный;
- 6) первый граф с четырьмя ребрами — цикл;
- 7) первый граф с тремя ребрами — простая цепь.

Вместо того чтобы продолжать повествование на интуитивном уровне, вводя время от времени различные понятия теории графов,

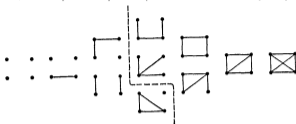


Рис. 2.1. Графы с четырьмя вершинами.

мы перейдем к систематическому, хотя и утомительному, введению этих понятий одного за другим. *Граф*  $G$  состоит из конечного непустого множества  $V$ , содержащего  $p$  вершин<sup>1)</sup>, и заданного множества  $X$ , содержащего  $q$  неупорядоченных пар различных вершин из  $V$ . Каждую пару  $x = \{u, v\}$  вершин в  $X$  называют *ребром* графа  $G$

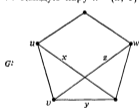


Рис. 2.2. Граф, иллюстрирующий понятие смежности.

и говорят, что  $x$  соединяет  $u$  и  $v$ . Мы будем писать  $x = uv$  и говорить, что  $u$  и  $v$  — *смежные вершины* (иногда это обозначается  $u \text{ adj } v$ ); вершина  $u$  и ребро  $x$  *инцидентны*, так же как  $v$  и  $x$ . Если два различных ребра  $x$  и  $y$  инцидентны одной и той же вершине, то они называются *смежными*. Граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами называется  $(p, q)$ -графом.  $(1, 0)$ -граф называется *тривиальным*.

Обычно граф представляется диаграммой, и ее-то часто называют графом.

Таким образом, у графа  $G$  на рис. 2.2 вершины  $u$  и  $v$  смежные, а вершины  $u$  и  $w$  нет; ребра  $x$  и  $y$  смежные, а  $x$  и  $z$  нет. Хотя на диаграмме ребра  $x$  и  $z$  пересекаются, их точка пересечения не является вершиной графа.

<sup>1)</sup> Приведем перечень синонимов, которые используются в литературе по теории графов, но не всегда в указанных ниже парах:

точка (point)	вершина (vertex)	узел (node)
линия (line)	ребро (edge)	дуга (arc)
соединение (junction)	0-симплекс (0-simplex)	элемент (element)
ветвь (branch)	1-симплекс (1-simplex)	элемент (element)

Имеется несколько типов графов, которые целесообразно привести. Отметим, что из определения вытекает, что в графе не может быть *петель*, т. е. ребер, соединяющих вершины сами с собой. В *мультиграфе* не допускаются петли, но пары вершин могут соединяться более чем одним ребром; эти ребра называются *кратными*. Если допускаются петли и кратные ребра, получаем *псевдограф*.



Рис. 2.3. Мультиграф и псевдограф.

На рис. 2.3 приведены мультиграф и псевдограф, в основе которых «лежит» один и тот же граф — треугольник. Ясно, что граф в задаче о кёнигсбергских мостах (рис. 1.2) является на самом деле мультиграфом.

*Ориентированный граф*, или *орграф*,  $D$  состоит из конечного непустого множества  $V$  вершин и заданного набора  $X$  упорядоченных пар различных вершин. Элементы из  $X$  называются *ориентированными ребрами*, или *дугами*. По определению в орграфе нет

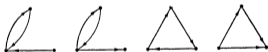


Рис. 2.4. Орграфы с тремя вершинами и тремя дугами.

петель и кратных дуг. *Направленный граф* — это орграф, не имеющий симметричных<sup>1)</sup> пар ориентированных ребер. На рис. 2.4 приведены все орграфы с тремя вершинами и тремя дугами; два последних из них — направленные графы. Орграфам посвящена последняя, 16 глава, но время от времени к ним мы будем обращаться и в других главах.

Граф называется *помеченным* (или *перенумерованным*), если его вершины отличаются одна от другой какими-либо пометками, например  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Графы  $G_1$  и  $G_2$  на рис. 2.5 помеченные, а граф  $G_3$  нет.

<sup>1)</sup> То есть дуг вида  $(u, v)$  и  $(v, u)$ .— *Прим. перев.*

Два графа  $G$  и  $H$  *изоморфны* (записывается  $G \cong H$  или иногда  $G = H$ ), если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Например,  $G_1$  и  $G_2$  на рис. 2.5 изоморфны при соответствии  $v_i \leftrightarrow u_i$  и чисто случайно оказалось, что граф  $G_3$  изоморфен каждому из них. Совершенно очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах.

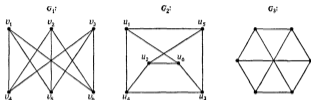


Рис. 2.5. Помеченные и непомяенный графы.

*Инвариант* графа  $G$  — это число, связанное с  $G$ , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном  $G$ . Так, числа  $p$  и  $q$  являются инвариантами графа. *Полный набор инвариантов* определяет граф с точностью до изоморфизма. Например, числа  $p$  и  $q$  образуют полный набор инвариантов для всех графов с числом вершин, меньшим четырех. В настоящее время мы не знаем ни одной нетривиальной полной системы инвариантов для графов.



Рис. 2.6. Граф и два его подграфа.

*Подграфом* графа  $G$  называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат  $G$ . Если  $G_1$  — подграф графа  $G$ , то  $G$  называется *надграфом* (supergraph) графа  $G_1$ . *Остовный подграф* — это подграф<sup>1)</sup> графа  $G$ , содержащий все его вершины. Для любого подмножества  $S$  вершин графа  $G$  *порожденным подграфом*  $\langle S \rangle$  называется максимальный подграф графа  $G$ , множеством вершин которого является  $S$ . Таким образом, две вершины из  $S$  смежны в  $\langle S \rangle$  тогда и только тогда, когда они смежны в  $G$ . На рис. 2.6  $G_2$  — остовный подграф графа  $G$ , а  $G_1$  нет;  $G_1$  — порожденный подграф, а  $G_2$  нет.

<sup>1)</sup> В ряде монографий используется термин «частичный граф», см., например, Берж [2]. — Прим. перев.

Удаление вершины  $v_i$  из графа  $G$  приводит к подграфу  $G - v_i$ , содержащему все вершины графа  $G$ , за исключением  $v_i$ , и все ребра графа  $G$ , не инцидентные  $v_i$ . Другими словами,  $G - v_i$  есть максимальный подграф графа  $G$ , не содержащий  $v_i$ . Удаление ребра  $x_j$  из  $G$  приводит к остовному подграфу, содержащему все ребра графа  $G$ , за исключением  $x_j$ , т. е.  $G - x_j$  есть максимальный подграф графа  $G$ ,

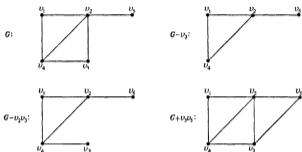


Рис. 2.7. Графы, содержащие и не содержащие выделенную вершину или выделенное ребро.

не содержащий  $x_j$ . Удаление произвольного множества вершин или ребер из  $G$  определяется как последовательное удаление всех элементов этого множества. С другой стороны, если  $v_i$  и  $v_j$  не смежны в  $G$ , то добавление ребра  $v_i v_j$  образует наименьший надграф графа  $G$ , содержащий ребро  $v_i v_j$ . Эти понятия иллюстрируются на рис. 2.7.



Рис. 2.8. Графы, содержащие и не содержащие вершину или ребро.

Существуют графы, для которых результат удаления вершины или ребра или же добавления ребра не зависит от выбора вершины или ребра. Для графа  $G$ , обладающего этим свойством, обозначим соответствующие графы через  $G - v$ ,  $G - x$  и  $G + x$ ; см. рис. 2.8.

Улам [1] высказал предположение, что набор подграфов  $G - v_i$  несет полную информацию о всем графе  $G$ .

Гипотеза Улама<sup>1)</sup>. Пусть граф  $G$  имеет  $p$  вершин  $v_i$ , граф  $H$  имеет  $p$  вершин  $u_i$  и  $p \geq 3$ . Если для каждого  $i$  подграфы  $G_i = G - v_i$  и  $H_i = H - u_i$  изоморфны, то и графы  $G$  и  $H$  изоморфны.

Известна другая интерпретация этой гипотезы (Харари [20]). Нарисуем каждый из  $p$  непоименованных графов  $G - v_i$  на карточке размером  $3 \times 5$ . В гипотезе говорится, что любой граф с  $p$  вершинами, из которого, удаляя каждый раз лишь по одной вершине, можно получить данные подграфы и только их, изоморфен  $G$ . Таким образом, в гипотезе Улама утверждается, что любые два графа с одним и тем же набором карточек изоморфны. Кажется более естественным пытаться доказать (или опровергнуть), что по любому допустимому<sup>2)</sup> набору карточек восстанавливается только один граф.

### Маршруты и связность

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф, это свойство быть связным. В данном разделе рассматриваются основные структурные свойства связных и несвязных графов.

*Маршрутом* в графе  $G$  называется чередующаяся последовательность вершин и ребер  $v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$ ; эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним. Указанный маршрут соединяет вершины  $v_0$  и  $v_n$ , и его можно обозначить  $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$  (наличие ребер подразумевается). Эта последовательность иногда называется

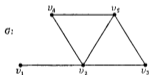


Рис. 2.9. Граф для иллюстрации маршрутов.

$(v_0 - v_n)$ -маршрутом. Маршрут *замкнут*, если  $v_0 = v_n$ , и *открыт* в противном случае. Маршрут называется *цепью* (trail), если все его ребра различны, и *простой цепью* (path), если все вершины (а следовательно, и ребра) различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутый маршрут называется *простым циклом*, если все его  $n$  вершин различны и  $n \geq 3$ .

В помеченном графе  $G$  на рис. 2.9  $v_1 v_2 v_3 v_2 v_3$  — маршрут, который не является цепью, а  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_2 v_3$  — цепь, но не простая цепь,  $v_1 v_2 v_3 v_4$  — простая цепь и  $v_2 v_4 v_5 v_2$  — простой цикл.

<sup>1)</sup> Не советуем читателю заниматься этой гипотезой, поскольку она представляется нам очень трудной.

<sup>2)</sup> То есть набору, который можно получить из некоторого графа. Другая трудная задача: как выяснить, является ли данный набор допустимым?

Обозначим через  $C_n$  граф, состоящий из одного простого цикла с  $n$  вершинами, и через  $P_n$  простую цепь с  $n$  вершинами;  $C_3$  часто называют *треугольником*.

Граф  $G$  называется *связным*, если любая пара его вершин соединена простой цепью. Максимальный связный подграф графа  $G$  называется *компонентой связности*, или просто *компонентой* графа  $G$ . Таким образом, несвязный граф имеет по крайней мере две компоненты. Граф на рис. 2.10 имеет 10 компонент.

*Длина маршрута*  $v_0v_1 \dots v_n$  равна  $n$ , т. е. количеству ребер в нем<sup>1)</sup>. *Обхват* графа  $G$  — обозначается  $g(G)$  — это длина кратчайшего простого цикла графа  $G$  (если он есть); *окружение* графа  $G$  — обозначается  $c(G)$  — длина самого длинного простого цикла графа  $G$ . Эти понятия не определены в случае, когда в  $G$  нет циклов.



Рис. 2.10. Граф с 10 компонентами.

*Расстоянием*  $d(u, v)$  между двумя вершинами  $u$  и  $v$  графа  $G$  называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если  $u$  и  $v$  не соединены, то полагаем  $d(u, v) = \infty$ . В связном графе расстояние является метрикой, т. е. удовлетворяет следующим аксиомам (аксиомы метрики): для любых трех вершин  $u, v$  и  $w$

- 1)  $d(u, v) \geq 0$  и  $d(u, v) = 0$  тогда и только тогда, когда  $u = v$ ;
- 2)  $d(u, v) = d(v, u)$ ;
- 3)  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ .

Кратчайшая простая ( $u$ - $v$ )-цепь часто называется *геодезической*. *Диаметр*  $d(G)$  связного графа  $G$  — это длина самой длинной геодезической. Граф  $G$  на рис. 2.9 имеет обхват  $g=3$ , окружение  $c=4$  и диаметр  $d=2$ .

*Квадрат*  $G^2$  графа  $G$  имеет то же множество вершин, что и граф  $G$ , т. е.  $V(G^2) = V(G)$ , и две вершины  $u$  и  $v$  в  $G^2$  смежны тогда и только тогда, когда  $d(u, v) \leq 2$  в  $G$ . Степени  $G^2, G^3, \dots$  графа  $G$  определяются аналогично. Например,  $C_3^2 = K_3$  и  $P_4^2 = K_4 - x$ .

## Степени

*Степенью*<sup>2)</sup> вершины  $v_i$  в графе  $G$  — обозначается  $d_i$  или  $\deg v_i$  — называется число ребер, инцидентных  $v_i$ . Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое

<sup>1)</sup> Каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Иногда используются термины «валентность» и «локальная степень».



ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером [2] и является исторически первой теоремой теории графов.

**Теорема 2.1.** *Сумма степеней вершин графа  $G$  равна удвоенному числу его ребер:*

$$\sum_i \deg v_i = 2q. \quad (2.1)$$

**Следствие 2.1 (а).** *В любом графе число вершин с нечетными степенями четно<sup>1)</sup>.*

В  $(p, q)$ -графе  $0 \leq \deg v \leq p-1$  для любой вершины  $v$ . Минимальная степень вершин графа  $G$  обозначается через  $\min \deg G$  или  $\delta(G)$ , максимальная — через  $\max \deg G = \Delta(G)$ . Если  $\delta(G) = \Delta(G) = r$ ,



Рис. 2.11. Кубические графы с 6 вершинами.

то все вершины имеют одинаковую степень и такой граф  $G$  называется *регулярным* (или *однородным*) *степени  $r$* . В этом случае говорят о степени графа и пишут  $\deg G = r$ .

Регулярный граф степени 0 совсем не имеет ребер. Если  $G$  — регулярный граф степени 1, то каждая его компонента содержит точно одно ребро; в регулярном графе степени 2 каждая компонента — цикл, и, конечно, обратно. Первые интересные<sup>2)</sup> регулярные графы имеют степень 3; такие графы называются *кубическими*. На рис. 2.11 показаны два регулярных графа с 6 вершинами. Второй из них изоморфен каждому из трех графов, изображенных на рис. 2.5.

**Следствие 2.1 (б).** *Каждый кубический граф имеет четное число вершин.*

Полезно дать названия вершинам с малыми степенями. Вершина  $v$  называется *изолированной*, если  $\deg v = 0$ , и *концевой* (или *вислей*), если  $\deg v = 1$ .

### Задача Рамсея

Широко известна следующая головоломка.

*Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.*

<sup>1)</sup> Напоминаем читателю (см. введение), что в тексте не все теоремы доказываются.

<sup>2)</sup> По своим структурным свойствам. — *Прим. перев.*

Указанную ситуацию можно описать графом  $G$  с шестью вершинами, представляющими людей; смежность двух вершин соответствует знакомству. Требуется показать, что в  $G$  найдутся либо три попарно смежные, либо три попарно несмежные вершины. Дополнение  $\bar{G}$  графа  $G$  имеет в качестве множества вершин множество  $V(G)$ , две вершины в  $G$  смежны тогда и только тогда, когда они

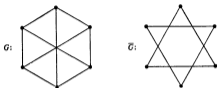


Рис. 2.12. Граф и его дополнение.

не смежны в  $G$ . На рис. 2.12 в графе  $G$  нет треугольников, а в графе  $\bar{G}$  их ровно два <sup>1)</sup>. Самодополнительный граф — это граф, изоморфный своему дополнению. Примеры таких графов приведены на рис. 2.13.



Рис. 2.13. Наименьшие нетривиальные самодополнительные графы.

В полном графе  $K_p$  каждая пара его  $p$  вершин <sup>2)</sup> смежна. Таким образом, граф  $K_p$  имеет  $\binom{p}{2}$  ребер и является регулярным степени  $p-1$ . Граф  $K_3$  — треугольник. Графы  $\bar{K}_p$  — вполне несвязные (или регулярные степени 0).

В этих терминах головоломку можно сформулировать так:

**Теорема 2.2.** Если  $G$  — граф с шестью вершинами, то либо  $G$ , либо  $\bar{G}$  содержит треугольник.

**Доказательство.** Пусть  $v$  — произвольная вершина графа  $G$ , имеющего шесть вершин. Так как вершина  $v$  с любой из осталь-

<sup>1)</sup> Граф  $\bar{G}$  на рис. 2.12, являющийся объединением двух треугольников, называется графом Давида.

<sup>2)</sup> Поскольку  $V$  — непустое множество, то  $p \geq 1$ . Некоторые авторы допускают существование «пустого графа» (который мы обозначили бы через  $K_0$ , если бы были согласны с его существованием). В результате им приходится изучать свойства пустого графа, а некоторые теоремы формулировать только для непустых графов. Поэтому мы не видим необходимости вводить это понятие.

ных пяти вершин смежна или в  $G$ , или в  $\bar{G}$ , то, не теряя общности, можно предположить, что вершины  $u_1, u_2, u_3$  смежны с  $v$  в  $G$ . Если какие-либо две из вершин  $u_1, u_2, u_3$  смежны в  $G$ , то вместе с  $v$  они образуют треугольник. Если никакие две из них не смежны в  $G$ , то в графе  $\bar{G}$  вершины  $u_1, u_2, u_3$  образуют треугольник.

Обобщая теорему 2.2, естественно поставить вопрос: каково наименьшее целое число  $r(m, n)$ , для которого каждый граф с  $r(m, n)$  вершинами содержит  $K_m$  или  $\bar{K}_n$ ?

Числа  $r(m, n)$  называются числами Рамсея<sup>1)</sup>. Ясно, что  $r(m, n) = r(n, m)$ . Задача, связанная с нахождением чисел Рамсея, остается нерешенной, хотя известна простая верхняя оценка, полученная Эрдёшем и Секерешем [1]:

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \quad (2.2)$$

Постановка этой задачи вытекает из теоремы Рамсея. Бесконечный граф<sup>2)</sup> имеет бесконечное множество вершин и не содержит кратных ребер и петель. Рамсей [1] доказал (на языке теории множеств), что каждый бесконечный граф содержит  $\aleph_0$  попарно смежных вершин или  $\aleph_0$  попарно несмежных вершин.

Таблица 2.1

		Числа Рамсея					
		m					
n	m	2	3	4	5	6	7
	2		2	3	4	5	6
3		3	6	9	14	18	23
4		4	9	18			

Все известные числа Рамсея приведены в табл. 2.1 (взяты из обзорной статьи Гравера и Якеля [1]).

### Экстремальные графы

Среди первых результатов в одном из направлений теории графов — теории экстремальных графов (см. Эрдёш [2]) — можно отметить следующую известную теорему Турана [1]. Как обычно, пусть  $\lfloor r \rfloor$  — наибольшее целое число, не превышающее действительного числа  $r$ , а  $\lceil r \rceil = -\lfloor -r \rfloor$  есть наименьшее целое число, не меньшее  $r$ .

<sup>1)</sup> Доказательство существования чисел  $r(m, n)$  для любых натуральных  $m$  и  $n$  см., например, у М. Холла [1].

<sup>2)</sup> Отметим, что по нашему определению бесконечный граф не является графом. Имеется обзорная статья о бесконечных графах: Нэш-Вильямс [4].

**Теорема 2.3.** *Наибольшее число ребер у графов, имеющих  $p$  вершин и не содержащих треугольников, равно  $\lfloor p^2/4 \rfloor$ .*

**Доказательство.** Утверждение очевидно для малых значений  $p$ . Доказательство по индукции можно дать отдельно для нечетных и для четных  $p$ ; здесь будет рассмотрен только случай четных значений  $p$ . Предположим, что утверждение справедливо для всех четных значений  $p \leq 2n$ . Докажем его для  $p=2n+2$ . Итак, пусть  $G$  — граф с  $p=2n+2$  вершинами, не содержащий треугольников. Поскольку граф  $G$  не является вполне несвязным, то в нем существуют две смежные вершины  $u$  и  $v$ . В подграфе  $G' = G - \{u, v\}$  имеется  $2n$  вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе  $G'$  самое большее  $\lfloor 4n^2/4 \rfloor = n^2$  ребер. Сколько еще ребер может быть в графе  $G$ ? В графе  $G$  нет такой вершины  $w$ , что вершины  $u$  и  $v$  одновременно смежны с  $w$ , т. е. вершины  $u, v$  и  $w$  образуют в графе  $G$  треугольник. Таким образом, если вершина  $u$  смежна с  $k$  вершинами графа  $G'$ , то вершина  $v$  может быть смежна самое большее с  $2n-k$  вершинами. Поэтому в графе  $G$  не больше чем

$$n^2 + k + (2n - k) + 1 = n^2 + 2n + 1 = p^2/4 = \lfloor p^2/4 \rfloor$$

ребер.

Для завершения доказательства осталось установить, что для каждого четного  $p$  существует  $(p, p^2/4)$ -граф, не содержащий треугольников. Такой граф можно образовать следующим образом: возьмем два множества  $V_1$  и  $V_2$ , каждое из которых имеет  $p/2$  вершин, и соединим каждую вершину из  $V_1$  с каждой вершиной из  $V_2$ . Для  $p=6$  соответствующий граф  $G_1$  приведен на рис. 2.5.

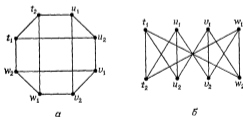


Рис. 2.14. Двудольный граф.

**Двудольный граф** (или **биграф**<sup>1)</sup>)  $G$  — это граф, множество вершин  $V$  которого можно разбить на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  таким образом, что каждое ребро графа  $G$  соединяет вершины из разных множеств (будем говорить, что ребра графа  $G$  соединяют множества  $V_1$  и  $V_2$ ). Например, граф, представленный на рис. 2.14, а, можно

<sup>1)</sup> В литературе встречаются и другие термины для этого понятия, например бихроматический граф, простой граф, четный граф, граф паросочетаний.

нарисовать так, как показано на рис. 2.14, б, чтобы подчеркнуть, что этот граф — двудольный.

Если граф  $G$  содержит все ребра, соединяющие множества  $V_1$  и  $V_2$ , то этот граф называется *полным двудольным*. Если при этом в множестве  $V_1$  имеется  $m$  вершин, а в  $V_2$  имеется  $n$  вершин, то будем писать  $G = K_{m,n} = K(m, n)$ . *Звездой*<sup>1)</sup> называется полный двудольный граф  $K_{1,n}$ . Понятно, что в графе  $K_{m,n}$  имеется  $mn$  ребер. Поэтому, если  $p$  четно, то граф  $K(p/2, p/2)$  содержит  $p^2/4$  ребер; если  $p$  нечетно, то граф  $K(\lfloor p/2 \rfloor, \lceil p/2 \rceil)$  содержит  $\lfloor p/2 \rfloor \lceil p/2 \rceil = \lfloor p^2/4 \rfloor$  ребер. В каждом из таких графов нет треугольников, что следует из теоремы Кёнига [2, стр. 170].

**Теорема 2.4.** *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четны.*

**Доказательство.** Если  $G$  — двудольный граф, то множество его вершин  $V$  можно разбить на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  таким образом, что любое ребро этого графа соединяет некоторую вершину из множества  $V_1$  с некоторой вершиной из  $V_2$ . Поэтому каждый простой цикл  $v_1 v_2 \dots v_n v_1$  графа  $G$  содержит вершины из  $V_1$ , скажем, с нечетными номерами и вершины из  $V_2$  с четными, так что длина  $n$  этого цикла является четным числом.

Чтобы доказать обратное, предположим, не теряя общности, что  $G$  — связный граф (поскольку каждую компоненту графа  $G$  можно рассматривать отдельно). Возьмем произвольную вершину  $v_1 \in V$  и обозначим через  $V_1$  множество, состоящее из  $v_1$  и всех вершин, находящихся в графе  $G$  на четном расстоянии от  $v_1$ ; пусть  $V_2 = V - V_1$ . Так как все простые циклы графа  $G$  четны, то каждое его ребро соединяет множества  $V_1$  и  $V_2$ . В самом деле, если существует ребро  $uv$ , соединяющее две вершины из множества  $V_2$ , то объединение геодезических, идущих из вершины  $v_1$  к вершине  $v$ , а также из вершины  $v_1$  к вершине  $u$ , вместе с ребром  $uv$  образует цикл нечетной длины; мы пришли к противоречию.

Теорема 2.3 является первым примером решения одной из задач «теории экстремальных графов»: для данного графа  $H$  найти  $ex(p, H)$  — наибольшее число ребер, которое может быть в графе, имеющем  $p$  вершин и не содержащем запрещенный подграф  $H$ . Таким образом, в теореме 2.3 утверждается, что  $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$ . Приведем некоторые другие подобные результаты (Эрдёш [3]):

$$ex(p, C_p) = 1 + \frac{p(p-1)}{2}, \quad (2.3)$$

$$ex(p, K_4 - x) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor, \quad (2.4)$$

$$ex(p, K_{1,3} + x) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor. \quad (2.5)$$

<sup>1)</sup> В случае  $n=3$  Гоффман [1] называет  $K_{1,n}$  «лапой» (claw), а Эрдёш и Реньи [1] — «роздой» (cherry).

Туран [1] обобщил доказанную им теорему 2.3, определив значения функции  $ex(p, K_n)$  для всех  $n \leq p$ :

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \binom{r}{2}, \quad (2.6)$$

где  $p \equiv r \pmod{n-1}$  и  $0 \leq r < n-1$ . Другое доказательство этого результата см. у Моцкина и Штрауса [11].

Известно также, что каждый  $(2n, n^2+1)$ -граф содержит  $n$  треугольников, каждый  $(p, 3p-5)$ -граф содержит два простых цикла, не имеющих общих ребер (для  $p \geq 6$ ), и каждый  $(3n, 3n^2+1)$ -граф содержит  $n^2$  простых циклов длины 4.

### Графы пересечений

Пусть  $S$  — множество, а  $F = \{S_1, \dots, S_p\}$  — семейство его различных непустых подмножеств, объединение которых дает  $S$ . *Граф пересечений* семейства  $F$  — обозначается  $\Omega(F)$  — определяется множеством  $V(\Omega(F)) = F$  и условием « $S_i$  и  $S_j$  смежны тогда и только тогда, когда  $i \neq j$  и  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ ». Граф  $G$  называется *графом пересечений на множестве  $S$* , если существует семейство  $F$  подмножеств из  $S$ , для которого  $G \cong \Omega(F)$ . Сформулируем теперь один из первых результатов о графах пересечений (Марчевский [1]).

**Теорема 2.5.** *Любой граф есть граф пересечений.*

**Доказательство.** Для каждой вершины  $v_i$  графа  $G$  — обозначим через  $S_i$  объединение  $\{v_i\}$  и множества ребер, инцидентных  $v_i$ . Тогда ясно, что  $G$  изоморфен графу  $\Omega(F)$ , где  $F = \{S_i\}$ .

Определенное выше представление графа приводит еще к одному инварианту. *Числом пересечения*  $\omega(G)$  данного графа  $G$  называется минимальная из мощностей таких множеств  $S$ , что  $G$  есть граф пересечений на  $S$ .

**Следствие 2.5 (а).** *Если  $G_{p,q}$  — связный граф и  $p \geq 3$ , то  $\omega(G) \leq q$ .*

**Доказательство.** В этом случае из множеств  $S_i$ , которые используются в доказательстве теоремы, можно удалить вершины, так что  $S = X(G)$ .

**Следствие 2.5 (б).** *Если  $G_{p,q}$  имеет  $p_0$  изолированных вершин, то  $\omega(G) \leq q + p_0$ .*

В следующей теореме приводятся условия, при которых достигается эта верхняя оценка.

**Теорема 2.6.** *Если  $G_{p,q}$  — связный граф и  $p > 3$ , то  $\omega(G_{p,q}) = q$  тогда и только тогда, когда в  $G_{p,q}$  нет треугольников.*

**Доказательство.** Докажем сначала достаточность. Так как  $\omega(G_{p,q}) \leq q$  (следствие 2.5 (а)), то остается показать, что  $\omega(G_{p,q}) \geq q$  для любого связного графа без треугольников, имеющего по крайней мере четыре вершины. Из определения числа пересечения получаем, что  $G$  изоморфен графу пересечений  $\Omega(F)$  на множестве  $S$ , в котором  $|S| = \omega(G)$  элементов. Для каждой вершины  $v_i$  графа  $G$  обозначим через  $S_i$  соответствующее ей множество. Так как в  $G$  нет треугольников, то ни один элемент из  $S$  не может встречаться более чем в двух множествах  $S_i$  и  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $v_i v_j$  — ребро графа  $G$ . Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между ребрами графа  $G$  и теми элементами из  $S$ , которые принадлежат ровно двум множествам  $S_i$ . Следовательно,  $\omega(G) = |S| \geq q$ .

Для доказательства необходимости предположим, что  $G$  имеет треугольник. Обозначим через  $G_1$  максимальный остовный граф графа  $G$ , не имеющий треугольников. Используя доказанную только что достаточность, получаем, что  $\omega(G_1) = q_1 = |X(G_1)|$ . Предположим, что  $G_1 = \Omega(F)$ , где  $F$  — семейство подмножеств некоторого множества  $S$ , содержащего  $q_1$  элементов. Пусть  $x$  — ребро графа  $G$ , не принадлежащее  $G_1$ ; рассмотрим граф  $G_2 = G_1 + x$ . Поскольку  $G_1$  — максимальный остовный граф без треугольников, то в  $G_2$  должен быть по крайней мере один треугольник, скажем  $u_1 u_2 u_3$ , где  $x = u_1 u_2$ . Обозначим через  $S_1, S_2, S_3$  подмножества в  $S$ , соответствующие  $u_1, u_2, u_3$ . Если вершина  $u_2$  смежна только с  $u_1$  и  $u_3$  в  $G_1$ , то заменим  $S_2$  на произвольный элемент из  $S_1 \cap S_3$  и добавим этот элемент к  $S_2$ . Если  $u_2$  смежна ещё с какой-то вершиной, то заменим  $S_2$  на объединение  $S_2$  и любого элемента из  $S_1 \cap S_3$ . В каждом из возможных случаев приходим к такому семейству  $F'$  различных подмножеств множества  $S$ , что  $G_2 = \Omega(F')$ . Таким образом,  $\omega(G_2) = q_1$ , в то время как  $|X(G_2)| = q_1 + 1$ . Если  $G_2 \cong G$ , то доказательство закончено.

Остался случай  $G_2 \neq G$ . Обозначим  $|X(G)| - |X(G_2)| = q_0$ . Из предыдущего вытекает, что в этом случае  $G$  — граф пересечений на некотором множестве с  $q_1 + q_0$  элементами. Однако  $q_1 + q_0 = q - 1$ . Следовательно,  $\omega(G) < q$ , и теорема доказана.

Число пересечения графа ранее изучалось Эрдешем, Гудманом и Поша [1]. Они получили наилучшую верхнюю оценку числа пересечения для графов с заданным числом вершин.

**Теорема 2.7.** Для любого графа  $G$  с  $p \geq 4$  вершинами  $\omega(G) \leq \lfloor p^2/4 \rfloor$ .

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и теоремы 2.3.

Для произвольного графа  $G$  существует граф пересечений, определяемый только полными подграфами графа  $G$ . Клика графа — это его любой максимальный полный подграф. Графом клик дан-

ного графа  $G$  называется граф пересечений семейства всех клик графа  $G$ . Например, граф  $G$  на рис. 2.15 имеет  $K_4$  в качестве своего графа клик. Однако неверно, что каждый граф есть граф клик некоторого графа; так, Хамелинк [1] показал, что граф  $G$  на рис. 2.15 не является графом клик никакого графа. Робертс и Спенсер [1] дали полное описание графов клик:

**Теорема 2.8.** *Граф  $G$  является графом клик тогда и только тогда, когда он содержит семейство  $F$  полных подграфов, объединение которых дает  $G$ , таких, что если любая пара этих полных подграфов некоторого подсемейства  $F'$  имеет непустое пересечение, то пересечение всех множеств из  $F'$  также не пусто.*

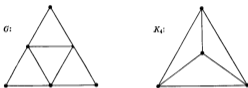


Рис. 2.15. Граф и его граф клик.

**Замечание.** Частный класс графов пересечений был выделен Бензером [1] при решении задач генетики. Он высказал предположение, что нить генов, представляющую бактериальную хромосому, можно рассматривать как замкнутый интервал на действительной оси. Хайош [1] независимо предположил, что с каждым конечным семейством  $F$  интервалов  $S_i$  можно связать граф, который в терминах графов пересечений есть  $\Omega(F)$ . Под *графом интервалов* понимается граф, изоморфный некоторому графу  $\Omega(F)$ , где  $F$  — семейство интервалов. Графы интервалов изучались Боландом и Леккеркеркером [1], а также Гилмором и Гоффманом [1].

### Операции над графами

Естественно стремиться представить структуру рассматриваемого графа с помощью графов меньшего размера и более простой структуры. Полезно дать краткие обозначения для тех графов, которые при этом часто встречаются. Уже были введены обозначения для полного графа  $K_p$  и его дополнения  $\bar{K}_p$ , простого цикла  $C_n$  и простой цепи  $P_n$ , а также полного двудольного графа  $K_{m,n}$ .

В этом разделе графы  $G_1$  и  $G_2$  имеют непересекающиеся множества вершин  $V_1$  и  $V_2$  и непересекающиеся множества ребер  $X_1$  и  $X_2$ .



Объединением  $G_1 \cup G_2$  таких графов<sup>1)</sup> называется граф, множеством вершин которого является  $V = V_1 \cup V_2$ , а множество ребер есть  $X = X_1 \cup X_2$ . Соединение графов, введенное Зыковым [11] — обозначается  $G_1 + G_2$ , — состоит из  $G_1 \cup G_2$  и всех ребер, соединяющих  $V_1$  и  $V_2$ . В частности,  $K_{m,n} = K_m + \bar{K}_n$ . Эти операции иллюстрируются на рис. 2.16, где  $G_1 = K_2 = P_2$  и  $G_2 = K_{1,2} = P_2$ .



Рис. 2.16. Объединение и соединение двух графов.

Если  $G$  — связный граф, то через  $nG$  обозначается граф с  $n$  компонентами, каждая из которых изоморфна  $G$ . Каждый граф можно записать в виде  $\cup n_i G_i$ , где  $G_i$  отличается от  $G_j$  для  $i \neq j$  (Харари и Палмер [14]). Например, несвязный граф, представленный на рис. 2.10, можно записать в виде  $4K_1 \cup 3K_2 \cup 2K_3 \cup K_{1,2}$ .

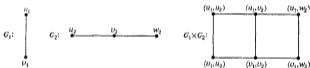


Рис. 2.17. Произведение двух графов.

Имеется несколько операций над графами  $G_1$  и  $G_2$ , которые образуют граф  $G$  с множеством вершин, равным декартову произведению  $V_1 \times V_2$ . Среди них произведение (или декартово произведение, см. Сабидусси [5]), композиция (Харари [12]) (или лексикографическое произведение, см. Сабидусси [6]). Другие операции<sup>2)</sup> этого типа приводятся в работе Харари и Вилкокса [1].

Чтобы определить произведение  $G_1 \times G_2$ , рассмотрим любые две вершины  $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$  из  $V = V_1 \times V_2$ . Вершины  $u$  и  $v$  смежны в  $G_1 \times G_2$  тогда и только тогда, когда  $[u_1 = v_1 \text{ и } u_2 \text{ adj } v_2]$  или  $[u_2 = v_2 \text{ и } u_1 \text{ adj } v_1]$ . Произведение графов  $G_1 = P_2$  и  $G_2 = P_2$  показано на рис. 2.17.

<sup>1)</sup> Разумеется, объединение двух «пересекающихся» графов определяется аналогичным образом.

<sup>2)</sup> Например, тензорное произведение (Вейцел [1], Мак-Эндрю [1], Харари и Траут [1], Бруальди [1]) и другие типы произведений, определенные в работах Берга [2], Оре [4], Теха и Япа [1].

Композиция  $G = G_1[G_2]$  также имеет  $V = V_1 \times V_2$  в качестве множества вершин и вершина  $u = (u_1, u_2)$  смежна с  $v = (v_1, v_2)$  тогда и только тогда, когда  $[u_1 \text{ adj } v_1]$  или  $[u_1 = v_1 \text{ и } u_2 \text{ adj } v_2]$ . Для графов  $G_1$  и  $G_2$ , представленных на рис. 2.17, две композиции  $G_1[G_2]$  и  $G_2[G_1]$ , которые, очевидно, не изоморфны, показаны на рис. 2.18.

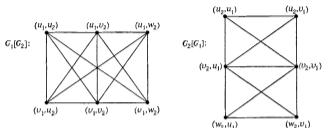


Рис. 2.18. Две композиции графов.

Если  $G_1$  и  $G_2$  — это  $(p_1, q_1)$ - и  $(p_2, q_2)$ -графы соответственно, то для каждой из определенных выше операций можно найти число вершин и число ребер в получающемся графе (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2

Бинарные операции над графами

Операция	Число вершин	Число ребер
Объединение $G_1 \cup G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2$
Соединение $G_1 + G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2 + p_1 p_2$
Произведение $G_1 \times G_2$	$p_1 p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$
Композиция $G_1 [G_2]$	$p_1 p_2$	$p_1 q_2 + p_2^2 q_1$

Полный  $n$ -дольный граф  $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$  определяется как последовательное соединение  $\bar{K}_{p_1} + \bar{K}_{p_2} + \dots + \bar{K}_{p_n}$ . Ясно, что в этом графе  $\sum p_i$  вершин и  $\sum_{i < j} p_i p_j$  ребер.

Важный класс графов, называемых кубами, наиболее естественно описывается с помощью произведений. Рекурсивно определяется  $n$ -мерный куб  $Q_n$ :  $Q_2 = K_2$  и  $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$ . Таким образом,  $Q_n$  имеет  $2^n$  вершин, которые можно представлять наборами  $a_1 a_2 \dots a_n$ , где  $a_i$  равно 0 или 1. Две вершины (или точки) куба  $Q_n$  смежны, если их двоничные представления отличаются только в одной

позиции (в одном разряде). На рис. 2.19 представлены 2-мерный и 3-мерный кубы.

Если графы  $G$  и  $H$  таковы, что отождествление любой вершины графа  $G$  с произвольной вершиной графа  $H$  приводит к одному и тому же графу (с точностью до изоморфизма), то граф, получаемый с

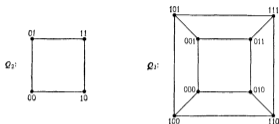


Рис. 2.19. Два куба.

помощью описанного отождествления вершин, обозначим через  $G \cdot H$ . Например, на рис. 2.16  $G_2 = K_2 \cdot K_2$ , а на рис. 2.7  $G - v_3 = K_3 \cdot K_2$ .

### Упражнения <sup>1)</sup>

2.1. Нарисовать все графы с пятью вершинами. (Затем сравнить с диаграммами, данными в приложении I.)

2.2. Восстановить граф  $G$  по его подграфам  $G_i = G - v_i$ , где  $G_1 = K_4 - x$ ,  $G_2 = P_3 \cup K_1$ ,  $G_3 = K_{1,3}$ ,  $G_4 = G_5 = K_{1,3} + x$ .

2.3. Замкнутый маршрут нечетной длины содержит простой цикл.

2.4. Доказать или опровергнуть:

- объединение любых двух различных цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл;
- объединение любых двух различных простых цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

2.5. Граф  $G$  связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества  $V$  на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  существует ребро графа  $G$ , соединяющее некоторую вершину из  $V_1$  с некоторой вершиной из  $V_2$ .

2.6. Если  $d(u, v) = m$  в графе  $G$ , то чему равно  $d(u, v)$  в графе  $G^n$ ?

2.7. Граф  $H$  называется *квадратным корнем* графа  $G$ , если  $H^2 = G$ . Граф  $G$  с  $p$  вершинами имеет квадратный корень тогда и только тогда, когда он содержит  $p$  таких полных подграфов  $G_i$ , что

- $v_i \in G_i$ ,
- $v_i \in G_j$  тогда и только тогда, когда  $v_j \in G_i$ ,
- каждое ребро графа  $G$  принадлежит некоторому подграфу  $G_i$ .

(Мухомладная [1])

<sup>1)</sup> Если в упражнении не сказано явно, что требуется делать, то его надо доказать. Жирным шрифтом набраны номера более трудных задач, а самые трудные отмечены звездочкой.

2.8. Конечное метрическое пространство  $(S, d)$  изоморфно пространству расстояний некоторого графа тогда и только тогда, когда

- 1) расстояние между любыми двумя вершинами из  $S$  есть целое число,
- 2) если  $d(u, v) \geq 2$ , то найдется такая третья вершина  $w$ , что  $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$ .

(Кей и Чартрэнд [1])

2.9. В связном графе любые две длиннейшие простые цепи имеют общую вершину.

2.10. Неверно, что в каждом связном графе все длиннейшие простые цепи имеют общую вершину. Показать, что граф на рис. 2.20 подтверждает это.

(Вальтер [1])

2.11. Каждый граф с диаметром  $d$  и обхватом  $2d+1$  регулярен.

2.12. Пусть  $G$  будет  $(p, q)$ -графом, степени вершин которого равны  $k$  или  $k+1$ . Если  $G$  имеет  $p_k > 0$  вершин степени  $k$  и  $p_{k+1}$  вершин степени  $k+1$ , то  $p_k = (k+1)p - 2q$ .

2.13. Построить кубический граф с  $2n$  вершинами ( $n \geq 3$ ), не имеющий треугольников.

2.14. Если граф  $G$  имеет  $p$  вершин и  $\delta(G) \geq (p-1)/2$ , то он связан.

2.15. Если  $G$  — несвязный граф, то  $\bar{G}$  — связный.

2.16. Каждый самодополнительный граф имеет  $4n$  или  $4n+1$  вершин.

2.17. Нарисовать 4 самодополнительных графа с 8 вершинами.

2.18. Каждый нетривиальный самодополнительный граф имеет диаметр 2 или 3. (Рингель [2], Закс [1])

2.19. Числа Рамсея удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1).$$

(Эрдёш [3])

2.20. Найти наибольшее число ребер в графе с  $p$  вершинами, не имеющем четных простых циклов.

2.21. Найти экстремальные графы, не содержащие  $K_4$ .

(Туран [1])

2.22. Каждый  $(p, p+4)$ -граф содержит два простых цикла, не имеющих общих ребер.

(Эрдёш [2])

2.23. Единственным  $(p, \lfloor p^2/4 \rfloor)$ -графом, не содержащим треугольников, является  $K(\lfloor p/2 \rfloor, \lfloor p/2 \rfloor)$ .

2.24. Доказать или опровергнуть: единственным графом с  $p$  вершинами и наибольшим числом пересечения является  $K(\lfloor p/2 \rfloor, \lfloor p/2 \rfloor)$ .

2.25. Наименьший граф, в котором каждое ребро принадлежит по крайней мере двум треугольникам и ни одно ребро не принадлежит  $K_4$ , имеет 8 вершин и 19 ребер. Построить его.

(Камерон и Митчэм)

2.26. Найти  $\omega(K_p)$ ,  $\omega(C_n + K_1)$ ,  $\omega(C_n + C_n)$  и  $\omega(\bar{C}_n)$ .

2.27. Доказать или опровергнуть:

- а) число клик графа  $G$  не больше  $\omega(G)$ ;
- б) число клик графа  $G$  не меньше  $\omega(G)$ .

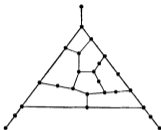


Рис. 2.20. Пример к упражнению 2.10.

**2.28.** Доказать, что наибольшее число клик в графе с  $p$  вершинами равно  $2^{p-2} 3^{r+s}$ , где  $p-4=3r+s$ ,  $s=0, 1, 2$ .

(Мун и Мозер [1])

2.29. Простой цикл длины 4 не может быть порожденным подграфом графа интервалов.

2.30. Пусть  $s(n)$  — наибольшее число точек  $n$ -мерного куба, которые порождают простой цикл. Проверить следующую таблицу:

$n$	2	3	4	5
$s(n)$	4	6	8	14

(Данцер и Кли [1])

2.31. Доказать или опровергнуть: если  $G_1$  и  $G_2$  — регулярные графы, то таковы же графы

$$\text{а) } G_1 + G_2, \text{ б) } G_1 \times G_2, \text{ в) } G_1 [G_2]$$

2.32. Доказать или опровергнуть: если  $G_1$  и  $G_2$  — двудольные графы, то таковы же графы

$$\text{а) } G_1 + G_2, \text{ б) } G_1 \times G_2, \text{ в) } G_1 [G_2].$$

2.33. Доказать или опровергнуть:

$$\text{а) } \overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}, \text{ б) } \overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}, \text{ в) } \overline{G_1 [G_2]} = \overline{G_1} [G_2].$$

2.34. а) Подсчитать число простых циклов в графах  $C_n + K_1$ ,  $K_p$ ,  $K_{m,n}$ .

(Харари и Манвел [1])

б) Каково наибольшее число не имеющих общих ребер простых циклов в указанных выше графах?

(Чартрэнд, Геллер и Хедетнени [2])

**2.35.** Конъюнкцией  $G_1 \wedge G_2$  называется граф с множеством вершин  $V_1 \times V_2$ , а вершины  $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$  в нем смежны тогда и только тогда, когда  $u_1 \text{ adj } v_1$  и  $u_2 \text{ adj } v_2$ . Соотношение  $G_1 \times G_2 \cong G_1 \wedge G_2$  выполняется тогда и только тогда, когда  $G_1 \cong G_2 \cong C_{2m+1}$ .

(Миллер [1])

2.36. Конъюнкция  $G_1 \wedge G_2$  двух связных графов связна тогда и только тогда, когда  $G_1$  или  $G_2$  имеет нечетный простой цикл.

\*2.37. Регулярный граф степени  $r$ , имеющий  $r^2+1$  вершин и диаметр 2, существует для  $r=2, 3, 7$  и, возможно, 57.

(Гоффман и Синглтон [1])

\*2.38. Граф  $G$  с  $p=2n$  вершинами обладает следующим свойством: для каждого множества  $S$  с  $n$  вершинами порожденные подграфы  $\langle S \rangle$  и  $\langle V-S \rangle$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $G$  совпадает с одним из графов  $K_{2n}$ ,  $K_n \times K_n$ ,  $2K_n$ ,  $2C_n$  или с их дополнениями.

(Келли П. и Мерриел [1])

\*2.39. Последовательность  $v_1, v_2, \dots, v_m$  вершин единичного  $n$ -мерного куба  $Q_n$  называется цепью, если  $\rho(v_i, v_{i+1})=1$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ),  $\rho(v_i, v_j) > 1$  при  $|i-j| > 1$ , где  $\rho(v, w)$  — расстояние Хэмминга между вершинами  $v$  и  $w$  в  $Q_n$ . Показать, что длина  $l(n)$  максимальной цепи больше  $C \cdot 2^n$ , где  $C$  — константа.

(Евдокимов [1])

---

Не просто копия отца, сам живой  
отец <sup>1)</sup>.

Эдмунд Бёрк <sup>2)</sup>

Некоторые связные графы можно сделать несвязными, удалив одну вершину, которая называется точкой сочленения. Выделение таких вершин сильно помогает в изучении структуры связного графа. Ребра с аналогичным свойством называются мостами. Части рассматриваемого графа вместе с его точками сочленения — это его блоки. После определения этих трех понятий будут введены и изучены два новых графа, связанных с данным графом — граф его блоков и граф его точек сочленения.

### Точки сочленения, мосты и блоки

*Точкой сочленения* графа называется вершина, удаление которой увеличивает число компонент; ребро с таким же свойством называется *мостом*. Таким образом, если  $v$  — точка сочленения связного графа  $G$ , то граф  $G-v$  не связан. *Неразделимым* графом называется связный, непустой, не имеющий точек сочленения граф. *Блок* графа — это его максимальный неразделимый подграф. Если  $G$  — неразделимый граф, то часто он сам называется блоком.

На рис. 3.1  $v$  — точка сочленения, а  $w$  нет,  $x$  — мост, а  $y$  нет; отдельно приведены четыре блока графа  $G$ . Каждое ребро графа принадлежит точно одному из его блоков, так же как и каждая вершина, не являющаяся ни изолированной, ни точкой сочленения. Далее, ребра любого простого цикла графа  $G$  также принадлежат только одному блоку. Отсюда, в частности, следует, что блоки графа разбивают его ребра и простые циклы на множества, которые можно рассматривать как множества ребер. В первых трех теоремах этой главы устанавливаются несколько эквивалентных условий, обеспечивающих существование у графа точки сочленения и моста и неразделимость графа.

<sup>1)</sup> В оригинале идиома "a chip of the old block" — весь в отца.— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Эдмунд Бёрк (1729—1797) — английский государственный деятель и писатель.— *Прим. перев.*

**Теорема 3.1.** Пусть  $v$  — вершина связного графа  $G$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $v$  — точка сочленения графа  $G$ ;
- (2) существуют такие вершины  $u$  и  $w$ , отличные от  $v$ , что  $v$  принадлежит любой простой ( $u$ - $w$ )-цепи;
- (3) существует разбиение множества вершин  $V - \{v\}$  на такие два подмножества  $U$  и  $W$ , что для любых вершин  $u \in U$  и  $w \in W$  вершина  $v$  принадлежит любой простой ( $u$ - $w$ )-цепи.

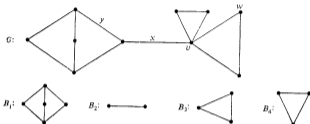


Рис. 3.1. Граф и его блоки.

**Доказательство.** (1) влечет (3). Так как  $v$  — точка сочленения графа  $G$ , то граф  $G - v$  не связан и имеет по крайней мере две компоненты. образуем разбиение  $V - \{v\}$ , отнеся к  $U$  вершины одной из этих компонент, а к  $W$  — вершины всех остальных компонент. Тогда любые две вершины  $u \in U$  и  $w \in W$  лежат в разных компонентах графа  $G - v$ . Следовательно, любая простая ( $u$ - $w$ )-цепь графа  $G$  содержит  $v$ .

(3) влечет (2). Это немедленно следует из того, что (2) — частный случай утверждения (3).

(2) влечет (1). Если  $v$  принадлежит любой простой цепи в  $G$ , соединяющей  $u$  и  $w$ , то в  $G$  нет простой цепи, соединяющей эти вершины в  $G - v$ . Поскольку  $G - v$  не связан, то  $v$  — точка сочленения графа  $G$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $x$  — ребро связного графа  $G$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $x$  — мост графа  $G$ ;
- (2)  $x$  не принадлежит ни одному простому циклу графа  $G$ ;
- (3) в  $G$  существуют такие вершины  $u$  и  $v$ , что ребро  $x$  принадлежит любой простой цепи, соединяющей  $u$  и  $v$ ;
- (4) существует разбиение множества  $V$  на такие подмножества  $U$  и  $W$ , что для любых вершин  $u \in U$  и  $w \in W$  ребро  $x$  принадлежит любой простой ( $u$ - $w$ )-цепи.

**Теорема 3.3.** Пусть  $G$  — связный граф с не менее чем тремя вершинами. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  — блок;
- (2) любые две вершины графа  $G$  принадлежат некоторому общему простому циклу;
- (3) любая вершина и любое ребро графа  $G$  принадлежат некоторому общему простому циклу;
- (4) любые два ребра графа  $G$  принадлежат некоторому общему простому циклу;
- (5) для любых двух вершин и любого ребра графа  $G$  существует простая цепь, соединяющая эти вершины и включающая данное ребро;
- (6) для любых трех различных вершин графа  $G$  существует простая цепь, соединяющая две из них и проходящая через третью;
- (7) для каждой трех различных вершин графа  $G$  существует простая цепь, соединяющая две из них и не проходящая через третью.

**Доказательство.** (1) влечет (2). Пусть  $u, v$  — различные вершины графа  $G$ , а  $U$  — множество вершин, отличных от  $u$ , которые лежат на простом цикле, содержащем  $u$ . Поскольку в  $G$  по крайней мере три вершины и нет точек сочленения, то в  $G$  нет также мостов. Значит, каждая вершина, смежная с  $u$ , принадлежит  $U$ , т. е.  $U$  не пусто.

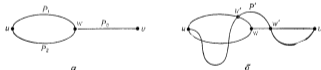


Рис. 3.2. Простые цепи в блоках.

Предположим, что  $v$  не принадлежит  $U$ . Пусть  $w$  — вершина в  $U$ , для которой расстояние  $d(w, v)$  минимально. Пусть  $P_0$  — кратчайшая простая ( $w-v$ )-цепь, а  $P_1$  и  $P_2$  — две простые ( $u-w$ )-цепи цикла, содержащего  $u$  и  $w$  (рис. 3.2, а). Так как  $w$  не является точкой сочленения, то существует простая ( $u-v$ )-цепь  $P'$ , не содержащая  $w$  (рис. 3.2, б). Обозначим через  $w'$  ближайшую к  $u$  вершину, принадлежащую  $P'$ , которая также принадлежит  $P_0$ , и через  $u'$  последнюю вершину ( $u-w'$ )-подцепи в  $P'$ , которая принадлежит или  $P_1$ , или  $P_2$ . Не теряя общности, предположим, что  $u'$  принадлежит  $P_1$ .

Пусть  $Q_1$  — простая ( $u-w'$ )-цепь, содержащая ( $u-u'$ )-подцепь цепи  $P_1$  и ( $u'-w'$ )-подцепь цепи  $P'$ , а  $Q_2$  — простая ( $u-w'$ )-подцепь, содержащая  $P_2$  вслед за ( $w-w'$ )-подцепью цепи  $P_0$ . Ясно, что  $Q_1$  и  $Q_2$  —



непересекающиеся простые  $(u-w')$ -цепи. Вместе они образуют простой цикл, так что  $w'$  принадлежит  $U$ . Поскольку  $w'$  принадлежит кратчайшей цепи,  $d(w', v) < d(w, v)$ . Это противоречит выбору  $w$  и, следовательно, доказывает, что  $u$  и  $v$  лежат на одном простом цикле.

(2) *влечет* (3). Пусть  $u$  — вершина,  $uw$  — ребро графа  $G$ , а  $Z$  — простой цикл, содержащий  $u$  и  $v$ . Простой цикл  $Z'$ , содержащий  $u$  и  $uw$ , можно образовать следующим образом. Если  $w$  лежит на  $Z$ , то  $Z'$  содержит  $uw$  и  $(v-w)$ -подцепь в  $Z$ , содержащую  $u$ . Если  $w$  не лежит на  $Z$ , то существует  $(u-v)$ -цепь  $P$ , не содержащая  $u$ , поскольку иначе по теореме 3.1  $v$  — точка сочленения. Пусть  $u'$  — первая вершина цепи  $P$  в  $Z$ . Тогда  $Z'$  содержит  $uw$  вслед за  $(w-u')$ -подцепью цепи  $P$  и  $(u'-v)$ -цепью в  $Z$ , включающей  $u$ .

(3) *влечет* (4). Доказательство, как в предыдущем случае.

(4) *влечет* (5). Каждая из двух вершин графа  $G$  инцидентна некоторому ребру; соответствующие ребра в силу утверждения (4) лежат на одном простом цикле. Следовательно, любые две вершины графа  $G$  принадлежат одному простому циклу, а отсюда следует (2) и, значит, (3). Пусть  $u$  и  $v$  — различные вершины,  $x$  — ребро графа  $G$ . Из утверждения (3) получаем, что существуют простой цикл  $Z_1$ , содержащий  $u$  и  $x$ , и простой цикл  $Z_2$ , содержащий  $v$  и  $x$ . Таким образом, нужно рассмотреть только случай, когда  $v$  не лежит на  $Z_1$ , а  $u$  не лежит на  $Z_2$ . Начнем идти из  $u$  по  $Z_1$  до тех пор, пока не достигнем первой вершины  $w$  цикла  $Z_2$ , затем пойдем по цепи на  $Z_2$ , которая соединяет  $w$  и  $v$  и содержит  $x$ . Такой обход образует простую цепь, соединяющую  $u$  и  $v$  и содержащую  $x$ .

(5) *влечет* (6). Пусть  $u$ ,  $v$  и  $w$  — различные вершины графа  $G$ , а  $x$  — произвольное ребро, инцидентное  $w$ . Из утверждения (5) вытекает, что существует простая цепь, соединяющая  $u$  и  $v$ , которая содержит  $x$  и, следовательно, должна содержать  $w$ .

(6) *влечет* (7). Пусть  $u$ ,  $v$  и  $w$  — различные вершины графа  $G$ . Из утверждения (6) вытекает, что существует простая  $(u-w)$ -цепь  $P$ , содержащая  $v$ . Ясно, что  $(u-v)$ -подцепь цепи  $P$  не содержит  $w$ .

(7) *влечет* (1). Используя (7), получаем, что для любых двух вершин  $u$  и  $v$  ни одна из остальных вершин не может принадлежать каждой  $(u-v)$ -цепи. Следовательно,  $G$  должен быть блоком.

**Теорема 3.4.** *В любом нетривиальном связном графе найдутся по крайней мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.*

**Доказательство.** Пусть  $u$  и  $v$  — вершины графа  $G$ , максимально удаленные друг от друга, т. е. такие, что  $d(u, v) = d(G)$ . Предположим, что  $v$  — точка сочленения. Тогда существует вершина  $w$ , принадлежащая той компоненте графа  $G - v$ , которая не содержит вершину  $u$ . Значит,  $v$  лежит на любой цепи, соединяющей  $u$  и  $w$ , и поэтому  $d(u, w) > d(u, v)$ , что невозможно. Следовательно,  $v$ , а также  $u$  не являются точками сочленения графа  $G$ .

## Графы блоков и графы точек сочленения

Известны несколько графов пересечений, получаемых из графа  $G$ , которые представляют его структуру. Возьмем блоки графа  $G$  в качестве множеств семейства  $F$ . Тогда граф пересечений  $\Omega(F)$  называется *графом блоков* графа  $G$  и обозначается через  $B(G)$ . Блоки графа  $G$  соответствуют вершинам графа  $B(G)$ , и две вершины графа  $B(G)$  смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им блоки графа  $G$  имеют общую точку сочленения. Для получения графа, вершины которого соответствуют точкам сочленения графа  $G$ , возьмем в качестве множества  $S_i$  (из семейства  $F$ ) объединение всех блоков, содержащих данную точку сочленения  $v_i$ . Полученный с использованием этого семейства  $F$  граф пересечений  $\Omega(F)$  называется *графом точек сочленения* и обозначается  $C(G)$ . Две вершины графа  $C(G)$  смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им точки сочленения графа  $G$  принадлежат одному блоку. Заметим, что  $C(G)$  определяется только для графов  $G$ , имеющих хотя бы одну точку сочленения.

Определенные выше понятия введены в работе Харари [19]. Они иллюстрируются на рис. 3.3.

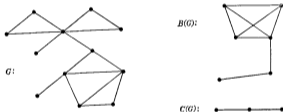


Рис. 3.3. Граф, его граф блоков и его граф точек сочленения.

**Теорема 3.5.** *Граф  $H$  является графом блоков некоторого графа тогда и только тогда, когда каждый блок графа  $H$  — полный граф.*

**Доказательство.** Пусть  $H = B(G)$ ; предположим, что в  $H$  есть блок  $H_i$ , не являющийся полным графом. Тогда в  $H_i$  найдется пара несмежных вершин, лежащая на одном простом цикле  $Z$ , длина которого не меньше 4. Отсюда следует, что объединение блоков графа  $G$ , соответствующих тем вершинам из  $H_i$ , которые лежат на  $Z$ , является связным графом, не имеющим точек сочленения, т. е. это объединение содержится в некотором блоке, что противоречит свойству максимальности блока графа.

Обратно, пусть  $H$  — граф, в котором каждый блок — полный граф. образуем граф  $B(H)$ , а затем новый граф  $G$ , добавляя к каж-

дой вершине  $H_i$  графа  $B(H)$  некоторое количество концевых ребер, равное числу тех вершин блока  $H_i$ , которые не являются точками сочленения графа  $H$ . Легко видеть, что граф  $B(G)$  изоморфен  $H$ .

Ясно, что подобный критерий справедлив для графов точек сочленения.

### Упражнения

- 3.1. Каково наибольшее число точек сочленения в графе с  $p$  вершинами?  
 3.2. Кубический граф имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда он имеет мост.  
 3.3. Наименьшее число вершин в кубическом графе, имеющем мост, равно 10.  
 3.4. Если  $v$  — точка сочленения графа  $G$ , то  $v$  не является точкой сочленения графа  $\bar{G}$ .

(Харари [6])

3.5. Вершина  $v$  графа  $G$  является точкой сочленения тогда и только тогда, когда найдутся такие смежные с  $v$  вершины  $u$  и  $w$ , что  $v$  лежит на любой простой  $(u-w)$ -цепи.

3.6. Доказать или опровергнуть: связный граф  $G$  с  $p \geq 3$  вершинами является блоком тогда и только тогда, когда для любых двух вершин и любого ребра существует простая цепь, соединяющая эти вершины и не проходящая через данное ребро.

3.7. Связный граф с не менее чем двумя ребрами является блоком тогда и только тогда, когда любые два смежных ребра лежат на некотором простом цикле.

3.8. Пусть  $G$  — связный граф, имеющий по крайней мере три вершины. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) в  $G$  нет мостов;
- (2) любые две вершины графа  $G$  лежат на некотором общем цикле;
- (3) любая вершина и любое ребро графа  $G$  лежат на некотором общем цикле;
- (4) любые два ребра графа  $G$  лежат на некотором общем цикле;
- (5) для любой пары вершин и любого ребра графа  $G$  существует цепь, соединяющая эти вершины и содержащая данное ребро;
- (6) для любой пары вершин и любого ребра графа  $G$  существует простая цепь, соединяющая эти вершины и не содержащая данное ребро;
- (7) для любых трех вершин существует цепь, соединяющая любые две из них и содержащая третью.

3.9. В графе  $G$ , являющемся блоком с  $\delta \geq 3$ , существует такая вершина  $v$ , что граф  $G - v$  также является блоком.

(Когарс)

3.10. Квадрат каждого нетривиального связного графа есть блок.

3.11. Если  $G$  — связный граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения, то граф  $B(B(G))$  изоморфен  $C(G)$ .

3.12. Пусть  $b(v)$  — число блоков, которым принадлежит вершина  $v$  связного графа  $G$ . Тогда число блоков графа  $G$  определяется по формуле

$$b(G) - 1 = \sum [b(v) - 1].$$

(Харари [13])

3.13. Пусть  $c(B)$  — число точек сочленения связного графа  $G$ , принадлежащих блоку  $B$ . Тогда число точек сочленения графа  $G$  определяется по формуле

$$c(G) - 1 = \sum [c(B) - 1].$$

(Галаан [3])

**3.14.** Блок  $G$  называется *реберно-критическим*, если каждый подграф  $G-x$  не является блоком. *Диагональ* блока  $G$  — это ребро, соединяющее две вершины цикла и не принадлежащее этому циклу. Пусть  $G$  — реберно-критический блок с  $p \geq 4$ . Тогда

- а) в  $G$  нет диагоналей;
- б) в  $G$  нет треугольников;
- в)  $p \leq q \leq 2p-4$ ;
- г) удаление всех вершин степени 2 приводит к несвязному графу, при условии что  $G$  не является циклом.

(Плэммер [1])

Поэмы создают глухцы, как я и сам.  
Но дерево создать под силу лишь богам.

Килмер Джойс, *Дерево*<sup>1)</sup>

Существует один простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название, это — деревья. Деревья важны не только потому, что они находят приложения в различных областях знания, но и в силу особого положения их в самой теории графов. Последнее вызвано предельной простотой строения деревьев. Часто при решении какой-либо задачи о графах ее сначала исследуют на деревьях. Примером служит гипотеза Улама, приведенная в гл. 2.

Ниже дано несколько определений дерева. Сначала в геометрических терминах изучается понятие центральности дерева. Затем рассматриваются деревья, естественным образом связанные с произвольным связным графом, именно деревья блоков и точек сочленения. Наконец, будет показано, как каждый остов графа  $G$  приводит к набору его независимых циклов, и обратно, для каждого остова можно построить набор независимых коциклов.

### Описание деревьев

Граф называется *ациклическим*, если в нем нет циклов. *Дерево* — это связный ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом*. Таким образом, компонентами леса являются деревья. Существуют 23 различных дерева <sup>2)</sup> с восемью вершинами; они показаны на рис. 4.1. Известны и другие определения дерева. В теореме 4.1 отражены некоторые из них.

**Т е о р е м а 4.1.** *Для графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $G$  — дерево;
- (2) любые две вершины в  $G$  соединены единственной простой цепью;
- (3)  $G$  — связный граф и  $p = q + 1$ ;
- (4)  $G$  — ациклический граф и  $p = q + 1$ ;

<sup>1)</sup> Джойс Килмер (1886—1918) — американский поэт. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Можно предложить читателю нарисовать деревья с восемью вершинами. Как правило, одни деревья забывают рисовать, а другие рисуют несколько раз.

- (5)  $G$  — ациклический граф, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром  $x$ , то в графе  $G+x$  будет точно один простой цикл;
- (6)  $G$  — связный граф, отличный от  $K_p$  для  $p \geq 3$ , и если любую пару несмежных вершин соединить ребром  $x$ , то в графе  $G+x$  будет точно один простой цикл;
- (7)  $G$  — граф, отличный от  $K_2 \cup K_1$  и  $K_2 \cup K_2$ ,  $p = q + 1$ , и если любую пару несмежных вершин соединить ребром  $x$ , то в графе  $G+x$  будет точно один простой цикл.

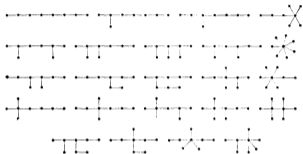


Рис. 4.1. 23 дерева с восемью вершинами.

Доказательство. (1) влечет (2). Поскольку  $G$  — связный граф, то любые две его вершины соединены простой цепью. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — две различные простые цепи, соединяющие вершины  $u$  и  $v$ , и пусть  $w$  — первая вершина, принадлежащая  $P_1$  (при переходе по  $P_1$  из  $u$  в  $v$ ), такая, что  $w$  принадлежит  $P_1$  и  $P_2$ , но вершина, предшествующая ей в  $P_1$ , не принадлежит  $P_2$ . Если  $w'$  — следующая за  $w$  вершина в  $P_1$ , принадлежащая также  $P_2$ , то сегменты (части) цепей  $P_1$  и  $P_2$ , находящиеся между вершинами  $w$  и  $w'$ , образуют простой цикл в графе  $G$ . Поэтому, если  $G$  — ациклический граф, то между любыми двумя его вершинами существует самое большое одна простая цепь.

(2) влечет (3). Ясно, что граф  $G$  — связный. Соотношение  $p = q + 1$  докажем по индукции. Утверждение очевидно для связных графов с одной и двумя вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих меньше  $p$  вершин. Если же граф  $G$  имеет  $p$  вершин, то удаление из него любого ребра делает граф  $G$  несвязным в силу единственности простых цепей; более того, получаемый граф будет иметь в точности две компоненты. По предположению индукции в каждой компоненте число вершин на единицу больше числа ребер. Таким образом, общее число ребер в графе  $G$  должно равняться  $p - 1$ .

(3) *влечет* (4). Предположим, что в графе  $G$  есть простой цикл длины  $n$ . Этот цикл содержит  $n$  вершин и  $n$  ребер, а для любой из  $p - n$  вершин, не принадлежащих циклу, существует инцидентное ей ребро, которое лежит на геодезической, идущей от некоторой вершины цикла. Все такие ребра попарно различны; отсюда  $q \geq p$ , т. е. пришли к противоречию.

(4) *влечет* (5). Так как  $G$  — ациклический граф, то каждая его компонента является деревом. Если всего  $k$  компонент, то, поскольку в каждой из них число вершин на единицу больше числа ребер, имеем  $p = q + k$ . В нашем случае должно быть  $k = 1$ , так что  $G$  — связный граф. Таким образом,  $G$  — дерево и любые две его вершины соединяет единственная простая цепь. Если к дереву  $G$  добавить ребро  $uv$ , то ребро вместе с единственной простой цепью, соединяющей вершины  $u$  и  $v$ , образует простой цикл, который также единствен в силу единственности простой цепи.

(5) *влечет* (6). Поскольку каждый полный граф  $K_p$  для  $p \geq 3$  содержит простой цикл, граф  $G$  не может быть одним из этих графов. Граф  $G$  должен быть связным, так как в ином случае можно было бы добавить ребро  $x$ , соединяющее две вершины из разных компонент графа  $G$ , и граф  $G + x$  был бы ациклическим.

(6) *влечет* (7). Докажем, что любые две вершины графа  $G$  соединены единственной простой цепью, а тогда, поскольку (2) *влечет* (3), получим  $p = q + 1$ . Ясно, что в графе  $G$  любые две вершины соединены простой цепью. Если какая-то пара вершин графа  $G$  соединена двумя простыми цепями, то из доказательства того, что (1) *влечет* (2), следует наличие у графа  $G$  простого цикла  $Z$ . В  $Z$  не может быть более трех вершин, так как иначе, соединив ребром  $x$  две несмежные вершины в  $Z$ , получим граф  $G + x$ , имеющий более одного простого цикла (если же в  $Z$  нет несмежных вершин, то в графе  $G$  более одного цикла). Таким образом, цикл  $Z$  есть  $K_3$ , и он должен быть собственным подграфом графа  $G$ , поскольку по предположению  $G$  не является полным графом  $K_p$  с  $p \geq 3$ . Так как  $G$  — связный граф, то можно предположить, что в  $G$  есть другая вершина, смежная с некоторой вершиной подграфа  $K_3$ . Тогда ясно, что если к графу  $G$  добавлять ребро, то его можно добавлять так, чтобы в графе  $G + x$  образовались по крайней мере два простых цикла. Если больше нельзя добавить новых ребер, не нарушая для графа  $G$  второго условия из (6), то  $G$  есть  $K_p$  с  $p \geq 3$  вопреки предположению.

(7) *влечет* (1). Если граф  $G$  имеет простой цикл, то этот цикл должен быть треугольником, являющимся компонентой графа  $G$ , что было показано в предыдущем абзаце. В этой компоненте соответственно три вершины и три ребра. Все остальные компоненты графа  $G$  должны быть деревьями, но для того, чтобы выполнялось соотношение  $p = q + 1$ , должно быть не более одной компоненты, отличной от указанного треугольника. Если это дерево содержит

простую цепь длины 2, то к графу  $G$  можно так добавить ребро  $x$ , чтобы образовать в графе  $G+x$  два простых цикла. Следовательно, этим деревом может быть или  $K_3$ , или  $K_7$ . Значит, граф  $G$  — или  $K_3 \cup K_1$ , или  $K_3 \cup K_2$ , а эти графы мы исключили из рассмотрения. Таким образом,  $G$  — ациклический граф. Но если  $G$  — ациклический граф и  $p=q+1$ , то  $G$  связан, поскольку (4) влечет (5), а (5) влечет (6). Итак,  $G$  — дерево, и теорема доказана.

Так как для нетривиального дерева  $\sum d_i = 2q = 2(p-1)$ , то в дереве должно быть по крайней мере две вершины со степенями, меньшими 2.

*Следствие 4.1 (а). В любом нетривиальном дереве имеется по крайней мере две висячие вершины.*

Этот результат также следует из теоремы 3.4.

### Центры и центроиды

*Эксцентриситет  $e(v)$  вершины  $v$  в связном графе  $G$  определяется как  $\max d(u, v)$  по всем вершинам  $u$  в  $G$ . Радиусом  $r(G)$  называется наименьший из эксцентриситетов вершин. Заметим, что наибольший из эксцентриситетов равен диаметру графа. Вершина  $v$  называется *центральной вершиной* графа  $G$ , если  $e(v) = r(G)$ ; *центр* графа  $G$  — это множество всех центральных вершин.*

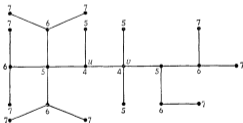


Рис. 4.2. Эксцентриситеты вершин дерева.

На рис. 4.2 представлено дерево, у которого показан эксцентриситет каждой вершины. Это дерево имеет диаметр 7, радиус 4, а его центр состоит из двух вершин  $u$  и  $v$  с эксцентриситетом 4. Смежность вершин  $u$  и  $v$  в этом случае была обнаружена Жорданом<sup>1)</sup> и независимо Сильвестром; см. монографию Кёнига [2, стр. 64].

<sup>1)</sup> Известная теорема о жордановой кривой.



**Теорема 4.2.** Каждое дерево имеет центр, состоящий или из одной вершины, или из двух смежных вершин.

**Доказательство.** Утверждение очевидно для деревьев  $K_1$  и  $K_2$ . Покажем, что у любого другого дерева  $T$  те же центральные вершины, что и у дерева  $T'$ , полученного из  $T$  удалением всех его висячих вершин. Ясно, что расстояние от данной вершины  $u$  дерева  $T$  до любой другой вершины  $v$  может достигать наибольшего значения только тогда, когда  $v$  — висячая вершина.

Таким образом, эксцентриситет каждой вершины дерева  $T'$  точно на единицу меньше эксцентриситета этой же вершины в дереве  $T$ . Отсюда вытекает, что вершины дерева  $T$ , имеющие наименьший эксцентриситет в  $T$ , совпадают с вершинами, имеющими наименьший эксцентриситет в  $T'$ , т. е. центры деревьев  $T$  и  $T'$  совпадают.

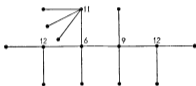


Рис. 4.3. Веса вершин дерева.

Если процесс удаления висячих вершин продолжить, то мы получим последовательность деревьев с тем же центром, что и у  $T$ . В силу конечности  $T$  мы обязательно придём или к  $K_1$ , или к  $K_2$ . В любом случае все вершины дерева, полученного таким способом, образуют центр дерева  $T$ , который, таким образом, состоит или из единственной вершины, или из двух смежных вершин.

*Ветвь к вершине  $u$  дерева  $T$*  — это максимальное поддерево, содержащее  $u$  в качестве висячей вершины. Таким образом, число ветвей к  $u$  равно  $\deg u$ . *Вес вершины  $u$  дерева  $T$*  определяется как наибольшее число ребер по всем ветвям к  $u$ . На рис. 4.3 указаны веса невисячих вершин одного дерева. Понятно, что вес каждой висячей вершины равен 14, т. е. числу ребер.

Вершина  $v$  называется *центроидной вершиной* дерева  $T$ , если  $v$  имеет наименьший вес; *центроид* дерева  $T$  состоит из всех таких вершин. Жордан [1] доказал также теорему о центроиде дерева, напоминающую его результат о центрах.

**Теорема 4.3.** Каждое дерево имеет центроид, состоящий или из одной вершины, или из двух смежных вершин.

Наименьшие <sup>1)</sup> деревья с одной и двумя центральными и центроидными вершинами показаны на рис. 4.4.

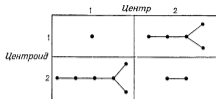


Рис. 4.4. Деревья, имеющие одну и две центральные или центроидные вершины.

### Деревья блоков и точек сочленения

Связный граф с большим числом точек сочленения похож на дерево. Эту черту графа можно оттенить четче, если сопоставить с каждым связным графом соответствующее дерево.

Для связного графа  $G$  с множеством блоков  $\{B_i\}$  и множеством точек сочленения  $\{c_j\}$  граф блоков и точек сочленения  $bc(G)$  определяется как граф, у которого множеством вершин служит  $\{B_i\} \cup \{c_j\}$  и две вершины смежны, если одна соответствует блоку  $B_i$ ,

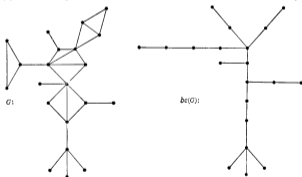


Рис. 4.5. Граф и его граф блоков и точек сочленения.

а другая — точке сочленения  $c_j$ , причем  $c_j$  принадлежит  $B_i$ . Таким образом,  $bc(G)$  — двудольный граф. Это понятие было введено в работе Харари и Принса [3], а также в статье Галлан [3]. (См. рис. 4.5.)

<sup>1)</sup> По числу ребер. — Прим. ред.

**Теорема 4.4.**  *$G$  — граф блоков и точек сочленения некоторого графа  $H$  тогда и только тогда, когда он является деревом, в котором расстояние между любыми двумя висящими вершинами четно.*

Имея в виду эту теорему, мы будем говорить о *дереве блоков и точек сочленения* графа.

### Независимые циклы и коциклы

Опишем два векторных пространства, связанных с графом  $G$ : пространство циклов и пространство коциклов. Для простоты изложения оба эти пространства задаются над двухэлементным полем  $F_2 = \{0, 1\}$ , в котором  $1+1=0$  (хотя последующую теорию можно приспособить для произвольного поля). Так, число  $\varepsilon_i$ , которое часто встречается в приводимых ниже определениях, равно 0 или 1.

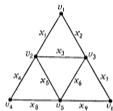


Рис. 4.6. Граф для иллюстрации граничного и кограничного операторов.

Пусть, как обычно,  $G$  — граф с вершинами  $v_1, \dots, v_p$  и ребрами  $x_1, \dots, x_q$ . *0-цепь* графа  $G$  формально определяется как линейная комбинация  $\sum \varepsilon_i v_i$  вершин, а *1-цепь* — как линейная комбинация  $\sum \varepsilon_i x_i$  ребер. *Граничный оператор*  $\delta$  относит 1-цепям 0-цепи в соответствии со следующими правилами:

- $\delta$  — линейный оператор;
- если  $x=uv$ , то  $\delta x = u+v$ .

С другой стороны, *кограничный оператор*  $\delta$  относит 0-цепям 1-цепи в соответствии с правилами

- $\delta$  — линейный оператор;
- $\delta v = \sum \varepsilon_i x_i$ , где  $\varepsilon_i = 1$ , если только ребро  $x_i$  инцидентно  $v$ .

На рис. 4.6 1-цепь  $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_5$  имеет «границу»

$$\begin{aligned} \delta \sigma_1 &= (v_1 + v_2) + (v_1 + v_3) + (v_2 + v_4) + (v_3 + v_5) = \\ &= v_2 + v_4 + v_5 + v_6, \end{aligned}$$

а 0-цепь  $\sigma_0 = v_3 + v_4 + v_5 + v_6$  имеет «кограницу»

$$\begin{aligned} \delta \sigma_0 &= (x_2 + x_3 + x_4 + x_7) + (x_1 + x_8) + \\ &+ (x_5 + x_6 + x_8 + x_9) + (x_7 + x_9) = \\ &= x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \end{aligned}$$

1-цепь с границей 0 называется *циклическим вектором*<sup>1)</sup> графа  $G$ . Циклический вектор можно рассматривать как множество про-

<sup>1)</sup> Большинство топологов и некоторые специалисты по теории графов называют это «циклом». В свою очередь вместо нашего понятия простого цикла они используют термины «контур», «элементарные циклы», «полигоны».

стых циклов, не имеющих попарно общих ребер. Множество всех циклических векторов образует над  $F_2$  векторное пространство, называемое *пространством циклов* графа  $G$ . *Базис циклов* графа  $G$  определяется как базис пространства циклов графа  $G$ , состоящий только из простых циклов. Будем говорить, что циклический вектор  $Z$  зависит от простых циклов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , если его можно представить в виде  $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i Z_i$ . Таким образом, можно сказать, что базис циклов графа  $G$  является максимальным набором независимых простых циклов графа  $G$  или минимальным набором простых циклов, от которых зависят все циклы.

*Разрез* связного графа — это множество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. *Коциклом* называется минимальный разрез. *Кограницей* графа  $G$  называется кограница некоторой его 0-цепи. Кограница набора  $U$  вершин есть не что иное, как множество всех ребер, соединяющих вершины из  $U$  с вершинами, не принадлежащими  $U$ . Очевидно, что каждая кограница является разрезом. Поскольку коцикл определяется как минимальный разрез графа  $G$ , а любой минимальный разрез есть кограница, то всякий коцикл является минимальной ненулевой кограницей. Множество всех кограниц графа  $G$  называется *пространством коциклов* графа  $G$ , а базис этого пространства, состоящий только из коциклов, называется *базисом коциклов* графа  $G$ .

Перейдем теперь к построению для пространства циклов графа  $G$  базиса, который соответствует остову <sup>1)</sup>  $T$ . В связном графе  $G$  *хордой* остова  $T$  называется ребро графа, не принадлежащее  $T$ . Ясно, что подграф графа  $G$ , содержащий остов  $T$  и его произвольную хорду, имеет только один (простой) цикл. Множество  $Z(T)$  всех таких циклов (каждая хорда «порождает» один цикл) независимо, так как каждый из них содержит ребро, не принадлежащее ни одному из остальных циклов. Более того, любой цикл  $Z$  зависит от множества  $Z(T)$ , причем  $Z$  есть симметрическая разность циклов, которые определяются хордами остова  $T$ , принадлежащими  $Z$ . Поэтому, определяя *циклический ранг*  $m(G)$  как число простых циклов базиса пространства циклов графа  $G$ , можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 4.5.** *Циклический ранг связного графа  $G$  равен числу хорд любого остова в  $G$ .*

**Следствие 4.5 (а).** *Если  $G$  — связный  $(p, q)$ -граф, то  $m(G) = q - p + 1$ .*

**Следствие 4.5 (б).** *Если  $G$  — это  $(p, q)$ -граф с  $k$  компонентами, то  $m(G) = q - p + k$ .*

<sup>1)</sup> Остовом называется остоновый подграф, являющийся деревом. — *Прим. ред.*

Подобные утверждения справедливы также для пространства коциклов. *Кодерево*  $T^*$  остова  $T$  в связном графе  $G$  — это остовный подграф в  $G$ , содержащий только те ребра графа  $G$ , которые не принадлежат  $T$ . Под кодеревом графа  $G$  понимается кодерево некоторого остова  $T$ . На рис. 4.7 показаны остов  $T$  и его кодерево  $T^*$  для графа  $G$ , представленного также на рис. 4.6. Ребра графа  $G$ , не



Рис. 4.7. Граф, дерево и кодерево.

принадлежащие  $T^*$ , назовем *ветвями* графа  $G$  (относительно  $T^*$ . — *Перев.*). Подграф графа  $G$ , состоящий из  $T^*$  и любой одной ветви, содержит ровно один коцикл. Множество всех таких коциклов (каждая ветвь «порождает» один коцикл) является базисом пространства коциклов графа  $G$ .

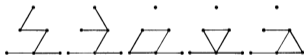


Рис. 4.8. Базис коциклов для графа  $G$ , приведенного на рис. 4.7.

На рис. 4.8 для графа  $G$  и его кодерева  $T^*$  (рис. 4.7) изображены коциклы, образующие пространство коциклов, — они отмечены жирными линиями. *Коциклический ранг*  $t^*(G)$  равен числу коциклов в базисе пространства коциклов графа  $G$ .

**Теорема 4.6.** *Коциклический ранг связного графа  $G$  равен числу ребер любого его остова.*

Как и в случае циклов, немедленно получаем два следствия.

**Следствие 4.6 (а).** *Если  $G$  — связный  $(p, q)$ -граф, то  $t^*(G) = p - 1$ .*

**Следствие 4.6 (б).** *Если  $G$  — это  $(p, q)$ -граф с  $k$  компонентами, то  $t^*(G) = p - k$ .*

**Замечание.** Из теоремы 4.5 можно получить частное утверждение (для одномерного случая) одного важного общего результата о

симплициальных комплексах. Для каждого симплициального комплекса имеет место уравнение Эйлера — Пуанкаре

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots,$$

где  $\beta_n$  — числа Бетти, а  $\alpha_n$  — количества симплексов соответствующего размерностей. По определению  $\beta_n$  является рангом векторного пространства  $n$ -мерных циклов. Напомним (гл. I), что любой граф есть симплициальный комплекс, вершины соответствуют 0-симплексам, а ребра соответствуют 1-симплексам. Для графа  $G$  имеем  $\beta_0 = k$  (число его компонент связности) и  $\beta_1 = m(G)$  (число его независимых циклов). Поскольку графы не содержат  $n$ -симплексов при  $n > 1$ , то  $\alpha_n = \beta_n = 0$  для всех  $n > 1$ . Поэтому  $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1$ , так что  $p - q = k - m(G)$  и следствие 4.5 (б) дает уравнение Эйлера — Пуанкаре для графов.

## Матроиды

Матроиды первым ввел в рассмотрение Уитни [6]. В этой классической работе дан ряд эквивалентных определений матроидов и изложены их основные свойства.

*Матроид* состоит из конечного множества  $M$  элементов и семейства  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots\}$  непустых подмножеств множества  $M$ , называемых *циклами*, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) ни одно собственное подмножество цикла не есть цикл;
- 2) если  $x \in C_1 \cap C_2$ , то  $C_1 \cup C_2 - \{x\}$  содержит цикл.

С каждым графом  $G$  можно связать матроид, если в качестве множества  $M$  взять множество  $X$  ребер графа  $G$ , а в качестве циклов матроида — простые циклы графа  $G$ . Легко видеть, что обе аксиомы выполняются. Несколько менее очевидно, что граф  $G$  определяет и другой матроид, если в качестве циклов матроида взять коциклы графа  $G$ . Эти матроиды называются соответственно *матроидом циклов* и *матроидом коциклов графа  $G$* .

Дадим другое определение матроида, эквивалентное первому. *Матроид* состоит из конечного множества  $M$  элементов и семейства подмножеств множества  $M$ , называемых *независимыми множествами*, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) пустое множество независимо;
- 2) каждое подмножество независимого множества независимо;
- 3) для любого подмножества  $A$  множества  $M$  все максимальные независимые множества, содержащиеся в  $A$ , имеют одинаковое число элементов.

Для графа  $G$  получим матроид в указанном смысле, если в качестве множества  $M$  возьмем совокупность всех ребер графа  $G$ , а в качестве независимых множеств — ациклические подграфы графа  $G$ .

Двойственность (характеризуемая переходом от простых циклов к коциклам, а от деревьев к кодеревьям), рассмотренная в предыдущем разделе, тесно связана с двойственностью матроидов. Минти [1] построил самодвойственную систему аксиом для «графоидов», демонстрирующую в четкой форме двойственность матроидов.

*Графоид* состоит из множества  $M$  элементов и двух семейств  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  непустых подмножеств множества  $M$ , называемых соответственно *циклами* и *коциклами*, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1)  $|C \cap D| \neq 1$  для любых  $C \in \mathcal{C}$  и  $D \in \mathcal{D}$ ;
- 2) ни один из циклов не является собственной частью другого цикла, и ни один коцикл не является собственной частью другого коцикла;
- 3) если раскрасить элементы множества  $M$  так, что точно один элемент будет зеленого цвета, а остальные — красного или синего, то найдется либо
  - а) цикл  $C$ , содержащий зеленый элемент и не содержащий ни одного красного, либо
  - б) коцикл  $D$ , содержащий зеленый элемент и не содержащий ни одного синего.

Простые циклы любого графа образуют матроид, однако, как мы увидим в гл. 14, не каждый матроид можно получить из графа. Два достаточно полных обзора по теории матроидов представлены в статьях Минти [1] и Татта [14].

*Замечание.* Гипотеза Улама для произвольных графов остается еще не решенной. Но П. Келли [1] доказал ее справедливость для деревьев. Мы уже знакомы с интерпретацией этой гипотезы, данной в работе Харари [20]: если граф  $G$  имеет  $p \geq 3$  вершин и представлен  $p$  непомяченными подграфами  $G_i = G - v_i$ , то сам граф  $G$  можно единственным образом восстановить по  $G_i$ . Результат Келли для деревьев был обобщен в работе Харари, Палмера [6], где показано, что каждое нетривиальное дерево  $T$  можно восстановить по тем его подграфам  $T_i = T - v_i$ , которые сами являются деревьями, т. е. когда  $v_i$  — висячие вершины. В свою очередь этот результат был улучшен Бонди [1], доказавшим, что дерево  $T$  можно восстановить по его подграфам  $T - v_i$ , где  $v_i$  — *периферические* вершины, т. е. вершины, эксцентриситет которых равен диаметру дерева  $T$ . Позже Манвел [1] показал, что почти <sup>1)</sup> все деревья  $T$  можно восстановить, если использовать только неизоморфные поддеревья  $T - v_i$ . Манвел [2] доказал восстанавливаемость еще в одном классе графов — *одноциклических* графов, т. е. связных графов, имеющих точно один цикл.

<sup>1)</sup> За исключением лишь двух пар деревьев.

## Упражнения

4.1. Нарисуйте все деревья с девятью вершинами. Затем сравните их с деревьями, приведенными в приложении 11.

4.2. Каждое дерево — двудольный граф. Какие деревья являются полными двудольными графами?

4.3. Следующие четыре утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  — лес;
- (2) любое ребро графа  $G$  — мост;
- (3) любой блок графа  $G$  есть  $K_2$ ;
- (4) любое непустое пересечение двух связных подграфов графа  $G$  связно.

4.4. Следующие четыре утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  — одноциклический граф;
- (2)  $G$  связен и  $p=q$ ;
- (3) для некоторого ребра  $x$  графа  $G$  граф  $G-x$  является деревом;
- (4)  $G$  связен и множество его ребер, которые не являются мостами, образует простой цикл.

(Андерсон, Харари [1])

4.5.  $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$  для каждого связного графа  $G$ .

4.6. Построить дерево с непересекающимися центром и центроидом, каждый из которых состоит из двух вершин.

4.7. Центр любого связного графа лежит в блоке.

(Харари, Норман [2])

4.8. Пусть дано дерево блоков и точек сочленения  $bc(G)$  связного графа  $G$ , определить граф блоков  $B(G)$  и граф точек сочленения  $C(G)$ .

4.9. Определить циклические ранги для а)  $K_p$ , б)  $K_{m,n}$ , в) связного кубического графа с  $p$  вершинами.

4.10. Пересечение простого цикла и коцикла содержит четное число ребер.

4.11. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда каждый простой цикл в некотором базисе циклов четный.

4.12. В каждом связном графе имеется остов.

4.13. Показать, как граф блоков и точек сочленения произвольного графа можно определить через граф пересечений.

4.14. Кодерево связного графа является максимальным подграфом, не содержащим коциклов.

4.15. Диаметр дерева  $T$  равен 2 тогда и только тогда, когда  $T$  — звезда.

4.16. Доказать или опровергнуть:

- а) если диаметр графа равен 2, то в нем найдется остов, являющийся звездой;
- б) если в графе  $G$  есть остов, являющийся звездой, то диаметр графа  $G$  равен 2.

4.17. Описать все связные графы  $G$ , для которых  $G \cong bc(G)$ .

\*4.18. Максимальное число ребер в графе, имеющем  $p$  вершин и радиус  $r$ , равно

$$\begin{aligned} & \binom{p}{2} && \text{если } r=1; \\ & \lfloor p(p-2)/2 \rfloor, && \text{если } r=2; \\ & \frac{1}{2}(p^2-4rp+5p+4r^2-6r), && \text{если } r \geq 3. \end{aligned}$$

(Визинг [2])

4.19.  $G$  — блок тогда и только тогда, когда любые его два ребра принадлежат некоторому общему коциклу.



Мы непременно должны держаться вместе — иначе каждому из нас придется висеть поодиночке.

Веннаям Франклин<sup>1)</sup>

Связность графов — понятие в теории графов довольно интуитивное, обобщающее такие ранее введенные понятия, как точка сочленения, мост и блок. При исследовании вопроса о том, какой из двух графов «более связан», полезны два инварианта, называемые связностью и реберной связностью.

Относительно связности получено довольно много результатов. Некоторые из них являются вариантами классической теоремы Менгера, в которой говорится о числе непересекающихся цепей, соединяющих данную пару вершин графа. Мы покажем, что подобные утверждения справедливы и в других областях математики, отличных от теории графов.

### Связность и реберная связность

*Связностью*  $\kappa = \kappa(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Из определения следует, что связность несвязного графа равна 0, а связность связного графа, имеющего точку сочленения, равна 1. Полный граф  $K_p$  нельзя сделать несвязным, сколько бы вершин из него ни удалять, а тривиальный граф получается из  $K_p$  после удаления  $p-1$  вершин; поэтому  $\kappa(K_p) = p-1$ . Иногда  $\kappa$  называют *вершинной связностью*.

Аналогично *реберная связность*  $\lambda = \lambda(G)$  графа  $G$  определяется как наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Ясно, что  $\lambda(K_1) = 0$ , и вообще реберная связность несвязного графа равна 0, а реберная связность связного графа, имеющего мост, равна 1. Связность, реберная связность и наименьшая степень графа связаны неравенством, найденным Уитни [2].

Теорема 5.1. Для любого графа  $G$

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

<sup>1)</sup> Бенджамин Франклин (1706—1790) — американский политический деятель. — Прим. перев.

Доказательство. Проверим сначала второе неравенство. Если в графе  $G$  нет ребер, то  $\lambda=0$ . Если ребра есть, то несвязный граф получаем из данного, удаляя все ребра, инцидентные вершине с наименьшей степенью. В любом случае  $\lambda \leq \delta$ .

Чтобы получить первое неравенство, нужно рассмотреть несколько случаев. Если  $G$  — несвязный или тривиальный граф, то  $\kappa=\lambda=0$ . Если  $G$  связан и имеет мост  $x$ , то  $\lambda=1$ . В последнем случае  $\kappa=1$ , поскольку или граф  $G$  имеет точку сочленения, инцидентную ребру  $x$ , или же  $G=K_2$ . Наконец, предположим, что граф  $G$  содержит множество из  $\lambda \geq 2$  ребер, удаление которых делает его несвязным. Ясно, что удаляя  $\lambda-1$  ребер из этого множества, получаем граф, имеющий мост  $x=uv$ . Для каждого из этих  $\lambda-1$  ребер



Рис. 5.1. Граф, для которого  $\kappa=2$ ,  $\lambda=3$  и  $\delta=4$ .

выберем какую-либо инцидентную с ним вершину, отличную от  $u$  и  $v$ . Удаление выбранных (выделенных) вершин приводит к удалению  $\lambda-1$  (а возможно, и большего числа) ребер. Если получаемый после такого удаления граф не связан, то  $\kappa < \lambda$ ; если же он связан, то в нем есть мост  $x$ , и поэтому удаление вершины  $u$  или  $v$  приводит либо к несвязному, либо к тривиальному графу. В любом случае  $\kappa \leq \lambda$  (см. рис. 5.1).

Чартрэнд и Харари [2] построили семейство графов с заданными связностями, а также с данной наименьшей степенью. Полученный ими результат показывает, что ограничения, налагаемые на  $\kappa$ ,  $\lambda$  и  $\delta$  теоремой 5.1, нельзя улучшить.

**Теорема 5.2.** Для любых целых чисел  $a, b, c$  ( $0 < a \leq b \leq c$ ) существует граф  $G$ , у которого  $\kappa(G)=a$ ,  $\lambda(G)=b$  и  $\delta(G)=c$ .

Чартрэнд [1] установил, что если  $\delta$  достаточно велико, то второе неравенство теоремы 5.1 становится равенством.

**Теорема 5.3.** Если граф  $G$  имеет  $p$  вершин и  $\delta(G) \geq \lfloor p/2 \rfloor$ , то  $\lambda(G)=\delta(G)$ .

Например, если  $G$  — регулярный граф степени  $r \geq p/2$ , то  $\lambda(G)=r$ . В частности,  $\lambda(K_p)=p-1$ .

Утверждение для связности, аналогичное утверждению теоремы 5.3, не справедливо. Задача определения наибольшей связности, возможной для графа с данным числом вершин и данным числом ребер, была поставлена Бержем [2] и решена Харари [17].

**Теорема 5.4.** *Среди всех графов с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами наибольшая связность равна 0, если  $q < p-1$ , и равна  $\lfloor 2q/p \rfloor$ , если  $q \geq p-1$ .*

**Набросок доказательства.** Поскольку сумма степеней любого  $(p, q)$ -графа  $G$  равна  $2q$ , средняя степень равна  $2q/p$ . Поэтому  $\delta(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$ , так что  $\kappa(G) \leq \lfloor 2q/p \rfloor$  в силу теоремы 5.1. Для того чтобы показать, что средняя величина может действительно достигаться, достаточно построить соответствующее семейство графов. То же самое построение дает также  $(p, q)$ -графы с наибольшей реберной связностью.

**Следствие 5.4 (а).** *Наибольшая реберная связность  $(p, q)$ -графа равна его наибольшей связности.*

Только совсем недавно стала изучаться задача о разделении графа с помощью удаления смешанного множества вершин и ребер. *Парой связностей* графа  $G$  называется упорядоченная пара  $(a, b)$  таких целых неотрицательных чисел, что найдется множество, содержащее  $a$  вершин и  $b$  ребер, удаление которых делает граф несвязным, и не найдется множества с  $a-1$  вершинами и  $b$  ребрами или  $a$  вершинами и  $b-1$  ребрами, обладающего тем же свойством. В частности, упорядоченные пары  $(\kappa, 0)$  и  $(0, \lambda)$  являются парами связностей графа  $G$ , так что понятие пары связностей обобщает оба понятия вершинной связности и реберной связности графа. Легко видеть, что для каждого значения  $a$ ,  $0 \leq a \leq \kappa$ , существует единственная пара связностей  $(a, b_a)$ ; таким образом, граф  $G$  имеет в точности  $\kappa+1$  пар связностей.

Пары связностей графа  $G$  определяют функцию  $f$ , отображающую множество  $\{0, 1, \dots, \kappa\}$  в множество неотрицательных целых чисел и такую, что  $f(\kappa)=0$  (ср. с теоремой 5.1). Эта функция называется *функцией связности* графа  $G$ . Она строго убывает, поскольку, если  $(a, b)$  — пара связностей и  $b > 0$ , то очевидно, что существует множество, содержащее  $a+1$  вершин и  $b-1$  ребер, удаление которых делает граф несвязным или оставляет только одну вершину. Следующая теорема, которая доказывается с использованием конструкции, предложенной Байнеке и Харари [6], показывает, что приведенные выше условия являются единственными условиями, которым должна удовлетворять функция связности.

**Теорема 5.5.** *Любая убывающая функция  $f$ , отображающая множество  $\{0, 1, \dots, \kappa\}$  в множество неотрицательных целых чисел и такая, что  $f(\kappa)=0$ , является функцией связности некоторого графа.*

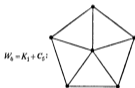
Граф  $G$  называется  $n$ -связным, если  $\kappa(G) \geq n$ , и  $n$ -реберно-связным, если  $\lambda(G) \geq n$ . Заметим, что нетривиальный граф 1-связен тогда и только тогда, когда он связан, и 2-связен тогда и только тогда, когда он является блоком, имеющим более одного ребра. Таким образом, граф  $K_2$  — единственный блок, не являющийся 2-связным. Из теоремы 3.3 поэтому следует, что граф 2-связен тогда и только тогда, когда каждые две его вершины принадлежат некоторому простому циклу. Дирак [4] распространил это замечание на  $n$ -связные графы.

**Теорема 5.6.** *Если граф  $G$   $n$ -связен,  $n \geq 2$ , то любое множество, содержащее  $n$  вершин графа  $G$ , принадлежит простому циклу.*

Если в качестве графа  $G$  взять сам простой цикл  $C_n$ , то видно, что обратное утверждение не верно для  $n > 2$ .

Существует также характеристика 3-связных графов, хотя соответствующую формулировку не так легко дать. Чтобы привести здесь этот результат, нам нужно определить понятие «колеса», введенное замечательным специалистом по теории графов Таттом. Для  $n \geq 4$  колесо  $W_n$  определяется как граф  $K_1 + C_{n-1}$  (см. рис. 5.2).

Теперь можно сформулировать теорему Татта, в которой дается характеристика 3-связных графов.



$W_n = K_1 + C_{n-1}$

Рис. 5.2. Колесо.

**Теорема 5.7.** *Граф 3-связен тогда и только тогда, когда он или совпадает с колесом, или получается из колеса с помощью последовательности операций следующих двух типов:*

- 1) добавление нового ребра,
- 2) замена вершины  $v$ , имеющей степень по крайней мере 4, на такие две смежные вершины  $v'$ ,  $v''$ , что каждая вершина, которая раньше была смежна с  $v$ , соединяется точно с одной из вершин  $v'$ ,  $v''$  так, чтобы в получаемом графе было  $\deg v' \geq 3$  и  $\deg v'' \geq 3$ .

Граф  $G$ , изображенный на рис. 5.3, трехсвязен, так как его можно получить из колеса  $W_5$ , описанным в теореме 5.7 способом.

Максимальный <sup>1)</sup>  $n$ -связный подграф графа  $G$  называется его  $n$ -компонентой. В частности, 1-компоненты графа  $G$  — это его нетривиальные компоненты, а 2-компоненты — его блоки, содержащие по крайней мере 3 вершины. Легко видеть, что две различные 1-компоненты не имеют общих вершин, а две различные 2-компоненты

<sup>1)</sup> По включению. — Прим. перев.

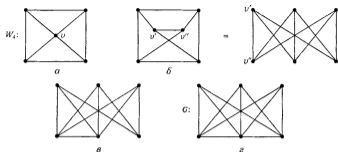


Рис. 5.3. Обоснование 3-связности графа.



Рис. 5.4. Граф с двумя 3-компонентами, которые встречаются в двух вершинах.

пересекаются самое большее по одной вершине. Эти простые утверждения были обобщены Харари и Кодамой [1] (см. рис. 5.4).

**Теорема 5.8.** *Две различные  $n$ -компоненты графа  $G$  имеют не более  $n-1$  общих вершин.*

### Графические варианты теоремы Менгера

В 1927 г. Менгер [1] показал, что связность графа имеет отношение к числу непересекающихся простых цепей, соединяющих различные вершины графа. С тех пор появилось много вариантов и обобщений результата Менгера, носящих графический характер; здесь мы рассмотрим некоторые из них. Уделив достаточно внимания форме записи этих теорем, мы сможем представить их и классифицировать наглядным образом.

Пусть  $u$  и  $v$  — две различные вершины связного графа  $G$ . Две простые цепи, соединяющие  $u$  и  $v$ , называются *непересекающимися* (иногда *вершинно-непересекающимися*), если у них нет общих вершин, отличных от  $u$  и  $v$  (и, следовательно, нет общих ребер), и *реберно-непересекающимися*, если у них нет общих ребер. Множество  $S$  вершин, ребер или вершин и ребер *разделяет*  $u$  и  $v$ , если  $u$  и  $v$  принадлежат различным компонентам графа  $G-S$ . Ясно, что нет множества вершин, разделяющего две смежные вершины. Теорема Менгера первоначально была сформулирована в «вершинной форме».

**Теорема 5.9.** *Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины  $s$  и  $t$ , равно наибольшему числу непересекающихся простых  $(s-t)$ -цепей.*

**Доказательство.** Мы приведем здесь изящное доказательство Дирака [7]. Ясно, что если  $k$  вершин разделяют  $s$  и  $t$ , то существует не более  $k$  непересекающихся простых цепей, соединяющих  $s$  и  $t$ .

Осталось показать, что если  $k$  вершин графа  $G$  разделяют  $s$  и  $t$ , то в  $G$  существует  $k$  непересекающихся  $(s-t)$ -цепей. Для  $k=1$  это очевидно. Предположим, что для некоторого числа  $k > 1$  это не верно. Пусть  $h$  — наименьшее среди таких  $k$ , а  $F$  — граф с наименьшим числом вершин, для которого при указанном  $h$  теорема не верна. Будем удалять из  $F$  ребра до тех пор, пока не получим такой граф  $G$ , что для разделения вершин  $s$  и  $t$  в  $G$  требуется  $h$  вершин, а для разделения  $s$  и  $t$  в  $G-x$ , где  $x$  — произвольное ребро графа  $G$ , достаточно  $h-1$  вершин. Прежде чем заканчивать доказательство теоремы, изучим некоторые свойства графа  $G$ .

Из определения графа  $G$  следует, что для всякого его ребра  $x$  существует множество  $S(x)$ , содержащее  $h-1$  вершин, которые в  $G-x$  разделяют  $s$  и  $t$ . Далее, граф  $G-S(x)$  содержит по крайней мере одну  $(s-t)$ -цепь, так как граф  $G$  имеет  $h$  вершин, разделяющих  $s$  и  $t$  в  $G$ . Каждая такая  $(s-t)$ -цепь должна содержать ребро  $x=uv$ , поскольку она не является цепью в  $G-x$ . Поэтому  $u, v \in S(x)$ , и если  $u \neq s, t$ , то  $S(x) \cup \{u\}$  разделяет  $s$  и  $t$  в  $G$ .

Если в  $G$  есть вершина  $w$ , смежная как с  $s$ , так и с  $t$ , то в графе  $G-w$  для разделения  $s$  и  $t$  требуется  $h-1$  вершин, и поэтому в нем  $h-1$  непересекающихся  $(s-t)$ -цепей. Добавляя  $w$ , получаем в графе  $G$   $h$  непересекающихся  $(s-t)$ -цепей, что противоречит предположению о графе  $F$ . Итак, мы показали, что

(1) в графе  $G$  нет вершин, смежных одновременно с  $s$  и  $t$ .

Пусть  $W$  — произвольный набор  $h$  вершин, разделяющих  $s$  и  $t$  в  $G$ . Цепь, соединяющую  $s$  с некоторой вершиной  $w_i \in W$  и не содержащую других вершин из  $W$ , назовем  $(s-W)$ -цепью. Аналогично  $(W-t)$ -цепью будет называться цепь, соединяющая  $t$  с  $w_i \in W$  и не содержащая других вершин из  $W$ . Обозначим наборы всех  $(s-W)$ -цепей и всех  $(W-t)$ -цепей через  $P_s$  и  $P_t$  соответственно. Тогда каждая  $(s-t)$ -цепь начинается с элемента из  $P_s$ , а кончается элементом из  $P_t$ , поскольку любая такая цепь содержит вершину из  $W$ . Общие вершины цепей из  $P_s$  и  $P_t$  принадлежат набору  $W$ , так как по крайней мере одна цепь из каждого набора  $P_s$  и  $P_t$  содержит (любую) вершину  $w_i$ , и если бы существовала некоторая вершина, не принадлежащая набору  $W$ , но содержащаяся сразу и в  $(s-W)$ -, и в  $(W-t)$ -цепи, то нашлась бы  $(s-t)$ -цепь, не имеющая вершин из  $W$ . Наконец, выполняется либо равенство  $P_s - W = \{s\}$ , либо равенство  $P_t - W = \{t\}$ , поскольку в противном случае либо  $P_s$  вместе с ребрами  $\{w_1t, w_2t, \dots\}$ , либо  $P_t$  вместе с ребрами  $\{sw_1, sw_2, \dots\}$  образуют связные графы с меньшим числом вершин, чем у  $G$ , в которых  $s$  и  $t$  не смежны, и, следовательно, в каждом из них имеется  $h$  непересекающихся  $(s-t)$ -цепей. Объединяя  $(s-W)$ - и  $(W-t)$ -части этих

цепей, образуем в графе  $G$   $h$  непересекающихся  $(s-t)$ -цепей. Мы пришли к противоречию. Таким образом, доказано, что

- (II) любой набор  $W$ , содержащий  $h$  вершин и разделяющий  $s$  и  $t$ , является смежным<sup>1)</sup> или с  $s$ , или с  $t$ .

Теперь можно закончить доказательство теоремы. Пусть  $P = \{s, u_1, u_2, \dots, t\}$  — кратчайшая  $(s-t)$ -цепь в  $G$  и  $u_1 u_2 = x$ . Заметим, что в силу (I)  $u_2 \neq t$ . образуем, как и раньше, множество  $S(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_{h-1}\}$ , разделяющее в  $G-x$  вершины  $s$  и  $t$ . Из (I) следует, что  $u_1 t \notin G$ . Используя (II) и беря  $W = S(x) \cup \{u_1\}$ , получаем  $sv_i \in G$  для всех  $i$ . Таким образом, опять же в силу (I)  $v_i t \notin G$  для всех  $i$ . Однако, если выбрать  $W = S(x) \cup \{u_2\}$ , то в силу (II) получаем  $su_2 \in G$ , что противоречит выбору  $P$  как кратчайшей  $(s-t)$ -цепи. Итак, мы показали, что графа  $G$ , удовлетворяющего указанным выше требованиям, не существует. Следовательно, не существует и графа  $F$ , для которого теорема не верна.



Рис. 5.5. Граф для иллюстрации теоремы Менгера.

На рис. 5.5 показан граф, у которого две несмежные вершины  $s$  и  $t$  можно разделить, удалив три вершины, но не меньше. Из теоремы вытекает, что наибольшее число непересекающихся  $(s-t)$ -цепей равно 3.

Хронологически второй вариант теоремы Менгера был опубликован Уитни в его статье [2], содержащей критерий  $n$ -связности графа.

**Теорема 5.10.** *Граф  $n$ -связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере  $n$  вершинно-непересекающимися цепями.*

Связь между теоремами 5.9 и 5.10 легко заметить, если ввести понятие локальной связности. *Локальной связностью  $\kappa(u, v)$  двух несмежных вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  называется наименьшее число вершин, удаление которых разделяет  $u$  и  $v$ .* Используя введенное

<sup>1)</sup> Набор  $W$  называется смежным с вершиной  $s$ , если каждая вершина набора  $W$  смежна с  $s$ . — Прим. перев.

понятие, теорему Менгера можно сформулировать так: для любых двух выделенных несмежных вершин  $u$  и  $v$  справедливо равенство  $\kappa(u, v) = \mu_0(u, v)$ , где  $\mu_0(u, v)$  — наибольшее число вершинно-непересекающихся цепей, соединяющих  $u$  и  $v$ . Очевидно, что для полных графов выполняются обе теоремы. Для неполных графов  $G$  соотношение, связывающее теоремы 5.9 и 5.10, имеет вид  $\kappa(G) = \min \kappa(u, v)$ , где минимум берется по всем парам несмежных вершин  $u$  и  $v$ .

Довольно странно, что утверждение, подобное теореме 5.9 о паре вершин, разделяемых некоторым множеством ребер, не было найдено значительно раньше. Результаты такого типа появились почти одновременно: статья Форда и Фалкерсона [1] (как частный случай их теоремы о «максимальном потоке — минимальном разрезе»), работа Элиаса, Файнштейна и Шеннона [1] и неопубликованная работа Коцига.

**Теорема 5.11.** *Для любых двух вершин графа наибольшее число реберно-непересекающихся цепей, соединяющих их, равно наименьшему числу ребер, разделяющих эти две вершины.*

Возвращаясь к рис. 5.5, мы видим, что  $s$  и  $t$  можно разделить, удалив 5 ребер и не меньше, и что наибольшее число непересекающихся по ребрам  $(s-t)$ -цепей равно 5.

Даже зная только эти три теоремы, можно понять основу схемы их классификации. Различие между теоремами 5.9 и 5.10 заключается в том, что в теореме 5.9 рассматриваются две выделенные вершины, а в теореме 5.10 всевозможные пары несмежных вершин. Это различие, так же как и очевидное различие между теоремами 5.9 и 5.11, представлено в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Теорема	Разделяемые объекты	Наибольшее число	Наименьшее число
5.9	Выделенные $u, v$	непересекающихся цепей	вершин, разделяющих $u, v$
5.10	Произвольные $u, v$	непересекающихся цепей	вершин, разделяющих $u, v$
5.11	Выделенные $u, v$	реберно-непересекающихся цепей	ребер, разделяющих $u, v$

Таким образом, сформулировав результат Уитни в реберной форме, мы, не затрачивая дополнительных усилий, получаем другой вариант теоремы Менгера.



**Теорема 5.12.** *Граф  $n$ -реберно-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере  $n$  реберно-непересекающимися цепями.*

В первой статье Менгера, посвященной этому вопросу, дается также следующий вариант основной теоремы, в котором вместо отдельных вершин рассматриваются множества вершин.

**Теорема 5.13.** *Для любых двух непересекающихся непустых множеств вершин  $V_1$  и  $V_2$  наибольшее число непересекающихся цепей, соединяющих  $V_1$  и  $V_2$ , равно наименьшему числу вершин, разделяющих  $V_1$  и  $V_2$ .*

Конечно, нужно указать, что ни одна из вершин множества  $V_1$  не должна быть смежной с вершинами множества  $V_2$  (по той же причине, что и в теореме 5.9). При этом две простые цепи, соединяющие  $V_1$  и  $V_2$ , называются *непересекающимися*, если они не имеют общих вершин, отличных от их концевых вершин. Доказательство эквивалентности теорем 5.9 и 5.13 предельно просто — нужно только заменить множества  $V_1$  и  $V_2$  на отдельные вершины.

Следующий вариант (теорему 5.14) рассмотрел Дирак [6]. Так как при доказательстве эквивалентности этих вариантов привлекаются типичные методы, мы приведем его здесь полностью.

**Теорема 5.14.** *Граф, имеющий не менее  $2n$  вершин,  $n$ -связен тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся множеств  $V_1$  и  $V_2$ , в каждом из которых по  $n$  вершин, существует  $n$  соединяющих их непересекающихся цепей.*

Заметим, что в этой теореме указанные  $n$  непересекающихся цепей совсем не имеют общих вершин, в том числе и общих концевых вершин!

**Доказательство.** Для доказательства необходимости сформулированного условия построим из графа  $G$  граф  $G'$ , добавив две новые вершины  $w_1$  и  $w_2$  и соединив  $w_1$  ребрами с вершинами множества  $V_i$ ,  $i=1, 2$  (рис. 5.6).

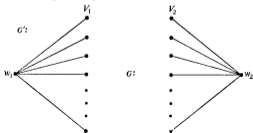


Рис. 5.6. Построение графа  $G'$ .

Поскольку граф  $G$   $n$ -связен, граф  $G'$  также  $n$ -связен и, следовательно, по теореме 5.9 существует  $n$  непересекающихся цепей, соединяющих  $w_1$  и  $w_2$ . Ясно, какие нужно наложить ограничения на эти цепи в  $G$ : взять  $n$  непересекающихся  $(V_1-V_2)$ -цепей.

Для доказательства второй «половины», т. е. достаточности, возьмем множество  $S$ , содержащее не менее  $n-1$  вершин и разделяющее граф  $G$  на подграфы  $G_1$  и  $G_2$  с множествами вершин  $V'_1$  и  $V'_2$  соответственно. Тогда, поскольку  $|V'_1| \geq 1$ ,  $|V'_2| \geq 1$  и  $|V'_1| + |V'_2| + |S| = |V| \geq 2n$ , существует такое разбиение множества  $S$  на два непересекающихся подмножества  $S_1$  и  $S_2$  (одно из них может быть пустым), что  $|V'_1 \cup S_1| \geq n$  и  $|V'_2 \cup S_2| \geq n$ . Выбирая любые  $n$ -подмножества  $V_1$  и  $V_2$  из  $V'_1 \cup S_1$  и  $V'_2 \cup S_2$  соответственно, мы получаем два непересекающихся множества, в каждом из которых  $n$  вершин. Каждая цепь, соединяющая  $V_1$  и  $V_2$ , должна содержать вершину из множества  $S$ , а так как существует  $n$  непересекающихся  $(V_1-V_2)$ -цепей, то  $|S| \geq n$ , и граф  $G$   $n$ -связен. Теорема доказана.

Мы определили для графа  $G$  два понятия связности, и, значит,  $G$  характеризуется «парой связностей». Аналогично можно ввести «пару связностей» для двух выделенных вершин  $u$  и  $v$ . Естественно попытаться найти смешанный вариант теоремы Менгера, используя оба эти понятия. Один из таких вариантов — теорема 5.15, полученная Байнеке и Харари [6]; ее можно доказать так же, как и теорему 5.9.

*Теорема 5.15. Упорядоченная пара  $(a, b)$  является парой связностей для вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  тогда и только тогда, когда существуют  $a$  вершинно-непересекающихся  $(u-v)$ -цепей и  $b$  реберно-непересекающихся  $(u-v)$ -цепей, не имеющих общих ребер с  $a$  предыдущими цепями, и, кроме того, наибольшие возможные числа таких цепей равны именно  $a$  и  $b$ .*

Вообще все приведенные здесь теоремы имеют соответствующие «ориентированные» формулировки, и, действительно, Дирак указывает, что его доказательство теоремы Менгера пригодно для ориентированных графов. Можно было бы добавить в табл. 5.1 еще 11 теорем, а именно теоремы с номерами от 5.12 до 5.15 и «ориентированные» варианты теорем от 5.9 до 5.15. Однако это было бы бесполезным занятием, поскольку совершенно ясно, что таблица все равно осталась бы далеко не полной. Для того чтобы подсчитать все варианты, которые могли бы здесь возникнуть, заметим, что можно рассматривать или граф  $G$ , или ориентированный граф (орграф)  $D$ , в котором разделяются

- 1) выделенные вершины  $u, v$ ;
- 2) произвольные вершины  $u, v$ ;
- 3) два множества вершин  $V_1, V_2$  (как в теореме 5.13).

Это разделение можно произвести, удаляя

- 1) вершины,

2) ребра,

3) вершины и ребра (как в теореме 5.15).

Составляя всевозможные комбинации этих альтернатив, нетрудно сформулировать  $2 \times 3 \times 3 = 18$  теорем. Проверить справедливость всех этих теорем можно было бы предложить читателю (однако это скучная работа!).

Наконец, Фалкерсон [2] доказал следующую теорему, в которой вместо непересекающихся цепей говорится о непересекающихся разрезах.

**Теорема 5.16.** *В каждом графе наибольшее число реберно-непересекающихся реберных разрезов, разделяющих две вершины  $u$  и  $v$ , равно наименьшему числу ребер простой цепи, соединяющей  $u$  и  $v$ , т. е. равно  $d(u, v)$ .*

Хотя это утверждение типа теоремы Менгера, доказать его значительно проще, чем теорему Менгера.

Рассматривая всевозможные варианты этой теоремы, как в случае теорем о цепях, можно было бы опять увеличить число утверждений типа теоремы Менгера.

### Другие варианты теоремы Менгера

В этом разделе мы сформулируем еще несколько вариантов теоремы Менгера; все они найдены независимо друг от друга, и только позднее была выявлена их взаимосвязь и дана теоретико-графовая формулировка.

*Сеть  $N$*  можно определить как граф или оргграф, рассматриваемый вместе с функцией, приписывающей каждому ребру некоторое положительное действительное число. Точные определения «максимального потока» и «разреза с минимальной пропускной способностью» можно найти <sup>1)</sup> в книге Форда и Фалкерсона [2].

**Теорема 5.17.** *Если в сети  $N$  существует цепь, идущая из  $u$  в  $v$ , то максимальный поток из  $u$  в  $v$  равен минимальной пропускной способности разрезов, разделяющих вершины  $u$  и  $v$ .*

Непосредственно, но не совсем просто проверяется, что максимальный поток из  $u$  в  $v$  для сети, представленной на рис. 5.7, равен 7 и минимальная пропускная способность разреза также равна 7.

В случае когда все пропускные способности являются положительными целыми числами, как в приведенном только что примере, сразу получаем эквивалентность теоремы о максимальном потоке варианту теоремы Менгера, в котором рассматривается ориентированный мультиграф  $D$  и выделены две вершины  $u$  и  $v$ . Преобразование, выявляющее эту эквивалентность, приведено на рис. 5.8,

<sup>1)</sup> См. также Авондо-Бодино [1]. — *Прим. перев.*

где ориентированное ребро из  $u$  в  $v_1$  (см. рис. 5.7) с пропускной способностью 3 преобразуется в три ориентированных ребра, пропускные способности которых не указаны.

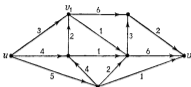


Рис. 5.7. Сеть с целочисленными пропускными способностями.

Назовем *линией матрицы* или ее строку, или ее столбец. Будем говорить, что в бинарной (двоичной) матрице  $M$  набор линий *покрывает* все ее единичные элементы, если каждая единица принадлежит хотя бы одной линии набора. Две единицы матрицы  $M$  назы-

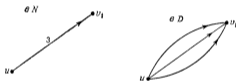


Рис. 5.8. Переход от сети к мультиграфу.

ваются *независимыми*, если они принадлежат разным строкам и разным столбцам. В этих терминах Кёниг [1] получил следующий вариант теоремы Менгера (ср. с теоремой 10.2):

**Теорема 5.18.** *В любой бинарной матрице наибольшее число независимых единичных элементов равно наименьшему числу линий, покрывающих все единицы.*

Проиллюстрируем теорему 5.18 на бинарной матрице

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все единичные элементы матрицы  $M$  покрываются строками 2 и 4 и столбцами 3 и 6, но наборов из трех линий, покрывающих все

единицы в матрице  $M$ , нет. В матрице

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выделены четыре независимых единичных элемента матрицы  $M$ ; в  $M$  нет множеств из пяти независимых единиц.

Если матрицу  $M$  рассматривать как матрицу инцидентий множеств и элементов, то окажется, что теорема 5.18 тесно связана со знаменитой теоремой Ф. Холла [1], дающей критерий того, что семейство конечных множеств  $S_1, S_2, \dots, S_m$  обладает системой различных представителей. Последнее означает такое множество  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  различных элементов, что для каждого  $i$  элемент  $e_i$  принадлежит  $S_i$ . Приведем доказательство теоремы Холла, принадлежащее Радо [1].

**Теорема 5.19.** Семейство конечных множеств  $S_1, S_2, \dots, S_m$  обладает системой различных представителей тогда и только тогда, когда для всех  $k=1, \dots, m$  объединение любых  $k$  множеств этого семейства содержит по крайней мере  $k$  элементов.

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем сначала, что если семейство  $\{S_i\}$  удовлетворяет сформулированным выше условиям и  $|S_m| \geq 2$ , то в  $S_m$  существует такой элемент  $e$ , что набор множеств  $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}, S_m - \{e\}$  также удовлетворяет этим условиям. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие элементы  $e, f \in S_m$  и такие подмножества  $J$  и  $K$  множества  $\{1, 2, \dots, m-1\}$ , что

$$|(\bigcup_{i \in J} S_i) \cup (S_m - \{e\})| < |J| + 1, \quad |(\bigcup_{i \in K} S_i) \cup (S_m - \{f\})| < |K| + 1.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} |J| + |K| &\geq |(\bigcup_J S_i) \cup (S_m - \{e\})| + |(\bigcup_K S_i) \cup (S_m - \{f\})| \geq \\ &\geq |(\bigcup_{J \cup K} S_i) \cup S_m| + |\bigcup_{J \cap K} S_i| \geq \\ &\geq |J \cup K| + 1 + |J \cap K| > |J| + |K|. \end{aligned}$$

т. е. пришли к противоречию.

Достаточность доказывается индукцией по наибольшему из чисел  $|S_i|$ . Если каждое множество состоит из одного элемента, то доказывать нечего. Шаг индукции осуществляется применением (если необходимо, то неоднократно) полученного выше результата к множествам  $S_i$ , содержащим наибольшее число элементов.

На рис. 5.9 показан двудольный граф  $B$ , в котором вершины соответствуют или множествам  $S_i$ , или элементам  $a_j$ . Две вершины графа  $B$  смежны тогда и только тогда, когда одна из них соответствует множеству, а другая — элементу, причем этот элемент принадлежит множеству. Связь теоремы 5.19 с теоремой Менгера становится понятной, если в граф, например, такой, как на рис. 5.9,

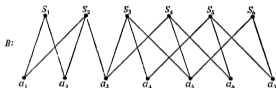


Рис. 5.9. Двудольный граф, иллюстрирующий теорему Холла.

ввести две новые вершины. Обозначим эти вершины через  $u$  и  $v$  и соединим  $u$  с каждой вершиной, соответствующей множеству  $S_i$ , а  $v$  — со всеми вершинами, соответствующими элементам  $a_j$ . Тогда теорему 5.19 можно доказать, применив к полученному графу или теорему о максимальном потоке, или соответствующий реберный вариант теоремы Менгера.

Следующая теорема, принадлежащая Дилворту [1], была сформулирована для решеток<sup>1)</sup>, но позже (Мирский и Перфект [1]) было установлено, что этот результат эквивалентен теореме Холла. Два элемента решетки (см. монографию Биркгофа [1]) называются *несравнимыми*, если ни один из них не доминирует над другим. Под цепью в решетке понимается путь, идущий в «диаграмме Хассе» решетки из более верхнего элемента в более нижний.

**Теорема 5.20.** *В любой конечной решетке наибольшее число несравнимых элементов равно наименьшему числу цепей, содержащих все элементы решетки.*

Например, в решетке трехмерного куба (3-куба) самое большое три несравнимых элемента. Легко покрыть все элементы 3-куба тремя цепями, но двумя цепями этого сделать нельзя.

В настоящем разделе мы привели несколько результатов типа теоремы Менгера, не имеющих теоретико-графовой формулировки. Более широкая трактовка подобных результатов содержится в статье Харари [24]. Хороший обзор обширной литературы по результатам типа теоремы о системе различных представителей см. в статье Мирского и Перфекта [1].

<sup>1)</sup> Вообще аналогичный результат справедлив для любого частично упорядоченного множества.

## Упражнения

5.1. Связность октаэдра  $\overline{K}_2 + C_4$  равна 4, связность квадрата многоугольника  $C_n$ ,  $n \geq 5$ , также равна 4.

5.2. Каждый  $n$ -связный граф имеет по крайней мере  $pn/2$  ребер.

5.3. Построить граф с  $\kappa=3$ ,  $\lambda=4$ ,  $\delta=5$ .

5.4. Теорема 5.3 не верна, если  $\lambda(G)$  заменить на  $\kappa(G)$ .

5.5. Не существует трехсвязных графов с семью ребрами.

5.6. В каждом кубическом графе связность и реберная связность равны.

5.7. Определить, какая пара связностей может быть в регулярных графах степени 4.

5.8. Если  $G$  — регулярный граф степени  $r$  и  $\kappa=1$ , то  $\lambda \leq \lfloor r/2 \rfloor$ .

5.9. Пусть  $G$  — полный  $n$ -дольный граф, отличный от  $C_4$ . Тогда каждый минимальный разрез по ребрам есть кограница некоторой вершины.

(Пламмер)

5.10. Найти функцию связности для вершин  $s$  и  $t$  в графе, представленном на рис. 5.5.

5.11. Построить граф с вершинами  $s$  и  $t$ , для которого функция связности равна  $(0,5)$ ,  $(1,3)$ ,  $(2,2)$ ,  $(3,0)$ .

5.12. Используя теорему Татта 5.7, показать, что граф, являющийся кубом другого графа, трехсвязен.

5.13. Каждый блок связного графа является колесом тогда и только тогда, когда  $q=2p-2$  и  $\kappa(u, v)$  равно 1 или 3 для любых двух несмежных вершин  $u, v$ .

(Боллобаш [1])

5.14. Каждый кубический трехсвязный граф можно построить из  $K_4$  следующим образом: заменим два различных ребра  $u_1u_2$  и  $v_1v_2$  ( $u_1=v_2$  допускается) подграфом с двумя новыми вершинами  $w_1, w_2$  и новыми ребрами  $u_1w_1, w_1v_1, u_2w_2, w_2v_2, w_1w_2$ .

5.15. Пусть даны две различные простые цепи  $P_1$  и  $P_2$ , соединяющие две вершины  $u$  и  $v$  трехсвязного графа  $G$ . Всегда ли можно найти третью простую цепь, соединяющую  $u$  и  $v$ , которая не пересекается ни с  $P_1$ , ни с  $P_2$ ?

5.16. Сформулировать результат, аналогичный теореме 5.9, для наибольшего числа различных непересекающихся простых цепей, соединяющих две смежные вершины графа.

\*5.17. Если  $f_r(p)$  — такое наименьшее число, что для  $q \geq f_r(p)$  каждый  $(p, q)$ -граф имеет две вершины, соединенные  $r$  непересекающимися простыми цепями, то  $f_2(p)=p$ ,  $f_3(p)=\lfloor (3p-1)/2 \rfloor$ ,  $f_4(p)=2p-1$ .

(Боллобаш [1])

5.18. Если диаметр графа  $G$  равен  $d$  и  $\kappa \geq 1$ , то  $\rho \geq \kappa(d+1)-2$ .

(Уоткинс [1])

5.19. Пусть  $\zeta$  — такое наибольшее число, что каждое множество  $\zeta$  вершин в  $G$  принадлежит некоторому простому циклу. Если граф  $G$  трехсвязен, то  $\kappa=\zeta$  тогда и только тогда, когда в  $G$  имеется такое множество  $S$ , содержащее  $\kappa$  вершин, что  $\kappa(G-S) \geq \kappa+1$ .

(Уоткинс [1])

5.20. Если  $G$  — связный граф, то

$$\kappa(G) = 1 + \min_{v \in V} \kappa(G-v).$$

5.21. В любом графе наибольшее число непересекающихся вершинных разрезов, разделяющих две вершины  $u$  и  $v$ , равно  $d(u, v)-1$ .

5.22.  $\kappa$ -минимальным графом называется такой граф  $G$ , что  $\kappa(G-x) < \kappa(G)$  для каждого ребра  $x$ .

- а) Граф  $G$   $\kappa$ -минимален тогда и только тогда, когда  $\kappa(u, v) = \kappa(G)$  для каждой пары смежных вершин  $u$  и  $v$ .  
 б) Если граф  $G$   $\kappa$ -минимален, то  $\delta = \kappa$ .

(Галли [1])

5.23. Доказать эквивалентность теорем 5.18 и 5.19 (см., например, М. Холл [7, стр. 72, 73]).

5.24. Если граф  $G$   $n$ -связен,  $n \geq 2$  и  $\delta(G) \geq (3n-1)/2$ , то в  $G$  найдется такая вершина  $v$ , что граф  $G-v$  также  $n$ -связен.

(Чартрэнд, Когарс, Лик [1])

5.25. В каждом наименьшем  $n$ -реберно-связном графе  $G$  найдется вершина степени  $n$  ( $n \geq 2$ ).

(Лик [1])



Галлам го всей своей совокупности  
разделяется на три части.

Гай Юлий Цезарь 4)

Степени  $d_1, \dots, d_p$  вершин графа образуют последовательность целых неотрицательных чисел, сумма которых равна  $2q$ . В теории чисел разбиение целого положительного числа  $n$  обычно определяется как перечень (или неупорядоченный набор) целых положительных чисел, сумма которых равна  $n$ . По этому определению число 4 имеет пять разбиений:

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1.$$

Порядок слагаемых в разбиении не существует. Такое разбиение числа  $2q$  образуют степени вершин графа, не имеющего изолированных вершин. Для того чтобы включить в рассмотрение все графы, обобщим определение разбиения, принятое в теории чисел, допуская существование неотрицательных слагаемых.

*Разбиением неотрицательного целого числа  $n$*  называется конечный набор неотрицательных целых чисел, сумма которых равна  $n$ .



Рис. 6.1. Графические разбиения числа 4.

В этом смысле разбиение числа 4 может содержать произвольное конечное число нулевых слагаемых. *Разбиение графа* — это представление числа  $2q$  в виде суммы степеней вершин графа:  $2q = \sum d_i$  (см. теорему 2.1). Только два из пяти разбиений числа 4 на положительные слагаемые реализуются графами; они приведены на рис. 6.1.

Разбиение  $\sum d_i$  числа  $n$  на  $p$  частей (слагаемых) называется *графическим*, если существует граф, степени вершин которого равны  $d_i$ . Ясно, что в любом графическом разбиении  $d_i \leq p-1$  и  $n$  четно. Но этих двух условий недостаточно, чтобы разбиение было графическим: примером служит разбиение  $10 = 3+3+3+1$ . Возникают два

4) Гай Юлий Цезарь. Записки о войне с галлами, книга 1, комментарий С. И. Соболевского, ИЛ, М., 1946, стр. 37.— *Прим. перев.*

вопроса. Как определить, является ли данное разбиение графическим? Как построить граф, реализующий данное разбиение? Ответ на первый вопрос (о существовании) был дан Эрдёшем и Галлаи [1]. Независимо и в ином аспекте, а именно с конструктивной точки зрения, этот же вопрос рассматривался Гавелом [1] и Хакими [1]. Заметим, что второй вопрос — чисто конструктивный. Приведем сначала следующий результат:

**Теорема 6.1.** *Разбиение  $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$  четного числа на  $p$  частей,  $p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ , является графическим тогда и только тогда, когда графическим является модифицированное разбиение*

$$\Pi' = (d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_p).$$

**Доказательство.** Если  $\Pi'$  — графическое разбиение, то и  $\Pi$  — графическое, поскольку можно построить граф с разбиением  $\Pi$ , добавив к  $\Pi'$  одну новую вершину, смежную с вершинами, имеющими степени  $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1$ .

Пусть теперь  $G$  — граф с разбиением  $\Pi$ . Если вершина степени  $d_1$  смежна с вершинами, имеющими степени  $d_i$  для  $i$  от 2 до  $d_1+1$ , то удаление этой вершины приводит к графу с разбиением  $\Pi'$ . Следовательно, осталось показать, что из  $G$  можно получить граф с такой вершиной. Предположим, что в  $G$  нет такой вершины. Пусть в графе  $G$ , в котором вершины  $v_i$  имеют степени  $d_i$ , вершина  $v_1$  со степенью  $d_1$  имеет наибольшую сумму степеней смежных с ней вершин. Тогда существуют такие вершины  $v_i$  и  $v_j$  со степенями  $d_i > d_j$ , что  $v_i v_j$  является ребром в  $G$ , а  $v_1 v_i$  нет. Поэтому найдется вершина  $v_k$ , смежная с  $v_i$  и не смежная с  $v_j$ . Удаление ребер  $v_i v_j$  и  $v_k v_i$  и одновременное добавление ребер  $v_1 v_i$  и  $v_1 v_j$  приводят к новому графу, имеющему разбиение  $\Pi$  и отличному от  $G$ , в котором сумма степеней вершин, смежных с  $v_1$ , больше, чем в графе  $G$ . Повторяя эту процедуру, приходим к графу, в котором вершина  $v_1$  обладает нужным свойством.

Доказанная теорема позволяет дать эффективный алгоритм построения графа с заданным разбиением, если такой существует. Если такой граф не существует, то на некотором шаге алгоритм нельзя применить.

**Следствие 6.1 (алгоритм).** *Данное разбиение  $\Pi = (d_1, d_2, \dots, \dots, d_p)$ , где*

$$p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p,$$

*является графическим тогда и только тогда, когда следующая процедура приводит к разбиению, в котором каждое слагаемое равно нулю:*

1. *Найти модифицированное разбиение  $\Pi'$ , определенное в формулировке теоремы 6.1.*

2. Расположить элементы разбиения  $\Pi'$  в порядке невозрастания и обозначить новое разбиение через  $\Pi_1$ .
3. Для  $\Pi_1$  найти модифицированное разбиение  $\Pi''$  так же, как и на шаге 1, и получить упорядоченное разбиение  $\Pi_2$ .
4. Продолжать эту процедуру до появления хотя бы одного отрицательного слагаемого или до получения разбиения, состоящего из нулевых слагаемых.

Если на некотором шаге разбиение оказывается графическим, то нужно остановиться, поскольку это значит, что разбиение  $\Pi$  также графическое. Проиллюстрируем этот алгоритм на примере разбиения

$$\Pi = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2).$$

Имеем

$$\Pi' = (4, 2, 2, 1, 1, 2),$$

$$\Pi_1 = (4, 2, 2, 2, 1, 1),$$

$$\Pi'' = (1, 1, 1, 0, 1).$$

Ясно, что  $\Pi''$  — графическое разбиение, поэтому  $\Pi$  — также графическое. Соответствующий граф показан на рис. 6.2.

Теорема Эрдша и Галлаи [1] есть по своей природе теорема существования, но в ее доказательстве используется тот же подход, что при доказательстве теоремы 6.1.

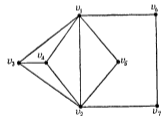


Рис. 6.2. Граф для иллюстрации работы алгоритма нахождения графических разбиений.

Теорема 6.2. Разбиение  $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$  числа  $2q$  на  $p$  частей,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ , является графическим тогда и только тогда, когда для любого целого числа  $r$ ,  $1 \leq r \leq p-1$ ,

$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^p \min\{r, d_i\}. \quad (6.1)$$

Доказательство. Необходимость условий (6.1) проверяется непосредственно. В самом деле, если  $\Pi$  — разбиение числа  $2q$  для графа  $G$ , то сумму  $r$  наибольших степеней можно разделить на две части: одна соответствует вкладу в эту сумму ребер, которые соединяют соответствующие  $r$  вершин между собой, другая получается от ребер, соединяющих эти  $r$  вершин с остальными  $p-r$  вершинами.

Части не превышают соответственно  $r(r-1)$  и  $\sum_{i=r+1}^p \min\{r, d_i\}$ .

Доказательство достаточности проводится индукцией по числу  $p$ . Ясно, что теорема верна для наборов с одной или двумя частями.

Предположим, что она верна для наборов с  $p$  частями, и пусть  $d_1, d_2, \dots, d_{p+1}$  — набор, удовлетворяющий условиям (6.1). Обозначим через  $m$  и  $n$  наименьшее и наибольшее целые числа, для которых

$$d_{m+1} = \dots = d_{d_1+1} = \dots = d_{n+1}.$$

Образуем новый набор из  $p$  элементов, положив

$$e_i = \begin{cases} d_{i+1} - 1 & \text{для } i \text{ от } n - d_1 + 1 \text{ до } n, \text{ если } m = 0, 1, \text{ и} \\ & \text{для } i \text{ от } 1 \text{ до } m - 1 \text{ и от } n - (d_1 - m) \text{ до } n, \text{ если } m \geq 2, \\ d_{i+1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если новый набор  $e_1, \dots, e_p$  удовлетворяет условиям (6.1), то по предположению индукции существует граф, степени вершин которого равны  $e_i$ . Граф с заданным набором степеней  $d_i$  можно построить, добавляя новую вершину степени  $d_1$ , смежную вершинам со степенями, соответствующими тем  $e_i$ , которые получаются вычитанием 1 из  $d_{i+1}$  (см. выше).

Ясно, что  $p > e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_p$ . Предположим, что условие (6.1) не выполнено, и пусть  $h$  — наименьшее из чисел  $r$ , при котором оно нарушается (очевидно, что  $h \neq 1$ ). Тогда

$$\sum_{i=1}^h e_i > h(h-1) + \sum_{i=h+1}^p \min\{h, e_i\}. \quad (6.2)$$

В то же время справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{h+1} d_i \leq h(h+1) + \sum_{i=h+2}^{p+1} \min\{h+1, d_i\}, \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^{h-1} e_i \leq (h-1)(h-2) + \sum_{i=h}^p \min\{h-1, e_i\}, \quad (6.4)$$

$$\sum_{i=1}^{h-2} e_i \leq (h-2)(h-3) + \sum_{i=h-1}^p \min\{h-2, e_i\}. \quad (6.5)$$

Обозначим через  $s$  число значений  $i \leq h$ , для которых  $e_i = d_{i+1} - 1$ . Тогда неравенства (6.3) — (6.5) вместе с (6.2) дают

$$d_h + s < 2h + \sum_{i=h+1}^p (\min\{h+1, d_{i+1}\} - \min\{h, e_i\}), \quad (6.6)$$

$$e_h > 2(h-1) - \min\{h-1, e_h\} + \sum_{i=h-1}^p (\min\{h, e_i\} - \min\{h-1, e_i\}), \quad (6.7)$$

$$e_{h-1} + e_h > 4h - 6 - \min\{h-2, e_{h-1}\} - \min\{h-2, e_h\} + \sum_{i=h-1}^p (\min\{h, e_i\} - \min\{h-2, e_i\}). \quad (6.8)$$

Отметим, что  $e_h \geq h$ , поскольку в противном случае неравенство (6.7) приводит к противоречию. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  обозначают числа значений  $i > h$ , для которых  $e_i > h$ ,  $e_i = h$  и  $e_i < h$  соответственно; числа таких значений  $i$ , для которых, кроме того,  $e_i = d_{i+1} - 1$ , обозначим через  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$ . Тогда

$$d_1 = s + a' + b' + c'. \quad (6.9)$$

Неравенства (6.6) — (6.8) принимают вид

$$d_1 + s < 2h + a + b' + c', \quad (6.10)$$

$$e_h \geq h + a + b, \quad (6.11)$$

$$e_{h-1} + e_h \geq 2h - 1 + \sum_{i=h+1}^p (\min\{h, e_i\} - \min\{h-2, e_i\}). \quad (6.12)$$

Здесь возникает несколько случаев.

*Случай 1:*  $c' = 0$ . Так как  $d_1 \geq e_h$ , то из (6.11) получаем

$$h + a + b \leq d_1.$$

Но неравенство (6.10) с учетом (6.9) дает  $2d_1 < 2h + a + a' + 2b'$ ; мы пришли к противоречию.

*Случай 2:*  $c' > 0$  и  $d_{h+1} > h$ . Это означает, что  $d_{i+1} = e_i + 1$  всякий раз, когда  $d_{i+1} > h$ . Поэтому  $s = h$  и  $a = a'$ .

Теперь (6.10) и (6.9) дают  $d_1 + h < 2h + a' + b' + c' = d_1 + h$ ; мы опять пришли к противоречию.

*Случай 3:*  $c' > 1$  и  $d_{h+1} = h$ . При этих условиях  $e_h = h$  и  $a = b = 0$ , так что  $d_1 = s + c'$ . Далее, так как  $e_h = d_{h+1}$ , то  $e_i = h - 1$  по крайней мере для  $c'$  значений  $i > h$ . Следовательно, неравенство (6.12) дает

$$e_{h-1} \geq h - 1 + c' > h,$$

так что  $e_{h-1} = d_h - 1$ . Поэтому  $s = h - 1$  и  $d_1 = h - 1 + c' \leq e_{h-1} < d_h$ ; мы пришли к противоречию.

*Случай 4:*  $c' = 1$  и  $d_{h+1} = h$ . Опять  $e_h = h$ ,  $a = b = 0$  и  $d_1 = s + c'$ . Так как  $s \leq h - 1$ , то  $d_1 = h$ . Отсюда  $s = 0$  и  $d_i = 1$ , так что  $d_i = 1$  для всех  $i$ . Таким образом, (6.1) выполняется вопреки предположению.

Поскольку  $e_h \geq h$  и  $d_{h+1} \geq e_h$ , ясно, что  $d_{h+1}$  не может быть меньше чем  $h$ . Итак, все возможные случаи рассмотрены и доказательство закончено.

Иногда можно быстро определить, является ли данное разбиение графическим, и если да, то можно представить структуру графов, имеющих это разбиение. Например, легко привести критерий того, что разбиение реализуется графом, который является

деревом. Следующая теорема дает ответ на вопрос, поставленный Оре [4]; этот результат независимо доказывался много раз.

**Теорема 6.3.** *Разбиение  $2q = \sum_{i=1}^p d_i$  реализуется деревом тогда и только тогда, когда каждое  $d_i$  — положительное число и  $q = p - 1$ .*

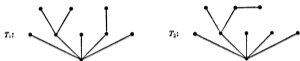


Рис. 6.3. Два дерева с одинаковым разбиением.

В качестве примера рассмотрим разбиение  $16 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Здесь  $d_i > 0$  для любого  $i$  и  $q = 8$ . Поскольку  $p = 9$ , по теореме 6.3 это разбиение реализуется деревом. На рис. 6.3 приведены два дерева с данным разбиением.

### Упражнения

6.1. Какие из следующих разбиений являются графическими?

- $4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1$ .
- $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ .
- $5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ .
- $5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ .

6.2. Нарисовать все графы, имеющие разбиение  $5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2$ .

6.3. Разбиение  $16 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  реализуется каждым из деревьев, изображенных на рис. 6.3. Существуют ли другие деревья с этим разбиением?

6.4. Построить все регулярные графы с шестью вершинами.

6.5. Построить все 5-связных кубических графов с 8 вершинами и все 20-с 10 вершинами.

(Балабан [1])

6.6. Не существуют графические разбиения, в которых все слагаемые различны. Для любого  $p \geq 2$  существуют точно два графа с  $p$  вершинами, в которых только два слагаемых разбиения равны, и эти графы являются дополнительными. (Бехзад, Чартранд [2])

6.7. Графическое разбиение называется *простым*, если существует только один граф с этим разбиением. Каждое графическое разбиение с четырьмя слагаемыми является простым, и наименьшее число слагаемых в графическом разбиении, не являющемся простым, равно 5.

6.8. Разбиение  $(d_1, d_2, \dots, d_p)$  реализуется псевдографом (отметим, что петля вносит 2 в степень своей вершины) тогда и только тогда, когда число  $\sum_{i=1}^p d_i$  четно.

(Хакими [1])

6.9. Если разбиение четного числа  $2q$  имеет вид  $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ , где  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_p$ , то  $\Pi$  реализуется мультиграфом тогда и только тогда, когда  $q \geq d_1$ . (Хакими [1])

\*6.10. Разбиение  $\Pi$ , реализуемое некоторым мультиграфом (см. предыдущее упражнение), реализуется единственным мультиграфом тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $p \leq 3$ ;
- 2)  $d_1 = d_2 + \dots + d_p$ ;
- 3)  $d_1 + 2 = d_2 + \dots + d_p$  и  $d_2 = d_3 + \dots + d_p$ ;
- 4)  $p = 4$  и  $d_3 > d_4 = 1$ ;
- 5)  $d_2 = \dots = d_p = 1$ .

(Сеньор [1], Хакими [1])

6.11. Доказать или опровергнуть: разбиение дерева реализуется более чем одним деревом тогда и только тогда, когда хотя бы одно слагаемое больше 2, а три слагаемых больше 1, причем в случае трех вершин не все слагаемые равны между собой.

6.12. Пусть  $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$  и  $p \geq 3$  — графическое разбиение. Тогда

а)  $\Pi$  реализуется связным графом тогда и только тогда, когда  $d_p > 0$

$$\text{и } \sum_{i=1}^p d_i \geq 2(p-1);$$

б)  $\Pi$  реализуется блоком тогда и только тогда, когда  $d_p > 1$  и  $\sum_{i=1}^p d_i \geq 2(p-1+d_1)$ .

6.13. Графическое разбиение  $\Pi$ , введенное в предыдущем упражнении, реализуется  $n$ -реберно-связным графом с  $n \geq 2$  тогда и только тогда, когда  $d_i \geq n$  для всех  $i$ .

(Эдмондс [1])

6.14. Для любого нетривиального графа  $G$  и любого разбиения  $p = p_1 + p_2$  существует такое разбиение  $V = V_1 \cup V_2$ , что  $|V_i| = p_i$  и  $\Delta(\langle V_1 \rangle) + \Delta(\langle V_2 \rangle) \leq \Delta(G)$ . (Ловац [1])

\*6.15. Мощностью  $m(v)$  вершины  $v$  связного графа  $G$  называется число компонент графа  $G - v$ .

а) Набор чисел  $m_1, m_2, \dots, m_p$  реализуется мощностями вершин связного графа тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $\sum_{i=1}^p m_i \leq 2(p-1)$ .

В случае равенства получаем дерево.

б) Для реализации этого набора связным графом  $G$  с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами необходимо и достаточно, чтобы  $\sum_{i=1}^p m_i < 2(p-1)$  и  $q \leq \binom{k+2}{2} + p - k - 2$ , где  $k = 2(p-1) - \sum_{i=1}^p m_i$ .

(Рамачандра Рао, Рао [1])

## ОБХОДЫ ГРАФОВ

Ложью свет пройдешь, да назад не  
вернешься.

Пословица

Одной из особенностей теории графов, которая способствовала ее популяризации, является ее использование в решении головоломок и игр. Часто головоломку можно сформулировать как графовую задачу: определить, существует ли в графе «эйлерова цепь» или «гамильтонов цикл». Как уже упоминалось в гл. 1, понятие эйлерова графа появилось, когда Эйлер решал задачу о кёнигсбергских мостах. В настоящей главе даны две характеристики эйлеровых графов. Затем рассматриваются гамильтоновы графы, для которых приведены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия их существования. Однако остается еще нерешенной задача нахождения простого и эффективного описания гамильтоновых графов, которое бы отличалось от завуалированной перефразировки определения.

## Эйлеровы графы

Как мы уже видели в гл. 1, отрицательное решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах привело к первой опубликованной работе по теории графов. Задачу об обходе мостов можно обобщить и получить следующую задачу теории графов: можно ли найти в данном графе  $G$  цикл, содержащий все вершины и все ребра? Граф, в котором это возможно, называется *эйлеровым*. Таким образом, эйлеров граф имеет *эйлеров цикл* — замкнутую цепь, содержащую все вершины и все ребра. Ясно, что эйлеров граф должен быть связным.

**Теорема 7.1.** Для связного графа <sup>1)</sup>  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  — эйлеров граф;
- (2) каждая вершина графа  $G$  имеет четную степень;
- (3) множество ребер графа  $G$  можно разбить на простые циклы.

<sup>1)</sup> Ясно, что эта теорема справедлива также и для мультиграфов.



**Доказательство.** (1) *влечет* (2). Пусть  $T$  — эйлеров цикл в  $G$ . Каждое прохождение данной вершины в  $T$  вносит 2 в степень этой вершины  $n$ , поскольку каждое ребро графа  $G$  появляется точно один раз в  $T$ , любая вершина должна иметь четную степень.

(2) *влечет* (3). Так как  $G$  — связный и нетривиальный граф, то степень каждой вершины равна по крайней мере 2, так что  $G$  содержит простой цикл  $Z$ . Удаление ребер цикла  $Z$  приводит к основному подграфу  $G_1$ , в котором также каждая вершина имеет четную степень. Если в  $G_1$  нет ребер, то (3) уже доказано; в противном случае применим высказанные выше соображения к  $G_1$  и получим граф  $G_2$ , в котором опять степени всех вершин четны, и т. д. Одновременно с пустым графом  $G_n$  получаем разбиение ребер графа  $G$  на  $n$  простых циклов.

(3) *влечет* (1). Пусть  $Z_1$  — один из простых циклов этого разбиения. Если  $G$  состоит только из этого цикла, то очевидно, что  $G$  — эйлеров граф. В противном случае другой простой цикл  $Z_2$  в  $G$  имеет вершину  $v$ , общую с  $Z_1$ . Маршрут, начинающийся с  $v$  и состоящий из цикла  $Z_1$  и следующего непосредственно за ним цикла  $Z_2$ , является замкнутой цепью, которая содержит ребра этих двух циклов. Продолжая эту процедуру, мы можем построить замкнутую цепь, содержащую все ребра графа  $G$ ; следовательно,  $G$  — эйлеров граф.

Например, связный граф, представленный на рис. 7.1, в котором каждая вершина имеет четную степень, обладает эйлеровым циклом, а множество ребер можно разбить на простые циклы.

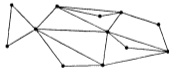


Рис. 7.1. Эйлеров граф.

Из теоремы 7.1 следует, что если в связном графе  $G$  нет вершин с нечетными степенями, то в  $G$  есть замкнутая цепь, содержащая все вершины и все ребра графа

$G$ . Аналогичный результат справедлив для связных графов, имеющих некоторое число вершин с нечетными степенями.

**Следствие 7.1 (а).** Пусть  $G$  — связный граф, в котором  $2n$  вершин имеют нечетные степени,  $n \geq 1$ . Тогда множество ребер графа  $G$  можно разбить на  $n$  открытых цепей.

**Следствие 7.1 (б).** Пусть  $G$  — связный граф, в котором две вершины имеют нечетные степени. Тогда в  $G$  есть открытая цепь, содержащая все вершины и все ребра графа  $G$  (и начинающаяся в одной из вершин с нечетной степенью, а кончающаяся в другой).

## Гамильтоновы графы

Сэр Вильям Гамильтон, строя простые циклы, содержащие каждую вершину додекаэдра, определил класс графов, носящих теперь его имя. Если в  $G$  имеется простой остовный цикл  $Z$ , то  $G$  называется *гамильтоновым графом*, а  $Z$  — *гамильтоновым циклом*. В настоящее время не известно эффективных описаний гамильтоновых графов, но известно несколько необходимых и несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов.

*Тэта-графом* называется блок, содержащий только вершины степени 2 и две несмежные вершины степени 3. Таким образом, тэта-граф состоит из двух вершин степени 3 и трех непересекающихся простых цепей, соединяющих эти вершины, причем длина каждой из этих цепей не меньше 2.

**Теорема 7.2.** *Каждый гамильтонов граф двусвязен. Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-подграф.*

Легко найти тэта-подграф в негамильтоновом блоке, приведенном на рис. 7.2.

Следующая теорема, доказанная Поша [1], дает достаточное условие того, что граф гамильтонов. Она обобщает результаты, полученные ранее Оре и Дираком, которые приводятся здесь в виде следствий.

**Теорема 7.3.** *Пусть  $G$  имеет  $p \geq 3$  вершин. Если для всякого  $n$ ,  $1 \leq n < (p-1)/2$ , число вершин со степенями, не превосходящими  $n$ , меньше чем  $n$ , и для нечетного  $p$  число вершин степени  $(p-1)/2$  не превосходит  $(p-1)/2$ , то  $G$  — гамильтонов граф.*

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна, и пусть  $G$  — максимальный негамильтонов граф с  $p$  вершинами, удовлетворяющий условиям теоремы. Легко видеть, что добавление любого ребра в граф, обладающий указанными в теореме свойствами, приводит к графу, который также обладает этими свойствами. Таким образом, поскольку добавление к  $G$  произвольного ребра приводит к гамильтонову графу, любые две несмежные вершины соединимы простой остовой цепью.

Покажем сначала, что всякая вершина, степень которой не меньше  $(p-1)/2$ , смежна с каждой вершиной со степенью, большей чем  $(p-1)/2$ . Допустим (не теряя общности), что  $\deg v_1 \geq (p-1)/2$  и  $\deg v_p \geq p/2$ , но вершины  $v_1$  и  $v_p$  не смежны. Тогда существует простая остовная цепь  $v_1 v_2 \dots v_p$ , соединяющая  $v_1$  и  $v_p$ . Обозначим вершины, смежные с  $v_1$ , через  $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ , где  $n = \deg v_1$  и  $2 = i_1 < i_2 < \dots$



Рис. 7.2. Негамильтонов блок.

$\dots < i_n$ . Ясно, что вершина  $v_p$  не может быть смежной ни с одной вершиной из  $G$  вида  $v_{i_{j-1}}$ , поскольку тогда в  $G$  был бы гамильтонов цикл

$$v_1 v_2 \dots v_{i_{j-1}} v_j v_{p-1} \dots v_i v_1.$$

Далее, так как  $n \geq (p-1)/2$ , то  $p/2 \leq \deg v_p \leq p-1-n < p/2$ , что невозможно. Поэтому  $v_i$  и  $v_p$  должны быть смежны.

Отсюда следует, что если  $\deg v \geq p/2$  для всех вершин  $v$ , то  $G$  — гамильтонов граф. (Ниже это сформулировано в виде следствия 7.3 (б).) В силу изложенного выше каждая пара вершин графа  $G$  смежна, т. е.  $G$  — полный граф. Мы пришли к противоречию, поскольку  $K_p$  — гамильтонов граф для всех  $p \geq 3$ .

Таким образом, в  $G$  есть вершина  $v$  с  $\deg v < p/2$ . Обозначим через  $m$  наибольшую среди степеней всех таких вершин. Выберем такую вершину  $v_1$ , что  $\deg v_1 = m$ . По принятому предположению число вершин со степенями, не превосходящими  $m$ , не больше чем  $m < p/2$ , поэтому должно быть более чем  $m$  вершин со степенями, превосходящими  $m$ , и, следовательно, не меньшими чем  $p/2$ . В результате найдется некоторая вершина, скажем  $v_p$ , степени по крайней мере  $p/2$ , не смежная с  $v_1$ . Так как  $v_1$  и  $v_p$  не смежны, то существует остовная простая цепь  $v_1 \dots v_p$ . Как и выше, обозначим через  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$  вершины графа  $G$ , смежные с  $v_1$ , и заметим, что вершина  $v_p$  не может быть смежной ни с одной из  $m$  вершин  $v_{i_{j-1}}$  для  $1 \leq j \leq m$ . Но поскольку  $v_1$  и  $v_p$  не смежны, а  $v_p$  имеет степень не меньше  $p/2$ , то, как было показано в первой части доказательства,  $m$  должно быть меньше чем  $(p-1)/2$ . Так как по предположению число вершин со степенями, не превосходящими  $m$ , меньше чем  $m$ , то хотя бы одна из  $m$  вершин  $v_{i_{j-1}}$ , скажем  $v'$ , должна иметь степень не меньше  $p/2$ . Итак, мы установили, что степени двух несмежных вершин  $v_p$  и  $v'$  не меньше  $p/2$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Приведенное достаточное условие не является необходимым. Кубический граф  $G_1$ , изображенный на рис. 7.3, гамильтонов, хотя ясно, что он не удовлетворяет условиям теоремы. Однако условия теоремы не улучшаемы, поскольку при их ослаблении новое условие уже не будет достаточным для гамильтоновости графа. Например, выберем  $p \geq 3$  и  $1 \leq n < (p-1)/2$  и образуем граф  $G_2$  с одной точкой сочленения и двумя блоками  $K_{n+1}$  и  $K_{p-n}$ . Этот граф не гамильтонов; для него нарушается только одно условие теоремы: граф  $G_2$  содержит точно  $n$  вершин степени  $n$ . Это иллюстрируется на рис. 7.3, где  $p=8$  и  $n=3$ . Если выбрать  $p=2n+1$ ,  $n > 1$  и образовать граф  $G=K_{n, n+1}$ , то он не будет гамильтоновым; для него нарушается только одно условие теоремы: в нем  $(p-1)/2+1$  вершин имеют степень  $(p-1)/2$ . Граф  $G_3=K_{2,3}$ , приведенный на рис. 7.3, иллюстрирует это для случая  $p=5$ .

Ограничивая условия теоремы Поша, получаем более простые, но менее сильные достаточные условия, найденные Оре [2] и Дираком [2] соответственно:

**Следствие 7.3(а).** Если  $p \geq 3$  и  $\deg u + \deg v \geq p$  для любой пары  $u$  и  $v$  несмежных вершин графа  $G$ , то  $G$  — гамильтонов граф.

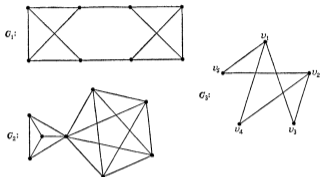


Рис. 7.3. Иллюстрации к теореме Поша.

**Следствие 7.3(б).** Если  $p > 3$  и  $\deg v \geq p/2$  для любой вершины  $v$  графа  $G$ , то  $G$  — гамильтонов граф.

Кубический гамильтонов граф  $G_1$ , показанный на рис. 7.3, имеет четыре остовных простых цикла. Наименьший кубический гамильтонов граф  $K_4$  имеет три остовных простых цикла. Эти замечания иллюстрируют теорему Смита (см. Татт [1]):

**Теорема 7.4.** В каждом кубическом гамильтоновом графе существует по крайней мере три остовных простых цикла.

Тейт [1] высказал предположение, что каждый трехсвязный плоский граф<sup>1)</sup> содержит остовный простой цикл. Татт [1] показал, что это не верно, приведя пример трехсвязного плоского графа с 46 вершинами, не являющегося гамильтоновым (рис. 7.4).

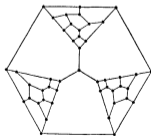


Рис. 7.4. Граф Татта.

<sup>1)</sup> Плоские графы рассматриваются в гл. II. Справедливость гипотезы Тейта означала бы справедливость гипотезы четырех красок.

Наименьший известный в настоящее время негамильтонов трехсвязный плоский граф, имеющий 38 вершин, был построен независимо Ледербергом, Босаком и Барнеттом; эти результаты можно найти в монографии Грюнбаума [2, стр. 359].

Кажущееся отсутствие взаимосвязи между эйлеровыми и гамильтоновыми графами иллюстрируется рис. 7.5; здесь каждый

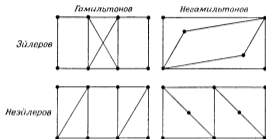


Рис. 7.5. Эйлеровы и гамильтоновы графы.

граф — это блок с 8 вершинами. Однако в следующей главе мы свяжем эйлеровы и гамильтоновы графы с помощью так называемых «реберных графов».

Кстати, Пламмер высказал предположение, что квадрат любого двусвязного графа есть гамильтонов граф<sup>1)</sup>.

## Упражнения

7.1. Найти эйлеров цикл в графе  $G$ , приведенном на рис. 7.1, а также разбиение ребер графа  $G$  на простые циклы.

7.2. Если каждый блок связанного графа  $G$  эйлеров, то и весь граф  $G$  эйлеров, и обратно.

7.3. В следствии 7.1 (а) нельзя найти разбиение, содержащее меньше чем  $l$  цепей. Сформулировать и доказать утверждение, обратное следствию 7.1 (б).

7.4. Граф называется *произвольно перечисляемым* из вершины  $v_0$ , если следующая процедура всегда приводит к эйлерову циклу: начиная с произвольной вершины  $v_0$ , идем по любому инцидентному с ней ребру; достигнув вершины  $v$ , идем по любому инцидентному с ней ребру, по которому еще не ходили, и продолжаем этот процесс до тех пор, пока не останется непройденных ребер.

а) Эйлеров граф является произвольно перечисляемым из вершины  $v_0$  тогда и только тогда, когда любой его простой цикл содержит  $v_0$ .

(Оре [1])

<sup>1)</sup> Караганис [1] очень просто показал, что куб любого связанного графа является гамильтоновым графом (доказательство проводится для произвольного остова данного графа). Наконец, гипотеза Пламмера была действительно подтверждена (см. Флейшнер [1]).— *Прим. перев.*

б) Если  $G$  — произвольно вычерчиваемый граф из вершины  $v_0$ , то  $v_0$  имеет максимальную степень.

(Бэблер [1])

в) Если  $G$  — произвольно вычерчиваемый граф из вершины  $v_0$ , то или  $v_0$  — единственная точка сочленения, или в  $G$  нет точек сочленения.

(Харари [8])

7.5. Доказать или опровергнуть: если граф  $G$  содержит порожденный тэта-подграф, то  $G$  не гамильтонов.

7.6. а) В каждом нетривиальном связном графе  $G$  любая пара вершин его куба  $G^3$  соединена остовной простой цепью. Следовательно, каждое ребро в  $G^3$  принадлежит некоторому гамильтонову циклу.

(Караганис [1])

б) Если любая пара вершин графа  $G$  соединена остовной простой цепью и  $p \geq 4$ , то  $G$  — трехсвязный граф.

7.7. Привести пример негамильтонова графа с 10 вершинами, у которого  $\deg u + \deg v \geq p - 1$  для любой пары несмежных вершин  $u$  и  $v$ .

7.8. Сколько остовных простых циклов имеется в полных двудольных графах  $K_{3,3}$  и  $K_{4,3}$ ?

7.9. Граф  $G$  называется произвольно проходимым (произвольно гамильтоновым), если остовная цепь (гамильтонов цикл) всегда получается с помощью следующей процедуры: начинаем с произвольной вершины в  $G$ , последовательно переходим в любую смежную вершину, еще не пройденную, и продолжаем до тех пор, пока не исчерпаем все вершины.

а) Граф  $G$  с  $p \geq 3$  вершинами произвольно проходим тогда и только тогда, когда он произвольно гамильтонов.

б) Граф  $G$  с  $p \geq 3$  вершинами произвольно проходим тогда и только тогда, когда он совпадает с одним из графов  $C_p$ ,  $K_p$  или при  $p = 2n$  с  $K_{n,n}$ .

(Чартрэнд, Кронк [1])

7.10. Можно считать, что теорема 7.3 дает достаточное условие двусвязности графа  $G$ . Его можно обобщить на  $n$ -связные графы. Пусть  $G$  — нетривиальный граф и  $1 < n < p$ . Следующие условия являются достаточными для того, чтобы граф  $G$  был  $n$ -связным:

1. Для каждого  $k$ , для которого  $n - 1 \leq k < (p + n - 3)/2$ , число вершин со степенями, не превосходящими  $k$ , не больше чем  $k + 1 - n$ .
2. Число вершин со степенями, не превосходящими  $(p + n - 3)/2$ , не больше чем  $p - n$ .

(Чартрэнд, Капур, Кронк [1])

7.11. Теорему Поста можно обобщить следующим образом: Пусть  $G$  имеет  $p \geq 3$  вершин и  $0 \leq k \leq p - 2$ . Если для любого целого  $i$ , для которого  $k + 1 \leq i < (p + k)/2$ , число вершин со степенями, не превосходящими  $i$ , меньше чем  $i - k$ , то каждая простая цепь длины  $k$  содержится в некотором гамильтоновом цикле.

(Кронк [1])

7.12. Напомним, что два помеченных графа называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм, сохраняющий пометки. Под  $e$ -графом понимается граф, в котором каждая вершина имеет четную степень.

а) Число помеченных графов с  $p$  вершинами равно  $2^{p(p-1)/2}$ .

б) Число помеченных  $e$ -графов с  $p$  вершинами равно числу помеченных графов с  $p - 1$  вершинами.

(Робинсон)

7.13. Если  $G$  есть  $(p, q)$ -граф, у которого  $p \geq 3$  и  $q \geq (p^2 - 3p + 6)/2$ , то  $G$  гамильтонов.

(Оре [3])

7.14. Если  $\deg u + \deg v \geq p+1$  для любых двух несмежных вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$ , то в  $G$  существует остовная простая цепь, соединяющая каждую пару различных вершин.

(Оре [5])

7.15. Если  $G$  — такой граф с  $p \geq 3$  вершинами, что удаление множества, содержащего не более  $a$  вершин, приводит к гамильтонову графу, то  $G$   $(p-2)$ -связен.

(Чартрэнд, Капур, Кронк [1])

7.16. Рассмотрим такие негамильтоновы графы  $G$ , что каждый граф  $G-u$  гамильтонов. Среди них существует единственный граф с 10 вершинами и нет графов с меньшим числом вершин.

(Годин, Герц, Росси [1])

7.17. Существуют ли негамильтоновы графы со сколь угодно большой связностью?

7.18. Квадрат каждого двусвязного графа гамильтонов.

(Флейшвер [1])

## РЕБЕРНЫЕ ГРАФЫ

Принимается кратчайшее расстояние между двумя точками.

Евклид

Понятие реберного графа для данного графа настолько естественно, что независимо было введено многими авторами. Конечно, каждый из них давал свое название<sup>1)</sup>: Оре [5] назвал этот граф «смежностным графом», Сабидусси [2] — «графом производной», Байнеке [4] — «производным графом», Сешу и Рид [1] — «реберно-вершинно-двойственным», Кастелейн [1] — «покрывающим графом», Менон [1] — «присоединенным» («сопряженным»). Были даны различные описания реберных графов. В этой главе вводится также тотальный граф, который изучался впервые Бехзадом [1], и поскольку (это очень удивительно!) он был обнаружен единожды, он не имеет других названий. Мы исследуем связь между реберными и тотальными графами, уделяя особое внимание эйлеровым и гамильтоновым графам.

## Некоторые свойства реберных графов

Рассмотрим множество  $X$  всех ребер графа  $G$  как семейство двух-вершинных подмножеств множества  $V(G)$ . *Реберным графом* графа  $G$  — обозначается  $L(G)$  — называется граф пересечений  $\Omega(X)$ . Таким образом, вершинами графа  $L(G)$  являются ребра графа  $G$  и две вершины графа  $L(G)$  смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра графа  $G$ . Если  $x=uv$  — ребро графа  $G$ , то ясно, что степень вершины  $x$  в графе  $L(G)$  равна  $\deg u + \deg v - 2$ . Два примера графов и их реберных графов приведены на рис. 8.1. Заметим, что на этом рисунке  $G_2=L(G_1)$ , так что  $L(G_2)=L(L(G_1))$ . Запишем  $L^1(G)=L(G)$ ,  $L^2(G)=L(L(G))$  и в общем случае определим *итерированный реберный граф* рекуррентным соотношением  $L^n(G)=L(L^{n-1}(G))$ ,  $n \geq 2$ .

Непосредственно из определения графа  $L(G)$  вытекает, что каждая точка сочленения графа  $L(G)$  есть мост графа  $G$ , не являющийся конечным ребром, и обратно.

<sup>1)</sup> Гоффман [4] использовал термин *line graph* (реберный граф), однако при этом ребро графа он называл *edge*, а не *line*. Уитни [2] первым обнаружил эти графы, но названия им не дал.



Если определен некоторый класс графов, то полезно знать оценку числа вершин и ребер в каждом графе данного класса. Это легко сделать для реберных графов.

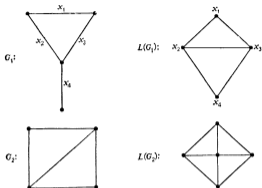


Рис. 8.1. Графы и их реберные графы.

**Теорема 8.1.** Если  $G$  — это  $(p, q)$ -граф с вершинами, имеющими степени  $d_i$ , то  $L(G)$  имеет  $q$  вершин и  $q_L$  ребер, где

$$q_L = -q + \frac{1}{2} \sum d_i^2.$$

**Доказательство.** По определению реберного графа граф  $L(G)$  имеет  $q$  вершин. Каждые  $d_i$  ребер, инцидентных вершине  $v_i$ , дают вклад  $\binom{d_i}{2}$  в число ребер графа  $L(G)$ , так что

$$q_L = \sum \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2} \sum d_i(d_i - 1) = \frac{1}{2} \sum d_i^2 - \frac{1}{2} \sum d_i = \frac{1}{2} \sum d_i^2 - q.$$

Следующий результат вы можете установить многими разными способами в зависимости от вашего желания.

**Теорема 8.2.** Связный граф  $G$  изоморфен своему реберному графу  $L(G)$  тогда и только тогда, когда  $G$  — простой цикл.

Таким образом, для графа  $G$  (не обязательно связного)  $G \cong L(G)$  тогда и только тогда, когда  $G$  — регулярный граф степени 2.

Если графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, то очевидно, что графы  $L(G_1)$  и  $L(G_2)$  также изоморфны. Уитни [2] установил, что обратное справедливо почти всегда, и указал при этом единственную пару различных графов, имеющих один и тот же реберный граф. Доказательство, данное здесь, принадлежит Юнгу [11].

**Теорема 8.3.** Пусть  $G$  и  $G'$  — связные графы, у которых реберные графы изоморфны. Графы  $G$  и  $G'$  изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них есть  $K_3$ , а другой  $K_{1,2}$ .

**Доказательство.** Заметим сначала, что среди связных графов с не более чем четырьмя вершинами единственной парой различных графов с изоморфными реберными графами являются  $K_3$  и  $K_{1,2}$ . Кроме того, нетрудно видеть, что изоморфизм  $\varphi$  графа  $G$  на граф  $G'$  индуцирует изоморфизм  $\varphi_1$  графа  $L(G)$  на граф  $L(G')$ . Докажем более сильный результат, из которого будет следовать наша теорема.

*Если в графах  $G$  и  $G'$  более четырех вершин, то любой изоморфизм  $\varphi_1$  графа  $L(G)$  на граф  $L(G')$  индуцируется точно одним изоморфизмом графа  $G$  на граф  $G'$ .*

Прежде всего докажем, что  $\varphi_1$  индуцируется не более чем одним изоморфизмом. Предположим противное, т. е. что имеются два таких изоморфизма, скажем  $\varphi$  и  $\psi$ , и покажем, что  $\varphi(v) = \psi(v)$  для любой вершины  $v$  графа  $G$ . В самом деле, в графе  $G$  существуют два ребра  $x = uv$  и  $y = vw$  или два ребра  $x = uv$  и  $y = uw$ . Если  $y = uw$ , то обе вершины  $\varphi(v)$  и  $\psi(v)$  принадлежат каждому из ребер  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_1(y)$ . Но поскольку у этих ребер только одна общая вершина, то  $\varphi(v) = \psi(v)$ . Аналогично рассматривается случай  $y = uw$ : так как ребро  $\varphi_1(x)$  содержит две вершины  $\varphi(v)$  и  $\varphi(u) = \psi(u)$ , то опять имеем  $\varphi(v) = \psi(v)$ . Следовательно,  $\varphi_1$  индуцируется самое большее одним изоморфизмом графа  $G$  на граф  $G'$ .

Докажем теперь существование изоморфизма  $\varphi$ , индуцирующего  $\varphi_1$ . Сначала покажем, что ребра  $x_1 = uv_1$ ,  $x_2 = uv_2$  и  $x_3 = uv_3$  подграфа  $K_{1,3}$  графа  $G$  должны переходить при отображении  $\varphi_1$  в ребра подграфа  $K_{1,3}$  графа  $G'$ . Пусть  $y$  — другое ребро, смежное по крайней мере с одним из ребер  $x_i$  и такое, что оно смежно или с одним, или сразу с тремя ребрами  $x_i$ . Такое ребро  $y$  существует в любом графе с  $p \geq 5$  вершинами, а для  $p < 5$  теорема тривиальна. Если три ребра  $\varphi_1(x_i)$  образуют не  $K_{1,3}$ , а треугольник, то ребро  $\varphi_1(y)$  должно быть смежно точно с двумя из них. Следовательно, любой подграф  $K_{1,3}$  должен переходить в  $K_{1,3}$ .

Обозначим через  $S(v)$  множество ребер, инцидентных  $v$ . Покажем, что для каждой вершины  $v$  графа  $G$  существует точно одна такая вершина  $v'$  графа  $G'$ , что  $S(v)$  при отображении  $\varphi_1$  переходит в  $S(v')$ . Если  $\deg v \geq 2$ , обозначим через  $y_1$  и  $y_2$  ребра, инцидентные  $v$ , и пусть  $v'$  — общая вершина ребер  $\varphi_1(y_1)$  и  $\varphi_1(y_2)$ . Тогда для каждого ребра  $x$ , инцидентного  $v$ , вершина  $v'$  инцидентна  $\varphi_1(x)$ , и для каждого ребра  $x'$ , инцидентного  $v'$ , вершина  $v$  инцидентна  $\varphi_1^{-1}(x')$ . Если  $\deg v = 1$ , то пусть  $x = uv$  — ребро, инцидентное  $v$ . Тогда  $\deg u \geq 2$ , и, следовательно, множество  $S(u)$  переходит в множество  $S(u')$  и  $\varphi_1(x) = u'v'$ . Поскольку для каждого ребра  $x'$ , инцидентного  $v'$ ,

ребра  $\varphi_1^{-1}(x')$  и  $x$  должны иметь общую вершину, то вершина  $u$  принадлежит ребру  $\varphi_1^{-1}(x')$ , а вершина  $u'$  — ребру  $x'$ , т. е.  $x' = \varphi_1(x)$  и  $\deg v' = 1$ . Итак,  $S(u) = S(v)$  только тогда, когда  $u = v$ . Следовательно, отображение  $\varphi$  множества  $V$  в множество  $V'$  взаимно однозначно.

Далее, для данной вершины  $v'$  из  $V'$  существует инцидентное ей ребро  $x'$ . Обозначим  $\varphi_1^{-1}(x')$  через  $uv$ . Тогда или  $\varphi(u) = v'$ , или  $\varphi(v) = v'$ , так что  $\varphi$  — отображение «на».

Наконец, заметим, что  $\varphi_1(x) = \varphi(u)\varphi(v)$  для каждого ребра  $x = uv$  графа  $G$  и  $\varphi_1^{-1}(x') = \varphi^{-1}(u')\varphi^{-1}(v')$  для каждого ребра  $x' = u'v'$  графа  $G'$ , так что  $\varphi$  — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм  $\varphi_1$ . Теорема доказана.

### Характеризация реберных графов

Граф  $G$  называется *реберным графом*, если он изоморфен реберному графу  $L(H)$  некоторого графа  $H$ . Например,  $K_4 - x$  есть реберный граф (см. рис. 8.1).

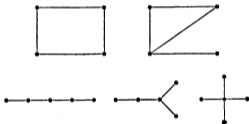


Рис. 8.2. Связные графы с четырьмя ребрами.

Покажем, что звезда  $K_{1,3}$  не является реберным графом. Предположим, что  $K_{1,3} = L(H)$ . Тогда граф  $H$  имеет 4 ребра, поскольку в  $K_{1,3}$  четыре вершины, и, кроме того, граф  $H$  должен быть связным. Все связные графы с четырьмя ребрами приведены на рис. 8.2. Так как  $L(C_4) = C_4$  (по теореме 8.3) и  $L(K_{1,3} + x) = K_4 - x$  (см. рис. 8.1), то  $H$  может быть только одним из трех деревьев. Но реберными графами этих деревьев являются соответственно простая цепь  $P_4$ , граф  $K_3 \cdot K_2$  и граф  $K_4$ . Таким образом,  $K_{1,3}$  не есть реберный граф. В дальнейшем мы увидим, что граф  $K_{1,3}$  играет важную роль при установлении основных свойств реберных графов. Первый результат о реберных графах — утверждение (2) приведенной ниже теоремы — полученный Крауцем [1], довольно близок к самому определению реберного графа. Существенный сдвиг в изучении свойств реберных графов был сделан ван Роои и Вилфом [1], которым удалось полу-

чить (утверждение (3)) структурный критерий того, что данный граф является реберным. Наконец, Байнеке [4] и Робертсон (не опубликовано) нашли все подграфы, которые не могут встречаться в реберных графах. Напомним, что порожденным подграфом называется подграф, максимальный на данном множестве вершин. Треугольник  $T$  графа  $G$  называется *нечетным*, если в  $G$  имеется вершина, смежная с нечетным числом вершин в  $T$ , и *четным* в противном случае.

**Теорема 8.4.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $G$  — реберный граф;
- (2) ребра графа  $G$  можно разбить на полные подграфы таким образом, чтобы ни одна из вершин не принадлежала более чем двум подграфам;
- (3) граф  $G$  не содержит звезду  $K_{1,2}$  в качестве порожденного подграфа, и если два нечетных треугольника имеют общее ребро, то подграф, порожденный их вершинами, есть  $K_4$ ;
- (4) ни один из девяти графов, приведенных на рис. 8.3, не является порожденным подграфом графа  $G$ .

**Доказательство.** (1) *влечет* (2). Пусть  $G$  — реберный граф некоторого графа  $H$ . Не теряя общности, предположим, что в  $H$  нет изолированных вершин. Тогда ребра звезды каждой вершины графа  $H$  порождают полный подграф графа  $G$  и любое ребро графа  $G$  принадлежит только одному такому подграфу. Поскольку каждое ребро графа  $H$  принадлежит звездам ровно двух вершин графа  $H$ , то ни одна из вершин графа  $G$  не содержится более чем в двух таких подграфах.

(2) *влечет* (1). Пусть дано разбиение множества всех ребер графа  $G$  на полные подграфы  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , удовлетворяющее утверждению (2). Покажем, как построить граф  $H$ , для которого реберным графом будет граф  $G$ . Вершины графа  $H$  соответствуют объединению множества  $S$  всех подграфов  $S_1, S_2, \dots, S_n$  и множества  $U$  вершин графа  $G$ , причем каждую вершину из  $U$  мы относим только к одному из подмножеств  $S_i$ . Таким образом, объединение  $S \cup U$  является множеством вершин графа  $H$  и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества имеют непустое пересечение, т. е.  $H$  — граф пересечений  $\Omega(S \cup U)$ .

(2) *влечет* (4). Легко проверить, что ни один из девяти графов, приведенных на рис. 8.3, не допускает разбиение множества ребер на полные подграфы, удовлетворяющее указанному выше условию. Окончательный результат вытекает из того, что каждый порожденный подграф реберного графа сам должен быть реберным графом.

(4) *влечет* (3). Покажем, что если граф  $G$  не удовлетворяет утверждению (3), то в  $G$  найдется порожденный подграф, изоморфный одному из девяти запрещенных графов. Предположим, что  $G$  содержит нечетные треугольники  $abc$  и  $abd$ , причем  $c$  и  $d$  не смежны.

В зависимости от того, существует или нет в графе  $G$  вершина  $v$ , смежная с нечетным числом вершин обоих треугольников, возможны два случая.

Случай 1. Пусть вершина  $v$  смежна с нечетным числом вершин треугольников  $abc$  и  $abd$ . Тогда имеются две возможности: или  $v$  смежна точно с одной вершиной в каждом треугольнике, или  $v$

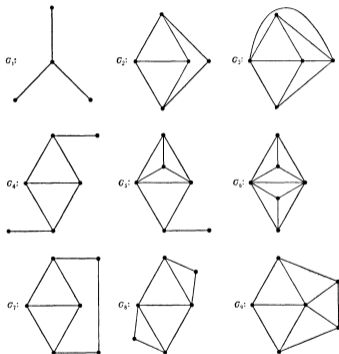


Рис. 8.3. Девять запрещенных подграфов для реберных графов.

смежна с более чем одной вершиной в каждом треугольнике. Если выполняется последнее, то вершина  $v$  должна быть смежной со всеми четырьмя вершинами двух треугольников, и, следовательно, граф  $G$  содержит  $G_9$  (см. рис. 8.3) как порожденный подграф. При осуществлении первой возможности либо вершина  $v$  смежна только с одной из вершин  $a$  или  $b$  — и тогда получается граф  $G_1$ , либо  $v$

смежна и с вершиной  $c$ , и с вершиной  $d$  — и тогда получается граф  $G_2$ .

Случай 2. Нет вершины, смежной с нечетным числом вершин каждого из этих двух треугольников. Пусть в этом случае вершины  $u$  и  $v$  смежны с нечетным числом вершин треугольников  $abc$  и  $abd$  соответственно. Здесь могут быть три подслучая:

Случай 2.1. Каждая вершина  $u$  и  $v$  смежна точно с одной вершиной соответствующего треугольника.

Случай 2.2. Одна из вершин  $u$  и  $v$  смежна со всеми тремя вершинами «своего» треугольника, а другая только с одной.

Случай 2.3. Каждая вершина  $u$  и  $v$  смежна со всеми тремя вершинами соответствующего треугольника.

Прежде чем рассматривать эти подслучаи, отметим два факта. Если вершина  $u$  или  $v$  смежна с вершиной  $a$  или  $b$ , то она смежна также с вершиной  $c$  или  $d$ , так как иначе в графе  $G$  был бы порожденный подграф  $G_1$ . Далее, ни  $u$ , ни  $v$  не могут быть смежны одновременно с  $c$  и  $d$ , так как иначе в графе  $G$  был бы порожденный подграф  $G_2$  или  $G_3$ .

Случай 2.1. Пусть  $uc, vd \in G$ . В зависимости от того, принадлежит или нет ребро  $uv$  графу  $G$ , получаем  $G_4$  или  $G_7$  в качестве порожденного подграфа. Если  $ub, vd \in G$ , то из предыдущих замечаний следует, что  $ud \in G, uc \notin G$ ; если  $uv \notin G$ , то вершины  $\{a, d, u, v\}$  порождают  $G_1$ , если же  $uv \in G$ , то вершины  $\{a, b, c, d, u, v\}$  порождают  $G_2$ . Пусть  $ub, va \in G$ ; тогда обязательно  $ud, vc \in G$ . Поэтому, если  $uv \notin G$ , то порождается граф  $G_8$ , а если  $uv \in G$ , то граф  $G_2$ . Наконец, если  $ub, vb \in G$ , то опять  $ud, vc \in G$ , откуда следует, что в зависимости от того, принадлежит или нет ребро  $uv$  графу  $G$ , порожденным подграфом графа  $G$  будет  $G_3$  или  $G_1$ .

Случай 2.2. Пусть  $ua, ub, uc \in G$ . Ясно, что если  $ud \in G$ , то  $G_3$  — порожденный подграф графа  $G$ ; таким образом,  $ud \notin G$ . Далее, вершина  $v$  может быть смежной или с  $d$ , или с  $b$ . Если  $vd \in G$ , то в зависимости от того, принадлежит или нет ребро  $uv$  графу  $G$ , порожденным подграфом графа  $G$  будет  $G_2$  или  $G_3$ . Если  $vb \in G$ , то порожденным подграфом графа  $G$  будет  $G_4$  или  $G_1$  в зависимости от того, смежна или нет вершина  $v$  с обеими вершинами  $c$  и  $u$ .

Случай 2.3. Если  $ud, vc$  или  $uv$  принадлежит  $G$ , то  $G_3$  — порожденный подграф. Оставшаяся единственная возможность приводит к порожденному подграфу  $G_5$ .

(3) *влечет* (1). Пусть для графа  $G$  справедливо утверждение (3). Можно считать граф  $G$  связным. Далее, должно выполняться точно одно из следующих двух условий:

1. Граф  $G$  содержит два четных треугольника, имеющих общее ребро.
2. Если два треугольника графа  $G$  имеют общее ребро, то один из них нечетный.

Можно показать, что если граф  $G$  удовлетворяет первому условию, то он совпадает с одним из графов  $H_1 = L(K_{1,3} + x)$ ,  $H_2 = L(H_1)$  или  $H_3 = L(K_4)$ , изображенных на рис. 8.4. Поэтому предположим, что  $G$  удовлетворяет второму условию. Приведем метод построения такого графа  $H$ , что  $G = L(H)$ .

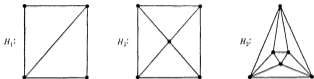


Рис. 8.4. Три реберных графа.

Пусть  $F_1$  — семейство всех клик графа  $G$ , не являющихся четными треугольниками, причем каждая такая клика рассматривается как множество вершин, и  $F_2$  — семейство вершин графа  $G$  (которые берутся как отдельные элементы), принадлежащих некоторой клике

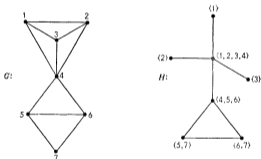


Рис. 8.5. Реберный граф и граф, ему соответствующий.

$K$  семейства  $F_1$  и не смежных ни с одной вершиной графа  $G$  —  $K$ . Наконец, пусть  $F_3$  — семейство ребер графа  $G$  (каждое ребро взято как множество, состоящее из двух вершин), принадлежащих одному и тому же четному треугольнику. Не трудно проверить, что граф  $G$  изоморфен реберному графу графа пересечений  $H = \Omega(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ . Теорема доказана.

Последнее построение иллюстрируется на рис. 8.5, где семействами данного графа  $G$ , определяющими граф пересечений  $H$ , являются  $F_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$ ,  $F_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  и  $F_3 = \{\{5, 7\}, \{6, 7\}\}$ ; таким образом,  $G = L(H)$ .

### Специальные реберные графы

В этом разделе описываются реберные графы деревьев, полных графов и полных двудольных графов.

Следующий результат, полученный Чартризом, дает возможность определить, когда граф является реберным графом дерева.

**Теорема 8.5.** *Граф есть реберный граф дерева тогда и только тогда, когда он является связным графом блоков, каждая точка сочленения которого принадлежит в точности двум блокам.*

**Доказательство.** Предположим, что  $G=L(T)$  и  $T$  — дерево. Тогда  $G$  — граф блоков  $B(T)$ , поскольку ребра и блоки в дереве совпадают. Каждая точка сочленения  $x$  графа  $G$  соответствует мосту  $m$  дерева  $T$  и принадлежит тем двум блокам графа  $G$ , которые соответствуют звездам вершин  $u$  и  $v$ . Необходимость доказана.

Установим достаточность. Пусть  $G$  — граф блоков, у которого каждая точка сочленения принадлежит ровно двум блокам. Так как любой блок графа блоков есть полный граф, то по теореме 8.2 существует такой граф  $H$ , что  $L(H)=G$ . Если  $G=K_2$ , то можно взять  $H=K_{1,2}$ . Покажем, что для любого другого графа блоков  $G$  граф  $H$  должен быть деревом. Доказываем от противного. Предположим, что  $H$  не является деревом, т. е. содержит простой цикл. Если граф  $H$  сам есть простой цикл, то по теореме 8.3  $L(H)=H$ , но единственный простой цикл, являющийся также графом блоков, есть  $K_2$ , а этот случай уже рассматривался. Следовательно, граф  $H$  должен содержать как собственную часть простой цикл; другими словами, граф  $H$  содержит простой цикл  $Z$  и ребро  $x$ , смежное с двумя ребрами цикла  $Z$  и не смежное с некоторым ребром  $y \in Z$ . Вершины  $x$  и  $y$  графа  $L(H)$  лежат на простом цикле графа  $L(H)$  и не смежны. Это противоречит тому, что  $L(H)$  — граф блоков (см. теорему 3.5). Итак,  $H$  — дерево. Теорема доказана.

На рис. 8.6 показан граф блоков  $G$ , у которого каждая точка сочленения принадлежит точно двум блокам. Дерево  $T$ , для которого  $G$  — реберный граф, строится следующим образом. Сначала образуется граф блоков  $B(G)$ , а затем добавляются новые вершины в качестве вершин, не являющихся точками сочленения графа  $G$ , и ребра, соединяющие каждый блок с новыми вершинами.

Реберные графы полных и полных двудольных графов почти всегда характеризуются с помощью довольно простых утверждений, в которых говорится о смежности ребер в  $K_p$  и  $K_{m,n}$ . Случай полных графов был независимо рассмотрен Чангом [1] и Гоффманом [11, 12].

**Теорема 8.6.** *Если  $p \neq 8$ , то  $G$  — реберный граф графа  $K_p$  тогда и только тогда, когда*

- 1)  $G$  имеет  $\binom{p}{2}$  вершин,
- 2)  $G$  — регулярный граф степени  $2(p-2)$ ,



- 3) любые две несмежные вершины одновременно смежны точно с четырьмя вершинами.
- 4) любые две смежные вершины одновременно смежны точно с  $p-2$  вершинами.

Очевидно, что  $L(K_p)$  обладает этими свойствами. Но совсем не очевидно, что при  $p=8$  существует ровно три графа, удовлетворяющих указанным условиям и не являющихся  $L(K_p)$ .

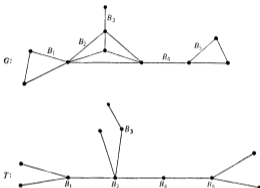


Рис. 8.6. Реберный граф  $G$  дерева  $T$ .

Для полных двудольных графов соответствующий результат был получен Муном [1] и Гоффманом [4].

**Теорема 8.7.** Если  $m \neq 4$  и  $n \neq 4$ , то  $G$  — реберный граф графа  $K_{m,n}$  тогда и только тогда, когда

- 1)  $G$  имеет  $mn$  вершин,
- 2)  $G$  — регулярный граф степени  $m+n-2$ ,
- 3) любые две несмежные вершины одновременно смежны точно с двумя вершинами.
- 4) среди смежных пар вершин точно  $n \binom{m}{2}$  пар одновременно смежны ровно с  $m-2$  вершинами, а другие  $m \binom{n}{2}$  пар — ровно с  $n-2$  вершинами.

При  $m=n=4$  существует только один граф, удовлетворяющий этим условиям и не являющийся  $L(K_{4,4})$ . Он имеет 16 вершин и был найден Шрихантом [11] при доказательстве им теоремы 8.7 в случае  $m=n$ .

## Реберные графы и обходы

Исследуем теперь связь эйлеровых и гамильтоновых графов с реберными графами.

Пусть  $x=uv$  — ребро графа  $G$ , а  $w$  не является вершиной в  $G$ . Говорят, что ребро  $x$  *подразбито*, если оно заменено на ребра  $uw$  и  $wv$ . Если каждое ребро графа  $G$  подразбито, то такой граф называется *графом подразбиений* графа  $G$  и обозначается  $S(G)$ ; см. рис. 8.7.



Рис. 8.7. Граф и его граф подразбиений.

Если обозначить через  $S_n(G)$  граф, получаемый из  $G$  введением  $n$  новых вершин степени 2 на каждом ребре графа  $G$ , так что  $S(G) = S_1(G)$ , то можно определить новый граф  $L_n(G) = L(S_{n-1}(G))$ . Отметим, что в общем случае  $L_n(G) \neq L^n(G)$ . Здесь  $L^n(G)$  — итерированный реберный граф графа  $G$ .

**Теорема 8.8.** *Если  $G$  — эйлеров граф, то граф  $L(G)$  эйлеров и гамильтонов. Если  $G$  — гамильтонов граф, то  $L(G)$  — также гамильтонов граф.*

Легко привести контрпримеры к обратным утверждениям. Например, граф  $L(G)$ , изображенный на рис. 8.8, эйлеров и гамильтонов, в то время как граф  $G$  не эйлеров; граф  $L(G)$  на рис. 8.9 гамильтонов, а граф  $G$  нет.

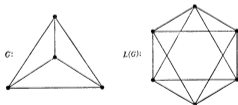


Рис. 8.8. Контрпример.

Второе предложение теоремы 8.8 можно усилить. Это достигается благодаря следующему результату Харари и Нэш-Вильямса [1], который легко вытекает из предыдущей теоремы и равенства  $L_2(G) = L(S(G))$ .

**Теорема 8.9.** Для того чтобы граф  $L_2(G)$  был гамильтоновым, достаточно, чтобы граф  $G$  был гамильтоновым, и необходимо, чтобы граф  $L(G)$  был гамильтоновым.

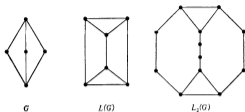


Рис. 8.9. Другой контрпример.

Графы на рис. 8.10 и 8.9 показывают, что первое из условий не является необходимым, а второе не является достаточным для того, чтобы  $L_2(G)$  был гамильтоновым графом. Отметим также (см.

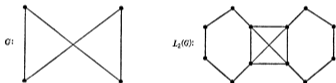


Рис. 8.10. Еще один контрпример.

рис. 8.11), что  $L(G) = L_1(G)$  и  $L_2(G)$  могут быть гамильтоновыми графами, даже если граф  $G$  не будет эйлеровым. Однако граф  $L_3(G)$  связывает эти два понятия.

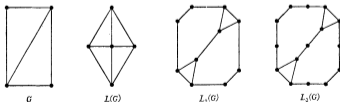


Рис. 8.11. Последовательность графов  $L_n(G)$ .

**Теорема 8.10.** Граф  $G$  эйлеров тогда и только тогда, когда граф  $L_3(G)$  гамильтонов.

Для почти каждого связного графа  $G$  почти все графы  $L^n(G)$ , как показал Чартрэнд [2], гамильтоновы.

**Теорема 8.11.** *Если  $G$  — нетривиальный связный граф с  $p$  вершинами, не являющийся простой цепью, то граф  $L^n(G)$  гамильтонов для всех  $n \geq p - 3$ .*

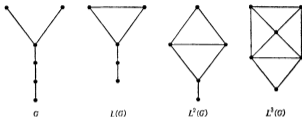


Рис. 8.12. Последовательность итерированных реберных графов.

На рис. 8.12 приведен в качестве примера граф  $G$  с 6 вершинами, а также графы  $L(G)$ ,  $L^2(G)$  и гамильтонов граф  $L^3(G)$ .

### Тотальные графы

Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Два элемента графа называются *соседними*, если они смежны или инцидентны. *Тотальным графом*  $T(G)$  называется граф, у которого множеством вершин является  $V(G) \cup X(G)$  и две вершины смежны тогда и

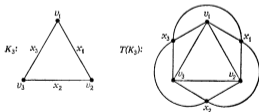


Рис. 8.13. Образование тотального графа.

только тогда, когда они соседние в графе  $G$ . На рис. 8.13 показано образование тотального графа  $T(K_3)$ . Легко видеть, что  $T(G)$  содержит в качестве порожденных подграфов как  $G$ , так и  $L(G)$ .

Другую характеристику тотальных графов дал Бехзад [1].

**Теорема 8.12.** *Тотальный граф  $T(G)$  изоморфен квадрату графа подразделения  $S(G)$ .*

**Следствие 8.12 (а).** *Если  $v$  — вершина графа  $G$ , то степень вершины  $v$  в  $T(G)$  равна  $2\deg v$ . Если  $x=uv$  — ребро графа  $G$ , то степень вершины  $x$  в  $T(G)$  равна  $\deg u + \deg v$ .*

**Следствие 8.12 (б).** *Пусть  $G$  — это  $(p, q)$ -граф, вершины которого имеют степени  $d_i$ ; тогда тотальный граф  $T(G)$  имеет  $p_T = p + q$  вершин и  $q_T = 2q + \binom{p}{2} \sum d_i^2$  ребер.*

В гл. 2 были определены числа Рамсея  $r(m, n)$  и было отмечено, что их вычисление в общем случае остается нерешенной задачей. Бехзад и Раджави [1] сформулировали и решили аналогичную проблему относительно реберных графов. *Реберным числом Рамсея  $r_1(m, n)$*  называется такое наименьшее положительное целое число  $p$ , что каждый связный граф с  $p$  вершинами содержит или  $n$  попарно несмежных ребер, или звезду  $K_{1,m}$ . Другими словами,  $r_1(m, n)$  — такое наименьшее натуральное число  $p$ , что для любого графа  $G$  с  $p$  вершинами  $L(G)$  содержит  $K_m$  или  $\overline{L(G)}$  содержит  $K_n$ .

**Теорема 8.13.** *Для  $n > 1$  всегда справедливо равенство  $r_1(2, n) = 3$ . Для всех других значений  $m$  и  $n$*

$$r_1(m, n) = (m-1)(n-1) + 2.$$

Отметим, что равенство  $r_1(m, n) = r_1(n, m)$  верно не всегда. К тому же в противоположность числам Рамсея числа  $r_1(m, n)$  определены только для связных графов.

## Упражнения

8.1. При каких условиях ребра реберного графа можно разбить на полные подграфы таким образом, чтобы каждая вершина принадлежала в точности двум из подграфов?

8.2. Выразить число треугольников в графе  $L(G)$  через число треугольников графа  $G$  и набор его степеней.

8.3. Найти условие, при выполнении которого связный граф имеет регулярный реберный граф.

8.4. Граф  $G$  можно восстановить по набору  $\mathcal{G}$  остовных подграфов  $G-x_j$  тогда и только тогда, когда его реберный граф  $L(G)$  удовлетворяет гипотезе Улама (см. стр. 26).

(Хемминджер [1])

8.5. Если  $G$  есть  $n$ -реберно-связный граф, то

- 1) граф  $L(G)$   $n$ -связен;
- 2) граф  $L(G)$   $(2n-2)$ -реберно-связен;
- 3) граф  $L^2(G)$   $(2n-2)$ -связен.

(Чартрэнд, Стюарт [1])

8.6. а) Построить связный граф  $G$  с  $p \geq 4$  вершинами, для которого граф  $L(G)$  не эйлеров, а граф  $L^2(G)$  эйлеров.

б) Не существует связного графа  $G$  с  $\rho \geq 5$  вершинами, для которого граф  $L^2(G)$  не эйлеров, а граф  $L^3(G)$  эйлеров.

8.7. Наименьшим блоком с негамильтоновым реберным графом является тэта-граф с 8 вершинами, в котором расстояние между любой парой вершин степени 3 равно трем.

(Мун)

8.8. Граф  $L(G)$  гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $G$  содержит замкнутую цепь, имеющую по крайней мере одну вершину, инцидентную каждому ребру графа  $G$ .

8.9. Граф  $L^2(G)$  гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $G$  содержит замкнутую остовную цепь.

(Харари, Нэш-Вильямс [1])

8.10. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $L(G)$  — эйлеров граф;
- (2) степени всех вершин графа  $G$  имеют одинаковую четность;
- (3)  $T(G)$  — эйлеров граф.

8.11. Граф  $T(K_p)$  изоморфен графу  $L(K_{p+1})$ .

(Бехзад, Чартрэнд, Нордхауз)

8.12. Найти семейство  $F$  таких подмножеств элементов графа  $G$ , что  $T(G) = \Omega(F)$ .

8.13. а) Если  $G$  — гамильтонов граф, то и граф  $T(G)$  гамильтонов. Если  $G$  — эйлеров граф, то граф  $T(G)$  эйлеров и гамильтонов.

б) Тотальный граф  $T(G)$  любого нетривиального связного графа  $G$  содержит остовный эйлеров подграф.

в) Если нетривиальный граф  $G$  содержит остовный эйлеров подграф, то граф  $T(G)$  гамильтонов.

г) Если  $G$  — нетривиальный связный граф, то граф  $T^2(G)$  гамильтонов.

(Бехзад, Чартрэнд [1])

8.14. Для каждого мультиграфа  $M$  определим реберный граф  $L(M)$  как граф с множеством вершин  $V(L(M)) = X(M)$ , в котором  $x \text{ адж } y$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  — различные ребра, встречающиеся в одной или двух вершинах. Граф  $G$  является реберным графом некоторого мультиграфа тогда и только тогда, когда в нем нет порожденных подграфов вида  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ , показанных на рис. 8.3. (Геллер)

8.15. Граф  $T(G)$   $2n$ -связен, если граф  $G$   $n$ -связен ( $n \geq 2$ ), и  $T(G)$   $2m$ -реберно-связен, если граф  $G$   $m$ -реберно-связен ( $m \geq 1$ ).

(Хамادا, Нонада, Ёшимура [1])

## ФАКТОРИЗАЦИЯ

Целое равно сумме своих частей.

Евклид

Целое больше суммы своих частей.

Макс Вертхаймер<sup>1)</sup>

Одна из проблем, возникающая в разных постановках, заключается в следующем: выяснить, можно ли данный граф разложить на остовные подграфы, не имеющие общих ребер и обладающие заданным свойством. Чаще всего таким свойством является регулярность определенной степени. В частности, Татт получил критерий существования в графе остовного регулярного подграфа степени 1. В этой главе приводятся некоторые результаты о разложении полных графов на остовные регулярные подграфы степеней 1 и 2.

Изучается разбиение ребер данного графа на остовные леса, что позволяет ввести некоторый инвариант, известный как «древесность». Формулу для вычисления древесности графа с использованием его подграфов получил Нэш-Вильямс. Были предложены эффективные методы построения наименьшего числа остовных лесов в полных и полных двудольных графах.

## 1-факторизация

*Фактором* графа  $G$  называется остовный подграф графа  $G$ , не являющийся вполне несвязным. Будем говорить, что граф  $G$  есть *сумма*<sup>2)</sup> факторов  $G_i$ , если графы  $G_i$  не имеют попарно общих ребер, а  $G$  — их объединение. Такое разложение называется *факторизацией* графа  $G$ . Далее, *n-фактор* — это регулярный остовный подграф степени  $n$ . Если граф  $G$  представляет собой сумму  $n$ -факторов, то их объединение называется *n-факторизацией*, а сам граф  $G$  называется *n-факторизуемым*. Если не оговаривается противное, то результаты этой главы или содержатся, или легко вытекают из теорем, представленных в монографии Кёнига [2, стр. 155—195], где данная тематика продвинута достаточно далеко.

Если в  $G$  есть 1-фактор, скажем  $G_1$ , то ясно, что  $\rho$  четно и ребра графа  $G_1$  независимы (взаимно не смежны). В частности, в  $K_{2n+1}$  нет 1-фактора, а в  $K_{2n}$  есть.

<sup>1)</sup> Max Wertheimer, *Productive Thinking*.

<sup>2)</sup> Некоторые авторы называют это произведением, другие — прямой суммой.

Теорема 9.1. *Полный граф  $K_{2n}$  1-факторизуем.*

Доказательство. Нам нужно только указать разбиение множества  $X$  ребер графа  $K_{2n}$  на  $(2n-1)$  1-факторов. Для этого обозначим вершины графа  $G$  через  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$  и определим множества ребер

$$X_i = \{v_1 v_{2n}\} \cup \{v_{1-j} v_{1+j}; j=1, 2, \dots, n-1\},$$

$i=1, 2, \dots, 2n-1$ , где каждый из индексов  $i-j$  и  $i+j$  является одним из чисел  $1, 2, \dots, 2n-1$ ; здесь сумма и разность берутся по модулю  $2n-1$ . Легко видеть, что набор  $\{X_i\}$  дает необходимое разбиение множества  $X$ , а сумма подграфов  $G_i$ , порожденных множествами  $X_i$ , является 1-факторизацией графа  $K_{2n}$ .

Например, рассмотрим граф  $K_6$ , показанный на рис. 9.1. Описанная в ходе доказательства 1-факторизация дает пять 1-факторов  $G_i$ .

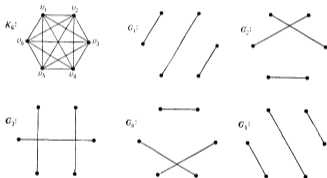


Рис. 9.1. 1-факторизация графа  $K_6$ .

Хотя полные двудольные графы  $K_{m,n}$  при  $m \neq n$  не имеют 1-факторов, графы  $K_{n,n}$  1-факторизуемы, как видно из следующего утверждения.

Теорема 9.2. *Каждый регулярный двудольный граф 1-факторизуем.*

Нелегко выяснить, 1-факторизуем ли данный граф, или хотя бы установить существование какого-нибудь 1-фактора. Байнеке и Пламмер [1] показали, однако, что многие графы либо вообще не имеют 1-факторов, либо у них число 1-факторов не меньше двух.



**Теорема 9.3.** *Если двусвязный граф имеет 1-фактор, то он имеет по крайней мере два различных 1-фактора.*

Граф  $G$  на рис. 9.2 представляет собой блок, у которого в точности два 1-фактора, причем они имеют одно общее ребро.

Наиболее важный результат о факторизации получен Таттом [2]. Он характеризует графы, обладающие 1-фактором. Предлагаемый при этом способ нахождения 1-фактора совершенно не удобен для применения. Данное здесь доказательство основано на работе

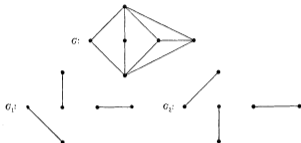


Рис. 9.2. Два 1-фактора блока.

Галлаи [1]. Напомним, что множество попарно несмежных ребер называется *независимым*. Под нечетной компонентой графа  $G$  понимается компонента с нечетным числом вершин.

**Теорема 9.4.** *Граф  $G$  имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда  $p$  четно и не существует такого множества  $S$  вершин графа, что число нечетных компонент графа  $G-S$  превышает  $|S|$ .*

**Доказательство.** Легче доказать необходимость. Пусть  $S$  — произвольное множество вершин графа  $G$ , а  $H$  — компонента графа  $G - S$ . В любом 1-факторе графа  $G$  каждая вершина графа  $H$  должна быть смежной или с некоторой другой вершиной из  $H$ , или с некоторой вершиной из множества  $S$ . Если в  $H$  нечетное число вершин, то по крайней мере одна вершина графа  $H$  смежна (в 1-факторе) с какой-то вершиной множества  $S$ . Пусть  $k_o$  — число нечетных компонент графа  $G-S$ . Если  $G$  имеет 1-фактор, то  $|S| \geq k_o$ , поскольку в 1-факторе каждая вершина  $v$  множества  $S$  может быть смежной самое большее с одной вершиной графа  $G - S$  и поэтому  $v$  смежна (в 1-факторе) не более чем с одной нечетной компонентой.

Докажем достаточность. Предположим, что у графа  $G$  четное число вершин и нет 1-фактора. Пусть  $A$  — произвольное наибольшее независимое множество ребер графа  $G$ . Ребра из множества  $A$

будем называть  $A$ -ребрами. Обозначим через  $B$  множество всех ребер графа  $G$ , не принадлежащих множеству  $A$ . Ребра из множества  $B$  будем называть  $B$ -ребрами. Простая цепь называется *альтернирующей (чередующейся)*, если любые два смежных ребра в ней принадлежат разным множествам  $A$  и  $B$ . По определению всякая цепь длины 1 альтернирующая. Так как граф  $G$  не имеет 1-фактора, то существует вершина  $u_0$ , инцидентная только  $B$ -ребрам.

$A(v)$ -цепью (соответственно  $B(v)$ -цепью) назовем такую альтернирующую  $(u_0-v)$ -цепь, в которой ребро, инцидентное вершине  $v$ , есть  $A$ -ребро (соответственно  $B$ -ребро).

Вершина  $v$ , отличная от  $u_0$ , называется 0-вершиной, если не существует альтернирующей  $(u_0-v)$ -цепи. Если любая альтернирующая  $(u_0-v)$ -цепь является  $A(v)$ -цепью (соответственно  $B(v)$ -цепью), то вершина  $v$  называется  $A$ -вершиной (соответственно  $B$ -вершиной). Наконец,  $v$  называется  $AB$ -вершиной, если существуют и  $A(v)$ -цепь, и  $B(v)$ -цепь.

Очевидны следующие утверждения:

(1) всякая вершина, смежная с  $u_0$ , является или  $B$ -, или  $AB$ -вершиной;

(2) всякая вершина, смежная с 0-вершиной, является или  $B$ -, или 0-вершиной;

(3) всякая вершина, смежная с  $A$ -вершиной, является или  $B$ -, или  $AB$ -вершиной;

(4) если  $A$ -ребро инцидентно  $AB$ -вершине, то другая вершина этого ребра также есть  $AB$ -вершина;

(5) если одна из вершин  $A$ -ребра является  $A$ -вершиной ( $B$ -вершиной), то другая является  $B$ -вершиной ( $A$ -вершиной).

Кроме того, справедливо утверждение:

(6) всякая  $B$ -вершина инцидентна какому-нибудь  $A$ -ребру.

В самом деле, если бы некоторая  $B$ -вершина  $v_0$  была инцидентна только  $B$ -ребрам, то в  $B(v_0)$ -цепи можно было заменить все  $A$ -ребра на  $B$ -ребра и обратно и получить  $A$ -ребер в графе  $G$  больше, чем было раньше, что противоречит выбору множества  $A$ .

Учитывая утверждения (5) и (6), заключаем, что

(7) каждой  $B$ -вершине соответствует единственная  $A$ -вершина, соединенная с ней  $A$ -ребром (причем разным  $B$ -вершинам соответствуют разные  $A$ -вершины).

Обозначим множество всех  $B$ -вершин через  $S$  и рассмотрим граф  $G-S$ . В силу утверждения (2) любая компонента графа  $G-S$ , содержащая 0-вершину, состоит только из 0-вершин.

Покажем, что любая другая компонента графа  $G-S$  нечетна и удовлетворяет только одному из следующих условий:

а) компонента содержит вершину  $u_0$  и еще, быть может,  $AB$ -вершины;

б) компонента содержит в точности одну  $A$ -вершину и еще, быть может,  $AB$ -вершины.

Если  $P$  — некоторая простая цепь, то ее  $(u-v)$ -подцепь мы будем, как обычно, обозначать  $[u, v]$ .

Пусть  $H$  — компонента графа  $G-S$ , содержащая  $AB$ -вершину  $v$  и не содержащая вершину  $u_0$ . В  $A(v)$ -цепи рассмотрим подцепь  $[v_0, v]$ , где  $v_0 \notin H$ , но  $[v_0, v] - v_0$  содержит только вершины, принадлежащие компоненте  $H$ . Очевидно, что  $v_0$  есть  $B$ -вершина и ребро  $\omega_0 v_0$  цепи  $[v_0, v]$  есть  $A$ -ребро. Поэтому (на основании утверждения (5))  $\omega_0$  является  $A$ -вершиной.

Далее, из утверждений (1) и (3) вытекает, что если существует компонента  $H$ , в которой содержатся либо две  $A$ -вершины, либо вершина  $u_0$  и  $A$ -вершина, то в  $H$  найдется по крайней мере одна  $AB$ -вершина. Так как каждая  $AB$ -вершина инцидентна какому-либо (одному)  $A$ -ребру, то в силу утверждения (4) в каждой такой компоненте  $H$  содержится четное число  $AB$ -вершин (которые можно разбить на пары, инцидентные одному и тому же  $A$ -ребру). Пусть  $u_1$  есть  $A$ -вершина компоненты  $H$ , содержащей еще либо вершину  $u_1$ , либо другую  $A$ -вершину. В  $H$  рассмотрим  $AB$ -вершину  $v_1$ , смежную с  $u_1$ . Так как  $u_1 v_1$  есть  $B$ -ребро и  $A(v_1)$ -цепь  $P_1$  проходит через  $u_1$  (в противном случае существовала бы  $B(u_1)$ -цепь, содержащая  $B$ -ребро  $u_1 v_1$ ), то любую вершину  $v$  подцепи  $[u_1, v_1]$  цепи  $P_1$ , отличную от  $u_1$ , можно соединить с вершиной  $u_1$  альтернирующей цепью, лежащей в  $H$  и оканчивающейся  $A$ -ребром ( $A$ -ребро инцидентно вершине  $v$ ). Если в  $H$  существуют  $AB$ -вершины, не принадлежащие  $[u_1, v_1]$ , то среди них найдется вершина  $v_2$ , смежная с некоторой вершиной  $v'$  подцепи  $[u_1, v_1]$ , причем  $v_2 v'$  есть  $B$ -ребро. Рассматривая  $A(v_2)$ -цепь  $P_2$  (она проходит через вершину  $u_1$ ) и беря подцепь  $[u_1, v_2]$ , снова заключаем, что любую из «новых» вершин можно соединить с вершиной  $u_1$  альтернирующей цепью, лежащей в  $H$  и оканчивающейся  $A$ -ребром. Продолжая описанный процесс, мы (через конечное число шагов) получим альтернирующую цепь  $[u_1, \omega]$ , в которой  $AB$ -вершина  $\omega$  инцидентна  $A$ -ребру и смежна либо с вершиной  $u_0$ , либо с  $A$ -вершиной  $u_2$ , отличной от  $u_1$ . Если  $\omega$  смежна с  $u_0$ , то цепь  $u_1 \omega + [\omega, u_1]$  является  $B(u_1)$ -цепью. Это противоречит тому, что  $u_1$  есть  $A$ -вершина. Пусть теперь  $\omega$  смежна с  $A$ -вершиной  $u_2$ . Рассмотрим некоторую  $A(u_1)$ -цепь. Выберем на ней вершину  $\omega'$  так, чтобы  $\omega' \in [u_1, \omega] + \omega u_2 = [u_1, u_2]$  и в подцепи  $[u_0, \omega']$  не было других вершин, обладающих этим свойством. Тогда либо  $[u_2, \omega'] + [\omega', u_1]$ , либо  $[u_0, \omega'] + [\omega', u_2]$  есть  $B(u_1)$ -цепь. Это противоречит тому, что  $u_1$  и  $u_2$  являются  $A$ -вершинами.

Итак, если компонента  $H$  графа  $G-S$  не содержит 0-вершин, то она нечетная и содержит (кроме, быть может,  $AB$ -вершин) или только одну  $A$ -вершину, или только вершину  $u_0$ . Таким образом, число нечетных компонент графа  $G-S$  превосходит по меньшей мере на единицу число  $A$ -вершин. Но тогда, учитывая утверждение (7),

закключаем, что  $|S|$ , т. е. число  $B$ -вершин, меньше числа нечетных компонент графа  $G-S$ . Теорема доказана.

Граф  $G$ , представленный на рис. 9.3, имеет четное число вершин, но не содержит 1-факторов; в самом деле, если из  $G$  удалить множество  $S = \{v_1, v_2\}$ , то остаются четыре изолированные вершины (и, следовательно, четыре нечетные компоненты).

Установив критерий существования 1-фактора в данном графе, Татт [5] смог охарактеризовать графы, имеющие остовный подграф с заданными степенями вершин, а затем (Татт [6]) доказал, что этот результат следует непосредственно из теоремы 9.4.

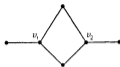


Рис. 9.3. Граф, не имеющий 1-фактора.

Перенумеруем вершины графа  $G$  и рассмотрим на множестве  $V$  вершин графа  $G$  функцию  $f$ , принимающую неотрицательные целые значения. Пусть  $S$  и  $T$  — непересекающиеся подмножества множества  $V$ ,  $H$  — компонента графа  $G - (S \cup T)$ , а  $q(H, T)$  — число ребер графа  $G$ , соединяющих вершины компоненты  $H$  с вершинами из  $T$ . Обозначим через  $k_0(S, T)$  число таких компонент  $H$  графа  $G - (S \cup T)$ , что сумма  $q(H, T) + \sum_{u \in H} f(u)$  нечетна.

**Теорема 9.5.** Пусть  $G$  — данный граф, а  $f$  — функция, определенная на множестве  $V$  вершин графа  $G$  и принимающая неотрицательные целые значения. Граф  $G$  имеет остовный подграф, степени вершин которого описываются с помощью функции  $f$ , тогда и только тогда, когда существуют такие несвязные множества вершин  $S$  и  $T$ , что

$$\sum_{u \in S} f(u) < k_0(S, T) + \sum_{v \in T} [f(v) - d_{G-S}(v)].$$

## 2-факторизация

Если граф 2-факторизуем, то каждый его фактор должен быть объединением непересекающихся (по вершинам) циклов. Если 2-фактор связан, то он является остовным циклом<sup>1)</sup>. Мы видели, что полный граф 1-факторизуем тогда и только тогда, когда у него четное число вершин. Поскольку в 2-факторизуемом графе все вершины должны иметь четные степени, полный граф  $K_{2n}$  не является 2-факторизуемым. Нечетные полные графы 2-факторизуемы; более того, справедлива

**Теорема 9.6.** Граф  $K_{2n+1}$  можно представить в виде суммы  $n$  остовных циклов.

<sup>1)</sup> То есть гамильтоновым циклом.— Прим. перев.

**Доказательство.** Для того чтобы в графе  $K_{2n+1}$  построить  $n$  остовных циклов, непересекающихся по ребрам, перенумеруем сначала его вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$ . На множестве вершин  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$  зададим  $n$  непересекающихся простых цепей

$$P_i \approx v_i v_{i-1} v_{i+1} v_{i-2} \dots v_{i+n-1} v_{i-n}$$

следующим образом:  $j$ -й вершиной цепи  $P_i$  является вершина  $v_k$ , где  $k = i + (-1)^{j+1} \lfloor j/2 \rfloor$ ; все индексы приводятся к числам  $1, 2, \dots, 2n$  по модулю  $2n$ . Остовный цикл  $Z_i$  можно получить, соединив вершину  $v_{2n+1}$  с концевыми вершинами цепи  $P_i$ .

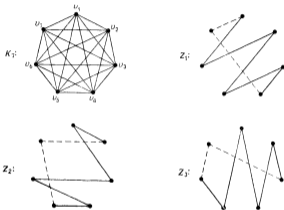


Рис. 9.4. 2-факторизация графа  $K_7$ .

Эта конструкция иллюстрируется на графе  $K_7$ , приведенном на рис. 9.4. Ребра цепей  $P_i$  указаны сплошной линией, два дополнительных ребра — штриховой.

Существует разложение графа  $K_{2n}$ , как бы дополняющее содержание теоремы 9.1.

**Теорема 9.7.** *Полный граф  $K_{2n}$  можно представить в виде суммы некоторого 1-фактора и  $n-1$  остовных циклов.*

Конечно, каждый регулярный граф степени 1 есть уже 1-фактор, а каждый регулярный граф степени 2 — это 2-фактор. Если любая компонента регулярного графа  $G$  степени 2 является четным простым циклом, то  $G$  также 1-факторизуем, поскольку его можно представить в виде суммы двух 1-факторов. Если кубический граф

имеет 1-фактор, то в нем обязательно есть 2-фактор; но существует много кубических графов, не имеющих 1-факторов.

Граф на рис. 9.5 имеет три моста. Петерсен [1] доказал, что любой кубический граф, не содержащий 1-факторов, должен иметь мост.

**Теорема 9.8.** *Любой кубический граф, не содержащий мостов, можно представить в виде суммы 1-фактора и 2-фактора.*

Петерсен показал также, что этот результат нельзя усилить, приведя кубический граф без мостов, который не является суммой трех 1-факторов. Этот хорошо известный граф, приведенный на



Рис. 9.5. Кубический граф, не имеющий 1-фактора.



Рис. 9.6. Граф Петерсена.

рис. 9.6, называется *графом Петерсена*. По теореме 9.8 он представляет собой сумму 1-фактора и 2-фактора. Пятиугольник и пентаграмм (пятиконечная звезда) образуют вместе 2-фактор, а пять ребер, соединяющих пятиугольник с пентаграммом, дают 1-фактор.

Критерий разложимости графа на 2-факторы также был получен Петерсеном [1].

**Теорема 9.9.** *Связный граф 2-факторизуем тогда и только тогда, когда он регулярный граф четной степени.*

## Древесность

Мы рассмотрели пока только один тип факторизации, а именно когда каждый фактор является  $n$ -фактором. Исследовались и другие типы факторизации; один из них мы приведем сейчас, а остальные в гл. 11. Любой фактор  $G$  можно представить в виде суммы остовных лесов, просто положив, что каждый фактор содержит только одно из  $q$  ребер графа  $G$ . Естественно возникает задача: определить наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов, на которые можно разложить граф  $G$ . Это число называется *древесностью* и обозначается  $\gamma(G)$ . Например,  $\gamma(K_2) = 2$  и  $\gamma(K_3) = 3$ ; на рис. 9.7 показаны минимальные разложения этих графов на остовные леса.

Формулу для определения древесности произвольного графа получил Нэш-Вильямс [2].

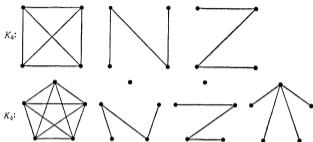


Рис. 9.7. Минимальные разложения на остовные леса.

**Теорема 9.10.** Пусть  $G$  — нетривиальный  $(p, q)$ -граф, а  $q_n$  — наибольшее число ребер в подграфах графа  $G$  с  $n$  вершинами. Тогда

$$\Upsilon(G) = \max_n \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\}.$$

Неравенство  $\Upsilon(G) \geq \max_n \{q_n/(n-1)\}$  можно установить следующим образом. Поскольку  $G$  имеет  $p$  вершин, наибольшее число ребер в остовных лесах графа  $G$  равно  $p-1$ . Отсюда наименьшее возможное число остовных лесов, необходимое для заполнения графа  $G$ , которое по определению есть  $\Upsilon(G)$ , не меньше чем  $q/(p-1)$ . Но древесность графа  $G$  — целое число, так что  $\Upsilon(G) \geq \{q/(p-1)\}$ . Доказываемое неравенство вытекает из того, что  $\Upsilon(G) \geq \Upsilon(H)$  для любого подграфа  $H$  графа  $G$ .

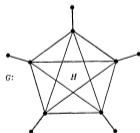


Рис. 9.8. Граф, имеющий полный подграф  $H$ .

Среди всех подграфов  $H$  с  $n \leq p$  вершинами  $\max \Upsilon(H)$  достигается на тех из них, которые порождаются подграфами, содержащими наибольшее число ребер. Таким образом, если  $H$  — подграф графа  $G$ , то  $\Upsilon(H)$  может быть больше  $\{q/(p-1)\}$ . Это рассуждение иллюстрирует граф с  $p=10$ ,  $q=15$ , приведенный на рис. 9.8. Положив  $n=5$  и  $q_n=10$  (для  $H=K_5$ ), получим

$$\Upsilon(H) \geq \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\} = 3 > 2 = \left\{ \frac{q}{p-1} \right\}.$$

Ясно, что для  $K_p$  наибольшее значение  $q_n$  достигается при  $n=p$ , откуда  $\gamma(K_p) = \lfloor p/2 \rfloor$ . Аналогично для полного двудольного графа  $K_{r,s}$  наибольшее значение  $\{q_n(n-1)\}$  достигается при  $n=p=r+s$ .

Следствие 9.10 (а). *Древесности полных и полных двудольных графов равны  $\gamma(K_p) = \lfloor p/2 \rfloor$  и  $\gamma(K_{r,s}) = \lfloor rs/(r+s-1) \rfloor$  соответственно.*

Хотя формула Нэш-Вильямса дает наименьшее число остовных лесов, на которые можно факторизовать произвольный граф, приводимое им доказательство не содержит метода, позволяющего получать соответствующее разложение. Байнеке [1] ликвидировал

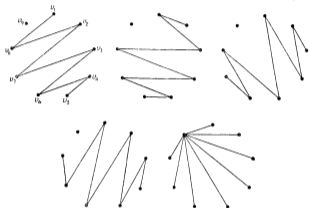


Рис. 9.9. Минимальное разложение графа  $K_9$  на остовные леса.

этот пробел для случаев полных и полных двудольных графов. Опишем предложенный им метод разложения полных графов. Для  $p=2n$  граф  $K_p$  разлагается на  $n$  остовных цепей: перенумеровав вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ , рассмотрим те же  $n$  цепей

$$P_i = v_i v_{i-1} v_{i+1} v_{i-2} v_{i+2} \dots v_{i+n-1} v_{i-n},$$

которые использовались при доказательстве теоремы 9.6. Для  $p=2n+1$  древесность графа  $K_p$  равна  $n+1$  в силу следствия 9.10 (а). Мы получим нужное разложение, если к каждой из цепей  $P_i$  добавим новую вершину  $v_{2n+1}$  и построим еще звезду, соединяя  $v_{2n+1}$  со всеми  $2n$  вершинами  $v_i$ . Случай  $p=9$  показан на рис. 9.9. Легко видеть, что это разложение состоит из звезды одной из вершин графа  $K_9$  и остовных подлесов, соответствующих приведенным выше четырем остовным простым цепям графа  $K_9$ .



## Упражнения

9.1. Граф  $K_4$  имеет единственную 1-факторизацию. Найти число 1-факторизаций графов  $K_{3,2}$  и  $K_6$ .

9.2. Указать 1-факторизацию графа  $K_n$ .

9.3. Число 1-факторов графа  $K_{2n}$  равно  $(2n)!(2^{n-1}n!)$ .

9.4. Граф  $K_{6n-2}$  имеет 3-факторизацию.

9.5. При  $n \geq 1$  граф  $K_{4n+1}$  4-факторизуем.

9.6. Используя теорему 9.4 (Татт), показать, что граф, изображенный на рис. 9.5, не имеет 1-фактора.

9.7. Если  $n$ -связный граф  $G$  с четным числом вершин является регулярным графом степени  $n$ , то он имеет 1-фактор. (Татт [2])

9.8. Пусть  $G$  — граф с 1-фактором  $F$ . Ребро графа  $G$  содержится не менее чем в двух 1-факторах тогда и только тогда, когда оно принадлежит простому циклу, у которого ребра альтернативны в  $F$  (т. е. попеременно принадлежат и не принадлежат  $F$ ).

(Байнеке и Платмер [1])

9.9. Представить граф  $K_9$  в виде суммы четырех остовных простых циклов.

9.10. Является ли граф Петерсена гамильтоновым?

\*9.11. Для любых целых  $d \geq 3$  и  $g \geq 3$  существует граф  $G$ , обладающий следующими свойствами:

1)  $G$  — регулярный граф степени  $d$ ;

2) обхват графа  $G$  равен  $g$ ;

3) граф  $G$  гамильтонов;

4) циклы длины  $g$  не имеют общих ребер и образуют 2-фактор графа  $G$ ;

5)  $G$  можно представить в виде суммы указанного выше 2-фактора и  $(d-2)$  1-факторов.

(Закс [2])

9.12. Привести минимальное разложение графа  $K_{1,4}$  на остовные леса.

9.13. Найти наименьший связный  $(p, q)$ -граф  $G$ , для которого

$$\max \left\{ \frac{q_r}{r-1} \right\} > \left\{ \frac{q}{p-1} \right\},$$

где  $q_r$  — наибольшее число ребер в любом его порожденном подграфе с  $r$  вершинами.

Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, не имеющая общих точек с данной прямой.

Евклид

Через любую точку, не лежащую на данной прямой, не проходит ни одной прямой, не имеющей общих точек с данной прямой.

Риман

Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит более одной прямой, не имеющей общих точек с данной прямой.

Больц

Естественно сказать, что ребро  $x=uv$  графа  $G$  *покрывает* вершины  $u$  и  $v$ . Аналогично можно рассматривать каждую вершину как покрытие всех инцидентных с ней ребер. С этой точки зрения определяются два инварианта графа  $G$ : минимальное число вершин (ребер), которые покрывают все ребра (вершины). Два других инварианта — это наибольшее число несмежных ребер и наибольшее число несмежных вершин. Эти четыре числа, связанные с произвольным графом, удовлетворяют некоторым соотношениям, и их рассмотрение приводит к изучению особых вершин и ребер, называемых критическими. В свою очередь последние позволяют ввести естественным образом два специальных подграфа графа  $G$ , называемых реберным ядром и вершинным ядром. Критерии существования таких подграфов формулируются в терминах свойств покрытий графа.

### Покрытия и независимость

Будем говорить, что ребро и вершина *покрывают* друг друга, если они инцидентны. Множество вершин, покрывающее все ребра графа  $G$ , называется *вершинным покрытием* графа  $G$ , а множество ребер, покрывающих все вершины, называется *реберным покрытием* графа  $G$ . Наименьшее число вершин в вершинных покрытиях графа  $G$  называется его *числом вершинного покрытия* и обозначается  $\alpha_0(G)$  или  $\alpha_0$ . Аналогично наименьшее число  $\alpha_1(G)$ , или  $\alpha_1$ , ребер в реберных покрытиях графа  $G$  называется *числом реберного покрытия*. Например,  $\alpha_0(K_p) = p-1$  и  $\alpha_1(K_p) = \lfloor (p+1)/2 \rfloor$ . Вершинное покрытие (реберное покрытие) называется *наименьшим*, если оно содержит

$\alpha_0$  (соответственно  $\alpha_1$ ) элементов. Заметим, что вершинное покрытие может быть минимальным, не будучи наименьшим; на рис. 10.1 приведено такое множество, состоящее из 6 вершин, не являющихся точками сочленения. То же самое справедливо для реберных покрытий; примером служит множество из шести ребер, инцидентных точке сочленения.

Множество вершин графа  $G$  называется *независимым*, если никакие две из них не смежны. Наибольшее число вершин в таких множествах называется *вершинным числом независимости* графа  $G$  и обозначается  $\beta_0(G)$  или  $\beta_0$ . Аналогично в *независимом множестве ребер*<sup>1)</sup> графа  $G$  никакая пара ребер не смежна, а наибольшее число ребер в таких множествах называется *реберным числом независимости* и обозначается  $\beta_1(G)$  или  $\beta_1$ . Для полного графа  $\beta_0(K_p) = 1$  и  $\beta_1(K_p) = \lfloor p/2 \rfloor$ . Очевидно, что  $\beta_1(G) = p/2$  тогда и только тогда, когда  $G$  имеет 1-фактор. Для графа  $G$ , показанного на рис. 10.1,  $\beta_0(G) = 2$  и  $\beta_1(G) = 3$ .

Рис. 10.1. Граф  $K_4 \times K_4$ .

Для этого графа, а также для графа  $K_p$  легко убедиться, что  $\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 = p$ . Галлан [2] доказал, что это справедливо всегда.

**Теорема 10.1.** Для любого нетривиального связного графа  $G$

$$\alpha_0 + \beta_0 = p = \alpha_1 + \beta_1.$$

**Доказательство.** Пусть  $M_0$  — произвольное наибольшее независимое множество вершин, так что  $|M_0| = \beta_0$ . Поскольку никакая пара вершин множества  $M_0$  ребром не соединена, то оставшееся множество  $p - \beta_0$  вершин образует такое вершинное покрытие графа  $G$ , что  $\alpha_0 \leq p - \beta_0$ . С другой стороны, если  $N_0$  — наименьшее вершинное покрытие графа  $G$ , то никакую пару остальных  $p - \alpha_0$  вершин графа  $G$  нельзя соединить ребром, поэтому множество  $V - N_0$  независимо. Отсюда  $\beta_0 \geq p - \alpha_0$ , и первое равенство доказано.

Для доказательства второго равенства рассмотрим независимое множество  $M_1$ , содержащее  $\beta_1$  ребер. Тогда реберное покрытие  $Y$  получим, если возьмем объединение множества  $M_1$  и множества тех ребер графа  $G$ , которые инцидентны вершинам, не покрытым ребрами множества  $M_1$ . Так как  $|M_1| + |Y| = p$  и  $|Y| \geq \alpha_1$ , то  $\alpha_1 + \beta_1 \leq p$ . Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим наименьшее реберное покрытие  $N_1$  графа  $G$ . Ясно, что  $N_1$  не может содержать ребро, оба конца которого инцидентны другим ребрам из  $N_1$ . Отсюда следует, что  $N_1$  есть сумма звезд графа  $G$  (рассматриваемых как множества ребер). Если в каждой из этих звезд выбрать по одному ребру, то получится независимое множество  $W$  ребер. Так

<sup>1)</sup> В книге Берга [2] независимое множество вершин (соответственно ребер) называется внутренне (соответственно внешне) устойчивым. — *Прим. перев.*

как  $|N_1| + |W| = p$  и  $|W| \leq \alpha_1$ , то  $\alpha_1 + \beta_1 \geq p$ , и доказательство теоремы закончено.

Хедетниemi [1] заметил, что метод доказательства первого равенства,  $\alpha_0 + \beta_0 = p$ , можно распространить на более общие утверждения. Свойство  $P$  графа  $G$  называется *наследственным*, если каждый подграф графа  $G$  также обладает этим свойством. Примерами наследственных свойств служат такие свойства графа, как вполне несвязность, ацикличность, двудольность. Множество  $S$  вершин графа  $G$  называется  $P$ -множеством, если порожденный подграф  $\langle S \rangle$  обладает свойством  $P$ , и  $\bar{P}$ -множеством, если каждый подграф графа  $G$ , не обладающий свойством  $P$ , содержит вершину из  $S$ . Пусть  $\beta_0(P)$  — наибольшее число  $P$ -множеств графа  $G$  и  $\alpha_0(P)$  — наименьшее число вершин в  $\bar{P}$ -множествах графа  $G$ . Непосредственно из доказательства теоремы 10.1 вытекает

**Следствие 10.1 (а).** *Если  $P$  — наследственное свойство графа  $G$ , то  $\alpha_0(P) + \beta_0(P) = p$ .*

Набор независимых ребер графа  $G$  иногда называют *паросочетанием* графа  $G$ , поскольку такой набор определяет разбиение множества вершин графа на пары вершин, инцидентных ребрам набора. По этой же причине множество, имеющее  $\beta_1$  независимых ребер из  $G$ , называется *наибольшим паросочетанием* графа  $G$ . Для двудольных графов можно сказать больше. Следующая теорема, полученная Кёнигом [1], тесно связана с его теоремой 5.18 о системах различных представителей, которая была сформулирована в матричной форме; на самом деле это один и тот же результат.

**Теорема 10.2.** *Для двудольного графа  $G$  число ребер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия, т. е.  $\beta_1 = \alpha_0$ .*

Задача о нахождении наибольшего паросочетания (так называемая задача о паросочетаниях) тесно связана с задачей о нахождении наименьшего вершинного покрытия.

Пусть  $M \subset X(G)$  — паросочетание графа  $G$ . В альтернирующем  $M$ -маршруте точно одно из двух последовательных ребер принадлежит  $M$ . *Совершенным  $M$ -маршрутом* называется альтернирующий  $M$ -маршрут, концевые вершины которого не инцидентны ни одному ребру из  $M$ . Такой маршрут должен быть простой цепью, поскольку  $M$  — паросочетание. Если в  $G$  нет совершенных  $M$ -маршрутов, то паросочетание  $M$  называется *несовершенным*. Ясно, что каждое наибольшее паросочетание — несовершенное; обратное утверждение было установлено Бержем [1], а приведенное ниже доказательство принадлежит Норману и Рабину [1].

**Теорема 10.3.** *Каждое несовершенное паросочетание является наибольшим.*

**Доказательство.** Пусть  $M$  — несовершенное паросочетание; выберем наибольшее паросочетание  $M'$ , для которого число  $|M - M'|$  ребер, принадлежащих  $M$  и не принадлежащих  $M'$ , минимально. Если это число равно нулю, то  $M = M'$ . В противном случае построим маршрут  $W$  наибольшей длины, ребра которого попеременно принадлежат то  $M - M'$ , то  $M'$ . Поскольку  $M'$  — несовершенное паросочетание, маршрут  $W$  не может начинаться и кончаться ребрами из  $M - M'$  и поэтому имеет одинаковое количество ребер из  $M - M'$  и  $M'$ . Образует теперь наибольшее паросочетание  $N$  из  $M'$ , заменив ребра из  $W$ , принадлежащие  $M'$ , ребрами из  $W$ , принадлежащими  $M - M'$ . Тогда  $|M - N| < |M - M'|$ , что противоречит выбору паросочетания  $M'$ . Теорема доказана.

Норман и Рабин [1] разработали на основе приведенной ниже теоремы 10.4 алгоритм нахождения всех наименьших реберных покрытий данного графа. Пусть  $Y$  — реберное покрытие графа  $G$ . Альтернирующий  $Y$ -маршрут называется  $Y$ -сводимым, если его концевые ребра принадлежат  $Y$ , а концевые вершины инцидентны тем ребрам из  $Y$ , которые не являются концевыми ребрами этого маршрута. Очевидно, что любое наименьшее реберное покрытие не содержит сводимых маршрутов.

**Теорема 10.4.** Если  $Y$  — реберное покрытие графа  $G$ , не имеющее  $Y$ -сводимых маршрутов, то  $Y$  — наименьшее реберное покрытие.

Инварианты покрытий  $\alpha_0(G)$  и  $\alpha_1(G)$  графа  $G$  определяют соответственно число вершин и число ребер, необходимых для покрытия всех ребер и всех вершин соответственно. Мы можем также рассматривать любую вершину как покрывающую себя, а две вершины — как покрывающие друг друга, если они смежны; аналогично для ребер. Тогда сами собой возникают несколько новых инвариантов.

Пусть  $\alpha_{00}$  — наименьшее число <sup>1)</sup> вершин, необходимых для покрытия множества  $V$ , и  $\alpha'_{00}$  — наименьшее число независимых вершин, покрывающих  $V$ . Оба этих числа определены для произвольного графа. Аналогично определяются числа  $\alpha_{11}$  и  $\alpha'_{11}$  для покрытий ребер ребрами. Гупта [1] исследовал взаимосвязи этих инвариантов.

**Теорема 10.5.** Для любого графа  $\alpha_{00} \leq \alpha'_{00}$ ,  $\alpha_{11} = \alpha'_{11}$ .

### Критические вершины и ребра

Очевидно, что если  $H$  — подграф графа  $G$ , то  $\alpha_0(H) \leq \alpha_0(G)$ . В частности, это неравенство справедливо, когда  $H = G - v$  для любой вершины  $v$  или  $H = G - x$  для любого ребра  $x$ . Если  $\alpha_0(G - v) <$

<sup>1)</sup> Берк [2] называет  $\alpha_{00}$  числом внешней устойчивости, а  $\beta_0$  — числом внутренней устойчивости.

$< \alpha_0(G)$ , то  $v$  называется *критической вершиной*<sup>2)</sup>; если  $\alpha_0(G-x) < \alpha_0(G)$ , то  $x$  называется *критическим ребром* графа  $G$ . Ясно, что если  $v$  и  $x$  критические, то  $\alpha_0(G-v) = \alpha_0(G-x) = \alpha_0 - 1$ . Легко охарактеризовать критические вершины.

**Теорема 10.6.** *Вершина  $v$  является критической в графе  $G$  тогда и только тогда, когда некоторое наименьшее вершинное покрытие содержит  $v$ .*

**Доказательство.** Если  $M$  — наименьшее вершинное покрытие  $G$ , содержащее  $v$ , то  $M - \{v\}$  покрывает  $G - v$ ; отсюда  $\alpha_0(G-v) \leq |M - \{v\}| = |M| - 1 = \alpha_0(G) - 1$ , так что  $v$  — критическая вершина в  $G$ .

Обратно, пусть  $v$  — критическая вершина графа  $G$ . Рассмотрим наименьшее вершинное покрытие  $M'$  для  $G - v$ . Множество  $M' \cup \{v\}$  есть вершинное покрытие для  $G$ , и поскольку элементов в нем на 1 больше, чем в  $M'$ , оно наименьшее.

Если удаление ребра  $x=uv$  из графа  $G$  уменьшает число вершинного покрытия, то удаление вершины  $u$  или  $v$  должно приводить к графу с меньшим числом вершинного покрытия. Таким образом, если ребро критическое, то оба его конца критические. Если в графе есть критические вершины, то это еще не значит, что он должен иметь критические ребра; например, каждая вершина графа  $C_4$  критическая, а критических ребер в  $C_4$  нет.



Рис. 10.2. Реберно-критические графы.

Граф, в котором каждая вершина критическая, называется *вершинно-критическим*. Аналогично *реберно-критическим* графом называется граф, каждое ребро которого критическое. Таким образом, граф  $G$  вершинно-критический тогда и только тогда, когда каждая его вершина принадлежит некоторому его наименьшему вершинному покрытию. Из предыдущих замечаний следует, что каждый реберно-критический граф является вершинно-критическим. Примерами реберно-критических графов служат полные графы, простые циклы нечетной длины и графы, показанные на рис. 10.2.

<sup>2)</sup> В этой главе термин «критический» относится к покрытию; в гл. 12 этот термин вводится для раскраски. Смысловое значение ясно из контекста.

В настоящее время нет конструктивного критерия, позволяющего определять, является ли граф реберно-критическим; однако два следствия из теоремы 10.7, принадлежащей Байнеке, Харари и Пламмеру [1], дают некоторые необходимые условия для таких графов.

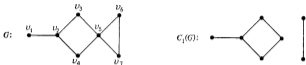


Рис. 10.3. Граф и его реберное ядро.

**Теорема 10.7.** *Любые два смежных критических ребра графа принадлежат нечетному простому циклу.*

**Следствие 10.7 (а).** *Каждый реберно-критический граф является блоком, в котором любые два смежных ребра принадлежат нечетному простому циклу.*

Теорема 10.7 была получена как обобщение следующего результата Далмеджа и Мендельсона [1].

**Следствие 10.7 (б).** *Любые два критических ребра двудольного графа независимы.*

### Реберное ядро

*Реберное ядро*<sup>1)</sup>  $C_1(G)$  графа  $G$  есть подграф графа  $G$ , порожденный объединением таких независимых множеств  $Y$  ребер (если они есть), что  $|Y| = \alpha_0(G)$ . Это понятие было введено Далмеджем и Мендельсоном [1], которые посвятили ему целую часть разработанной ими теории разложения двудольных графов. Граф необязательно имеет реберное ядро. Однако в силу теоремы 10.2 всякий двудольный граф, отличный от вполне несвязного, имеет ядро. Пример графа, не имеющего реберного ядра, дает нечетный простой цикл  $C_p$ . Для него  $\alpha_0(C_p) = (p+1)/2$ , а  $\beta_1(C_p) = (p-1)/2$ , так что в  $C_p$  нет реберного ядра.

Харари и Пламмер [2] нашли критерий, позволяющий выяснить, имеет ли граф реберное ядро. Наименьшее вершинное покрытие  $M$  графа  $G$  с множеством вершин  $V$  называется *внешним*, если для любого подмножества  $M' \subseteq M$  выполняется неравенство  $|M'| \leq |U(M')|$ , где  $U(M')$  — множество вершин из  $V - M$ , смежных с вершинами из  $M'$ .

<sup>1)</sup> Называемое Далмеджем и Мендельсоном [1] и Харари и Пламмером [2] просто «ядро».

**Теорема 10.8.** Для произвольного графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  имеет реберное ядро;
- (2)  $G$  имеет внешнее наименьшее вершинное покрытие;
- (3) каждое наименьшее вершинное покрытие для  $G$  является внешним.

В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 10.3. Этот граф имеет два наименьших вершинных покрытия:  $M_1 = \{v_2, v_5, v_6\}$  и  $M_2 = \{v_2, v_5, v_7\}$ . Исследуем  $M_1$ . Если  $M'_1 = M_1$ , то  $U(M'_1) = \{v_1, v_3, v_4, v_7\}$ . Далее,  $U(M'_1) = \{v_3, v_4, v_7\}$ , где  $M'_1 = \{v_5, v_6\}$ . Мы видим, что  $|M'_1| \leq |U(M'_1)|$  и  $|M'_1| \leq |U(M'_1)|$ , и это верно для любого подмножества из  $M_1$ . Таким образом, по определению  $M_1$  — внешнее покрытие. Очевидно, что  $M_2$  — также внешнее покрытие.

С другой стороны, существуют графы, которые совпадают со своими реберными ядрами. Семейство таких графов характеризуется приведенной ниже теоремой, доказанной в работе Харари и Паммера [2]. Следуя терминологии Далмеджа и Мендельсона [1], рассмотрим двудольный граф  $G$ , у которого множество вершин  $V$  есть объединение непересекающихся подмножеств  $S$  и  $T$ . Будем говорить, что  $G$  — *полунесводимый* граф, если  $G$  имеет точно одно наименьшее вершинное покрытие  $M$ , причем или  $M \cap S$ , или  $M \cap T$  пусто. Далее,  $G$  — *несводимый* граф, если он имеет точно два наименьших вершинных покрытия  $M_1, M_2$ , причем или  $M_1 \cap S$  и  $M_2 \cap T$  пусты, или  $M_1 \cap T$  и  $M_2 \cap S$  пусты. Наконец,  $G$  — *сводимый* граф, если он не является ни полунесводимым, ни несводимым.

**Теорема 10.9.** Граф  $G$  и его реберное ядро  $C_1(G)$  совпадают тогда и только тогда, когда  $G$  является двудольным и не является сводимым.

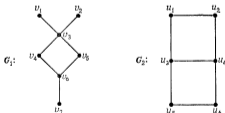


Рис. 10.4. Полунесводимый и несводимый графы.

Рассмотрим двудольные графы  $G_1$  и  $G_2$ , изображенные на рис. 10.4. В графе  $G_1$  пусть  $S_1 = \{v_3, v_4\}$  и  $T_1 = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7\}$ . Этот граф имеет единственное наименьшее вершинное покрытие  $M_1 = \{v_3, v_6\}$  и,



поскольку  $M_1 \cap T_1 = \emptyset$ , он полунесводимый; следовательно, он совпадает со своим реберным ядром. В графе  $G_2$  пусть  $S_2 = \{u_1, u_3, u_5\}$  и  $T_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$ . В нем два наименьших вершинных покрытия, именно  $M_2 = \{u_1, u_3, u_5\}$  и  $N_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$ . Так как  $M_2 \cap T_2 = \emptyset$  и  $N_2 \cap S_2 = \emptyset$ , то  $G_2$  — несводимый граф и, значит, совпадает со своим реберным ядром.

### Упражнения

10.1. Доказать или опровергнуть: каждое вершинное покрытие графа содержит наименьшее вершинное покрытие.

10.2. Доказать или опровергнуть: каждое независимое множество ребер содержится в наибольшем независимом множестве ребер.

10.3. Для любого графа  $G$  справедливы неравенства  $\alpha_0(G) \geq \beta_1(G)$  и  $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$ .

10.4. Найти необходимое и достаточное условие того, что  $\alpha_1(G) = \beta_1(G)$ .

10.5. Если в графе  $G$  имеется замкнутая цепь, содержащая вершинное покрытие, то граф  $L(G)$  гамильтонов.

10.6. Для любого графа  $G$  справедливо неравенство  $\alpha_0(G) \geq \delta(G)$ .

10.7. Если  $G$  — двудольный граф, то  $\rho \leq \alpha_0 \beta_0$ , а равенство достигается только для полных двудольных графов.

10.8. Если  $G$  — полный  $n$ -дольный граф, то

а)  $\alpha_0 = \delta = \chi = \lambda$ ;

б)  $G$  — гамильтонов граф тогда и только тогда, когда  $\rho \leq 2\alpha_0$ ;

в) если граф  $G$  не гамильтонов, то его окружение  $\epsilon$  равно  $2\alpha_0$  и он имеет единственное наименьшее вершинное покрытие;

г)  $\beta_1 = \min \{ \delta, \lfloor \rho/2 \rfloor \}$ . (Пламмер)

(Чаргруд, Геллер, Хедетнечи [2])

10.9. а) Пусть  $\beta_\lambda$  — наибольшее число вершин в множествах  $S \subseteq V(G)$ , для которых графы  $\langle S \rangle$  не связаны. Тогда  $\chi = \rho - \beta_\lambda$ .

б) Если аналогично определить  $\beta_\lambda$ , то  $\lambda = \rho - \beta_\lambda$ .

(Хедетнечи [1])

10.10. Найти

а)  $\alpha_{11}(K_p)$ , б)  $\alpha_{11}(K_{p,n})$ , в)  $\alpha_{11}(K_{p,p})$ .

10.11. «Граф шахматного ферзя» имеет 64 клетки шахматной доски в качестве множества вершин, и две его вершины смежны тогда, когда клетки, соответствующая одной вершине, достигается ферзем за один ход из клетки, соответствующей другой вершине; аналогично определяются графы других трех фигур: коня, слона и ладьи. Вычислить  $\alpha_{00}$  для этих четырех графов.

(Решения можно найти в книге Берга [2])

10.12. Числа  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{00}$  и  $\alpha'_{00}$  связаны соотношениями

а)  $\alpha_{00} \leq \alpha_0$ ,

б) для некоторых графов  $\alpha_0 < \alpha'_{00}$ ,

в) для некоторых графов  $\alpha'_{00} < \alpha_{00}$ ,

г) для некоторых графов  $\alpha_{00} < \alpha'_{00}$ .

10.13. Доказать или опровергнуть: в графе  $G$  ребро  $x$  критическое тогда и только тогда, когда существует наименьшее реберное покрытие, содержащее  $x$ .

10.14. Доказать или опровергнуть: каждый двусвязный реберно-критический граф гамильтонов.

10.15. Утверждение, обратное следствию 10.7 (а), не справедливо. Построить блок, не являющийся реберно-критическим, в котором любые два смежных ребра принадлежат простому циклу нечетной длины.

10.16. Дерево  $T$  равно своему реберному ядру тогда и только тогда, когда  $T$  — дерево блоков и точек сочленения.

(Харари, Пламмер [2])

10.17. Для любого графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1) граф  $G$  имеет реберное ядро;
- (2)  $\alpha_0(G) = \beta_1(G)$ ;
- (3)  $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$ .

(Харари, Пламмер [2])

10.18. Если  $G$  — связный граф, имеющий реберное ядро  $C_1(G)$ , то

- а)  $C_1(G)$  — остовный подграф графа  $G$ ;
- б)  $C_1(G_1(G)) = C_1(G)$ ;
- в) компоненты ядра  $C_1(G)$  — двудольные подграфы графа  $G$ , не являющиеся сводимыми.

(Харари, Пламмер [2])

10.19. Если граф  $G$  имеет реберное ядро  $C_1(G)$ , а  $B$  — двудольный подграф графа  $G$ , содержащий  $C_1(G)$  как собственную часть, то  $B$  — сводимый граф.

(Харари, Пламмер [2])

10.20. *Вершинным ядром*  $C_0(G)$  называется подграф графа  $G$ , порожденный объединением всех независимых множеств  $S$ , имеющих  $\alpha_1(G)$  вершин. Граф  $G$  содержит вершинное ядро тогда и только тогда, когда он имеет реберное ядро.

(Харари, Пламмер [1])

10.21. Если  $G = C_0(G)$ , то граф  $G$  имеет 1-фактор.

(Харари, Пламмер [1])

10.22. Если  $G$  — регулярный граф степени  $\lambda$ , то существует разбиение множества его вершин, содержащее не более  $1 + \lfloor \lambda/2 \rfloor$  таких подмножеств, что каждая вершина смежна самое большее с одной отличной от нее вершиной того же подмножества.

(Геренсер [1])

## ПЛАНАРНОСТЬ

Вернемся на время вместе со мной к равнине Флатланд, и я покажу вам то, о чем вы часто говорили, о чем думали.

(Эббот Аббот<sup>1)</sup>)

Топологические аспекты теории графов были впервые выявлены в 1736 г. Леонардом Эйлером ( $V - E + F = 2$ ) и затем к ним не возвращались в течение 191 года. Интерес к этой теме возобновился после того, как Куратовский нашел критерий, позволяющий определить, является ли граф планарным<sup>2)</sup>. Другим пионером в исследовании топологических проблем теории графов был Уитни, получивший некоторые важные признаки укладки графов на плоскости.

В этой главе приведены все известные критерии планарности. В их число входят теоремы Понтрягина — Куратовского и Вагнера, в которых планарные графы характеризуются в терминах запрещенных подграфов; результат Уитни о связи планарности графа с существованием комбинаторно двойственного графа; данное Мак-Лейном описание планарности, в котором используется циклическая структура графа.

Вводятся также несколько топологических инвариантов графа. Для полных графов и полных двудольных графов определяется род графа, для «большинства» из этих графов — толщина, и только для некоторых графов — число скрещиваний.

## Плоские и планарные графы

Будем говорить, что граф *укладывается* на поверхности  $S$ , если его можно так нарисовать на  $S$ , что никакие два его ребра не пересекаются. Как уже отмечалось в гл. 1, мы будем использовать термины<sup>3)</sup> «вершины» и «ребра» для абстрактных графов и «точки»

<sup>1)</sup> Edwin A. Abbott, Flatland.

<sup>2)</sup> Л. С. Понтрягин доказал (но не опубликовал) критерий планарности еще в 1927 г. Куратовский [1] (независимо от Понтрягина) получил этот результат в 1930 г. Поэтому указанный критерий мы называем теоремой Понтрягина — Куратовского. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> У автора — наоборот. Мы внесли изменения, чтобы не возникло путаницы. Кроме того, если из контекста ясно, о каких объектах идет речь, то мы предпочитаем использовать термины «вершина» и «ребро». — *Прим. перев.*

и «линии» — для геометрических графов (уложенных на некоторой поверхности). Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости; *плоский граф* — это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рис. 11.1, а, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. 11.1, б.

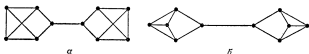


Рис. 11.1. Планарный граф и его укладка.

Области, определяемые плоским графом, назовем его *гранями* (или *внутренними гранями*); неограниченную область будем называть *внешней гранью*. Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 11.2, имеет две внутренние грани  $f_1$ ,  $f_2$  и одну внешнюю  $f_3$ . Из этих граней только  $f_2$  ограничена простым циклом.

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях полиэдров. С каждым полиэдром связан граф, состоящий из точек и линий полиэдра; этот граф называется *1-скелетом*. Например, граф  $Q_3$  есть 1-скелет куба, а  $K_{2,2,2}$  — это 1-скелет октаэдра. Формула Эйлера для полиэдров — один из классических результатов в математике.



Рис. 11.2. Плоский граф.

**Теорема 11.1** (формула Эйлера для полиэдров). *Для любого полиэдра, расположенного на сфере и имеющего  $V$  точек,  $E$  линий и  $F$  граней,*

$$V - E + F = 2. \quad (11.1)$$

Для 3-куба имеем  $V=8$ ,  $E=12$  и  $F=6$ , так что равенство (11.1) выполняется; для тетраэдра  $V=F=4$  и  $E=6$ . Прежде чем доказывать равенство (11.1) в общем случае, переформулируем его в теоретико-графовых терминах. *Плоской картой* называется связный плоский граф вместе со всеми его гранями. Уравнение (11.1) для плоской карты (с  $p$  вершинами,  $q$  ребрами и  $r$  гранями) будет иметь вид

$$p - q + r = 2. \quad (11.1')$$

Легко доказать эту теорему по индукции. Однако соотношение (11.1') было уже доказано в гл. 4, когда мы установили, что циклический ранг  $m$  связного графа  $G$  определяется по формуле

$$m = q - p + 1.$$

Будем считать, что граф  $G$  двусвязен, поскольку, как легко видеть, если соотношение (11.1') выполняется отдельно для блоков графа  $G$ , то оно выполняется также и для графа  $G$ . Таким образом, каждая грань плоской укладки графа  $G$  есть простой цикл.

Мы только что отметили, что для плоской карты  $p=V$  и  $q=E$ . Осталось только связать  $m$  с  $F$ . Покажем, что внутренние грани плоского графа  $G$  образуют базис простых циклов для графа  $G$ ; число этих циклов, следовательно, равно  $m$ . Ребра каждого простого цикла  $Z$  графа  $G$  можно рассматривать как симметрическую разность граней графа  $G$ , содержащихся в  $Z$ . Поскольку внешняя грань есть, таким образом, сумма по модулю 2 всех внутренних граней (рассматриваемых как множества ребер), ясно, что  $m=F-1$ . Следовательно, соотношение  $m=q-p+1$  переходит в  $F-1=E-V+1$ .

Из формулы Эйлера вытекает много следствий.

**Следствие 11.1 (а).** *Если  $G$  — плоская  $(p, q)$ -карта, в которой каждая грань является  $n$ -циклом, то*

$$q = \frac{n(p-2)}{n-2}. \quad (11.2)$$

**Доказательство.** Поскольку каждая грань графа  $G$  есть  $n$ -цикл, любое ребро в  $G$  принадлежит двум граням и каждая грань имеет  $n$  ребер. Тогда  $nr=2q$ . Подставив это в (11.1'), получим искомый результат.

*Максимальным планарным графом* называется граф, который при добавлении любого ребра перестает быть планарным. Подстановка в (11.2)  $n=3$  и  $n=4$  дает

**Следствие 11.1 (б).** *Если  $G$  — максимальный плоский  $(p, q)$ -граф, то каждая его грань является треугольником и  $q=3p-6$ . Если  $G$  — плоский граф, у которого любая грань есть 4-цикл, то  $q=2p-4$ .*

Так как наибольшим числом ребер в плоском графе обладает граф, у которого каждая грань есть треугольник, то получаем необходимое условие планарности графа в терминах числа ребер.

**Следствие 11.1 (в).** *Если  $G$  — произвольный планарный  $(p, q)$ -граф и  $p \geq 3$ , то  $q \leq 3p-6$ . Если граф  $G$  двусвязен и не содержит треугольников, то  $q \leq 2p-4$ .*

**Следствие 11.1 (г).** *Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не являются планарными.*

**Доказательство.** Граф  $K_5$  есть  $(5, 10)$ -граф и не может быть планарным, так как  $q=10 > 9=3p-6$ ; для  $K_{3,3}$  имеем  $q=9$  и  $2q-4=8$ .

Как мы вскоре увидим, графы  $K_5$  и  $K_{2,3}$  играют исключительную роль при характеристике планарности графов. Приведенные выше следствия очень полезны в исследовании планарных графов, в особенности максимальных планарных графов.

**Следствие 11.1 (д).** *Каждый планарный граф  $G$  с  $p \geq 4$  вершинами имеет по крайней мере четыре вершины со степенями, не превышающими 5.*

Ясно, что граф планарный тогда и только тогда, когда каждая его компонента — планарный граф. Уитни [3] показал, что при исследовании планарности достаточно рассматривать двусвязные графы.

**Теорема 11.2.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен.*

Интуитивно очевидно, что любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно. Это замечание позволяет понять, что планарный граф можно уложить на плоскости многими различными способами.

**Теорема 11.3.** *Для любой выделенной грани  $f$  двусвязного плоского графа  $G$  найдется на плоскости изоморфный ему плоский граф, у которого грань, соответствующая грани  $f$ , будет внешней.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — внешняя грань плоского блока  $G$ . Уложим  $G$  на сфере и выделим некоторую внутреннюю относительно  $f$  точку (назовем ее «северным полюсом»). Проведем касательную плоскость к сфере через «южный полюс» и спроектируем  $G$  на плоскость из «северного полюса». В результате получим плоский граф, изоморфный графу  $G$ , в котором  $f$  — внешняя грань<sup>1)</sup>.

**Следствие 11.3 (а).** *Для любого выделенного ребра планарного графа найдется такая укладка этого графа на плоскости, что выделенное ребро будет принадлежать внешней грани.*

Уитни также доказал, что каждый максимальный планарный граф является блоком. Более того, справедлива

**Теорема 11.4 (Уитни).** *Каждый максимальный планарный граф, имеющий  $p \geq 4$  вершин, трехсвязен.*

Существует пять способов укладки трехсвязного колеса  $W_5$  на плоскости: один из них изображен на рис. 11.3, а, остальные четыре — на рис. 11.3, б. Однако на сфере граф  $W_5$  можно уложить лишь единственным способом. Это относится и ко всем трехсвязным графам (Уитни [4]).

<sup>1)</sup> Обычно результат описанного проектирования называют стереографической проекцией.

**Теорема 11.5.** *Любой трехсвязный планарный граф единственным образом укладывается на сфере.*

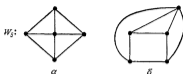


Рис. 11.3. Плоские колеса.

Для того чтобы доказать необходимость трехсвязности, рассмотрим изоморфные двусвязные графы  $G_1$  и  $G_2$ , представленные на рис. 11.4. Граф  $G_2$  укладывается на сфере так, что ни одна из его областей не ограничена пятью ребрами, в то время как  $G_1$  имеет две области, ограниченные пятью ребрами.

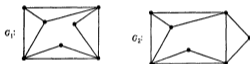


Рис. 11.4. Две укладки двусвязного графа на плоскости.

Полиэдр называется *выпуклым*, если отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки полиэдра, лежит целиком внутри полиэдра. Следующая теорема принадлежит Штейницу и Радемахеру [1].

**Теорема 11.6.** *Граф является 1-скелетом выпуклого трехмерного полиэдра тогда и только тогда, когда он планарен и трехсвязен.*

Одна из наиболее увлекательных областей исследований в теории планарных графов посвящена взаимосвязи между графом как комбинаторным объектом и графом как геометрической фигурой. Очень часто возникает вопрос о существовании специальной укладки графа (при тех или иных геометрических ограничениях). Например, Вагнер [1], Фари [1] и Штейн [1] независимо показали, что каждый планарный граф можно уложить на плоскости так, что каждое его ребро будет отрезком прямой.

**Теорема 11.7.** *Любой планарный граф изоморфен плоскому графу, у которого все ребра являются отрезками прямых.*

### Внешнепланарные графы

Планарный граф называется *внешнепланарным*, если его можно уложить на плоскости так, чтобы все его вершины принадлежали одной грани. Обычно в качестве такой грани мы будем брать внешнюю грань. На рис. 11.5 показан внешнепланарный граф (а) и две — (б) и (в) — его внешнеплоские укладки. В случае (в) все вершины графа принадлежат внешней грани.

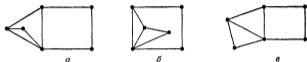


Рис. 11.5. Внешнепланарный граф и две его внешнеплоские укладки.

В этом разделе приводятся результаты для внешнепланарных графов, аналогичные результатам для планарных графов. Аналог теоремы 11.2 получаем немедленно.

**Теорема 11.8.** *Граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда каждый его блок внешнепланарен.*

Внешнепланарный граф  $G$  называется *максимальным внешнепланарным*, если к нему нельзя добавить ни одного ребра, не теряя свойства внешнепланарности. Ясно, что каждый максимальный внешнеплоский граф есть триангуляция многоугольника, а каждый максимальный плоский граф — триангуляция сферы. Три максимальных внешнеплоских графа с 6 вершинами показаны на рис. 11.6.

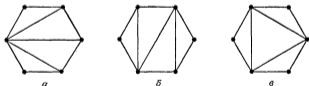


Рис. 11.6. Три максимальных внешнеплоских графа.

**Теорема 11.9.** *Пусть  $G$  — максимальный внешнеплоский граф с  $p \geq 3$  вершинами, которые все принадлежат внешней грани. Тогда  $G$  имеет  $p-2$  внутренних граней.*

**Доказательство.** Очевидно, что утверждение справедливо для  $p=3$ . Предположим, что оно верно для  $p=n$ , и пусть  $G$  имеет  $p=n+1$  вершин и  $m$  внутренних граней. Ясно, что граф  $G$  должен



содержать вершину  $v$  степени 2, принадлежащую внешней грани. Взяв граф  $G - v$ , мы уменьшим число внутренних граней на 1, так что  $m-1=n-2$ . В результате число внутренних граней графа  $G$  будет  $m=n-1=p-2$ .

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

Следствие 11.9 (а). *Любой максимальный внешнепланарный граф  $G$  с  $p$  вершинами имеет*

- а)  $2p - 3$  ребер;
- б) по крайней мере три вершины со степенями, не превышающими 3;
- в) по крайней мере две вершины степени 2;
- г)  $\chi(G) = 2$ .

Все плоские укладки графов  $K_4$  и  $K_{2,3}$  выглядят так, как показано на рис. 11.7; в каждой из них имеется вершина, внутренняя

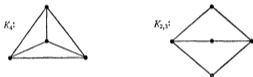


Рис. 11.7. Запрещенные графы для внешней планарности.

относительно внешнего цикла. Следовательно, ни  $K_4$ , ни  $K_{2,3}$  не является внешнепланарным. Заметим, что они оба базисные (см. Чартрэнд, Харари [1]).

Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер. Например, два простых цикла гомеоморфны; на рис. 11.8 показан граф, гомеоморфный графу  $K_4$ .



Рис. 11.8. Граф, гомеоморфный графу  $K_4$ .

**Теорема 11.10.** *Граф, отличный от  $K_4$ -х, внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_4$  или  $K_{2,3}$ .*

Часто бывает необходимо и важно изучить дополнение графа, обладающего заданным свойством. Баттлу, Харари и Кодаме [1] принадлежит следующая ниже теорема о планарных графах, дающая достаточное условие того, что дополнение планарного графа планарно. Более эффективно этот результат был доказан Таттом [11].

**Теорема 11.11.** *Каждый планарный граф, у которого не меньше девяти вершин, имеет непланарное дополнение, причем 9 — наименьшее число, обеспечивающее данное свойство.*

Эта теорема была доказана с помощью метода исчерпывания. Изящного или хотя бы достаточно приемлемого доказательства этого факта пока не известно.

Аналогичное исследование внешнепланарных графов было выполнено Геллером [1].

**Теорема 11.12.** *Каждый внешнепланарный граф, у которого не меньше семи вершин, имеет внешнепланарное дополнение, причем 7 — наименьшее число, обеспечивающее данное свойство.*

**Доказательство.** Для доказательства первой части достаточно установить, что дополнение любого максимального внешнепланарного графа с 7 вершинами не является внешнепланарным

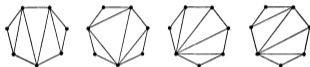


Рис. 11.9. Четыре максимальных внешнепланарных графа с 7 вершинами.

графом. Это следует из того, что существуют точно четыре максимальных внешнепланарных графа с  $p=7$  (см. рис. 11.9) и дополнение каждого из них, как легко видеть, не является внешнепланарным. Минимальность вытекает из того, что (максимальный) внешнепланарный граф с 6 вершинами, изображенный на рис. 11.6, б, имеет внешнепланарное дополнение.

### Теорема Понтрягина — Куратовского

До появления статьи Куратовского [1] <sup>4)</sup> характеристика планарных графов была труднейшей нерешенной проблемой. Приводимое нами доказательство основано на работе Дирака и Шустера [1].

**Теорема 11.13.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

**Доказательство.** Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  непланарны (следствие 11.1 (г)). Поэтому, если граф содержит подграф, гомеоморфный любому из них, он также непланарен.

Доказательство обратного утверждения (достаточности) значительно труднее. Предположим, что достаточность не имеет места,

<sup>4)</sup> См. примечание на стр. 126. — *Прим. перев.*

т. е. существуют непланарные графы, не содержащие подграфов, гомеоморфных  $K_2$  или  $K_{3,3}$ . Пусть  $G$  — такой граф с наименьшим числом ребер. Тогда  $G$  должен быть блоком, у которого  $\delta(G) \geq 3$ . Пусть  $x_0 = u_0 v_0$  — произвольное ребро графа  $G$ . Граф  $F = G - x_0$  обязательно планарен.

Нам понадобятся две леммы.

*Лемма 11.13 (а). В графе  $F$  существует простой цикл, содержащий вершины  $u_0$  и  $v_0$ .*

*Доказательство леммы.* Предположим, что в  $F$  нет простых циклов, содержащих  $u_0$  и  $v_0$ . Тогда по теореме 3.3 вершины  $u_0$  и  $v_0$  принадлежат различным блокам графа  $F$ . Следовательно, в  $F$  существует точка сочленения  $w$ , принадлежащая каждой простой  $(u_0, v_0)$ -цепи. Образует граф  $F_0$ , добавляя к  $F$  ребра  $wu_0$  и  $wv_0$ , если их еще нет в  $F$ . Вершины  $u_0$  и  $v_0$  в графе  $F_0$  также принадлежат различным блокам, скажем  $B_1$  и  $B_2$ , у которых общей вершиной является именно вершина  $w$ . Понятно, что блоки  $B_1$  и  $B_2$  имеют меньше ребер, чем граф  $G$ , поэтому  $B_1$  или планарен, или содержит подграф, гомеоморфный  $K_2$  или  $K_{3,3}$ . Если, однако, добавление ребра  $wu_0$  приводит к образованию подграфа  $H$  графа  $B_1$ , гомеоморфного  $K_2$  или  $K_{3,3}$ , то подграф графа  $G$ , который получается заменой ребра  $wu_0$  на простую цепь, идущую из  $u_0$  в  $w$  и начинающуюся ребром  $x_0$ , обязательно гомеоморфен графу  $H$  и, значит, гомеоморфен  $K_2$  или  $K_{3,3}$ ; мы пришли к противоречию. Поэтому  $B_1$  и аналогично  $B_2$  — планарные графы. В силу следствия 11.3 (а) оба графа  $B_1$  и  $B_2$  можно уложить на плоскости так, что ребра  $wu_0$  и  $wv_0$  будут принадлежать внешней области. Следовательно, граф  $F_0$  можно уложить на плоскости так, что  $wu_0$  и  $wv_0$  будут лежать во внешней области. Добавление ребра  $x_0$  не нарушает планарности графа  $F_0$ . Поскольку  $G$  — подграф графа  $F_0 + x_0$ , он планарен; полученное противоречие показывает, что в  $F$  есть простой цикл, содержащий  $u_0$  и  $v_0$ .

Пусть граф  $F$  уложен на плоскости так, что простой цикл  $Z$ , содержащий  $u_0$  и  $v_0$ , имеет наибольшее число внутренних (относительно  $Z$ ) областей. Ориентируем ребра цикла  $Z$  в одном из направлений по циклу. Обозначим через  $Z[u, v]$  ориентированную простую цепь, идущую из вершины  $u$  в вершину  $v$  по циклу  $Z$ . Если  $v$  не следует непосредственно за  $u$  по  $Z$ , то подцепь цепи  $Z[u, v]$ , получаемую в результате удаления вершин  $u$  и  $v$ , будем обозначать через  $Z(u, v)$ .

Под *внешностью* простого цикла  $Z$  будем понимать подграф в  $F$ , порожденный вершинами, лежащими вне  $Z$ ; компоненты этого подграфа называются внешними компонентами цикла  $Z$ . Внешняя часть цикла  $Z$  — это подграф в  $F$ , порожденный или всеми ребрами, инцидентными по крайней мере одной вершине некоторой внешней

компоненты, или ребром (если такое есть), внешним к  $Z$  и соединяющим две вершины из  $Z$ . Аналогично определяются внутренность простого цикла  $Z$ , внутренняя компонента и внутренняя часть.

Внешняя (или внутренняя) часть называется  $(u-v)$ -разделяющей, если она встречает обе цепи  $Z(u, v)$  и  $Z(v, u)$ . Ясно, что внешняя (или внутренняя) часть не может быть  $(u-v)$ -разделяющей, если  $u$  и  $v$  смежны по циклу  $Z$  (т. е.  $uv$  принадлежит  $Z$ ).

Поскольку  $F$  связан, любая внешняя часть должна встречать  $Z$ , а так как в  $F$  нет точек сочленения, любая внешняя часть должна иметь не менее двух вершин, общих с  $Z$ . Внешние части не могут встречать ни  $Z(u_0, v_0)$ , ни  $Z(v_0, u_0)$ , так как иначе существовал бы простой цикл, содержащий  $u_0$  и  $v_0$ , в котором внутренних областей было бы больше, чем в  $Z$ . По той же самой причине ни одна из внешних частей не может встретить ни  $u_0$ , ни  $v_0$ . Следовательно, каждая внешняя часть встречает  $Z$  точно в двух вершинах и является  $(u_0-v_0)$ -разделяющей. Отсюда, поскольку  $x_0$  нельзя добавить к  $F$ , не нарушив планарности, получаем, что существует по крайней мере одна  $(u_0-v_0)$ -разделяющая внутренняя часть.

Лемма 11.13 (б). Существует такая  $(u_0-v_0)$ -разделяющая внешняя часть, встречающая  $Z(u_0, v_0)$ , скажем в  $u_1$ , и  $Z(v_0, u_0)$ , скажем в  $v_1$ , что найдется внутренняя часть, являющаяся одновременно и  $(u_0-v_0)$ -разделяющей, и  $(u_1-v_1)$ -разделяющей.

Доказательство леммы. Предположим, что лемма не верна. Для понимания приведенного ниже доказательства будет полезен рис. 11.10.

Упорядочим  $(u_0-v_0)$ -разделяющие внутренние части, чтобы разместить их на плоскости. Рассмотрим  $(u_0-v_0)$ -разделяющую внутреннюю часть  $I_1$ , ближайшую к вершине  $u_0$  в смысле порядка прохождения вершин внутренних частей при движении по  $Z$  из  $u_0$ . По этому же принципу мы можем упорядочить относительно  $u_0$  остальные  $(u_0-v_0)$ -разделяющие внутренние части  $I_2, I_3$  и т. д.

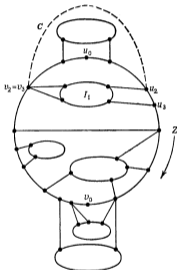


Рис. 11.10. Разделяющие части и простой цикл  $Z$ , иллюстрирующие лемму.

Пусть  $u_2$  и  $u_3$  — первая и последняя вершины в  $I_1$ , встречающие  $Z(u_0, v_0)$ , а  $v_2$  и  $v_3$  — первая и последняя вершины в  $I_1$ , встречающие  $Z(v_0, u_0)$ . У каждой внешней части обе ее вершины, общие с  $Z$ , должны принадлежать или  $Z[v_2, u_2]$ , или  $Z[u_3, v_3]$ , так как иначе существовали бы внешняя часть, встречающая  $Z(u_0, v_0)$  в  $u_1$  и  $Z(v_0, u_0)$  в  $v_1$ , и внутренняя часть, которая является и  $(u_0-v_0)$ -разделяющей, и  $(u_1-v_1)$ -разделяющей. Это противоречит предположению о том, что лемма не верна. Поэтому кривую  $C$ , соединяющую  $v_3$  и  $u_2$ , можно провести во внешней области так, что она не встретит ребер графа  $F$  (см. рис. 11.10). Таким образом, не нарушая планарности, можно перевести  $I_1$  во внешнюю относительно  $Z$  область. Аналогично оставшиеся  $(u_0-v_0)$ -разделяющие внутренние части можно перевести во внешнюю относительно  $Z$  область, причем так, что получающийся граф будет плоским. Но тогда ребро  $x_0$  можно добавить, не нарушая планарности графа  $F$ ; мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Пусть  $H$  — внутренняя часть, которая в силу леммы 11.13 (б) является и  $(u_0-v_0)$ -разделяющей, и  $(u_1-v_1)$ -разделяющей. Далее, пусть  $w_0, w'_0, w_1$  и  $w'_1$  — вершины, в которых  $H$  встречает  $Z(u_0, v_0)$ ,  $Z(v_0, u_0)$ ,  $Z(u_1, v_1)$  и  $Z(v_1, u_1)$  соответственно. Рассмотрим теперь четыре случая в зависимости от взаимного расположения на  $Z$  этих четырех вершин.

*Случай 1.* Одна из вершин  $w_1$  и  $w'_1$  лежит на  $Z(u_0, v_0)$ , а другая — на  $Z(v_0, u_0)$ . Тогда можно положить  $w_0 = w_1$  и  $w'_0 = w'_1$ ; в этом случае  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  (рис. 11.11, а, два множества вершин отмечены жирными точками и кружочками).

*Случай 2.* Обе вершины  $w_1$  и  $w'_1$  лежат или на  $Z(u_0, v_0)$ , или на  $Z(v_0, u_0)$ . Не теряя общности, предположим для определенности, что  $w_1, w'_1 \in Z(u_0, v_0)$ . Возникает две возможности: или  $v_1 \neq w'_0$ , или  $v_1 = w'_0$ . Если  $v_1 \neq w'_0$ , то  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ , расположенный, как на рис. 11.11, б или 11.11, в, в зависимости от того, принадлежит вершина  $w'_0$  цепи  $Z(u_1, v_1)$  или  $Z(v_1, u_1)$ . Если  $v_1 = w'_0$  (рис. 11.11, г), то  $H$  содержит вершину  $r$ , из которой идут непересекающиеся простые цепи к  $w_1, w'_1$  и  $v_1$ , причем все вершины этих цепей (за исключением самих концов  $w_1, w'_1$  и  $v_1$ ) принадлежат  $H$ . В этом случае  $G$  также содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ .

*Случай 3.*  $w_1 = v_0$  и  $w'_1 \neq u_0$ . Не теряя общности, будем считать, что  $w'_1$  лежит на  $Z(u_0, v_0)$ . Тогда снова граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ . Если  $w'_0$  лежит на  $Z(v_0, v_1)$ , то  $G$  содержит подграф  $K_{3,3}$ , показанный на рис. 11.11, д. Если же  $w'_0$  лежит на  $Z(v_1, u_0)$ , то также найдется подграф  $K_{3,3}$  (рис. 11.11, е) — им будет подграф, полученный в результате отождествления вершин  $w'_0$  и  $v_1$ .

Случай 4.  $w_1=v_0$  и  $w'_1=u_0$ . Здесь мы полагаем  $w_0=u_1$  и  $w'_0=v_1$  (все другие ситуации уже встречались в предыдущих случаях). Выделим два подслучая. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — кратчайшие простые цепи в  $H$ , идущие соответственно из  $u_0$  в  $v_0$  и из  $u_1$  в  $v_1$ . Цепи  $P_0$  и  $P_1$  должны пересекаться. Если  $P_0$  и  $P_1$  имеют более чем одну общую вершину, то  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  (рис. 11.11, ж); в противном случае  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_5$  (рис. 11.11, з).

Итак, все возможные случаи разобраны. Теорема доказана.

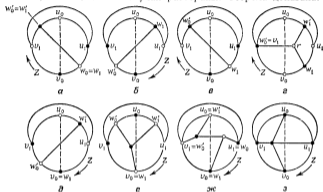


Рис. 11.11. Возможные варианты для непланарных подграфов.

В статье Татта [12] приводится алгоритм, позволяющий укладывать данный граф на плоскости до тех пор, пока это возможно (без пересечений ребер), и показывается, что если этот процесс не охватывает весь граф, то он должен содержать подграф, гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Таким образом, алгоритм Татта представляет собой независимое доказательство теоремы 11.13.

Элементарное стягивание в графе  $G$  получается отождествлением двух смежных вершин  $u$  и  $v$ , т. е. удалением  $u$  и  $v$  и добавлением новой вершины  $w$ , смежной с теми вершинами графа, которые были смежны или с  $u$ , или с  $v$ . Граф  $G$  называется *стягиваемым* к графу  $H$ , если  $H$  можно получить из  $G$  с помощью некоторой последовательности элементарных стягиваний. Например, как показано на рис. 11.12, а и б, граф Петерсена стягивается к  $K_5$  в результате стягивания в новую вершину  $w_i$  любого из пяти ребер  $u_i v_i$ , соединяющих пятиугольник с пентаграммом.

Двойственная форма теоремы Понтрягина — Куратовского (в смысле двойственности теории матроидов) была найдена независимо Вагнером [2] и Харари и Таттом [2].

**Теорема 11.14.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, стягиваемых к  $K_5$  и к  $K_{3,3}$ .*

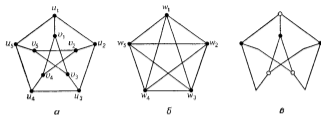


Рис. 11.12. Непланарность графа Петерсена.

Мы только что видели, что граф Петерсена стягиваем к  $K_5$ . Поскольку каждая его вершина имеет степень 3, у него нет подграфов, гомеоморфных  $K_5$ ; на рис. 11.12, в показан один из его подграфов, гомеоморфных  $K_{3,3}$ .

### Другие характеристики планарных графов

Вслед за классическим результатом Понтрягина и Куратовского были предложены другие критерии планарности. Мы уже указали «двойственную форму» критерия Понтрягина — Куратовского, использующую понятие стягивания (теорема 11.14). Алгоритм Татта укладки графа на плоскости можно также рассматривать как некоторую характеристику планарных графов.

Уитни [3,5] связал планарность графов с существованием двойственных графов. Для данного плоского графа  $G$  его *геометрически двойственный* граф  $G^*$  строится следующим образом: поместим в каждую область  $G$  (включая внешнюю) по одной вершине графа  $G^*$  и, если две области имеют общее ребро  $x$ , соединим помещенные в них вершины ребром  $x^*$ , пересекающим только  $x$ . В результате

всегда получится плоский псевдограф, как, например, на рис. 11.13, где ребра графа  $G$  указаны сплошными линиями, а ребра двойственного графа  $G^*$  — штриховыми. Ясно, что  $G^*$  имеет петлю тогда и только тогда, когда в  $G$  есть концевая вершина;  $G^*$  имеет кратные ребра тогда и только тогда, когда две области графа  $G$  содержат по крайней мере два общих ребра. Таким образом, двусвязный плоский граф имеет всегда в качестве двойственного или граф, или мультиграф, в то время как двойственный граф трехсвязного плоского гра-



Рис. 11.13. Плоский граф и геометрически двойственный к нему.

фа всегда представляет собой граф. Другими примерами геометрически двойственных графов являются платоновы графы: тетраэдр — самодвойственный граф, куб и октаэдр — двойственные, так же как додекаэдр и икосаэдр.

Как следует из определения, геометрически двойственный граф плоского графа  $G$  также плоский, а двойственный к двойственному графу графа  $G$  — это первоначальный граф  $G$ . Однако абстрактный граф, допускающий более чем одну укладку на сфере, может дать более чем один двойственный граф. Это иллюстрируется на

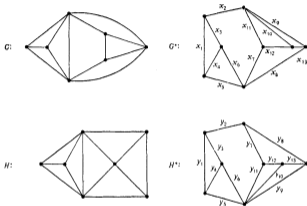


Рис. 11.14. Различные геометрически двойственные графы к одному и тому же абстрактному графу.

рис. 11.14, где графы  $G$  и  $H$  абстрактно изоморфны, а после укладки на сфере имеют различные двойственные графы  $G^*$  и  $H^*$ . Однако поскольку трехсвязный граф допускает только одну укладку на сфере, как отмечено в теореме 11.5, то у него должен быть единственный геометрически двойственный граф.

Уитни дал комбинаторное определение двойственного графа, которое является абстрактной формулировкой геометрически двойственного графа. Напомним сначала (гл. 4), что для графа  $G$  с  $k$  компонентами циклический ранг есть число  $m(G) = q - p + k$ , а коциклический ранг — число  $m^*(G) = p - k$ .

Относительным дополнением  $G - H$  подграфа  $H$  в графе  $G$  назовем подграф, получающийся из графа  $G$  при удалении ребер графа  $H$ . Граф  $G^*$  называется комбинаторно двойственным к графу  $G$ , если существует взаимно однозначное соответствие между их множествами ребер, при котором для любых соответствующих подмно-



жеств ребер  $Y$  и  $Y^*$

$$m^*(G-Y) = m^*(G) - m(\langle Y^* \rangle), \quad (11.3)$$

где  $\langle Y^* \rangle$  — подграф графа  $G^*$  с множеством ребер  $Y^*$ . Это определение иллюстрируется на рис. 11.15, где соответствие задается правилом  $x_i \leftrightarrow y_i$ . Здесь  $Y = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $m^*(G-Y) = 4$ ,  $m^*(G) = 5$  и  $m(\langle Y^* \rangle) = 1$ ; равенство (11.3) очевидно выполняется. Конечно, используя (11.3), очень трудно определить, двойственны ли данные два графа, поскольку нужно проверять выполнение равенства (11.3) для каждого подмножества ребер графа  $G$ .

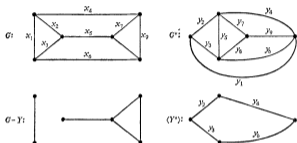


Рис. 11.15. Комбинаторно двойственные графы.

В отличие от геометрически двойственных графов комбинаторно двойственные графы планарных графов определяются не обязательно однозначно. Однако если два графа комбинаторно двойственны к изоморфным графам, то существует взаимно однозначное соответствие между множествами их ребер, сохраняющее простые циклы, рассматриваемые как множества ребер (т. е. их матроиды циклов изоморфны). Соответствие  $x_i \leftrightarrow y_i$  для графов  $G^*$  и  $H^*$ , представленных на рис. 11.14, поясняет это утверждение.

Уитни доказал, что комбинаторная двойственность эквивалентна геометрической двойственности, и дал другой критерий планарности.

**Теорема 11.15.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он имеет комбинаторно двойственный.*

Еще один критерий планарности, предложенный Мак-Лейном [1], основан на рассмотрении циклической структуры графа.

**Теорема 11.16.** *Граф  $G$  планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок, имеющий по крайней мере три вершины, обладает таким базисом циклов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  и таким дополнительным*

циклом  $Z_0$ , что любое ребро блока принадлежит точно двум из этих  $m+1$  циклов.

Мы только наметим доказательство более простой части этого утверждения, а именно необходимости. Как указывалось в доказательстве теоремы 11.1, все внутренние грани двусвязного плоского графа  $G$  образуют базис циклов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ , где  $m$  — циклический ранг графа  $G$ . Пусть  $Z_0$  — внешний простой цикл графа  $G$ . Понятно, что любое ребро графа  $G$  принадлежит точно двум из  $m+1$  циклов  $Z_i$ .

Для доказательства достаточности нужно построить плоскую укладку данного графа  $G$ , обладающую определенными свойствами.

Все указанные критерии планарности графа  $G$  приведены в следующем списке эквивалентных условий:

- (1)  $G$  — планарный граф;
- (2) в  $G$  нет подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$ ;
- (3) в  $G$  нет подграфов, стягиваемых к  $K_5$  и  $K_{3,3}$ ;
- (4)  $G$  имеет комбинаторно двойственный граф;
- (5) каждый нетривиальный блок графа  $G$  обладает таким базисом циклов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  и таким дополнительным циклом  $Z_0$ , что любое ребро принадлежит точно двум из этих  $m+1$  циклов.

### Род, толщина, крупность, число скрещиваний

В этом разделе рассматриваются четыре топологических инварианта графа  $G$ : род — наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы уложить  $G$ ; толщина — наименьшее число планарных графов, объединение которых есть  $G$ ; крупность<sup>1)</sup> — наибольшее число непланарных подграфов в  $G$ , не пересекающихся по ребрам; число скрещиваний — число пересечений ребер, которое должно быть при расположении  $G$  на плоскости<sup>2)</sup>. Здесь мы сосредоточим внимание на трех классах графов — на классе полных графов, полных двудольных графов и кубов — и укажем для них известные значения названных выше инвариантов.

Как заметил Кёниг, любой граф можно уложить на некоторой ориентируемой поверхности. Это легко понять, если нарисовать произвольный граф  $G$  на плоскости, причем некоторые ребра могут пересекаться, и для каждого (двойного) пересечения добавить к плоскости ручку; затем провести одно ребро по ручке, а другое — под ней. Например, на рис. 11.16 показана укладка графа  $K_5$  на плоскости, к которой добавлена одна ручка. Конечно, при таком спо-

<sup>1)</sup> Встречаются также термины «шероховатость», «зернистость». — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Обзор результатов по толщине графов можно найти в статье Хоббса [1], а по числам скрещиваний — в статьях Комана [1] и Гая [2]. — *Прим. перев.*

собе укладки используется, как правило, больше ручек, чем на самом деле требуется. Кёниг также показал, что при любой укладке графа на ориентируемой поверхности с наименьшим числом ручек все его грани будут связными областями.



Рис. 11.16. Укладка графа  $K_3$  на ориентируемой поверхности.

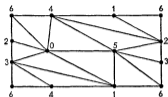


Рис. 11.17. Укладка графа  $K_7$  на торе.

Уже отмечалось, что планарные графы можно уложить на сфере. *Тороидальным графом* называется граф, который можно уложить на торе. Графы  $K_5$  и  $K_{2,3}$  тороидальные. На рис. 11.17 и 11.18 показаны укладки графов  $K_7$  и  $K_{4,4}$  на торе, представленном здесь хорошо известным способом с помощью прямоугольника, в котором отождествлены обе пары противоположных сторон.

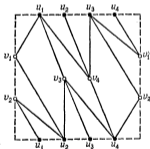


Рис. 11.18. Укладка графа  $K_{4,4}$  на торе.

Пока еще не найдено ни одной характеристики тороидальных графов, аналогичной теореме Понтрягина — Куратовского. Однако Волмерхауз [1] подтвердил одну гипотезу Эрдёша, доказав, что для тора и любой другой ориентируемой поверхности существует лишь конечное число запрещенных подграфов.

*Род*  $\gamma(G)$  графа  $G$  определяется как наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы граф  $G$  можно было уложить на получившейся поверхности. Конечно,  $\gamma(G)=0$  тогда и только тогда, когда  $G$  — планарный граф;

гомеоморфные графы имеют одинаковый род.

Первая теорема этой главы дает характеристическое уравнение Эйлера  $V - E + F = 2$  для сферических полиэдров. Более общо, определим *род полиэдра*<sup>1)</sup> как число ручек, которые нужно до-

<sup>1)</sup> Комбинаторную трактовку теории полиэдров см. в работе Грюнбаума [2].

бавить к сфере, чтобы получившаяся поверхность содержала этот полиэдр. Обобщение теоремы 11.1 на полиэдры произвольного рода также принадлежит Эйлеру. Доказательство можно найти в работе Куранта и Роббинса [1].

**Теорема 11.17.** *Для полиэдра рода  $\gamma$ , имеющего  $V$  вершин,  $E$  ребер и  $F$  граней,*

$$V - E + F = 2 - 2\gamma. \quad (11.4)$$

Это равенство особенно полезно при доказательстве простых результатов о роде и толщине конкретных графов. Для этого обычно удобнее использовать даже не само равенство, а его следствия.

**Следствие 11.17 (а).** *Если  $G$  — связный граф рода  $\gamma$ , в котором каждая грань является треугольником, то*

$$q = 3(p - 2 + 2\gamma); \quad (11.5)$$

*если же каждая грань — четырехугольник, то*

$$q = 2(p - 2 + 2\gamma). \quad (11.6)$$

Как указывается в работе Байнеке и Харари [2], с помощью этих двух соотношений легко проверить, что род графа имеет следующие нижние оценки.

**Следствие 11.17 (б).** *Если  $G$  — связный граф рода  $\gamma$ , то*

$$\gamma \geq \frac{1}{6} q - \frac{1}{2} (p - 2); \quad (11.7)$$

*если в  $G$  нет треугольников, то*

$$\gamma \geq \frac{1}{4} q - \frac{1}{2} (p - 2). \quad (11.8)$$

Формула для вычисления рода полных графов была установлена в результате долгой, интересной, трудной и успешной борьбы. В своей двойственной форме это известная гипотеза Хивуда, которая оставалась нерешенной с 1890 по 1967 г. Мы вернемся к этому в следующей главе. Многие исследователи внесли свой вклад в решение указанной проблемы, и, наконец, *coup de grace*, гипотеза была подтверждена Рингелем и Янгсом [1].

**Теорема 11.18.** *Для любого положительного целого числа  $p$  род полного графа равен*

$$\gamma(K_p) = \left\lfloor \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\rfloor. \quad (11.9)$$

Легко установить неравенство в одну сторону, что и сделал Хивуд [1]. Оно получается подстановкой  $q(K_p)$  в неравенство (11.7):

$$\gamma(K_p) \geq \frac{1}{6} \binom{p}{2} - \frac{p-2}{2} = \frac{(p-3)(p-4)}{12}.$$

Но поскольку род любого графа — целое число, то

$$\gamma(K_p) \geq \left\lfloor \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\rfloor.$$

Доказательство того, что правая часть является также верхней оценкой для  $\gamma(K_p)$ , можно осуществить только, произведя укладку графа  $K_p$  на ориентируемой поверхности указанного рода. Сформулировав в 1890 г. гипотезу, Хивуд тогда же доказал, что  $\gamma(K_7)=1$ ; это подтверждает и укладка, показанная на рис. 11.17, которая триангулирует тор.

Хеффер доказал равенство (11.9) в 1891 г. для  $p$  от 8 до 12. И только в 1952 г. Рингель доказал, что (11.9) верно и для  $p=13$ . На этом этапе было обнаружено, что в соответствии с природой проводимых доказательств естественно пытаться решать проблему сразу для всех чисел  $p$ , образующих один класс вычетов по модулю 12. Напишем  $p=12s+r$ . Рингель [1] в 1954 г. доказал равенство (11.9) для всех полных графов  $K_p$  с  $r=5$ . В течение 1961—1965 гг. он распространил решение на случаи  $r=7, 10, 3$  и одновременно Янгс [1] со своими коллегами Гусином, Терри и Уэлчем исследовал случаи  $r=4, 0, 1, 9, 6$ .

В 1967—1968 гг. Рингель и Янгс [1, 2], работая вместе, построили соответствующую укладку графа  $K_p$  для  $r=2, 8, 11$ . Оставались случаи  $p=18, 20$  и 23, для которых применяемые ранее методы были непригодны. Доказательство завершил профессор кафедры французской литературы университета Монпелье Жан Мейер [1], построивший укладку графа  $K_p$  для этих трех значений  $p$ .

Для полных двудольных графов соответствующий результат, менее трудоемкий, получил Рингель. Применение неравенства (11.8) к графу  $K_{m,n}$  дает

$$\gamma(K_{m,n}) \geq \frac{mn}{4} - \frac{m+n-2}{2} = \frac{(m-2)(n-2)}{4}.$$

Противоположное неравенство устанавливается (Рингель [3]) с помощью построения соответствующей укладки графа  $K_{m,n}$ .

**Теорема 11.19.** *Род полного двудольного графа равен*

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rfloor. \quad (11.10)$$

Род куба был найден Рингелем [4], а также Байнеке и Харари [3]. Для графа  $Q_n$  имеем  $p=2^n$  и  $q=n \cdot 2^{n-1}$ , так что в силу (11.8) неравенство в одну сторону получается легко:

$$\gamma(Q_n) \geq 1 + (n-4) \cdot 2^{n-3}.$$

**Теорема 11.20.** *Род куба равен*

$$\gamma(Q_n) = 1 + (n-4) \cdot 2^{n-3}. \quad (11.11)$$

Отметим теперь некоторые более общие исследования рода графов. Баттл, Харари, Кодама и Янгс [1] показали, что род графа зависит только от родов его блоков, как это уже выяснилось в теореме 11.2.

**Теорема 11.21.** Если граф  $G$  имеет блоки  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , то

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^n \gamma(B_i). \quad (11.12)$$

Этот результат был несколько обобщен в статье Харари и Кодамы [1]. Напомним (теорема 5.8), что две  $n$ -компоненты графа имеют не более  $n$  общих вершин.

**Теорема 11.22.** Пусть  $n$ -связный граф  $G$  представляет собой объединение двух  $(n+1)$ -компонент  $B$  и  $C$ . Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — множество вершин в  $B \cap C$ . Обозначим через  $G_{ij}$  граф, полученный добавлением ребра  $v_i v_j$  к  $G$ . Если  $\gamma(G_{ij}) = \gamma(G) + 1$  для любых  $1 \leq i < j \leq n$ , то

$$\gamma(G) = \gamma(B) + \gamma(C) + n - 1. \quad (11.13)$$

Мы уже видели в теореме 11.11, что любой планарный граф с 9 вершинами имеет непланарное дополнение. Определим толщину  $\theta(G)$  графа  $G$  как наименьшее число его планарных подграфов, объединение которых равно  $G$ . Тогда теореме 11.11 можно сформулировать так:  $\theta(K_9) \geq 2$ . Действительно, толщина графа  $K_9$  равна 3 и граф  $K_9$  — критический относительно толщины, поскольку  $\theta(K_9 - x) = 2$ . Поэтому  $\theta(K_p) = 2$  для  $p$  от 5 до 8. Естественно,  $\theta(G) = 1$  тогда и только тогда, когда граф  $G$  планарен. Так как в максимальном планарном графе  $q = 3p - 6$  ребер, то толщина  $\theta$  любого  $(p, q)$ -графа удовлетворяет неравенству

$$\theta \geq \frac{q}{3p - 6}. \quad (11.14)$$

Это замечание полезно при формулировании гипотез о толщине и доказательстве нижних оценок.

Толщина полных графов изучалась Байнеке и Харари [5] и Байнеке [2]. Применяя (11.14) к  $K_p$ , находим

$$\theta(K_p) \geq \frac{p(p-1) \cdot 2}{3(p-2)}.$$

Произведя некоторые алгебраические преобразования, получаем

$$\theta(K_p) \geq \left\lceil \frac{p(p-1) \cdot 2 + 3(p-2) - 1}{3(p-2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{p+7}{6} \right\rceil.$$

**Теорема 11.23.** Если  $p \not\equiv 4 \pmod{6}$  и  $p \neq 9$ , то толщина полного графа равна

$$\theta(K_p) = \left\lceil \frac{p+7}{6} \right\rceil. \quad (11.15)$$

Если  $p \equiv 4 \pmod{6}$ , то равенство (11.15) не всегда выполняется. Так,  $\theta(K_{10}) = 3 \neq \lfloor 17/6 \rfloor$ , но Хоббс и Гроссман [1] построили разложение графа  $K_{22}$  на  $4 = \lfloor 29/6 \rfloor$  планарных подграфа, а Байнеке [2] доказал, что  $\theta(K_{28}) = 5 = \lfloor 35/6 \rfloor$ . Чуть позже Жан Мейер (снова он!) нашел построения, показывающие, что  $\theta(K_{34}) = 6$  и  $\theta(K_{40}) = 7$ . Единственное значение  $p \leq 45$ , для которого  $\theta(K_p)$  еще не известно, это  $p = 16$ . Предполагается, что  $\theta(K_{16}) = 4$  и что для всех  $p \equiv 4 \pmod{6}$  и  $p \geq 46$  равенство (11.15) справедливо.

Толщина полных двудольных графов изучалась Байнеке, Харари и Муном [1] и Байнеке [3].

**Теорема 11.24.** Толщина полного двудольного графа равна

$$\theta(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\rfloor, \quad (11.16)$$

за исключением, возможно, тех случаев, когда  $m < n$ ,  $mn$  нечетно и существует такое целое число  $k$ , что  $n = \lfloor 2k(m-2)/(m-2k) \rfloor$ .

**Следствие 11.24 (а).** Толщина графа  $K_{n,n}$  равна  $\lfloor (n+5)/4 \rfloor$ .

Соответствующая проблема для куба решена Клайнбертом [1].

**Теорема 11.25.** Толщина куба равна

$$\theta(Q_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor. \quad (11.17)$$

Некоторых успехов добился Эрдёш (устное сообщение), когда он пытался описать понятие толщины. Говоря о наибольшем числе

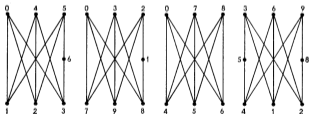


Рис. 11.19. Четыре непланарных подграфа графа  $K_{16}$ .

непланарных подграфов, не пересекающихся по ребрам и содержащихся в данном графе  $G$ , он сначала определил *крупность*  $\xi(G)$ . Таким образом, как толщина, так и крупность требуют построений, разбивающих граф на остовные подграфы (планарные и непланарные соответственно) в смысле гл. 9. Формулы для крупности полного графа не такие простые, как для других топологических инвариан-

тов. Причина кроется в том, что  $K_{3,3}$  или граф, ему гомеоморфный, наиболее удобен для конструкций, используемых в изучении крупности. Это подсказывает вид следующего результата, полученного Гаем и Байнеке [1]. На рис. 11.19 показаны четыре графа, гомеоморфных  $K_{3,3}$ , не пересекающихся по ребрам и содержащихся в  $K_{3,3}$ .

**Теорема 11.26.** *Крупность полных графов определяется по формулам*

$$\xi(K_{3n}) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & p = 3n \leq 15, \\ \binom{n}{2} + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor, & p = 3n \geq 30, \end{cases}$$

$$\xi(K_{3n+1}) = \binom{n}{2} + 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \quad \begin{matrix} p = 3n + 1 \geq 19, \\ p \neq 9r + 7. \end{matrix} \quad (11.18)$$

$$\xi(K_{2n+2}) = \binom{n}{2} + \left\lfloor \frac{14n+1}{5} \right\rfloor.$$

Все значения  $\xi(K_p)$  или вычисляются по формулам (11.18), или приведены в табл. 11.1, или на 1 больше табличных значений; см. Гай, Байнеке [1].

Таблица 11.1

Предполагаемые значения для  $\xi(K_p)$ 

$p$	13	18	21	24	27	$9n+7$
$\xi(K_p)$	7	15	21	28	36	$(9n^2+13n+2)/2$

Для крупности полных двудольных графов результаты Гая и Байнеке [2] не полны; они включают много случаев.

**Теорема 11.27.** *Крупность полного двудольного графа  $K_{m,n}$  удовлетворяет соотношениям*

$$\xi(K_{3r+d, 3s+e}) = rs + \min \left( \left\lfloor \frac{er}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{ds}{3} \right\rfloor \right) \text{ для } d=0 \text{ или } 1 \text{ и } e=0 \text{ или } 1;$$

$$\xi(K_{3r+2, 3s}) = rs + \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor \text{ при } r \geq 1;$$

$$\xi(K_{3r+2, 3s+1}) \begin{cases} \leq rs + \min \left( \left\lfloor \frac{r+s}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2s}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{8r+16s+2}{39} \right\rfloor \right), \\ \geq rs + \max \left( \left\lfloor \frac{s+2}{3} \right\rfloor, \min \left( \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2s}{3} \right\rfloor \right) \right) \end{cases}$$

при  $r \geq 2, s \geq 7$ ;



$$\xi(K_{3r+2, 3s+1}) = rs + \left\lfloor \frac{2s}{3} \right\rfloor \text{ при } r \geq 2s;$$

$$\xi(K_{3r+2, 3s+2}) \begin{cases} \leq rs + \min \left( \left\lfloor \frac{r+2s}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2r+s}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{16r+16s+4}{39} \right\rfloor \right), \\ \geq rs + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{9} \right\rfloor \text{ при } 1 \leq r \leq s. \end{cases}$$

Числом скрещиваний  $\nu(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число попарных пересечений его ребер при расположении графа  $G$  на плоскости. Очевидно, что  $\nu(G) = 0$  тогда и только тогда, когда граф  $G$  планарен. Точное значение числа скрещиваний не известно ни для одного из рассматриваемых трех классов графов; установлены только верхние оценки. Преобладает мнение, что оценки (11.19) и (11.20) точны. Некоторым авторам удалось убедить себя, что они доказали эти равенства. Подробности см. у Гая [1].

**Теорема 11.28.** Число скрещиваний полного графа удовлетворяет неравенству

$$\nu(K_p) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor. \quad (11.19)$$

**Теорема 11.29.** Число скрещиваний полного двудольного графа удовлетворяет неравенству

$$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (11.20)$$

Саати показал, что в (11.19) выполняется равенство для  $p \leq 10$ , а Клейтман доказал равенство в (11.20) для  $m \leq 6$ . Таковы известные результаты для  $\nu(K_p)$  и  $\nu(K_{m,n})$ . Для куба нет даже предположений о том, каково  $\nu(Q_n)$ .

## Упражнения

11.1. Если  $(p_1, q_1)$ -граф и  $(p_2, q_2)$ -граф гомеоморфны, то

$$p_1 + q_2 = p_2 + q_1.$$

11.2. Каждый плоский эйлеров граф содержит эйлерову цепь, не имеющую самопересечений.

11.3. Трехсвязный граф с  $p \geq 6$  вершинами планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, гомеоморфных графу  $K_{3,3}$ .

(Д. Холм [1])

\*11.4. Любой 4-связный планарный граф гамильтонов.

(Татт [1])

11.5. Любой 5-связный планарный граф имеет по крайней мере 12 вершин. Построить один из них.

11.6. Не существует 6-связных планарных графов.

\*11.7. Если  $G$  — максимальный плоский граф, в котором каждый треугольник ограничивает некоторую область, не содержащую ребер, то граф  $G$  гамильтонов.

(Уитни [3])

11.8. Не всякий максимальный планарный граф гамильтонов.

(Уитни [3])

11.9. Если в изображении графа  $G$  на плоскости каждые два несмежных ребра пересекаются четное число раз, то граф  $G$  гамильтонов.

(Брукс, Смит, Стоун, Татт)

11.10. Доказать или опровергнуть: каждый связный непланарный граф стягивается к графу  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

11.11. Доказать или опровергнуть: граф планарен тогда и только тогда, когда любой его подграф, имеющий самое большее шесть вершин со степенями не меньше 3, гомеоморфен подграфу графа  $K_2 + P_4$ .

11.12. Доказать или опровергнуть: базис циклов плоского графа, состоящий из границ внутренних областей, всегда получается из дерева. (Ср. с гл. 4.)

\*11.13. Каждый трехсвязный планарный граф имеет остов, у которого наибольшая степень равна 3.

(Барнетт [1])

11.14. Плоский граф двусвязен тогда и только тогда, когда геометрически двойственный к нему граф двусвязен.

11.15. Все колеса самодвойственны.

11.16. Квадрат связного графа  $G$  внешнепланарен тогда и только тогда, когда  $G$  есть или  $K_3$  или простая цепь.

11.17. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) реберный граф  $L(G)$  внешнепланарен;
- (2) наибольшая степень  $\Delta(G)$  не превосходит 3 и любая вершина степени 3 есть точка сочленения;
- (3) тотальный граф  $T(G)$  плоский.

(Чартрэнд, Геллер, Хедетинем [2]; Бехзад [1])

11.18. Граф  $G$  имеет планарный квадрат тогда и только тогда, когда

- а)  $\Delta(G) \leq 3$ ;
- б) каждая вершина степени 3 является точкой сочленения;
- в) все блоки графа  $G$ , содержащие более 3 вершин, являются четными простыми циклами.

(Харари, Карп, Татт [1])

11.19. Граф  $G$  имеет планарный реберный граф тогда и только тогда, когда

- а)  $G$  планарен;
- б)  $\Delta(G) \leq 4$ ;
- в) каждая вершина степени 4 есть точка сочленения.

(Седлачек [1])

11.20. Найти род и число скрещиваний графа Петерсена.

11.21. Доказать или опровергнуть: непланарный граф  $G$  имеет  $v=1$  тогда и только тогда, когда для некоторого ребра  $x$  граф  $G-x$  планарен.

11.22. Древесность любого планарного графа не превосходит 3. Привести пример планарного графа с древесностью 3.

11.23. Каждый граф гомеоморфен графу, имеющему древесность 1 или 2 и потому толщину 1 или 2.

11.24. *Искаженностью* (skewness) графа  $G$  называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу. Найти искаженность графов

- а)  $K_p$ , б)  $K_{m,p}$ , в)  $Q_n$ .

(Кошиг)

11.25. Если  $G$  — внешнепланарный граф, не имеющий треугольников, то  $\varphi \leq (3p-4)/2$ .

11.26. Если у графа  $G$  для любых двух вершин существует не более двух соединяющих их простых цепей длины больше 1, не имеющих общих вершин, то

- а)  $G$  — планарный граф;  
 б)  $q \leq 2p-3$ ;  
 в) если  $G$  — неразделимый граф и  $p \geq 5$ , то он содержит единственный гамильтонов цикл.

(Танг [1])

11.27. Уложить куб  $Q_4$  на поверхности тора.11.28. Род  $\gamma$  любого графа  $G$  с обхватом  $g$  удовлетворяет неравенству

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2}{g} \right) q - (p-2) \right].$$

(Байнеке, Харари [2])

$$*11.29. \gamma(K_{n,n,n}) = \binom{n-1}{2}.$$

(Рингель)

11.30. Если  $G_1$  и  $G_2$  — гомеоморфные графы, то  $\xi(G_1) = \xi(G_2)$  и  $\nu(G_1) = \nu(G_2)$ .11.31. Наибольшее число непересекающихся по ребрам подграфов  $K_{3,3}$  графа  $K_{m,n}$  равно

$$\min \left( \left\lfloor \frac{m}{3} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor \right\rfloor \right).$$

Таким образом, для любого  $n$ 

$$\xi(K_{n,n}) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right\rfloor.$$

(Гай, Байнеке [2])

## РАСКРАСКИ

Представьте себе коричневого теленка, большого коричневого пса и художника, который рисует их... Он должен изобразить их так, чтобы вы, взглянув на картину, могли сразу отличить их друг от друга, не так ли? Конечно. Может, вы хотите, чтобы они оба были у него коричневыми? Конечно, нет. Тогда художник сделает одного из них голубым, и тут уж не ошибешься. То же самое с картами. Вот почему каждый штат закрашивают другим цветом...

*Сэмюэл Клеменс (Марк Твен)*

Гипотезу четырех красок можно с полным основанием назвать еще «болезнью четырех красок», так как она во многом похожа на заболевание. Она в высшей степени заразна. Иногда она протекает сравнительно легко, но в некоторых случаях приобретает затяжной или даже угрожающий характер. Никаких прививок против нее не существует; правда, люди с достаточно здоровым организмом после короткой вспышки приобретают пожизненный иммунитет. Этой болезнью человек может болеть несколько раз, и она подчас сопровождается острой болью, но ни одного летального исхода зарегистрировано не было. Известен по крайней мере один случай передачи болезни от отца к сыну, так что, может быть, она наследственна.

Тем не менее именно попытки обосновать эту гипотезу стимулировали получение ряда результатов по раскраске графов, которые в свою очередь привели к исследованиям некоторых других разделов теории графов.

В этой главе после определения раскраски графа и его хроматического числа излагается доказательство теоремы о пяти красках, а затем обсуждается гипотеза четырех красок. Далее вводятся однозначно раскрашиваемые графы, т. е. графы, которые можно раскрасить единственным образом, а также критические графы (минимальные относительно раскраски). Исследуется тесная взаимосвязь между гомоморфизмами и раскрасками. Глава завершается описанием свойств хроматического многочлена.

## Хроматическое число

Раскраской графа называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета. Множество всех вершин одного цвета является независимым и называется *одноцветным классом*. В  $n$ -раскраске графа  $G$  используется  $n$  цветов, и, таким образом, эта раскраска разбивает  $V$  на  $n$  одноцветных классов. Хроматическое число  $\chi(G)$  графа  $G$  определяется как наименьшее  $n$ , для которого граф  $G$  имеет  $n$ -раскраску. Граф  $G$  называется  $n$ -раскрашиваемым, если  $\chi(G) \leq n$ , и  $n$ -хроматическим, если  $\chi(G) = n$ .

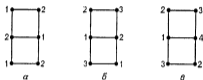


Рис. 12.1. Три раскраски графа.

Поскольку граф  $G$ , очевидно, имеет  $p$ -раскраску и  $\chi(G)$ -раскраску, он должен иметь также  $n$ -раскраску для любого  $n$ , удовлетворяющего неравенству  $\chi(G) < n < p$ . Граф на рис. 12.1 является 2-хроматическим. На этом же рисунке приведены  $n$ -раскраски для  $n=2, 3, 4$ ; положительные целые числа указывают цвета.

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов:  $\chi(K_p) = p$ ,  $\chi(K_p - x) = p - 1$ ,  $\chi(\bar{K}_p) = 1$ ,  $\chi(K_{m,n}) = 2$ ,  $\chi(C_{2n}) = 2$ ,  $\chi(C_{2n+1}) = 3$  и  $\chi(T) = 2$  для любого нетривиального дерева  $T$ .

Очевидно, что граф является 1-хроматическим тогда и только тогда, когда он вполне несвязен. Описание двуцветных (2-раскрашиваемых) графов дано Кёнигом [2, стр. 170] и отражено в теореме 12.1 (см. также теорему 2.4).

**Теорема 12.1.** *Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных простых циклов.*

Похоже, что проблема характеристики  $n$ -цветных графов для  $n \geq 3$  все еще не решена, поскольку такой критерий даже для  $n=3$  помог бы решить гипотезу четырех красок. Не найдены также эффективные методы определения хроматического числа произвольного графа. Однако известно несколько оценок для  $\chi(G)$ , в которых используются различные другие инварианты. Одна очевидная нижняя оценка — это число вершин в наибольшем полном подграфе графа  $G$ . Мы рассмотрим сейчас верхние оценки; первая такая оценка была получена Секерешем и Вилфом [1].

Теорема 12.2. Для любого графа  $G$

$$\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G'), \quad (12.1)$$

где максимум берется по всем порожденным подграфам  $G'$  графа  $G$ .

Доказательство. Утверждение очевидно для вполне несвязных графов. Пусть  $G$  — произвольный  $n$ -хроматический граф,  $n \geq 2$ , а  $H$  — любой наименьший порожденный подграф, для которого  $\chi(H) = n$ . Таким образом,  $\chi(H - v) = n - 1$  для всех вершин  $v$  графа  $H$ . Следовательно,  $\deg v \geq n - 1$ , так что  $\delta(H) \geq n - 1$ , и потому

$$n - 1 \leq \delta(H) \leq \max \delta(H') \leq \max \delta(G'),$$

где первый максимум берется по всем порожденным подграфам  $H'$  графа  $H$ , а второй — по всем порожденным подграфам  $G'$  графа  $G$ . Отсюда вытекает, что

$$\chi(G) = n \leq 1 + \max \delta(G').$$

Следствие 12.2 (а). Для любого графа  $G$  хроматическое число не больше чем на 1 превышает максимальную степень:

$$\chi \leq 1 + \Delta. \quad (12.2)$$

Брукс [1] показал, однако, что часто эту оценку можно улучшить.

Теорема 12.3. Если  $\Delta(G) = n$ , то граф  $G$  всегда  $n$ -раскрашиваем, за исключением следующих двух случаев:

- 1)  $n = 2$  и  $G$  имеет компоненту, являющуюся нечетным циклом;
- 2)  $n > 2$  и  $K_{n+1}$  — компонента графа  $G$ .

Нижняя оценка, приводимая в монографиях Бержа [2] и Ore [4], и верхняя оценка, данная в статье Харари и Хедетниemi [1], содержат вершинное число независимости  $\beta_0$  графа  $G$ .

Теорема 12.4. Для любого графа  $G$

$$p/\beta_0 \leq \chi \leq p - \beta_0 + 1. \quad (12.3)$$

Доказательство. Если  $\chi(G) = n$ , то множество  $V$  можно разбить на  $n$  одноцветных классов  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , каждый из которых, как отмечалось выше, является независимым множеством вершин. Если  $|V_i| = p_i$ , то  $p_i \leq \beta_0$  для всех  $i$ , так что  $p = \sum p_i \leq n\beta_0$ .

Для проверки верхней оценки рассмотрим максимальное независимое множество  $S$ , содержащее  $\beta_0$  вершин. Ясно, что  $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$ . Так как  $G - S$  имеет  $p - \beta_0$  вершин, то  $\chi(G - S) \leq p - \beta_0$ . Отсюда  $\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1 \leq p - \beta_0 + 1$ .

Представленные здесь оценки не так уж хороши в том смысле, что для каждой оценки и любого положительного целого числа  $n$

существует такой граф  $G$ , что  $\chi(G)$  отличается от оценки более чем на  $n$ .

Исследуя приведенные выше рассуждения, легко проникнуться верой в то, что все графы с большим хроматическим числом имеют большие клики и, следовательно, содержат треугольники. И вот Дирак [3] поставил вопрос, существует ли граф без треугольников, но с произвольно большим хроматическим числом. Положительно на этот вопрос ответили независимо друг от друга Бланш Декарт <sup>1)</sup> [1], Зыков [1] и Мыцельский [1]. Затем их результат обобщили Дж. и Л. Келли [1], доказав, что для любого  $n \geq 2$  существует  $n$ -хроматический граф, обхват которого превосходит 5. Они предположили, что справедливо следующее утверждение, которое первым доказал Эрдёш [1], используя вероятностные соображения. Позже Ловац [2] дал конструктивное доказательство этой теоремы.

**Теорема 12.5.** *Для любых двух положительных целых чисел  $m$  и  $n$  существует  $n$ -хроматический граф, обхват которого превосходит  $m$ .*

Величина  $\bar{\chi} = \bar{\chi}(G) = \chi(\bar{G})$  представляет собой наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить множество вершин графа  $G$  так, чтобы каждое подмножество порождало полный подграф графа  $\bar{G}$ . Ясно, что  $\bar{\chi}(G) \geq \beta_0(G)$ . Оценки для суммы и произведения хроматических чисел графа и его дополнения были получены Нордхаузом и Гаддумом [1].

**Теорема 12.6.** *Для любого графа  $G$  сумма и произведение чисел  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  удовлетворяют неравенствам*

$$2\sqrt{p} \leq \chi + \bar{\chi} \leq p + 1, \quad (12.4)$$

$$p \leq \chi\bar{\chi} \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2. \quad (12.5)$$

**Доказательство.** Пусть  $G$  будет  $n$ -хроматическим графом, а  $V_1, V_2, \dots, V_n$  его одноцветными классами,  $|V_i| = p_i$ . Тогда, разумеется,  $\sum p_i = p$  и  $\max p_i \geq p/n$ . Так как каждый класс  $V_i$  порождает полный подграф в  $\bar{G}$ , то  $\bar{\chi} \geq \max p_i \geq p/n$ , и поэтому  $\chi\bar{\chi} \geq p$ . Но поскольку среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, то  $\chi + \bar{\chi} \geq 2\sqrt{p}$ . Обе нижние оценки доказаны.

Неравенство  $\chi + \bar{\chi} \leq p + 1$  будем доказывать индукцией по  $p$ , заметив, что равенство достигается при  $p = 1$ . Итак, предположим, что  $\chi(G) + \bar{\chi}(G) \leq p$  для всех графов  $G$  с  $p - 1$  вершинами. Пусть  $H$  и  $\bar{H}$  — взаимодополнительные графы (граф и его дополнение) с  $p$

<sup>1)</sup> Дана с этим именем есть на самом деле непустое подмножество множества {Брукс, Смит, Стоун, Татт}; в данном случае {Татт}.

вершинами и  $v$  — вершина графа  $H$ . Тогда  $G=H-v$  и  $\bar{G}=\bar{H}-v$  будут взаимодополнительными графами с  $p-1$  вершинами. Пусть степень вершины  $v$  в  $H$  равна  $d$ , так что ее степень в  $\bar{H}$  равна  $p-d-1$ . Очевидно, что

$$\chi(H) \leq \chi(G) + 1 \text{ и } \bar{\chi}(H) \leq \bar{\chi}(G) + 1.$$

Если

$$\chi(H) < \chi(G) + 1 \text{ или } \bar{\chi}(H) < \bar{\chi}(G) + 1,$$

то  $\chi(H) + \bar{\chi}(H) \leq p + 1$ . Предположим теперь, что  $\chi(H) = \chi(G) + 1$  и  $\bar{\chi}(H) = \bar{\chi}(G) + 1$ . Тогда удаление вершины  $v$  из  $H$ , приводящее к образованию графа  $G$ , уменьшает хроматическое число, так что  $d \geq \chi(G)$ . Аналогично

$$p - d - 1 \geq \bar{\chi}(G).$$

Таким образом,  $\chi(G) + \bar{\chi}(G) \leq p - 1$ . Следовательно, всегда

$$\chi(H) + \bar{\chi}(H) \leq p + 1.$$

Наконец, используя неравенство  $4\chi\bar{\chi} \leq (\chi + \bar{\chi})^2$ , получаем

$$\chi\bar{\chi} \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

### Теорема о пяти красках

Хотя не известно, все ли планарные графы 4-раскрашиваемы, все они, несомненно, 5-раскрашиваемы. Мы приведем доказательство этого известного утверждения, принадлежащее Хивуду [1].

*Теорема 12.7. Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по числу  $p$  вершин. Для любого планарного графа с  $p \leq 5$  вершинами результат тривиален, поскольку такой граф  $p$ -раскрашиваем.

Допустим, что все планарные графы с  $p$  вершинами ( $p \geq 5$ ) 5-раскрашиваемы. Пусть  $G$  — плоский граф с  $p+1$  вершинами. В силу следствия 11.1 (д) в графе  $G$  найдется вершина  $v$  степени 5 или менее. По предположению индукции плоский граф  $G - v$  5-раскрашиваем.

Рассмотрим приписывание цветов вершинам графа  $G - v$ , при котором получается 5-раскраска; цвета будем обозначать через  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Ясно, что если некоторый цвет, скажем  $c_j$ , не используется в раскраске вершин, смежных с  $v$ , то, приписав цвет  $c_j$  вершине  $v$ , получим 5-раскраску графа  $G$ .

Осталось рассмотреть случай, когда  $\deg v = 5$  и для вершин графа  $G$ , смежных с  $v$ , используются все пять цветов. Переставим номера цветов, если это необходимо, так, чтобы вершины, смежные с

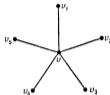


$v$  и окрашенные в цвета  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ , были циклически упорядочены относительно  $v$ . Пометим теперь вершину, смежную с  $v$  и окрашенную цветом  $c_i$ , буквой  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$  (рис. 12.2).

Обозначим через  $G_{12}$  подграф графа  $G - v$ , порожденный всеми вершинами, окрашенными в один из цветов  $c_1$  и  $c_2$ . Если вершины  $v_1$  и  $v_2$  принадлежат различным компонентам графа  $G_{12}$ , то 5-раскраску графа  $G - v$  можно получить, поменяв друг с другом ( $c_1$  на  $c_2$  и обратно) цвета вершин той компоненты графа  $G_{12}$ , которая содержит  $v_1$ . В этой 5-раскраске уже нет вершин, смежных с  $v$  и окрашенных в цвет  $c_1$ ; поэтому, окрасив  $v$  в цвет  $c_1$ , образуем 5-раскраску графа  $G$ .

Если же вершины  $v_1$  и  $v_2$  принадлежат одной и той же компоненте графа  $G_{12}$ , то в  $G$  между  $v_1$  и  $v_2$  существует простая цепь, все вершины которой окрашены в цвета  $c_1$  и  $c_2$ . Эта цепь вместе с цепью  $v_1v_2$  образует простой цикл, который обязательно окружает или вершину  $v_2$ , или вершины  $v_4$  и  $v_5$ . В любом из этих случаев  $v_2$  и  $v_4$  нельзя соединить простой цепью, все вершины которой окрашены в цвета  $c_2$  и  $c_4$ . Следовательно, рассматривая подграф  $G_{24}$  графа  $G - v$ , порожденный всеми вершинами, окрашенными в цвета  $c_2$  и  $c_4$ , заключаем, что вершины  $v_2$  и  $v_4$  принадлежат различным его компонентам. Таким образом, если поменять между собой цвета вершин в компоненте подграфа  $G_{24}$ , содержащей  $v_2$ , получим 5-раскраску графа  $G - v$ , и в ней ни одна из вершин, смежных с  $v$ , не будет окрашена в цвет  $c_2$ . Поэтому, окрасив вершину  $v$  в цвет  $c_2$ , образуем 5-раскраску всего графа  $G$ .

Рис. 12.2. Шаг в доказательстве теоремы о пяти красках.



### Гипотеза четырех красок

В гл. 1 уже упоминалось, что гипотеза четырех красок, благодаря попыткам решить ее, служила катализатором для теории графов. Мы здесь представим теоретико-графовое обсуждение этой бесславной проблемы. *Раскраской плоской карты  $G$*  называется такое приписывание цветов областям в  $G$ , что никакие две смежные области не получают одинакового цвета. Карта  $G$  называется  $n$ -раскрашиваемой, если существует ее раскраска, использующая  $n$  или менее цветов. Первоначальная формулировка гипотезы, упомянутой в гл. 1, выглядит так: каждая плоская карта 4-раскрашиваемая.

**Гипотеза четырех красок.** *Каждый планарный граф 4-раскрашиваем.*

Еще раз подчеркиваем, что под раскраской графа всегда понимается раскраска его вершин, в то время как раскраска карты озна-

чает, что раскрашиваются именно ее области. Таким образом, предположение, что каждая плоская карта 4-раскрашиваема, на самом деле эквивалентно приведенной только что формулировке гипотезы четырех красок. Чтобы убедиться в этом, предположим, что гипотеза четырех красок справедлива, и возьмем произвольную плоскую карту  $G$ . Пусть  $G^*$  — граф, являющийся основой карты, т. е. симметрически двойственной к карте  $G$ . Так как две области карты  $G$  смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины графа  $G^*$  смежны, то карта  $G$  4-раскрашиваема, поскольку граф  $G^*$  4-раскрашиваем.

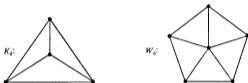


Рис. 12.3. Два 4-хроматических планарных графа.

Обратно, предположим, что каждая плоская карта 4-раскрашиваема. Пусть  $H$  — любой планарный граф, а  $H^*$  — граф, двойственный к графу  $H$  и нарисованный так, что каждая его область содержит точно одну вершину графа  $H$ . Связный плоский псевдограф  $H^*$  можно перевести в плоский граф  $H'$ , добавляя две новые вершины на каждую петлю графа  $H^*$  и одну новую вершину на каждое ребро из множества кратных ребер. Теперь 4-раскрашиваемость графа  $H'$  означает 4-раскрашиваемость графа  $H$ . Таким образом, эквивалентность обеих формулировок доказана.

Если будет доказана гипотеза четырех красок, то результат будет неулучшаем, поскольку легко привести примеры планарных 4-хроматических графов. Таковы графы  $K_4$  и  $W_6$ , изображенные на рис. 12.3. В каждом из этих графов не менее четырех треугольников, что является в силу теоремы Грюнбаума [1] необходимым условием 4-хроматичности.

**Теорема 12.8.** *Каждый планарный граф, имеющий меньше четырех треугольников, 3-раскрашиваем.*

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение, первоначально доказанное Грётшем [1].

**Следствие 12.8 (а).** *Каждый планарный граф, не содержащий треугольников, 3-раскрашиваем.*

Любая плоская карта, которая для своей раскраски потребует 5 красок, должна обязательно содержать много областей <sup>1)</sup>. Так,

<sup>1)</sup> Финк и Звкс [1] доказали, что любой плоский граф, содержащий не более 21 треугольника, 4-раскрашиваем.

Оре и Стемпл [1] показали, что все плоские карты, имеющие не более 39 областей, 4-раскрашиваемы, и тем самым увеличили на 4 число областей в более раннем результате такого типа<sup>1)</sup>. Все эти примеры подтверждают гипотезу четырех красок. Как мы сейчас увидим, эту гипотезу в ее формулировке для плоских карт можно попробовать доказывать для специального класса плоских карт.

**Теорема 12.9.** *Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда каждая кубическая плоская карта, не имеющая мостов, 4-раскрашиваема.*

**Доказательство.** Мы уже видели, что любая плоская карта 4-раскрашиваема тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза четырех красок. В свою очередь это эквивалентно предложению, что каждая плоская карта, не содержащая мостов, 4-раскрашиваема, так как элементарное стягивание с помощью отождествления висячих вершин моста не изменяет числа областей карты и не нарушает смежности любых ее областей.

Ясно, что если 4-раскрашиваема всякая плоская карта, не содержащая мостов, то и всякая кубическая плоская карта, не содержащая мостов, также 4-раскрашиваема. Чтобы проверить обратное, предположим, что  $G$  — плоская карта без мостов и что все кубические плоские карты без мостов 4-раскрашиваемы. Так как  $G$  не содержит мостов, то в ней нет висячих вершин. Если в  $G$  существует вершина  $v$  степени 2, инцидентная ребрам  $y$  и  $z$ , то произведем подразбиение ребер  $y$  и  $z$ , обозначая дополнительные вершины через  $u$  и  $w$  соответственно. Удалим теперь  $v$ , отождествляя вершину  $u$  с одной из вершин степени 2 в некоторой копии графа  $K_4 - x$ , а вершину  $w$  — с другой вершиной степени 2 в  $K_4 - x$ . Очевидно, что каждая из новых вершин имеет степень 3 (рис. 12.4). Если  $G$  содержит вершину  $v_0$  степени  $n \geq 4$ , инцидентную ребрам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , упорядоченным циклически относительно  $v_0$ , то, добавляя новую вершину  $v_i$ , подразобьем каждое ребро  $x_i$ . Затем удалим  $v_0$  и добавим новые ребра  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ . Опять каждая из дополнительных вершин имеет степень 3.

Обозначим полученную кубическую плоскую карту, которая, очевидно, не содержит мостов, через  $G'$ . Эта карта по предположению 4-раскрашиваема. Рассмотрим в карте  $G'$  произвольную вершину  $v$ , у которой  $\text{deg} v \neq 3$ . Если в  $G'$  отождествить между собой все добавленные при построении карты  $G'$  вершины, соответствующие вершине  $v$  (причем сделать это для всех вершин  $v$  карты  $G$ , степень которых отлична от 3), то получим карту  $G$ . Поэтому, имея некоторую 4-раскраску карты  $G'$  и осуществляя указанное выше стягивание карты  $G'$  в карту  $G$ , получаем  $m$ -раскраску карты  $G$ , где  $m \leq 4$ . Теорема доказана.

<sup>1)</sup> Результат Оре и Стемпла также был улучшен: Донец [1] довел число областей до 41.— *Прим. перев.*

Другую интересную эквивалентную форму гипотезы четырех красок предложил Уитни [7].

Теорема 12.10. *Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда любой гамильтонов планарный граф 4-раскрашиваем.*

Наряду с эквивалентами гипотезы четырех красок, в которых говорится о раскраске областей, существует также эквивалент, в котором рассматривается раскраска ребер<sup>1</sup>).

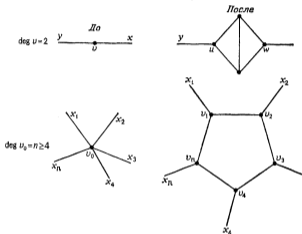


Рис. 12.4. Переход от графа к кубическому графу.

*Раскраской ребер* графа  $G$  называется такое приписывание цветов его ребрам, что никакие два смежных ребра не получают одинакового цвета. *Реберной  $n$ -раскраской* графа  $G$  называется раскраска его ребер, использующая точно  $n$  цветов. *Хроматическим классом*<sup>2</sup>)  $\chi'(G)$  называется такое наименьшее число  $n$ , что для графа  $G$  существует реберная  $n$ -раскраска. Очевидно, что для любого графа, не являющегося вполне несвязным,  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ . Нижнюю и верхнюю оценки хроматического класса, мало отличающиеся друг от друга, получил Визинг [1]<sup>3</sup>).

<sup>1</sup>) Наиболее полный обзор различных эквивалентных формулировок (а именно 13) проблемы четырех красок дал Саати [1]. — *Прим. перев.*

<sup>2</sup>) В отечественной литературе принят этот термин. Автор использует другое название — «реберно-хроматическое число», указывая, что иногда применяется термин «хроматический индекс». — *Прим. перев.*

<sup>3</sup>) Доказательство можно найти у Оре [6, стр. 248].

**Теорема 12.11.** *Для каждого графа  $G$  хроматический класс удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1. \quad (12.6)$$

На рис. 12.5 показаны два возможных значения  $\chi'(G)$ . В общем случае не известно, для каких графов  $\chi' = \Delta$ .

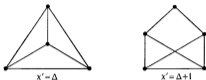


Рис. 12.5. Два значения хроматического класса.

**Теорема 12.12.** *Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда  $\chi'(G) = 3$  для любого кубического планарного графа  $G$ , не содержащего мостов.*

**Доказательство.** В теореме 12.9 уже доказана эквивалентность гипотезы четырех красок утверждению о том, что любая кубическая плоская карта без мостов 4-раскрашиваема. Мы покажем теперь, что любая кубическая плоская карта без мостов 4-раскрашиваема тогда и только тогда, когда  $\chi'(G) = 3$ .

Сначала предположим, что  $G$  — кубическая плоская карта без мостов, имеющая 4-раскраску. Без ограничения общности можно считать, что  $G$  — связная плоская карта. В качестве множества цветов выберем элементы четверной группы Клейна  $F$ , в которой сложение определяется по правилам  $k_i + k_i = k_0$  и  $k_1 + k_2 = k_3$ , где  $k_0$  — нулевой элемент группы  $F$ .

Пусть задана 4-раскраска карты  $G$ . Определим цвет ребра как сумму цветов двух различных областей, инцидентных этому ребру. Тогда ясно, что ребра раскрашиваются элементами множества  $\{k_1, k_2, k_3\}$  и что ни одной паре смежных ребер не приписывается один и тот же цвет. Следовательно,  $\chi'(G) = 3$ .

Обратно, пусть  $G$  — кубический плоский граф без мостов, у которого  $\chi'(G) = 3$ ; раскрасим его ребра с помощью трех ненулевых элементов группы  $F$ . Выберем некоторую область  $R_0$  и припишем ей цвет  $k_0$ . Цвет любой другой области  $R$  графа  $G$  определим следующим образом. Пусть  $C$  — произвольная кривая на плоскости, соединяющая некоторую внутреннюю точку области  $R_0$  с какой-нибудь внутренней точкой области  $R$  так, что  $C$  не проходит через вершины графа  $G$ . Цвет области  $R$  определяется как сумма цветов ребер, пересекающих кривую  $C$ . Определенные цвета области не зависят от выбора кривой  $C$ , так как сумма цветов ребер, пересекающих любую

простую замкнутую кривую, не проходящую через вершины графа  $G$ , равна  $k_0$ . Пусть  $S$  — такая кривая, а  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — цвета ребер, пересекающих  $S$ . Пусть также  $d_1, d_2, \dots, d_m$  — цвета ребер, находящихся внутри  $S$ . Заметим, что если обозначить через  $c(v)$  сумму цветов трех ребер, инцидентных вершине  $v$ , то  $c(v) = k_0$ . Следовательно, для всех вершин  $v$ , находящихся внутри  $S$ , выполняется равенство  $\sum_v c(v) = k_0$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_v c(v) &= c_1 + c_2 + \dots + c_n + 2(d_1 + d_2 + \dots + d_m) = \\ &= c_1 + c_2 + \dots + c_n, \end{aligned}$$

так как каждый элемент группы  $F$  является обратным самому себе. Таким образом,  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = k_0$ . Теперь уже несложно проверить, что определенная нами раскраска карты  $G$  действительно является 4-раскраской. Теорема доказана.

Поскольку каждый одноцветный класс ребер, определяемый реберной  $n$ -раскраской регулярного графа  $G$  степени  $n$ , является 1-фактором графа  $G$ , из теоремы 12.12 получаем еще одну эквивалентную форму гипотезы четырех красок.

*Следствие 12.12 (а). Гипотеза четырех красок справедлива тогда и только тогда, когда каждый кубический планарный граф, не содержащий мостов, 1-факторизуем.*

В терминах факторизации теорема 12.12 допускает обобщение (Оре [6, стр. 107])

*Теорема 12.13. Для того чтобы связная планарная карта  $G$  была 4-раскрашиваемая, необходимо и достаточно, чтобы граф  $G$  можно было представить в виде суммы таких трех подграфов  $G_1, G_2, G_3$ , что для любой вершины  $v$  числа ребер из каждого подграфа  $G_i$ , инцидентных  $v$ , были либо все четные, либо все нечетные.*

Существует несколько других гипотез о раскрасках, но именно гипотеза четырех красок получила наибольшую известность. Одну из наиболее интересных гипотез о раскрасках сформулировал Хадвигер [1]; в ней рассматриваются стягивания.

*Гипотеза Хадвигера. Каждый связный  $n$ -хроматический граф стягиваем к  $K_n$ .*

Неудивительно, что эта гипотеза связана с гипотезой четырех красок. Гипотеза Хадвигера верна для  $n \leq 4$ ; этот результат принадлежит Дираку [1]. Для  $n=5$  гипотеза Хадвигера утверждает, что каждый 5-хроматический граф  $G$  стягиваем к  $K_5$ . Но по теореме 11.14 любой такой граф  $G$  обязательно непланарен. Таким образом, из гипотезы Хадвигера для  $n=5$  следует гипотеза четырех красок. Обратное было установлено Вагнером [3].

**Теорема 12.14.** *Гипотеза Хадвигера для  $n=5$  эквивалентна гипотезе четырех красок.*

### Теорема Хивуда о раскраске карт

Пусть  $S_n$  — ориентируемая поверхность рода  $n$ ; значит,  $S_n$  топологически эквивалентна сфере с  $n$  ручками. Хроматическим числом поверхности  $S_n$  — обозначается  $\chi(S_n)$  — называется наибольшее хроматическое число среди хроматических чисел всех графов, которые можно уложить на  $S_n$ . Поверхность  $S_0$  является просто сферой, и с проблемой определения числа  $\chi(S_0)$  мы уже сталкивались. Гипотеза четырех красок утверждает, что  $\chi(S_0)=4$ , хотя известно, что (теорема 12.7)  $\chi(S_0)$  равно 4 или 5.

Хивуду [1] удалось доказать, что для тора  $\chi(S_1)=7$ . Неравенство  $\chi(S_1) \geq 7$  вытекает из возможности уложить  $K_7$  на торе. Эта укладка приведена на рис. 11.17. Равенство  $\chi(S_1)=7$  следует из утверждения, доказанного также Хивудом (см. доказательство теоремы 12.15). Его результат дает верхнюю оценку для хроматического числа ориентируемой поверхности положительного рода  $n$ :

$$\chi(S_n) \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil, \quad n > 0. \quad (12.7)$$

При  $n=1$  имеем  $\chi(S_1) \leq 7$ , так что  $\chi(S_1)=7$ .

Хивуд, обнаруживший ошибку в «доказательстве» Кемпе гипотезы четырех красок, сам оказался небезгрешным. Он считал, что доказал равенство в приведенной выше формуле, но уже через год Хеффтер III указал неточности в доказательстве Хивуда, так что осталось только неравенство (12.7). Сам Хеффтер доказал равенство для  $0 < n \leq 6$ . В итоге утверждение о том, что в формуле Хивуда выполняется равенство, стало называться гипотезой Хивуда о раскраске карт. Покажем, что из истинности формулы  $\gamma(K_p) = \lfloor (p-3)(p-4)/12 \rfloor$  (теорема 11.18) можно вывести (как это сделали Рингель и Янгс) справедливость гипотезы Хивуда.

**Теорема 12.15** (теорема Хивуда о раскраске карт). *Для любого положительного целого числа  $n$  хроматическое число ориентируемой поверхности рода  $n$  определяется формулой*

$$\chi(S_n) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil, \quad n > 0. \quad (12.8)$$

**Доказательство.** Сначала докажем неравенство (12.7). Пусть  $G$  будет  $(p, q)$ -графом, уложенным на  $S_n$ . Можно считать, что  $G$  — триангуляция, так как, добавляя ребра, любой граф можно дополнить до триангуляции того же рода, при этом  $\chi$  не уменьшится. Если  $\bar{d}$  — средняя степень вершин в  $G$ , то  $p, q$  и  $r$  (число областей)

удовлетворяют соотношениям

$$\bar{d}p = 2q = 3r. \quad (12.9)$$

Выражая  $q$  и  $r$  через  $p$  и используя формулу Эйлера (11.4), получаем

$$\bar{d} = \frac{12(n-1)}{p} + 6. \quad (12.10)$$

Так как  $\bar{d} \leq p-1$ , то

$$p-1 \geq \frac{12(n-1)}{p} + 6. \quad (12.11)$$

Решая относительно  $p$  и выбирая положительный корень, находим

$$p \geq \left[ \frac{7 + \sqrt{1+48n}}{2} \right]. \quad (12.12)$$

Обозначим через  $H(n)$  правую часть формулы (12.8). Нужно показать, что  $H(n)$  цветов достаточно для раскраски вершин графа  $G$ . Если  $p = H(n)$ , то, очевидно, цветов достаточно. Если же  $p > H(n)$ , то подставим  $H(n)$  вместо  $p$  в (12.10) и произведем алгебраические преобразования. Тогда

$$\bar{d} < \frac{12(n-1)}{H(n)} + 6 = H(n) - 1. \quad (12.13)$$

Таким образом, если  $p > H(n)$ , то существует вершина  $v$ , степень которой не превосходит  $H(n) - 2$ . отождествляя  $v$  и любую смежную с ней вершину (с помощью элементарного стягивания), получаем новый граф  $G'$ . Если  $p' = p - 1 = H(n)$ , то  $G'$  можно раскрасить  $H(n)$  цветами. Если  $p' > H(n)$ , указанный прием повторяем снова. В конце концов придем к  $H(n)$ -раскрашиваемому графу. Легко видеть, что раскраска этого графа порождает раскраску графа, полученного на предыдущем этапе,  $H(n)$  цветами, и т. д. Таким образом, сам граф  $G$  также  $H(n)$ -раскрашиваем.

Неравенство в обратную сторону доказать очень трудно. Для преодоления этой трудности Рингель и Янгс разработали специальные методы. Если полный граф  $K_p$  можно уложить на  $S_n$ , то в силу уравнения (11.9)

$$n \geq \gamma(K_p) = \left\{ \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\}. \quad (12.14)$$

Так как функция, заключенная в фигурные скобки, монотонно возрастает при  $p \geq 4$ , то для всякого  $n$  найдется наибольшее значение  $p$ , удовлетворяющее неравенству (12.14). Разрешая соотношение (12.14) относительно  $p$ , находим, что

$$p = \left[ \frac{7 + \sqrt{1+48n}}{2} \right]. \quad (12.15)$$



Поскольку  $\chi(K_p) = p$ , граф  $K_p$  будет иметь род  $n$  и хроматическое число  $H(n)$ . Это показывает, что  $H(n)$  — наилучшая нижняя оценка для  $\chi(S_n)$ . Доказательство закончено.

Заметим, что формула (12.8) при  $n=0$  приводит к гипотезе четырех красок.

### Однозначно раскрашиваемые графы

Пусть  $G$  — помеченный граф. Каждая его  $\chi(G)$ -раскраска порождает разбиение множества его вершин на  $\chi(G)$  одноцветных классов. Если  $\chi(G) = n$  и каждая  $n$ -раскраска графа  $G$  порождает одно и то же разбиение множества  $V$ , то  $G$  называется *однозначно  $n$ -раскрашиваемым*, или просто *однозначно раскрашиваемым*. Граф, представленный на рис. 12.6, однозначно 3-раскрашиваем, так как каждая его 3-раскраска дает разбиение  $\{u_1\}, \{u_2, u_4\}, \{u_3, u_5\}$ . Пятиугольник не однозначно 3-раскрашиваем: возможны пять различных разбиений множества его вершин.

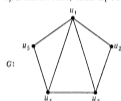


Рис. 12.6. Однозначно раскрашиваемый граф.

Начнем с элементарных замечаний, касающихся однозначно раскрашиваемых графов. Прежде всего, в любой  $n$ -раскраске однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа  $G$  каждая вершина  $v$  смежна по крайней мере с одной вершиной каждого цвета, отличного от цвета, приписанного  $v$ . Иначе можно было бы получить другую  $n$ -раскраску графа  $G$ , перекрасив вершину  $v$ . Отсюда следует, что  $\delta(G) \geq n-1$ . Необходимое условие однозначной раскрашиваемости графа найдено Картрайтом и Харари [2].

**Теорема 12.16.** *В  $n$ -раскраске однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа подграф, порожденный объединением любых двух одноцветных классов, связан.*

**Доказательство.** Рассмотрим  $n$ -раскраску однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа  $G$  и предположим, что существуют такие два одноцветных класса графа  $G$ , скажем  $C_1$  и  $C_2$ , что подграф  $S$ , порожденный объединением  $C_1 \cup C_2$ , не связан. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — две компоненты подграфа  $S$ . Из приведенных ранее замечаний следует, что каждая компонента  $S_i$  ( $i=1, 2$ ) должна содержать вершины как из  $C_1$ , так и из  $C_2$ . Теперь можно получить  $n$ -раскраску, отличную от данной, поменяв цвета вершин из множества  $C_2 \cap S_1$  с цветами вершин из множества  $C_2 \cap S_2$ . Отсюда следует, что  $G$  не является однозначно  $n$ -раскрашиваемым графом, что противоречит условию.

Утверждение, обратное теореме 12.16, не верно. В этом можно убедиться на примере 3-хроматического графа  $G$ , изображенного на рис. 12.7. В каждой 3-раскраске этого графа подграф, порожденный объединением любых двух одноцветных классов, связан; однако  $G$  не есть однозначно 3-раскрашиваемый граф.

Из теоремы 12.16 следует, что каждый однозначно  $n$ -раскрашиваемый граф ( $n \geq 2$ ) связан. Чартрэнд и Геллер [1] получили более сильный результат:

**Теорема 12.17.** *Каждый однозначно  $n$ -раскрашиваемый граф  $(n-1)$ -связен.*

**Доказательство.** Пусть дана  $n$ -раскраска однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа  $G$ . Если  $G$  — полный граф, то он обязательно  $K_n$  (т. е. содержит  $n$  вершин) и поэтому  $(n-1)$ -связен. Предположим, что  $G$  не полон и не  $(n-1)$ -связен. Тогда существует множество  $U$ , содержащее  $n-2$  вершины, удаление которых делает  $G$  несвязным. Имеется по крайней мере два различных цвета, скажем  $C_1$  и  $C_2$ , не приспанные ни одной вершине множества  $U$ . По теореме 12.16 вершина цвета  $C_1$  соединена с любой вершиной цвета  $C_2$  простой цепью, все вершины которой имеют цвета  $C_1$  или  $C_2$ . Следовательно, все вершины графа  $G$ , окрашенные в цвета  $C_1$  или  $C_2$ , принадлежат одной компоненте графа  $G - U$ , скажем  $G_1$ . Поэтому другую  $n$ -раскраску графа  $G$  можно получить, взяв любую вершину графа  $G - U$ , не принадлежащую  $G_1$ , и перекрасив ее или в цвет  $C_1$ , или в цвет  $C_2$ . А это противоречит тому, что  $G$  — однозначно  $n$ -раскрашиваемый граф. Таким образом, он  $(n-1)$ -связен.



Рис. 12.7. Контрпример к утверждению, обратному теореме 12.16.

Поскольку объединение любых  $k$  одноцветных классов однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа,  $2 \leq k \leq n$ , порождает однозначно  $k$ -раскрашиваемый граф, то из теоремы 12.17 вытекает

**Следствие 12.17 (а).** *В каждой  $n$ -раскраске однозначно  $n$ -раскрашиваемого графа подграф, порожденный объединением любых  $k$  одноцветных классов,  $2 \leq k \leq n$ ,  $(k-1)$ -связен.*

Легко привести примеры 3-хроматических графов, не содержащих треугольников. Действительно, в теореме 12.5 говорится, что для любого  $n$  существуют  $n$ -хроматические графы, не содержащие треугольников и, следовательно, не имеющие подграфов, изоморфных  $K_3$ . Харари, Хедетниemi и Робинсон [1] получили более сильный результат:

**Теорема 12.18.** *Для каждого  $n \geq 3$  существует однозначно  $n$ -раскрашиваемый граф, не содержащий подграфов, изоморфных  $K_n$ .*

Граф  $G$ , приведенный на рис. 12.8, иллюстрирует теорему для случая  $n=3$ .

Естественно, граф однозначно 1-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он 1-раскрашиваем, т. е. вполне несвязен. Хорошо известно, что граф  $G$  однозначно 2-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он 2-хроматический и связный. Как и можно было ожидать, об однозначно  $n$ -раскрашиваемых графах,  $n \geq 3$ , известно мало. Для планарных графов сведений больше, но в силу теоремы о пяти красках достаточно рассматривать только значения  $3 \leq n \leq 5$ . Результаты в этом направлении принадлежат Чартрэнду и Геллеру [1].

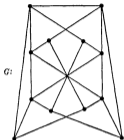


Рис. 12.8. Однозначно 3-раскрашиваемый граф, не являющийся треугольником.

**Теорема 12.19.** Пусть  $G$  есть 3-хроматический плоский граф. Если  $G$  содержит такой треугольник  $T$ , что для любой вершины  $v$  графа  $G$  существует последовательность  $T, T_1, T_2, \dots, T_m$  треугольников, в которой соседние два имеют общее ребро и  $v \in T_m$ , то  $G$  — однозначно 3-раскрашиваемый граф.

Из этой теоремы немедленно вытекает

**Следствие 12.19 (а).** Если двусвязный 3-хроматический плоский граф  $G$  имеет не более одной области, не являющейся треугольником, то  $G$  — однозначно 3-раскрашиваемый граф.

Предложение, обратное следствию 12.19 (а), не верно: однозначно 3-раскрашиваемый планарный граф может иметь более одной области, не являющейся треугольником (рис. 12.9). Однако каждый однозначно 3-раскрашиваемый планарный граф должен содержать треугольники.

**Теорема 12.20.** Однозначно 3-раскрашиваемый планарный граф, имеющий не менее 4 вершин, содержит по крайней мере два треугольника.

В случае однозначно 4-раскрашиваемых планарных графов ситуация особенно проста.

**Теорема 12.21.** Каждый однозначно 4-раскрашиваемый планарный граф является максимальным планарным графом.

**Доказательство.** Пусть задана 4-раскраска однозначно 4-раскрашиваемого планарного графа  $G$ ; обозначим его одноцветные

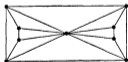


Рис. 12.9. Однозначно 3-раскрашиваемый планарный граф.

классы через  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $|V_i| = p_i$ . Так как подграф, порожденный объединением  $V_i \cup V_j$ ,  $i \neq j$ , связан, то в  $G$  должно быть по крайней мере  $\sum (p_i + p_j - 1)$  ребер,  $1 \leq i < j \leq 4$ . Однако очевидно, что эта сумма равна  $3p - 6$ . Поэтому  $q \geq 3p - 6$ , и в силу следствия 11.1 (в)  $G$  — максимальный планарный граф.

Хотя вопрос существования 5-раскрашиваемых планарных графов остается все еще открытым, результат Хедетниemi, приведенный в работе Чартрэнда и Геллера [11], разрешает проблему однозначно 5-раскрашиваемости. Доказательство похоже на доказательство теоремы 12.21.

**Теорема 12.22.** Ни один из планарных графов не является однозначно 5-раскрашиваемым.

### Критические графы

Если гипотеза четырех красок не верна, то должен существовать наименьший 5-хроматический планарный граф. Такой граф  $G$  обладал бы тем свойством, что для любой его вершины  $v$  подграф  $G - v$  был бы 4-хроматическим. Таким образом, у нас есть естественный подход к возможному доказательству гипотезы четырех красок в ее обратной постановке. Отсюда возникает основная задача изучения таких 5-хроматических графов или, более общо,  $n$ -хроматических графов  $G$ , что  $\chi(G - v) = n - 1$  для любой вершины  $v$  графа  $G$ .

Следуя Диразу [11], граф  $G$  назовем *критическим*<sup>1)</sup>, если  $\chi(G - v) < \chi(G)$  для любой его вершины  $v$ ; если при этом  $\chi(G) = n$ , то граф  $G$  называется  $n$ -критическим. Очевидно, если  $G$  — критический граф, то  $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$  для каждой его вершины  $v$ .

Ясно, что 1-критических графов нет. Единственный 2-критический граф — это  $K_2$ , все 3-критические графы исчерпываются простыми циклами нечетной длины.  $n$ -критические графы для  $n \geq 4$  еще не описаны.

Как правило, определить, является ли данный граф критическим, чрезвычайно трудно. Однако каждый  $n$ -хроматический граф,  $n \geq 2$ , содержит  $n$ -критический подграф. Действительно, если  $H$  — такой наименьший порожденный подграф графа  $G$ , что  $\chi(H) = \chi(G)$ , то  $H$  — критический граф.

Ясно, что каждый критический граф  $G$  связан. Далее, поскольку  $\chi(G) = \max \chi(B)$ , где максимум берется по всем блокам  $B$  графа  $G$ , то  $G$  должен быть блоком. Это одно из свойств, которыми обладают критические графы.

Следующее утверждение уже встречалось при доказательстве теоремы 12.2.

<sup>1)</sup> Если рассматриваются также и другие типы критических графов, то граф, критический в указанном смысле, будем называть *критическим по раскраске*.

Теорема 12.23. Если  $G$  есть  $n$ -критический граф, то  $\delta(G) \geq n-1$ .

Приведем теперь результаты, связанные с удалением вершин.

Теорема 12.24. Критический граф нельзя разделить полным подграфом.

Следствие 12.24 (а). Каждый разрез по вершинам критического графа содержит две несмежные вершины.

Каждый полный граф критический. Действительно, для  $U \subset V(K_p)$  справедливо равенство  $\chi(K_p - U) = p - |U|$ . Для любого другого критического графа всегда, однако, можно удалить не менее 2 вершин, не уменьшая при этом хроматическое число более чем на 1. В самом деле, если  $S$  — произвольное независимое множество вершин  $n$ -критического графа, то  $\chi(G - S) = n - 1$ . Отсюда в свою очередь вытекает, что если  $u$  и  $v$  — любые две вершины  $n$ -критического неполного графа  $G$ , то существуют такая его  $n$ -раскраска, что  $u$  и  $v$  принадлежат одному и тому же одноцветному классу, и такая его  $n$ -раскраска, что  $u$  и  $v$  принадлежат разным одноцветным классам.

В одном из направлений исследований свойства критических графов связывают с длинами циклов, в частности, окружения и обхвата. Если  $G$  есть  $n$ -критический граф с  $p$ -вершинами и  $p \leq 2n - 1$ , то в силу теоремы 12.23 и следствия 7.3 (б) граф  $G$  гамильтонов. Дирак [2] получил более общий результат.

Теорема 12.25. Если  $G$  есть  $n$ -критический граф,  $n \geq 3$ , то или  $G$  гамильтонов, или его окружение не меньше  $2n - 2$ .

Дирак [2] предполагал, что каждый 4-критический граф гамильтонов. Однако Дж. и Л. Келли [1] показали, что эта гипотеза не

верна. Дирак [2] также предполагал, что для любых  $m$  и  $n$ ,  $n \geq 3$ , существует достаточно большое значение  $p$ , при котором у всех  $n$ -критических графов, имеющих по крайней мере  $p$  вершин, окружение превосходит  $m$ . Дж. и Л. Келли подтвердили это. Из теоремы 12.5 вытекает, что для любых  $m$  и  $n$  существует

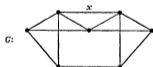


Рис. 12.10. Критический граф, не являющийся реберно-критическим.

существует  $n$ -критический граф, обхват которого превосходит  $m$ .

Критический граф  $G$  может обладать еще одним свойством:  $\chi(G - x) = \chi(G) - 1$  для любого ребра  $x$  графа  $G$ . В этом случае граф  $G$  называется *реберно-критическим*; если  $\chi(G) = n$ , то  $G$  называется  *$n$ -реберно-критическим*. Хотя каждый реберно-критический граф обязательно является критическим, обратное не верно. Например,

граф  $G$ , представленный на рис. 12.10, является 4-критическим, но не реберно-критическим, поскольку  $\chi(G-x)=4$ .

Таким образом, реберно-критические графы обладают всеми свойствами критических графов, но в некоторых случаях о первых графах можно сказать больше, чем о вторых.

**Теорема 12.26.** *Если  $G$  — связный  $n$ -хроматический граф, содержащий точно одну вершину степени больше  $n-1$ , то  $G$  является  $n$ -реберно-критическим.*

**Доказательство.** Пусть  $x$  — произвольное ребро графа  $G$ ; рассмотрим граф  $G-x$ . Ясно, что  $\delta(G-x) \leq n-2$  и, более того,  $\delta(G') \leq n-2$  для любого порожденного подграфа  $G'$  графа  $G-x$ . Поэтому в силу теоремы 12.2  $\chi(G-x) \leq n-1$ , откуда  $\chi(G-x) = n-1$ , т. е.  $G$  — это  $n$ -реберно-критический граф.

В силу теоремы 12.23, если  $G$  есть  $n$ -критический граф, то  $2q \geq (n-1)p$ . Для реберно-критических графов Дирак [3] улучшил это соотношение:

**Теорема 12.27.** *Если  $G$  — неполный  $n$ -реберно-критический граф,  $n \geq 4$ , то*

$$2q \geq (n-1)p + n - 3.$$

## Гомоморфизмы

В этом разделе мы для удобства будем рассматривать только связные графы. *Элементарным гомоморфизмом графа  $G$*  называется отождествление двух его несмежных вершин. *Гомоморфизм графа  $G$*  — это последовательность его элементарных гомоморфизмов.



Рис. 12.11. Гомоморфные образы простой цепи  $P_4$ .

Пусть  $G'$  — граф, который получается из графа  $G$  при гомоморфизме  $\varphi$ . Тогда  $\varphi$  можно рассматривать как функцию, отображающую  $V$  на  $V'$  и такую, что если  $u$  и  $v$  смежны в  $G$ , то  $\varphi u$  и  $\varphi v$  смежны в  $G'$ . Заметим, что каждое ребро графа  $G'$  должно получаться из некоторого ребра графа  $G$ , т. е. если  $u'$  и  $v'$  смежны в  $G'$ , то в  $G$  найдутся такие вершины  $u$  и  $v$ , что  $\varphi u = u'$  и  $\varphi v = v'$ . Будем говорить, что  $\varphi$  — *гомоморфизм графа  $G$  на граф  $G'$* , а граф  $G'$  — *гомоморфный образ графа  $G$* , и писать  $G' = \varphi G$ . Так, в частности, каждый изоморфизм является гомоморфизмом. Простая цепь  $P_4$  имеет четыре гомоморфных образа, которые изображены на рис. 12.11.

Гомоморфизм  $\varphi$  графа  $G$  называется *полным порядка  $n$* , если  $\varphi G = K_n$ . Отметим, что каждый гомоморфизм  $\varphi$  графа  $G$  на полный граф

$K_n$  соответствует  $n$ -раскраске графа  $G$ , поскольку вершины графа  $K_n$  можно рассматривать как цвета и по определению гомоморфизма ни одна пара вершин графа  $G$  с одинаковым цветом не смежна. Любая раскраска, определенная полным гомоморфизмом, обладает тем свойством, что для любых двух цветов в графе  $G$  найдутся смежные вершины  $u$  и  $v$ , окрашенные в эти цвета. В данном случае мы получаем *полную раскраску*. На рис. 12.12 показан граф с полными раскрасками порядков 3 и 4; цвета указаны здесь положительными целыми числами. Очевидно, что наименьший порядок всех полных гомоморфизмов графа  $G$  должен быть равным  $\chi(G)$ .



Рис. 12.12. Две полные раскраски графа.

Теорема 12.28 (Харари, Хедетниemi, Принс [1]) обобщает более ранний результат Хайоша [2], который будет приведен как ее следствие.

**Теорема 12.28.** Для любого графа  $G$  и любого его элементарного гомоморфизма  $\varepsilon$

$$\chi(G) \leq \chi(\varepsilon G) \leq 1 + \chi(G). \quad (12.16)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon$  — элементарный гомоморфизм графа  $G$ , отождествляющий несмежные вершины  $u$  и  $v$ . Тогда любая раскраска графа  $\varepsilon G$  порождает раскраску графа  $G$ , если  $u$  и  $v$  окрашены в один и тот же цвет; поэтому  $\chi(G) \leq \chi(\varepsilon G)$ . С другой стороны, раскраска графа  $\varepsilon G$  получается из раскраски графа  $G$ , когда новой вершине приписывается цвет, отличный от всех цветов, используемых в раскраске  $G$ , так что  $\chi(\varepsilon G) \leq 1 + \chi(G)$ .

**Следствие 12.28 (а).** Для любого гомоморфизма  $\varphi$  графа  $G$

$$\chi(G) \leq \chi(\varphi G).$$

Естественно теперь рассмотреть наибольший порядок всех полных гомоморфизмов графа  $G$ . Этот инвариант называется *хроматическим числом* и обозначается  $\psi(G)$ . Поскольку  $G$  можно раскрасить  $p$  цветами, очевидно, что  $\chi(G) \leq \psi(G) \leq p$ . Ни одно из этих неравенств не дает хорошей оценки для  $\psi$ .

Теорема 12.29. Для любого графа  $G$  и любого его элементарного гомоморфизма  $\varepsilon$

$$\psi(G) - 2 \leq \psi(\varepsilon G) \leq \psi(G). \quad (12.17)$$

Пример на рис. 12.13 показывает, что нижняя оценка достигается и, следовательно, она неулучшаема. Легко проверить, что  $\psi(G) = 5$ , в то время как  $\psi(\varepsilon G) = 3$ .



Рис. 12.13. Гомоморфизм, уменьшающий  $\psi$  на 2.

Теорема 12.30, названная в работе Харари, Хедетнiems и Принса [1] теоремой об интерполяции гомоморфизмов, сильно зависит от оценок (12.16).

Теорема 12.30. Для любого графа  $G$  и любого целого числа  $n$ , заключенного между  $\chi(G)$  и  $\psi(G)$ , существует полный гомоморфизм ( $u$ , следовательно, полная раскраска) порядка  $n$ .

Доказательство. Пусть  $\psi(G) = t$  и  $\varphi$  — гомоморфизм графа  $G$  на  $K_t$ . Если  $\varphi$  — изоморфизм, то  $G$  есть  $K_t$  и  $\chi(G) = \psi(G)$ . Если же  $\varphi$  не является изоморфизмом, то  $\varphi = \varepsilon_m \dots \varepsilon_2 \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_i$  для всех  $i$  есть элементарный гомоморфизм. Положим  $G_1 = \varepsilon_1 G$ ,  $G_2 = \varepsilon_2 G_1$ , ...,  $K_t = G_m = \varepsilon_m G_{m-1}$ . Из (12.16) имеем  $\chi(G_{i+1}) \leq \chi(G_i) + 1$  для любого  $i$ . Так как  $\chi(G_m) = \psi(G)$ , то для любого числа  $n$ , удовлетворяющего неравенству  $\chi(G) \leq n \leq t = \psi(G)$ , в последовательности  $\{G_i\}$  найдется граф, скажем  $G_s$ , с хроматическим числом  $n$ . Но тогда  $G_s$  имеет полный гомоморфизм  $\varphi'$  порядка  $n$ . Итак,  $\varphi' \varepsilon_s \dots \varepsilon_2 \varepsilon_1$  — гомоморфизм графа  $G$  на  $K_n$ .

Многие верхние оценки для  $\chi(G)$  служат также оценками для  $\psi(G)$ . В качестве примера распространим на  $\psi(G)$  (Харари и Хедетнiems [1]) верхние оценки из (12.3) и (12.4).

Теорема 12.31. Для любого графа  $G$

$$\psi + \bar{\chi} \leq p + 1. \quad (12.18)$$

Отсюда и из неравенства  $\bar{\chi} \geq \beta_e$  вытекает

Следствие 12.31 (а). Для любого графа  $G$

$$\psi \leq p - \beta_n + 1. \quad (12.19)$$

Неравенство (12.19) можно доказать непосредственно, используя доказательство более тонкого соотношения (12.3).



### Хроматический многочлен

Хроматический многочлен графа введен Биркгофом и Льюнсом III, когда они предпринимали попытки решить гипотезу четырех красок. Пусть  $G$  — помеченный граф. Раскраской графа  $G$   $t$  цветами называется раскраска графа  $G$ , использующая  $t$  или меньше цветов. Две раскраски графа  $G$   $t$  цветами будем считать различными, если по крайней мере одной помеченной вершине приписываются различные цвета.

Обозначим через  $f(G, t)$  число различных раскрасок помеченного графа  $G$   $t$  цветами. Если  $t < \chi(G)$ , то, естественно,  $f(G, t) = 0$ . Наименьшее из чисел  $t$ , для которых  $f(G, t) > 0$ , есть, очевидно, хроматическое число графа  $G$ . Следовательно, в гипотезе четырех красок утверждается, что  $f(G, 4) > 0$  для каждого планарного графа  $G$ .

Например, любую данную вершину полного графа  $K_n$  можно окрасить  $t$  способами. Для второй вершины можно взять любой из  $t-1$  цветов, и, наконец, третья вершина окрашивается  $t-2$  способами. В результате

$$f(K_n, t) = t(t-1)(t-2).$$

Эту формулу можно обобщить на любой полный граф<sup>1)</sup>:

$$f(K_p, t) = t(t-1)(t-2) \dots (t-p+1) = (t)_p. \quad (12.20)$$

Особенно легко найти соответствующий многочлен для вполне несвязного графа  $\bar{K}_p$ , так как каждую из его  $p$  вершин можно окрасить независимо  $t$  способами:

$$f(\bar{K}_p, t) = t^p. \quad (12.21)$$

Центральную вершину  $v_0$  графа  $K_{1,4}$ , показанного на рис. 12.14, можно окрасить  $t$  способами, а любую из остальных вершин  $t-1$  способами. Поэтому

$$f(K_{1,4}, t) = t(t-1)^4.$$

Рис. 12.14. Помеченная копия графа  $K_{1,4}$ .

Во всех приведенных примерах  $f(G, t)$  есть многочлен от переменной  $t$ . Это всегда так, в чем мы сейчас убедимся.

**Теорема 12.32.** Если  $u$  и  $v$  — несмежные вершины графа  $G$ , а  $\varepsilon$  — элементарный гомоморфизм, отождествляющий их, то

$$f(G, t) = f(G + uv, t) + f(\varepsilon G, t). \quad (12.22)$$

**Доказательство.** Это равенство следует непосредственно из двух замечаний. Первое — число способов раскраски графа  $G$   $t$

<sup>1)</sup> Автор, следуя Рюрдану [2] и указывая на это, использует для убывающих факториалов (точнее, убывающих  $p$ -факториалов от  $t$ ) обозначение  $t_{(p)}$ . В русском переводе книги Рюрдана [2, стр. 11 и 18] вместо  $t_{(p)}$  употребляется обозначение  $(t)_p$ . — Прим. ред.

цветами, когда вершины  $u$  и  $v$  окрашиваются в разные цвета, равно числу способов раскраски графа  $G+uv$   $t$  цветами. Второе — число способов раскраски графа  $G$   $t$  цветами, когда вершины  $u$  и  $v$  окрашиваются в один цвет, равно числу способов раскраски гомоморфного образа  $eG$   $t$  цветами, где  $e$  отождествляет  $u$  и  $v$ .

Из этой теоремы вытекает, что если  $G$  — неполный  $(p, q)$ -граф, то существуют такой граф  $G_1$  с  $q+1$  ребрами и такой граф  $G_2$  с  $p-1$  вершинами, что  $f(G, t) = f(G_1, t) + f(G_2, t)$ . Соотношение (12.22) можно применить к  $G_1$  и  $G_2$  и т. д. до тех пор, пока не получатся только полные графы. Следовательно,  $f(G, t)$  можно представить в виде суммы чисел  $f(K_p, t)$ . Но  $f(K_p, t) = (t)_p$  является многочленом относительно  $t$ .

Следствие 12.32 (а).  $f(G, t)$  — многочлен от переменной  $t$  для любого графа  $G$ .

Назовем  $f(G, t)$  хроматическим многочленом графа  $G$ . Для иллюстрации теоремы воспользуемся приемом, предложенным Зыковым [1]. В соответствии с этим приемом хроматический многочлен графа,

$$\begin{aligned}
 f(G, t) &= \begin{array}{c} \text{Граф } G \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} - \begin{array}{c} \text{Граф } G_1 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} + \begin{array}{c} \text{Граф } G_2 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{Граф } G_3 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Граф } K_4 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} + \begin{array}{c} \text{Граф } K_3 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{Граф } G_4 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Граф } K_4 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} + \begin{array}{c} \text{Граф } K_3 \\ \text{с вершинами } u, v \end{array} \\
 &= f(K_5, t) + 3f(K_4, t) + f(K_3, t)
 \end{aligned}$$

Рис. 12.15. Определение хроматического многочлена.

зависящий от  $t$ , обозначается с помощью диаграммы графа. На каждом шаге этого процесса выбираем две несмежные вершины  $u, v$  и далее представляем граф так, как это делает Рит [4].

Так, для графа  $G$ , показанного на рис. 12.15, получаем многочлен

$$f(G, t) = (t)_5 + 3(t)_4 + (t)_3 = t^5 - 7t^4 + 18t^3 - 20t^2 + 8t.$$

В частности, граф  $G$  можно раскрасить тремя цветами  $f(G, 3) = 6$  способами.

Перечислим некоторые свойства хроматических многочленов, вытекающие непосредственно из теоремы 12.32.

**Теорема 12.33.** Пусть  $G$  — граф с  $p$  вершинами,  $q$  ребрами и  $k$  компонентами  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Тогда

- 1)  $f(G, t)$  имеет степень  $p$ ;
- 2) коэффициент при  $t^p$  в  $f(G, t)$  равен 1;
- 3) коэффициент при  $t^{p-1}$  в  $f(G, t)$  равен  $-q$ ;
- 4) свободный член многочлена  $f(G, t)$  равен 0;
- 5)  $f(G, t) = \prod_{i=1}^k f(G_i, t)$ ;
- 6) наименьший показатель у степеней переменной  $t$ , входящих в  $f(G, t)$  с ненулевыми коэффициентами, есть  $k$ .

Совсем не очевиден следующий результат, полученный Уитни [11] и обобщенный Рота [11], использовавшим свои мощные методы, в которых привлекается обратное преобразование Мёбиуса.

**Теорема 12.34.** Коэффициенты любого хроматического многочлена меняются по знаку<sup>1)</sup>.

Ясно, что каждые два изоморфных графа имеют один и тот же хроматический многочлен. Однако часто несколько неизоморфных графов также имеют один и тот же хроматический многочлен. Например, у всех деревьев с  $p$  вершинами один хроматический многочлен.

**Теорема 12.35.** Граф  $G$  с  $p$  вершинами является деревом тогда и только тогда, когда

$$f(G, t) = t(t-1)^{p-1}.$$

**Доказательство.** Сначала покажем, что хроматический многочлен любого помеченного дерева  $T$  с  $p$  вершинами есть  $t(t-1)^{p-1}$ . Проведем доказательство индукцией по числу  $p$ . Для  $p=1$  и  $p=2$  результат очевиден. Предположим, что хроматический многочлен всех деревьев с  $p-1$  вершинами имеет вид  $t(t-1)^{p-2}$ . Пусть  $v$  — всякая вершина дерева  $T$ , а  $x=uv$  — его ребро, инцидентное  $v$ . По предположению индукции хроматический многочлен дерева  $T' = T - v$  есть  $t(t-1)^{p-2}$ . Вершине  $v$  можно приписать любой цвет,

<sup>1)</sup> Точнее, если  $f(G, t) = a_s t^s + a_{s-1} t^{s-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t$ , то последовательность коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, a_s = 1$  — знакопередающаяся. — Прим. ред.

отличный от цвета вершины  $u$ , так что  $v$  можно окрасить  $t-1$  способами. Таким образом,

$$f(T, t) = (t-1) f(T', t) = t(t-1)^{p-1}.$$

Обратно, пусть  $G$  — граф, у которого  $f(G, t) = t(t-1)^{p-1}$ . Так как коэффициент при  $t$  в  $f(G, t)$  ненулевой, то по теореме 12.33 (утверждение б) граф  $G$  связан. Далее, коэффициент при  $t^{p-1}$  равен  $-(p-1)$ , так что по теореме 12.33 (утверждение 3), граф  $G$  имеет  $p-1$  ребер. Используя теперь теорему 4.1, заключаем, что  $G$  — дерево.

Остается нерешенной задача описания графов, имеющих один и тот же хроматический многочлен. Более общая нерешенная задача состоит в нахождении необходимого и достаточного условия для того, чтобы многочлен был хроматическим. Например, многочлен  $t^4 - 3t^3 + 3t^2$  обладает всеми известными свойствами хроматического многочлена, но не является хроматическим. Если бы существовал граф  $G$  с таким хроматическим многочленом, то он должен был бы иметь 4 вершины, 3 ребра и 2 компоненты, так что  $G = K_3 \cup K_1$ . Однако хроматический многочлен последнего графа равен

$$f(G, t) = (t)_3 \cdot t = t^4 - 3t^3 + 2t^2.$$

Рид [4] предположил, что абсолютные значения коэффициентов любого хроматического многочлена сначала строго возрастают, затем строго убывают и, наконец, не меняются.

## Упражнения

12.1. Рассмотрим соединение двух графов:

а)  $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ .

б)  $G_1$  и  $G_2$  — критические графы тогда и только тогда, когда их соединение  $G_1 + G_2$  является критическим графом.

12.2. Если длина длиннейшего нечетного простого цикла в графе  $G$  равна  $n$ ,  $n \geq 3$ , то  $\chi(G) \leq n+1$ .

(Эрдёш, Хайнал [1])

12.3. Если вершины графа  $G$  перенумерованы  $v_1, v_2, \dots, v_p$  так, что  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ , то  $\chi(G) \leq \max_i \min \{i, d_i + 1\}$ .

(Уэлш, Пауэлл [1])

12.4. Если гамильтонову циклу графа принадлежат не все его ребра, то  $\chi \leq 1 + p/2$ .

12.5. Хроматическое число конъюнкции  $G_1 \wedge G_2$  двух графов  $G_1$  и  $G_2$  не превосходит хроматических чисел этих графов.

(Хедетниemi)

12.6. Граф  $K_{n+1}$  является единственным регулярным  $(n-1)$ -хроматическим графом степени  $n \geq 3$ .

12.7. Верхние оценки в (12.4) и (12.5) достигаются на следующих графах:

а)  $\chi = \chi = p-1$  только для  $K_p$ ,  $\bar{K}_p$  и  $C_3$ ;

б)  $\chi = \lfloor (p-1)/2 \rfloor$  только для  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\bar{K}_2$  и  $C_3$ .

(Финк [1])

12.8. а) Если  $p = p(G)$  — простое число, то  $\chi(G) = p$  только для  $K_p$  и  $\bar{K}_p$ .

б)  $\chi^2 + \bar{\chi}^2 = p^2 + 1$  тогда и только тогда, когда  $G = K_p$  или  $\bar{K}_p$ ; в противном случае  $\chi^2 + \bar{\chi}^2 \leq (p-1)^2 + 4$ .

(Финк [1])

12.9. Каждая внешнеплоская карта 3-раскрашиваема.

12.10. Каждая 4-связная плоская карта 4-раскрашиваема.

12.11. В любой раскраске реберного графа каждая вершина смежна не более чем с двумя вершинами одного и того же цвета.

12.12. Рассмотрим связный граф  $G$ , не являющийся простым циклом нечетной длины. Если все его простые циклы имеют одинаковую четность, то  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . (Бонди, Уэлш)

12.13. Найти хроматические классы графов  $K_p$  и  $K_{m,n}$ . (Бехзад, Чартрэнд, Купер [1])

12.14. Для графа  $H$ , полученного из графа  $G$ , если положить  $V(H) = X(G)$  и считать две его вершины смежными, если они обе не принадлежат одному полному подграфу графа  $G$ ,  $\chi(H)$  есть наименьшее число полных подграфов, объединение которых равно  $V \cup X$ .

(Гавел [1])

12.15. Для любого графа, допускающего укладку на торе,  $\delta \leq 6$ , и потому  $\chi \leq 7$ .

12.16. Существует 5-критический граф с 9 вершинами.

12.17. Каков наименьший отличный от полного однозначно 3-раскрашиваемый граф?

12.18. Каково наименьшее число ребер в однозначно  $n$ -раскрашиваемом графе с  $p$  вершинами?

(Картрайт, Харари [2])

12.19. Хроматическое число графа  $G$  не менее  $\bar{\beta}_0 = \beta_0(\bar{G})$ . Для любого нечетного простого цикла  $C_{2m+1}$  ( $m \geq 2$ )  $\bar{\beta}_0 = 2$  и  $\chi = 3$ . Построить граф, не имеющий треугольников, с  $\bar{\beta}_0 = 2$  и  $\chi = 4$ . (Это можно сделать только при  $p \geq 11$ .)

12.20. Если  $\chi(G) = n \geq 5$ , то граф  $G$  содержит  $n$  таких вершин, что каждые две из них соединены по крайней мере четырьмя непересекающимися (по вершинам) простыми цепями.

(Дирак [5])

12.21. Для любых целых чисел  $d$  и  $n$ ,  $1 < d \leq n$ , существует  $n$ -критический граф, у которого  $\bar{\beta}_0 = d$ .

(Хауз [1])

12.22. а) Каждый 3-хроматический максимальный планарный граф однозначно 3-раскрашиваем.

б) Внешнепланарный граф, имеющий по крайней мере 3 вершины, однозначно 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является максимальным внешнепланарным.

(Чартрэнд, Геллер [1])

12.23.  $n$ -критический граф нельзя разделить с помощью множества всех вершин однозначно  $(n-1)$ -раскрашиваемого подграфа.

(Харари, Хедетниemi, Робинсон [1])

12.24. Для любого независимого множества  $S$  вершин критического графа  $G$  справедливо равенство  $\chi(G-S) = \chi(G) - 1$ .

(Дирак [8])

12.25. Для любого элементарного стягивания  $\eta$  графа  $G$  выполняется неравенство  $|\chi(G) - \chi(\eta G)| \leq 1$ .

(Харари, Хедетинем, Прыс [1])

12.26. Определить ахроматическое число графов  $P_n$ ,  $C_n$ ,  $W_n$  и  $K_{m,n}$ .

12.27.  $n$ -хроматическим числом  $\chi_n(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число  $m$  цветов, необходимое для такой раскраски графа  $G$ , при которой не все вершины, лежащие на простой цепи длины  $n$ , окрашены в один цвет.

а) Для любого  $n$  существует такой внешнепланарный граф  $G$ , что  $\chi_n(G) = 3$ .

б) Для любого  $n$  существует такой планарный граф  $G$ , что  $\chi_n(G) = 4$ .

(Чартрэнд, Геллер, Хедетинем [1])

12.28. Если  $e$  — длина самой длинной простой цепи в графе  $G$ , то  $\chi(G) \leq e + 1$ .

(Галлан [4])

12.29. Для хроматического числа любого графа  $G$  справедлива нижняя оценка

$$\chi(G) \geq \frac{p^2}{p^2 - 2q}.$$

°12.30. Если в планарном графе  $G$  с  $p$  вершинами существует  $r$  вершин, сумма степеней которых больше  $2p - 12 + 4r$  и  $r \leq 14$ , то граф  $G$  4-раскрашиваем.

(Браун, Джонсон [1])

°12.31. Числом Хаддингера  $\eta(G)$  графа  $G$  называется такое наибольшее целое число  $\eta$ , что граф  $G$  стягиваем к полному графу  $K_\eta$ . Для  $(p, q)$ -графов с числом Хаддингера  $\eta \leq 4$  справедлива точная оценка  $q \leq (\eta - 1)p - \binom{p}{2}$ .

(Зыков [3])

°12.32. Каждый 7-хроматический граф гомоморфен графу, полученному из  $P_7$  удалением произвольной пары несмежных ребер.

(Якобсен [1])

°12.33. Планарные графы с  $p \leq 41$  вершинами 4-раскрашиваемы.

(Донец [1])

В порядке беспорядочном они  
 Мертвы и холодны в колонках прозрачных.  
 Поэт! Ты душу в них стихом вдохни,  
 Заставь их заиграть в рисунке мозаичном <sup>1)</sup>.

Дж. Лукасто

Граф полностью определяется или его смежностями, или его инцидентиями. Указанную информацию о графе удобно представлять в матричной форме. Действительно, с данным графом, помеченным соответствующим образом, связаны несколько матриц, в том числе матрица смежностей, матрица инцидентий, матрица циклов и матрица коциклов. Часто эти матрицы удается использовать при выявлении определенных свойств графа. Классическим результатом о графах и матрицах является матричная теорема о деревьях, в которой дается число остовов любого помеченного графа. В данной главе рассматриваются также матроиды, связанные с матрицами циклов и матрицами коциклов.

### Матрица смежностей

Матрицей смежностей <sup>2)</sup>  $A = \|a_{ij}\|$  помеченного графа  $G$  с  $p$  вершинами называется  $(p \times p)$ -матрица, в которой  $a_{ij} = 1$ , если вершина  $v_i$  смежна с  $v_j$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Таким образом,

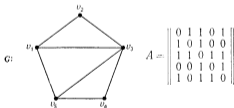


Рис. 13.1. Помеченный граф и его матрица смежностей.

существует взаимно однозначное соответствие между помеченными графами с  $p$  вершинами и симметрическими бинарными  $(p \times p)$ -матрицами с нулями на диагонали.

<sup>1)</sup> Перевод с английского О. Астафьевой. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> В литературе широко используется термин «матрица смежности»; нам кажется более удачным термин «матрица смежностей» по аналогии с «матрицей инцидентий» и т. п. — Прим. ред.

На рис. 13.1 показаны помеченный граф  $G$  и его матрица смежностей  $A$ . Легко заметить, что суммы элементов матрицы  $A$  по строкам равны степеням вершин графа  $G$ . Вообще в силу соответствия, существующего между графами и матрицами, с любым теоретико-графовым понятием можно сопоставить некоторый аналог, связанный с матрицей смежностей. Например, в гл. 2 было введено понятие связного графа: граф  $G$  называется связным, если не существует такого разбиения  $V=V_1 \cup V_2$  множества вершин графа  $G$ , что ребра графа  $G$  не соединяют вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ . В матричных терминах это можно сказать так: граф  $G$  связен, если не существует такой нумерации вершин графа  $G$ , что его матрица смежностей имеет приведенную форму

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

где  $A_{11}$  и  $A_{22}$  — квадратные матрицы. Если  $A_1$  и  $A_2$  — матрицы смежностей, соответствующие различным нумерациям одного и того же графа  $G$ , то  $A_1 = P^{-1}A_2P$  для некоторой матрицы перестановки  $P$ . Иногда выбор конкретной нумерации вершин графа не существен, как, например, в следующих результатах, в которых дается интерпретация элементов степеней матрицы смежностей.

**Теорема 13.1.** Пусть  $G$  — помеченный граф с матрицей смежностей  $A$ . Тогда  $(i, j)$ -й элемент <sup>1)</sup> матрицы  $A^n$  равен числу маршрутов длины  $n$  из  $v_i$  в  $v_j$ .

**Следствие 13.1 (а).** Для  $i \neq j$   $(i, j)$ -й элемент матрицы  $A^2$  равен числу простых  $(v_i, v_j)$ -цепей длины 2. Далее,  $(i, i)$ -й элемент в матрице  $A^2$  равен степени вершины  $v_i$ , в матрице  $A^3$  — удвоенному числу треугольников, содержащих  $v_i$ .

**Следствие 13.1 (б).** Если  $G$  — связный граф, то расстояние между  $v_i$  и  $v_j$  для  $i \neq j$  равно наименьшему из целых чисел  $n$ , для которых  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $A^n$  отличен от 0.

Матрица смежностей помеченного орграфа  $D$  определяется аналогично:  $A = A(D) = \|a_{ij}\|$ , где  $a_{ij} = 1$ , если дуга  $v_i v_j$  принадлежит  $D$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Таким образом, матрица  $A(D)$  не обязательно симметрична. Некоторые результаты для орграфов, в которых используется  $A(D)$ , будут даны в гл. 16. Из определения матрицы  $A(D)$  следует, что матрицу смежностей данного графа можно также рассматривать как матрицу смежностей симметрического орграфа. Воспользуемся этим замечанием и исследуем определитель матрицы смежностей графа, как в работе Харари [18].

<sup>1)</sup> Элемент, стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце матрицы. — Прим. перев.



*Линейным подграфом орграфа  $D$*  называется остовный подграф, в котором у каждой вершины полустепень исхода и полустепень захода равны 1. Таким образом, такой подграф содержит непересекающийся остовный набор простых контуров.

**Теорема 13.2.** *Если  $D$  — орграф с линейными подграфами  $D_i, i=1, 2, \dots, n$ , и каждый подграф  $D_i$  имеет  $e_i$  простых контуров четной длины, то  $\det A(D) = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i}$ .*

Любому графу  $G$  поставим в соответствие орграф  $D$ , в котором вершины  $v_i$  и  $v_j$  соединены дугами  $v_i v_j$  и  $v_j v_i$  только в том случае, если эти вершины смежны в  $G$ . При этом соответствии каждый линейный подграф графа  $D$  определяет остовный подграф графа  $G$ , состоящий из непересекающихся по вершинам ребер и простых циклов. Этот подграф называется *линейным подграфом графа  $G$* . Компоненты линейного подграфа графа  $G$ , являющиеся отдельными ребрами, взаимно однозначно соответствуют 2-контурам линейного подграфа орграфа  $D$ , а компоненты, являющиеся простыми циклами графа  $G$ , соответствуют двум простым контурам орграфа  $D$ . Поскольку  $A(G) = A(D)$ , где  $G$  и  $D$  связаны указанным выше образом, нетрудно вычислить определитель матрицы  $A(G)$ .

**Следствие 13.2 (а).** *Если  $G$  — граф с линейными подграфами  $G_i, i=1, 2, \dots, n$ , причем  $G_i$  имеет  $e_i$  четных компонент и  $c_i$  простых циклов, то  $\det A(G) = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i} 2^{c_i}$ .*

### Матрица инцидентий

Другой матрицей, связанной с графом  $G$ , в котором помечены и вершины и ребра, является *матрица инцидентий*  $B = ||b_{ij}||$ . В этой  $(p \times q)$ -матрице  $b_{ij} = 1$ , если  $v_i$  и  $x_j$  инцидентны, и  $b_{ij} = 0$  в противном случае. Как и матрица смежностей, матрица инцидентий определяет граф  $G$  с точностью до изоморфизма. На самом деле уже любые  $p-1$  строки матрицы  $B$  определяют  $G$ , поскольку каждая строка равна сумме по модулю 2 всех остальных строк.

Следующая теорема связывает матрицу смежностей реберного графа графа  $G$  и матрицу инцидентий графа  $G$ . Обозначим через  $B^T$  матрицу, транспонированную к матрице  $B$ .

**Теорема 13.3.** *Для любого  $(p, q)$ -графа  $G$  с матрицей инцидентий  $B$*

$$A(L(G)) = B^T B - 2I_q,$$

где  $I_q$  — единичная матрица порядка  $q$ .

Пусть  $M$  — матрица, полученная из матрицы  $-A$  заменой  $i$ -го элемента главной диагонали на  $\deg v_i$ . В классической работе Кирхгофа [1] приведена

**Теорема 13.4 (матричная теорема о деревьях).** Пусть  $G$  — связный помеченный граф с матрицей смежностей  $A$ . Тогда все алгебраические дополнения матрицы  $M$  равны между собой и их общее значение есть число остовов графа  $G$ .

**Доказательство.** Начнем доказательство с изменения одной из двух единиц на  $-1$  в каждом столбце матрицы инцидентий  $B$  графа  $G$ , образуя таким образом новую матрицу  $E$ . (В гл. 16 мы увидим, что это преобразование задает некоторую ориентацию ребер графа  $G$ , и тогда матрицу  $E$  можно рассматривать как матрицу инцидентий получаемого направленного графа.)

$(i, j)$ -й элемент матрицы  $EE^T$  имеет вид  $e_{i_1}e_{j_1} + \dots + e_{i_q}e_{j_q}$ . Эта сумма равна  $\deg v_i$ , если  $i=j$ , равна  $-1$ , если вершины  $v_i$  и  $v_j$  смежны, и равна  $0$  во всех остальных случаях. Следовательно,  $EE^T = M$ .

Рассмотрим любую подматрицу матрицы  $E$ , содержащую  $p-1$  столбцов. Эта  $(p \times (p-1))$ -матрица соответствует остовному подграфу  $H$  графа  $G$ , в котором  $p-1$  ребер. Удалив произвольную строку, скажем  $k$ -ю, из этой матрицы, получим квадратную матрицу  $F$  порядка  $p-1$ . Покажем, что число  $|\det F|$  равно  $1$  или  $0$  в зависимости от того, является  $H$  деревом или нет. Пусть сначала  $H$  — не дерево. Тогда, поскольку граф  $H$  имеет  $p$  вершин и  $p-1$  ребер, он не связен, и, значит, существует компонента, не содержащая  $v_k$ . Так как строки, соответствующие вершинам этой компоненты, зависимы, то  $\det F = 0$ .

Предположим теперь, что  $H$  — дерево. В этом случае его вершины, отличные от  $v_k$ , и все ребра можно заново пометить следующим образом. Пусть  $u_1 \neq v_k$  и  $u_1$  — висючая вершина графа  $H$  (ее существование гарантирует следствие 4.1 (а)). Обозначим через  $y_1$  ребро, инцидентное вершине  $u_1$ . Далее, возьмем в дереве  $H - u_1$  любую висючую вершину  $u_2 \neq v_k$  и ребро  $y_2$ , инцидентное  $u_2$ , и т. д. Такая нумерация вершин и ребер графа  $H$  определяет новую матрицу  $F'$ , которую также можно получить перестановкой соответствующих строк и столбцов в матрице  $F$ . Таким образом,  $|\det F'| = |\det F|$ . Но  $F'$  — нижняя треугольная матрица<sup>1)</sup>, у которой на главной диагонали стоят элементы, равные  $+1$  или  $-1$ , поэтому  $|\det F'| = 1$ . Нам понадобится следующее алгебраическое предложение, известное как теорема Бине — Коши.

**Лемма 13.4 (а).** Если  $P$  и  $Q$  — соответственно  $(m \times n)$ -матрица и  $(n \times m)$ -матрица ( $m \leq n$ ), то определитель матрицы  $PQ$  равен сумме произведений соответствующих главных определителей матриц  $P$  и  $Q$ .

<sup>1)</sup> В ней все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны  $0$ .  
— Прим. перев.

(Главный определитель матрицы  $P$  (или  $Q$ ) имеет порядок  $m$ , а выражение «соответствующие главные определители» означает, что столбцы матрицы  $P$ , входящие в рассматриваемый определитель, имеют такие же номера и такой же порядок, как строки матрицы  $Q$ , входящие в другой определитель.)

Применим эту лемму к вычислению алгебраического дополнения элемента  $a_{11}$  матрицы  $M$ . Пусть  $E_1$  будет  $((p-1) \times q)$ -подматрицей, полученной из  $E$  вычеркиванием первой строки. Полагая  $P=E_1$  и  $Q=E_1^T$  и используя лемму, получаем, что алгебраическое дополнение элемента  $a_{11}$  матрицы  $M$  равно сумме произведений соответствующих главных определителей матриц  $E_1$  и  $E_1^T$ . Очевидно, что соответствующие главные определители равны между собой. Мы

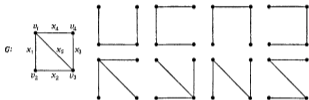


Рис. 13.2. Граф  $K_4-x$  и его остовы.

уже видели, что их произведение равно 1, если столбцы матрицы  $E_1$  соответствуют остову графа  $G$ , и 0 в противном случае. Таким образом, сумма этих произведений есть в точности число остовов.

В матрице, в которой все суммы по строкам и все суммы по столбцам равны нулю, все алгебраические дополнения равны. Теорема доказана.

Чтобы проиллюстрировать матричную теорему о деревьях, рассмотрим какой-нибудь помеченный граф, скажем  $K_4-x$ . Этот граф, изображенный на рис. 13.2, имеет восемь остовов, поскольку, например, алгебраическое дополнение элемента  $a_{23}$  матрицы

$$M = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

равно

$$-\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Число помеченных деревьев с  $p$  вершинами легко найти, применяя ту же теорему 13.4 к графу  $K_p$ . Алгебраическое дополнение

любого диагонального элемента есть определитель порядка  $p-1$ :

$$\begin{vmatrix} p-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & p-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & p-1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных и прибавляя затем последние  $p-2$  столбцов к первому, получаем верхнюю треугольную матрицу, определитель которой равен  $p^{p-2}$ .

Следствие 13.4 (а). Число помеченных деревьев с  $p$  вершинами равно  $p^{p-2}$ .

Эта формула была доказана столькими разными способами, сколько раз ее независимо «открывали». Интересное собрание таких доказательств представлено в статье Муна [3].

### Матрица циклов

Пусть  $G$  — граф, у которого помечены ребра и простые циклы. Матрицей циклов  $C = \|c_{ij}\|$  графа  $G$  называется матрица, в которой для каждого простого цикла графа  $G$  есть строка и для каждого

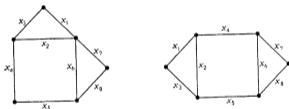


Рис. 13.3. Два графа с одной и той матрицей циклов.

ребра — столбец, причем  $c_{ij} = 1$ , если  $i$ -й цикл содержит ребро  $x_j$ ,  $c_{ij} = 0$  в противном случае. В отличие от матриц смежностей и инцидентностей матрица циклов не определяет граф с точностью до изоморфизма. Очевидно, что если ребро не принадлежит ни одному циклу, то по матрице циклов нельзя узнать, принадлежит оно графу или нет. Даже если исключить такие ребра, то все равно матрица  $C$  не определяет однозначно граф  $G$ , как показано на примере двух графов, изображенных на рис. 13.3. Оба графа имеют циклы

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x_1, x_2, x_3\}, & Z_4 &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \\ Z_2 &= \{x_2, x_4, x_5, x_6\}, & Z_5 &= \{x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}, \\ Z_3 &= \{x_4, x_7, x_8\}, & Z_6 &= \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, одну и ту же матрицу циклов

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{matrix}$$

В теореме 13.5 устанавливается связь между матрицей циклов и матрицей инциденций. В комбинаторной топологии этот результат можно выразить так: «граница границы любой цепи является нулевой».

**Теорема 13.5.** Если граф  $G$  имеет матрицу инциденций  $B$  и матрицу циклов  $C$ , то

$$CB^T = 0 \pmod{2}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $i$ -ю строку матрицы  $C$  и  $j$ -й столбец матрицы  $B^T$ , который является также  $j$ -й строкой матрицы  $B$ . Оба  $r$ -х элемента этих двух строк не равны нулю тогда и только тогда, когда ребро  $x_r$  принадлежит  $i$ -му циклу  $Z_i$  и инцидентно вершине  $v_j$ . Если цикл  $Z_i$  содержит  $x_r$ , то он содержит и вершину  $v_j$ ; следовательно, в  $Z_i$  найдутся два ребра, инцидентные  $v_j$ , так что  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $CB^T$  равен  $1+1 \equiv 0 \pmod{2}$ .

Аналогично матрице циклов определяется матрица коциклов  $C^*(G)$ . Если  $G$  — двусвязный граф, то каждая его вершина соответствует коциклу (минимальному разрезу), содержащему инцидентные ей ребра. Поэтому матрица инциденций блока содержится в его матрице коциклов.

Поскольку любая строка матрицы инциденций  $B$  равна сумме по модулю 2 остальных строк, ясно, что ранг матрицы  $B$  не превосходит  $p-1$ . С другой стороны, если ранг матрицы  $B$  меньше  $p-1$ , то найдется некоторое множество, содержащее не более  $p$  строк, сумма которых по модулю 2 равна нулю. Но тогда в графе  $G$  нет ребра, которое соединяло бы какую-нибудь вершину, определяемую множеством этих строк, с вершиной, определяемой строками, не принадлежащими этому множеству, так что граф  $G$  не может быть связным. Итак, мы доказали одну часть приведенной ниже теоремы. Остальные следуют непосредственно из результатов гл. 4, касающихся размерностей пространства циклов и пространства коциклов графа  $G$ .

**Теорема 13.6.** Для связного графа  $G$  ранги матриц циклов, инциденций и коциклов соответственно равны  $r(C) = q - p + 1$  и  $r(B) = r(C^*) = p - 1$ .

Принимая во внимание теорему 13.6, можно для любых  $m = q - p + 1$  строк, образующих базис циклов, определить важную подматрицу матрицы циклов  $C$  связного графа. Каждая такая приведенная матрица  $C_0(G)$  есть  $(m \times q)$ -подматрица матрицы  $C$ . Аналогично приведенная матрица коциклов  $C_0^*(G)$  является  $(m^* \times q)$ -матрицей, где  $m^* = p - 1$ . Тогда по теореме 13.5  $CC^*T = 0 \pmod{2}$  и, следовательно,  $C_0C_0^*T = 0 \pmod{2}$ . Приведенная матрица инцидентий  $B_0$  получается из матрицы  $B$  удалением последней строки. В силу сделанного ранее замечания переход к приведенной матрице  $B_0$  не ведет к потере информации о графе  $G$ .

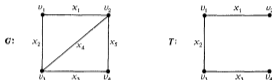


Рис. 13.4. Граф и его остов.

Если циклы и коциклы выбирать специальным образом, то приведенные матрицы инцидентий, циклов и коциклов будут иметь очень удобную форму. Напомним (гл. 4), что любой остов  $T$  определяет базис циклов и базис коциклов графа  $G$ . В частности, если  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  — множество ветвей (ребер) дерева  $T$ , а  $X_2 = \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$  — множество его хорд, то в  $G - X_2 + x_j$ ,  $p \leq j \leq q$ , существует единственный цикл  $Z_j$ , а в  $G - X_1 + x_j$ ,  $1 \leq j \leq p - 1$ , — единственный коцикл  $Z_j^*$ , и эти наборы циклов и коциклов образуют базисы в соответствующих пространствах. Например, у графа  $G$ , представленного на рис. 13.4, циклами и коциклами, которые определяются указанным на рисунке остовом  $T$ , являются

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x_1, x_2, x_4\}, & Z_1^* &= \{x_1, x_4, x_5\}, \\ Z_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, & Z_2^* &= \{x_2, x_3, x_5\}, \\ & & Z_3^* &= \{x_3, x_5\}. \end{aligned}$$

Приведенные матрицы, которые определяются как графом  $G$ , так и выбором остова  $T$ , имеют вид

$$B_0(G, T) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad C_0(G, T) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ \hline x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

$$C_2^*(G, T) = \begin{array}{c} Z_1^* \\ Z_2^* \\ Z_3^* \end{array} \left[ \begin{array}{cc|cc} \overbrace{X_1} & & \overbrace{X_2} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Нетрудно заметить, что эти соотношения представляют собой частный случай следующих равенств (все по модулю 2), справедливых для любого связного графа  $G$  и любого остова  $T$ :

$$B_0 = B_n(G, T) = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = C_n(G, T) = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix},$$

$$C_0^* = C_n^*(G, T) = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1^* & \widetilde{C}_2^* \end{pmatrix},$$

где  $C_1^T = B_1^{-1}B_2 = C_2^*$  и  $C_0^* = B_1^{-1}B_0 = \begin{pmatrix} I_m & C_1^T \end{pmatrix}$ . Из этих равенств следует, что для данных  $G$  и  $T$  каждая из матриц  $B_0$ ,  $C_0$  и  $C_0^*$  определяет две другие.

### Обзор дополнительных свойств матроидов

Матрица циклов и матрица коциклов служат одним из способов представления матроида циклов и матроида коциклов данного графа, определенных в гл. 4. Матроид называется *графическим*, если он является матроидом циклов некоторого графа, и *кографическим*, если он является матроидом коциклов некоторого графа. Татт [7] нашел условия, позволяющие выяснять, является ли данный матроид графическим или кографическим; тем самым он нечаянно решил одну из проблем теории электрических цепей.

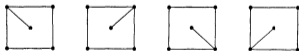


Рис. 13.5. Новые циклы в вихре колеса  $W_3$ .

Простейший пример матроида, не являющегося ни графическим, ни кографическим, дается самодвойственным матроидом, который определяется множеством  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  и циклами всех 3-элементных подмножеств множества  $M$ .

Пример неграфического матроида, связанного с колесом  $W_{n+1} = K_1 + C_n$ , дан Таттом [14]. Его матроид циклов содержит  $n^2 - n + 1$

циклов, т. е. столько, сколько их в колесе  $W_{n+1}$ . Удалив из набора циклов этого матроида цикл  $C_n$ , образующий обод колеса, и добавив к матроиду все «сцепленные ободы» (множества ребер подграфов, приведенных на рис. 13.5), получим новый матроид, не являющийся ни графическим, ни кографическим. Этот матроид называется *вихрем* (whirl) порядка  $n$ ; он порождается  $n^2$  циклами.

Даже если матроид графический, он необязательно кографический. Например, матроид циклов полного графа  $K_n$  не кографический. На самом деле матроид одновременно графический и кографический тогда и только тогда, когда он является матроидом циклов некоторого планарного графа.

### Упражнения

13.1. а) Охарактеризовать матрицу смежностей двудольного графа.

б) Граф  $G$  двудольный тогда и только тогда, когда для любого нечетного числа  $n$  все диагональные элементы матрицы  $A^n$  равны 0.

13.2. Пусть  $G$  — связный граф,  $A$  — его матрица смежностей. Что можно сказать о матрице  $A$ , если

а)  $v_i$  — точка сочленения?

б)  $v_i v_j$  — мост?

13.3. Если  $c_n(G)$  — число простых  $n$ -циклов графа  $G$ , у которого  $A$  — матрица смежностей, то

$$а) c_3(G) = \frac{1}{6} \operatorname{tr}(A^3),$$

$$б) c_4(G) = \frac{1}{8} [\operatorname{tr}(A^4) - 2q - 2 \sum_{i \neq j} a_{ij}^{(2)}],$$

$$в) c_5(G) = \frac{1}{10} \left[ \operatorname{tr}(A^5) - 5 \operatorname{tr}(A^3) - 5 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q (a_{ij} - 2) a_{ij}^{(3)} \right].$$

(Харари, Манвел [1])

13.4. а) Если  $G$  — несвязный помеченный граф, то каждое алгебраическое дополнение матрицы  $M$  равно нулю.

б) Если граф  $G$  связан, то число его остовов равно произведению числа остовов его блоков.

(Брукс, Смит, Стоун, Татт [1])

13.5. Пусть  $G$  — помеченный граф с ребрами  $x_1, x_2, \dots, x_q$ . Определим  $(p \times p)$ -матрицу  $M_x = \|m_{ij}\|$  равенствами

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 - x_k, & \text{если } x_k = v_i v_j, \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны, } i \neq j, \end{cases}$$

$$m_{ii} = \sum_{v \neq i} m_{iv}$$

Под словом *остова* графа  $G$  понимается последовательность (как-то упорядоченная) всех символов, приписанных ребрам остова. *Многочлен деревьев* графа  $G$  определяется как сумма слов его остовов.

Матричная теорема о деревьях утверждает, что значение любого алгебраического дополнения матрицы  $M_x$  есть многочлен деревьев графа  $G$ .



13.6. Существуют ли два различных графа с одной и той же матрицей циклов, содержащие меньше вершин, чем графы, показанные на рис. 13.3?<sup>1)</sup>

13.7. Матрица циклов и матрица коциклов действительно удовлетворяют первому определению матроида, данному в гл. 4.

13.8. Два графа  $G_1$  и  $G_2$  называются *коспектральными*, если многочлены  $\det(A_1 - I)$  и  $\det(A_2 - I)$  равны. Существуют только два различных коспектральных графа с пятью вершинами<sup>1)</sup>.

(Харари, Кинг, Рид)

13.9. Если все собственные значения матрицы  $A(G)$  различны, то каждый нетождественный автоморфизм графа  $G$  имеет порядок 2.

(Мовшовиц [1])

13.10. Пусть  $f(t)$  — многочлен наименьшей степени (если такие вообще существуют), для которого любой коэффициент многочлена  $f(A)$  равен 1, где  $A$  — матрица смежностей графа  $G$ . Граф имеет такой многочлен тогда и только тогда, когда он связан и регулярен.

(Гоффман [3])

13.11. *Эйлеров матроид* допускает разбиение множества  $S$  его элементов на циклы.

- а) Графический матроид  $M$  эйлеров тогда и только тогда, когда  $M$  — матроид простых циклов эйлерова графа.  
 б) Эйлеров матроид не является графическим.

13.12. В *бинарном матроиде* пересечение любого цикла с любым коциклом содержит четное число элементов. Любой коцикл бинарного эйлерова матроида также содержит четное число элементов. Другими словами, матроид, двойственный бинарному эйлерову матроиду, является «двудольным матроидом», определяемым естественным образом.

(Уэлш [1])

<sup>1)</sup> Полный обзор результатов, полученных в связи с изучением спектральных свойств графов, содержится в статье Светковича [1]. — *Прим. перев.*

Тигр, о тигр, светло горющий  
 В глубине полночной чащи!  
 Кем задуман огненной  
 Сосамерный образ твой?

Вильям Блейк<sup>1)</sup>

С момента своего появления теория групп предоставила интересный и мощный абстрактный метод изучения симметрий различных конфигураций. Не удивительно, что теория групп необычайно плодотворно взаимодействует с теорией графов. Для изложения этой темы нам понадобятся некоторые элементарные сведения из теории групп. В частности, мы определим несколько операций на группах подстановок. Эти операции играют важную роль в теории графов, поскольку они тесно связаны с операциями над графами; особенно велико их значение при решении задач перечисления графов.

Любая модель данной аксиоматической системы имеет группу автоморфизмов, и графы не являются исключением. Было замечено, что при определенных условиях группу графа-композиции можно охарактеризовать с помощью групп составляющих графов. В настоящей главе представлены результаты о существовании графа с заданной группой и данными структурными свойствами. Глава завершается рассмотрением графов, симметричных относительно вершин и ребер.

### Группа автоморфизмов графа

Сначала напомним обычное определение группы. Непустое множество  $A$  вместе с заданной на нем бинарной операцией, результат применения которой к элементам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  из  $A$  обозначается через  $\alpha_1\alpha_2$ , образует *группу*, если выполняются следующие четыре аксиомы:

**Аксиома I (замыкания).** Для любых двух элементов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , принадлежащих множеству  $A$ , элемент  $\alpha_1\alpha_2$  также принадлежит  $A$ .

<sup>1)</sup> Вильям Блейк. Избранное, перевод С. Я. Маршака, изд-во «Худож. лит-ра», М., 1965. Из «Песен опыта: Тигр». Дословный перевод второй фразы: «Чья бессмертная рука или чей глаз создал твой облик, полный симметрии?» — Прим. перев.

**Аксиома 2 (ассоциативности).** Для любых трех элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , принадлежащих множеству  $A$ , справедливо равенство  $\alpha_1(\alpha_2\alpha_3) = (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$ .

**Аксиома 3 (тождественности).** В множестве  $A$  существует такой элемент  $i$ , что  $i\alpha = \alpha i = \alpha$  для всех элементов  $\alpha$  из  $A$ .

**Аксиома 4 (обращения).** Если выполняется аксиома 3, то для любого элемента  $\alpha$ , принадлежащего множеству  $A$ , существует элемент, обозначаемый  $\alpha^{-1}$ , такой, что  $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = i$ .

Взаимно однозначное отображение конечного множества на себя называется *подстановкой*. Обычная композиция отображений определяет бинарную операцию для подстановок на одном и том же множестве. Далее, если некоторая совокупность подстановок замкнута относительно этой композиции, то аксиомы 2, 3 и 4 автоматически выполняются и эта совокупность называется *группой подстановок*. Если группа подстановок  $A$  действует на множестве объектов  $X$ , то число  $|A|$  называется *порядком* группы, а число  $|X|$  — ее *степенью*.

Пусть  $A$  и  $B$  — группы подстановок, действующих на множествах  $X$  и  $Y$  соответственно. Будем писать  $A \cong B$  для обозначения того, что  $A$  и  $B$  — *изоморфные группы*. Запись  $A = B$  означает не только изоморфизм, но и то, что  $A$  и  $B$  — *идентичные группы подстановок*. Более точно, группы  $A$  и  $B$  изоморфны ( $A \cong B$ ), если между подстановками групп  $A$  и  $B$  существует такое взаимно однозначное соответствие  $h: A \leftrightarrow B$ , что для любых элементов  $\alpha_1, \alpha_2$ , принадлежащих  $A$ , выполняется равенство  $h(\alpha_1\alpha_2) = h(\alpha_1)h(\alpha_2)$ . Чтобы точно определить соотношение  $A = B$ , введем еще одно взаимно однозначное соответствие  $f: X \leftrightarrow Y$  между объектами множеств  $X$  и  $Y$ , при котором для любого  $x$  из  $X$  и любого  $\alpha$  из  $A$  выполняется равенство  $f(\alpha x) = h(\alpha)f(x)$ .

*Автоморфизмом* графа  $G$  называется изоморфизм графа  $G$  на себя. Таким образом, каждый автоморфизм  $\alpha$  графа  $G$  есть подстановка множества вершин  $V$ , сохраняющая смежность. Конечно, подстановка  $\alpha$  переводит любую вершину графа в вершину той же степени. Очевидно, что последовательное выполнение двух автоморфизмов есть также автоморфизм; поэтому автоморфизмы графа  $G$  образуют группу подстановок  $\Gamma(G)$ , действующую на множестве вершин  $V(G)$ . Эту группу называют *группой* или иногда *вершинной группой* графа  $G$ . Группа  $\Gamma(D)$  ориентированного графа  $D$  определяется аналогичным образом.

Тождественное отображение из  $V$  на  $V$ , разумеется, всегда есть автоморфизм графа  $G$ . Для некоторых графов это единственный автоморфизм; такие графы называются *асимметрическими*<sup>1)</sup>. Нан-

<sup>1)</sup> У автора такие графы названы *тождественными* (identity). — *Прим. перев.*

меньшее нетривиальное асимметрическое дерево имеет семь вершин, а наименьший асимметрический граф имеет шесть вершин (см. рис. 14.1).



Рис. 14.1. Два асимметрических графа.

Вершинная группа графа  $G$  индуцирует другую группу подстановок  $\Gamma_1(G)$ , называемую *реберной группой графа  $G$* ; она действует на множестве ребер  $E(G)$ . Для иллюстрации различия групп  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  рассмотрим граф  $K_4-x$ , показанный на рис. 14.2; его вершины помечены  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , а ребра  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Вершинная группа  $\Gamma(K_4-x)$  состоит из четырех подстановок

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4); \quad (v_1)(v_3)(v_2v_4); \\ (v_2)(v_4)(v_1v_3); \quad (v_1v_3)(v_2v_4).$$

Тождественная подстановка вершинной группы индуцирует тождественную подстановку на множестве ребер, в то время как подстановка  $(v_1)(v_3)(v_2v_4)$  индуцирует подстановку на множестве ребер, в которой ребро  $x_5$  остается на месте,  $x_1$  меняется с  $x_4$ , а  $x_2$  с  $x_3$ . Таким образом, реберная группа  $\Gamma_1(K_4-x)$  состоит из следующих подстановок, индуцируемых указанными выше элементами вершинной группы:

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5); \quad (x_1x_4)(x_2x_3)(x_5); \quad (x_1x_2)(x_3x_4)(x_5); \quad (x_1x_3)(x_2x_4)(x_5).$$

Понятно, что реберная и вершинная группы графа  $K_4-x$  изоморфны. Но они, конечно, не могут быть идентичными, так как степень группы  $\Gamma_1(K_4-x)$  равна 5, а степень группы  $\Gamma(K_4-x)$  равна 4. Заметим, что ребро  $x_5$  остается на месте в каждом элементе реберной группы. Даже группа подстановок, полученная из группы  $\Gamma_1(K_4-x)$  сужением ее множества объектов до множества  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , не идентична группе  $\Gamma(K_4-x)$ , поскольку эти две изоморфные группы подстановок одинаковой степени имеют различные циклические структуры. Более того, можно показать, что даже если две группы подстановок имеют одинаковую степень и одинаковую циклическую структуру, то они все еще не обязательно идентичны; см. Пойа [1, стр. 176].

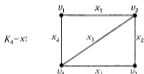


Рис. 14.2. Граф с помеченными вершинами и ребрами.

Следующая теорема (Харари и Палмер [15]) дает ответ на вопрос: когда группы  $\Gamma(G)$  и  $\Gamma_1(G)$  изоморфны? Сабидусси [1] доказал достаточность приводимого ниже утверждения с помощью теоретико-групповых методов.

**Теорема 14.1.** *Реберная и вершинная группы графа  $G$  изоморфны тогда и только тогда, когда граф  $G$  имеет не более одной изолированной вершины, а граф  $K_2$  не является его компонентой.*

**Доказательство.** Пусть подстановка  $\alpha'$  группы  $\Gamma_1(G)$  индуцируется подстановкой  $\alpha$  группы  $\Gamma(G)$ . Из определения операции умножения в группе  $\Gamma_1(G)$  вытекает, что

$$\alpha'\beta' = (\alpha\beta)'$$

для любых  $\alpha$  и  $\beta$ , принадлежащих  $\Gamma(G)$ . Поэтому отображение  $\alpha \rightarrow \alpha'$  является групповым гомоморфизмом группы  $\Gamma(G)$  на  $\Gamma_1(G)$ . Следовательно,  $\Gamma(G) \cong \Gamma_1(G)$  тогда и только тогда, когда ядро этого отображения тривиально.

Для доказательства необходимости предположим, что  $\Gamma(G) \cong \Gamma_1(G)$ . Тогда из неравенства  $\alpha \neq i$  ( $i$  — тождественная подстановка) следует, что  $\alpha' \neq i$ . Если в графе  $G$  существуют две различные изолированные вершины  $v_1$  и  $v_2$ , то можно определить подстановку  $\alpha \in \Gamma(G)$ , положив  $\alpha(v_1) = v_2$ ,  $\alpha(v_2) = v_1$  и  $\alpha(v) = v$  для всех  $v \neq v_1, v_2$ . Тогда  $\alpha \neq i$ , но  $\alpha' = i$ . Если  $K_2$  — компонента графа  $G$ , то, записав ребро графа  $K_2$  в виде  $x = v_1v_2$  и определив подстановку  $\alpha \in \Gamma(G)$  точно так же, как выше, получим  $\alpha \neq i$ , но  $\alpha' = i$ .

Чтобы доказать достаточность, предположим, что граф  $G$  имеет не больше одной изолированной вершины и  $K_2$  не является его компонентой. Если группа  $\Gamma(G)$  тривиальна, то очевидно, что группа  $\Gamma_1(G)$  оставляет на месте каждое ребро и, следовательно,  $\Gamma_1(G)$  — тривиальная группа. Поэтому предположим, что существует подстановка  $\alpha \in \Gamma(G)$ , для которой  $\alpha(u) = v \neq u$ . Тогда степени вершин  $u$  и  $v$  равны. Поскольку вершины  $u$  и  $v$  не изолированы, их степени не равны нулю. Здесь возникает два случая.

*Случай 1.* Вершины  $u$  и  $v$  смежны. Пусть  $x = uv$ . Так как  $K_2$  не является компонентой графа  $G$ , то степени обеих вершин  $u$  и  $v$  больше единицы. Следовательно, существует такое ребро  $y \neq x$ , инцидентное вершине  $u$ , что ребро  $\alpha'(y)$  инцидентно вершине  $v$ . Отсюда  $\alpha'(y) \neq y$ , и тогда  $\alpha' \neq i$ .

*Случай 2.* Вершины  $u$  и  $v$  не смежны. Пусть  $x$  — произвольное ребро, инцидентное вершине  $u$ . Тогда  $\alpha'(x) \neq x$  и, следовательно,  $\alpha' \neq i$ .

Доказательство теоремы закончено.

### Операции на группах подстановок

Известно несколько важных операций на группах подстановок, с помощью которых можно образовать новые группы подстановок. Опишем четыре бинарные операции на группах, которые будем называть сложением, умножением, композицией и возведением в степень. Результаты этих операций назовем соответственно суммой, произведением, композицией (двух) групп и степенной группой.

Пусть  $A$  — группа подстановок порядка  $m = |A|$  и степени  $d$ , действующая на множестве  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ , а  $B$  — другая группа подстановок порядка  $n = |B|$  и степени  $e$ , действующая на множестве  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_e\}$ . Например, пусть  $A = C_3$  — циклическая группа порядка 3, действующая на множестве  $X = \{1, 2, 3\}$ . Эта группа состоит из трех подстановок  $(1)(2)(3)$ ,  $(123)$  и  $(132)$ . Если взять в качестве  $B$  симметрическую группу  $S_2$  порядка 2, действующую на множестве  $Y = \{a, b\}$ , то получим две подстановки  $(a)(b)$  и  $(ab)$ . Проиллюстрируем на этих двух группах подстановок действие названных выше 4 бинарных операций.

*Сумма* <sup>1)</sup>  $A + B$  — это группа подстановок, действующая на объединении  $X \cup Y$  непересекающихся множеств  $X$  и  $Y$ , элементы которой записываются в виде  $\alpha + \beta$  и представляют собой упорядоченные пары подстановок  $\alpha$  из  $A$  и  $\beta$  из  $B$ . Каждый элемент  $z$ , принадлежащий множеству  $X \cup Y$ , преобразуется подстановкой  $\alpha + \beta$  по правилу

$$(\alpha + \beta)(z) = \begin{cases} \alpha z, & z \in X, \\ \beta z, & z \in Y. \end{cases} \quad (14.1)$$

Таким образом, группа  $C_3 + S_2$  содержит 6 подстановок, каждую из которых можно записать в виде суммы подстановок  $\alpha \in C_3$  и  $\beta \in S_2$ , как, например,  $(123)(ab) = (123) + (ab)$ .

*Произведение* <sup>2)</sup>  $A \times B$  групп  $A$  и  $B$  — это группа подстановок, действующая на множестве  $X \times Y$ , элементы которой записываются в виде  $\alpha \times \beta$  и представляют собой упорядоченные пары подстановок  $\alpha$  из  $A$  и  $\beta$  из  $B$ . Элемент  $(x, y)$  множества  $X \times Y$  преобразуется подстановкой  $\alpha \times \beta$  естественным образом:

$$(\alpha \times \beta)(x, y) = (\alpha x, \beta y). \quad (14.2)$$

Произведение  $C_3 \times S_2$  имеет порядок и степень, равные 6, в то время как степень суммы  $C_3 + S_2$  равна 5. Подстановкой в группе  $C_3 \times S_2$ , которая соответствует подстановке  $(123) + (ab)$ , будет  $(1a \ 2b \ 3a \ 1b \ 2a \ 3b)$ , где для краткости символ  $(1, a)$  заменен на  $1a$ .

<sup>1)</sup> Иногда называется также *произведением* или *прямым произведением* (при этом используется обозначение произведения).

<sup>2)</sup> Известное также как *декартово произведение*, см. Харари [9].

Композиция <sup>1)</sup>  $A[B]$  группы  $A$  относительно группы  $B$  также действует на множестве  $X \times Y$ . Для любой подстановки  $\alpha$  из  $A$  и любой последовательности  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ , содержащей  $d$  (не обязательно различных) подстановок из  $B$ , существует единственная подстановка из  $A[B]$ , которая записывается в виде  $(\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ , такая, что для всякой пары  $(x_i, y_j)$  из  $X \times Y$  выполняется равенство

$$(\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)(x_i, y_j) = (\alpha x_i, \beta_i y_j). \quad (14.3)$$

Композиция  $C_3[S_2]$  имеет степень 6 и порядок 24. Любую подстановку из  $C_3[S_2]$  можно записать в таком виде, как она действует на множестве  $X \times Y$ . Вводя опять обозначение  $1a$  для упорядоченной пары  $(1, a)$  и используя формулу (14.3), можно представить подстановку  $((123); (a)(b), (ab), (a)(b))$  в виде  $(1a \ 2a \ 3b \ 1b \ 2b \ 3a)$ . Заметим, что группа  $S_2[C_3]$  имеет порядок 18 и поэтому не изоморфна группе  $C_3[S_2]$ .

Степенная группа <sup>2)</sup> (обозначается  $B^A$ ) действует на множестве  $Y^X$  всех функций, отображающих  $X$  в  $Y$ . Будем всегда предполагать, что степенная группа действует на множестве, состоящем более чем из одной функции. Для каждой пары подстановок  $\alpha$  из  $A$  и  $\beta$  из  $B$  существует единственная подстановка из  $B^A$  (записывается  $\beta^\alpha$ ), которая действует на любую функцию  $f$  из  $Y^X$  в соответствии со следующим соотношением, определяющим образ каждого элемента  $x \in X$  при отображении  $\beta^\alpha f$ :

$$(\beta^\alpha f)(x) = \beta f(\alpha x). \quad (14.4)$$

Степенная группа  $S_2^{C_3}$  имеет порядок 6 и степень 8. Легко видеть, применяя (14.4), что подстановка этой группы, полученная из подстановок  $\alpha = (123)$  и  $\beta = (ab)$ , имеет один цикл длины 2 и один цикл длины 6.

В табл. 14.1 собраны сведения о порядке и степени каждой из четырех определенных выше групп.

Таблица 14.1

Операции на группах подстановок

			Сумма	Произведение	Композиция	Степенная группа
Группа	$A$	$B$	$A+B$	$A \times B$	$A[B]$	$B^A$
Объекты	$X$	$Y$	$X \cup Y$	$X \times Y$	$X \times Y$	$Y^X$
Порядок	$m$	$n$	$m+n$	$mn$	$m^n$	$m^n$
Степень	$d$	$e$	$d+e$	$de$	$de$	$e^d$

<sup>1)</sup> Поля [2] называет эту операцию «венком группы» (Gruppenkranz). Литтлвуд [1] и другие — «вещным произведением» (wreath product).

<sup>2)</sup> Других названий не известно.

Мы сейчас увидим, что три из указанных операций не являются различными.

**Теорема 14.2.** *Группы  $A \dot{+} B$ ,  $A \times B$  и  $B^A$  изоморфны.*

Легко показать, что  $A \dot{+} B \cong A \times B$ . Для того чтобы убедиться, что  $A \dot{+} B \cong B^A$ , достаточно определить отображение  $f: B^A \rightarrow A \dot{+} B$  равенством  $f(\alpha; \beta) = \alpha^{-1} \beta$  и проверить, что  $f$  — изоморфизм.

Заметим, что все три операции коммутативны. Действительно,  $A \dot{+} B = B \dot{+} A$ ,  $A \times B = B \times A$ ,  $B^A \cong A^B$ .

В табл. 14.2 приведены обозначения пяти широко известных групп подстановок степени  $p$ . С их помощью можно описать группы двух хорошо знакомых графов с  $p$  вершинами.

Таблица 14.2

Группы подстановок степени  $p$ 

	Обозначение	Порядок	Определение
Симметрическая	$S_p$	$p!$	Все подстановки на множестве $\{1, 2, \dots, p\}$
Знакопеременная	$A_p$	$p!/2$	Все четные подстановки на множестве $\{1, 2, \dots, p\}$
Циклическая	$C_p$	$p$	Порождается подстановкой $(12 \dots p)$
Диэдральная	$D_p$	$2p$	Порождается подстановками $(12 \dots p)$ и $(1 p)(2 p-1) \dots$
Тождественная	$E_p$	1	$(1)(2) \dots (p)$ — единственная подстановка

**Теорема 14.3.** а) *Группа  $\Gamma(G)$  есть  $S_p$ , тогда и только тогда, когда  $G = K_p$  или  $G = \bar{K}_p$ .*

б) *Если  $G$  — простой цикл длины  $p$ , то  $\Gamma(G) = D_p$ .*

Таким образом, две специальные группы подстановок, именно  $S_p$  и  $D_p$ , являются группами графов с  $p$  вершинами. Для любого  $p \geq 6$  существует асимметрический граф с  $p$  вершинами, а для  $p \geq 7$  существует асимметрическое дерево.

### Группа графа-композиции

Теперь мы можем приступить к изучению группы, связанной с графом, образованным из других графов с помощью различных операций. Поскольку любой автоморфизм графа сохраняет и смежность, и несмежность, то сразу же получаем следующий очевидный, но важный результат.



Теорема 14.4. *Граф и его дополнение имеют одну и ту же группу:*

$$\Gamma(G) = \Gamma(\bar{G}). \quad (14.5)$$

Граф-композиция получается как результат применения одной или нескольких операций над непересекающимися графами (не имеющими общих вершин). Группу графа-композиции можно часто выразить через группы составляющих графов. Фрухт [3] описал группу графа  $nG$ , состоящего из  $n$  непересекающихся копий связного графа  $G$ .

Теорема 14.5. *Если  $G$  — связный граф, то*

$$\Gamma(nG) = S_n[\Gamma(G)]. \quad (14.6)$$

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим граф  $G = 5K_3$ , группа которого есть  $S_5[S_3]$ . Автоморфизм графа  $G$  можно получить, выполняя сначала произвольный автоморфизм на каждом из пяти треугольников, а затем совершая любую перестановку этих треугольников между собой.

Теорема 14.6. *Если  $G_1$  и  $G_2$  — непересекающиеся связные неизоморфные графы, то*

$$\Gamma(G_1 \cup G_2) = \Gamma(G_1) \div \Gamma(G_2). \quad (14.7)$$

Любой граф  $G$  можно представить в виде  $G = n_1G_1 \cup \dots \cup n_rG_r$ , где  $n_i$  — число компонент графа  $G$ , изоморфных графу  $G_i$ . Применяя последние две теоремы, получаем

$$\Gamma(G) = S_{n_1}[\Gamma(G_1)] \div S_{n_2}[\Gamma(G_2)] \div \dots \div S_{n_r}[\Gamma(G_r)]. \quad (14.8)$$

Следствие 14.6 (а). *Группа объединения двух графов идентична сумме их групп, т. е.*

$$\Gamma(G_1 \cup G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2), \quad (14.9)$$

тогда и только тогда, когда в графе  $G_1$  нет компоненты, изоморфной компоненте графа  $G_2$ .

Из теоремы 14.4, следствия 14.6 (а) и того факта, что дополнение соединения двух графов равно объединению их дополнений, т. е.

$$\overline{G_1 + G_2} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2, \quad (14.10)$$

вытекает

Следствие 14.6 (б). *Группа соединения двух графов идентична сумме их групп, т. е.*

$$\Gamma(G_1 + G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2), \quad (14.11)$$

тогда и только тогда, когда в графе  $\bar{G}_1$  нет компоненты, изоморфной компоненте графа  $\bar{G}_2$ .

Нетривиальный граф  $G$  называется *простым*, если разложение  $G = G_1 \times G_2$  возможно лишь тогда, когда или  $G_1$ , или  $G_2$  — тривиальный граф; граф  $G$  называется *составным*, если он не является простым. Сабидусси [5] заметил, что декартово произведение графов коммутативно и ассоциативно. Он также нашел критерий идентичности группы произведения двух графов и произведения их групп. Так как он доказал, что каждый нетривиальный граф единственным образом можно представить в виде произведения простых графов, то ясно, что такое взаимно простые графы.

**Теорема 14.7.** *Группа произведения двух графов идентична произведению их групп, т. е.*

$$\Gamma(G_1 \times G_2) = \Gamma(G_1) \times \Gamma(G_2), \quad (14.12)$$

*тогда и только тогда, когда  $G_1$  и  $G_2$  — взаимно простые графы.*

Сабидусси [4] дал также ответ на вопрос, поставленный в работе Харари [12], указав, при каких условиях группа лексикографического произведения (композиции) двух графов идентична композиции их групп. *Окрестностью* вершины  $u$  называется множество  $N(u)$ , состоящее из всех вершин  $v$ , смежных с  $u$ . *Замкнутая окрестность* — это  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ .

**Теорема 14.8.** *Если граф  $G_1$  не является вполне несвязным, то группа композиции двух графов  $G_1$  и  $G_2$  идентична композиции их групп, т. е.*

$$\Gamma(G_1[G_2]) = \Gamma(G_1) \{ \Gamma(G_2) \}, \quad (14.13)$$











*тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) *если в графе  $G_1$  найдутся две вершины с одной и той же окрестностью, то граф  $G_2$  связан;*
- 2) *если в графе  $G_1$  найдутся две вершины с одной и той же замкнутой окрестностью, то граф  $G_2$  связан.*

С помощью этих результатов можно записать символически группы всех графов, имеющих не более 4 вершин (см. табл. 14.3).

Таблица 14.3

Группы связанных графов с небольшим числом вершин

Граф	Группа	Граф	Группа
	$S_1$		$S_2 + S_2$
	$S_2$		$S_2 + E_2$
	$S_3$		$D_4$
	$E_1 + S_2$		$S_2[E_2]$
	$S_4$		$E_1 + S_3$

Группа графа  $K_2$  —  $x$  уже приводилась в качестве примера. В табл. 14.3 не приведены группы несвязных графов, но их можно получить, используя теорему 14.4.

Более сложны условия идентичности группы лексикографического произведения двух графов и композиции их групп. Это наводит на мысль, что для реализации с точностью до группового изоморфизма композиции групп можно использовать другую операцию (на графах).

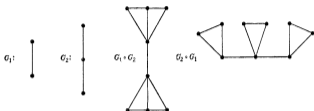


Рис. 14.3. Два графа и их две короны.

*Короной*  $G_1 \circ G_2$  двух графов  $G_1$  и  $G_2$  (см. Фрухт и Харари [1]) называется граф  $G$ , который получается следующим образом: возьмем одну копию графа  $G_1$ , имеющего  $p_1$  вершин, и  $p_1$  копий графа  $G_2$  и последовательно соединим  $i$ -ю вершину графа  $G_1$  с каждой вершиной  $i$ -й копии графа  $G_2$ . На рис. 14.3 показаны две различные короны  $G_1 \circ G_2$  и  $G_2 \circ G_1$  графов  $G_1 = K_2$  и  $G_2 = K_{1,2}$ . Из определения короны следует, что  $G_1 \circ G_2$  имеет  $p_1(1+p_2)$  вершин и  $q_1 + p_1q_2 + p_1p_2$  ребер.

**Теорема 14.9.** *Группу короны двух графов  $G_1$  и  $G_2$  можно явно выразить через композицию их групп, а именно*

$$\Gamma(G_1 \circ G_2) = \Gamma(G_1) [E_1 + \Gamma(G_2)], \quad (14.14)$$

*тогда и только тогда, когда в графе  $G_1$  или  $\bar{G}_2$  нет изолированных вершин.*

Применяя следствие 14.6 (а) к слагаемому  $E_1$  в формуле (14.14), получаем

**Следствие 14.9 (а).** *Группа короны  $G_1 \circ G_2$  двух графов  $G_1$  и  $G_2$  изоморфна композиции  $\Gamma(G_1) [\Gamma(G_2)]$  их групп тогда и только тогда, когда в графе  $G_1$  или  $\bar{G}_2$  нет изолированных вершин.*

### Графы с данной группой

Кёниг [2, стр. 5] поставил вопрос: «Когда данная абстрактная группа изоморфна группе некоторого графа?» Конструктивное решение этой задачи было дано Фрухтом [1], доказавшим, что каждая

группа есть группа автоморфизмов некоторого графа. Для доказательства он использовал понятие «цветного графа группы», введенное Кэли [3]. Определим это понятие. Пусть  $F = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$  — конечная группа порядка  $n$  с единичным элементом  $f_0$ . Пусть различным элементам  $f_i$  из  $F$ , отличным от единичного, приписаны различные цвета.

Цветной граф группы  $F$  — обозначается  $D(F)$  — это полный симметрический ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с множеством элементов группы  $F$ . Далее, каждой дуге орграфа  $D(F)$ , скажем идущей из вершины  $f_i$  в вершину  $f_j$ , приписывается цвет, связанный с элементом  $f_i^{-1}f_j$  группы  $F$ . Конечно, на самом деле мы просто отмечаем как вершины, так и дуги орграфа  $D(F)$  элементами группы  $F$ .

В качестве примера рассмотрим циклическую группу порядка 3,  $C_3 = \{0, 1, 2\}$ . Цветной граф  $D(C_3)$  показан на рис. 14.4.

Фрухт получил также следующий простой, но очень полезный результат.

Лемма 14.10 (а). Каждая конечная группа  $F$  изоморфна группе тех автоморфизмов орграфа  $D(F)$ , которые сохраняют цвета дуг.

Чтобы построить граф  $G$ , группа (автоморфизмов)  $\Gamma(G)$  которого изоморфна  $F$ , Фрухт заменяет каждую дугу  $f_i f_j$  орграфа  $D(F)$  некоторым графом с двумя «корнями».

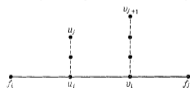


Рис. 14.5. Граф с двумя корнями, заменяющий дугу  $f_i f_j$ .

При этом дуги одного цвета заменяются одним и тем же графом. На рис. 14.5 приведен граф, которым заменяется дуга  $f_i f_j$ . Обозначим  $f_i^{-1}f_j = f_k$  и введем новые вершины  $\{u_m\}$  и  $\{v_m\}$  так, чтобы простые цепи, соединяющие  $u_i$  с  $u_j$  и  $v_i$  с  $v_{j+1}$ , содержали соответственно  $2k-2$  и  $2k-1$  вершин. В сущности, в конструкции Фрухта с каждой дугой  $f_i f_j$  сопоставляется цветной неориентированный отросток. Получаемый в результате граф  $G$  имеет  $n^2(2n-1)$  вершин и  $\Gamma(G) \cong F$ .

Теорема 14.10. Для каждой конечной абстрактной группы  $F$  существует такой граф  $G$ , что группы  $\Gamma(G)$  и  $F$  изоморфны.

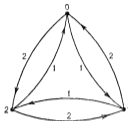


Рис. 14.4. Цветной граф циклической группы  $C_3$ .

Граф, полученный указанным выше способом для циклической группы  $C_3$ , изображен на рис. 14.6, а. На примере этого графа должно быть ясно, что число вершин в любом построенном таким образом графе избыточно. Графы с данной группой, имеющие меньшее количество вершин, легко получить, если известно, что эта группа имеет  $m < n$  образующих. Тогда в цветном графе преобразуются

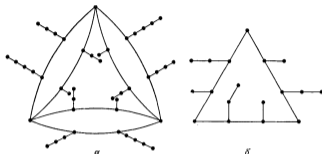


Рис. 14.6. Граф Фрухта с группой  $C_3$  и меньший граф с той же группой.

только те ориентированные ребра, которые соответствуют  $m$  образующим. Таким образом для данной группы можно построить граф, содержащий  $n(m+1)(2m+1)$  вершин. Поскольку группа  $C_3$  порождается одним элементом, то для  $C_3$  существует граф с 18 вершинами. Он показан на рис. 14.6, б.

Неэффективность и этого способа построения демонстрируется на графе, представленном на рис. 14.7. Этот граф является одним из двух графов, имеющих наименьшее число вершин и циклическую группу автоморфизмов порядка 3. Они состоят из 9 вершин и 15 ребер (Харари и Палмер [3]).



Рис. 14.7. Наименьший граф с группой  $C_3$ .

Позже Фрухт [2] показал, что можно усилить этот результат, а именно что существует кубический граф  $G$ , удовлетворяющий теореме 14.10. Становится

понятным, что требование наличия у графа  $G$  данной абстрактной группы автоморфизмов не налагает жестких ограничений на структуру графа. Действительно, Сабидусси [2] показал, что существует много графов с данной абстрактной группой, имеющих одно из нескольких характерных свойств, таких, как связность, хроматическое число, степень регулярности и др.

**Теорема 14.11.** Пусть даны произвольная конечная абстрактная нетривиальная группа  $F$  и целое число  $j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ). Тогда существует бесконечно много негомеоморфных связных графов  $G$ , которые не имеют вершин, неподвижных при действии любого автоморфизма,  $\Gamma(G) \cong F$ , и которые обладают свойствами  $P_j$ , определяемыми следующим образом:

$P_1$ :  $\kappa(G) = n$ ,  $n \geq 1$ ,

$P_2$ :  $\chi(G) = n$ ,  $n \geq 2$ ,

$P_3$ :  $G$  — регулярный граф степени  $n$ ,  $n \geq 3$ ,

$P_4$ : граф  $G$  имеет остовный подграф, гомеоморфный данному графу.

После опубликования этой теоремы Избицкий [1] рассмотрел задачу построения графа с данной группой, когда граф обладает одновременно несколькими (более одного) из перечисленных в теореме свойств. Используя результаты Сабидусси [2] о произведении двух графов и найдя некоторые новые конструкции, он получил соответствующий результат для регулярных графов произвольной степени и с произвольным хроматическим числом.

**Следствие 14.11 (а).** Для данных произвольной конечной группы  $F$  и целых чисел  $n$  и  $m$  ( $n \geq 3$ ,  $2 \leq m \leq n$ ) существует бесконечное число таких графов  $G$ , что  $\Gamma(G) \cong F$ ,  $\chi(G) = m$  и  $G$  — регулярные графы степени  $n$ .

### Симметрические графы

Изучение симметрии графов было начато Фостером [1], составившим таблицы симметрических кубических графов. Две вершины  $u$  и  $v$  графа  $G$  называются *подобными*, если для некоторого

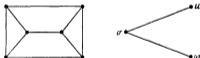


Рис. 14.8. Вершинно-симметрический и реберно-симметрический графы.

автоморфизма  $\alpha$  этого графа  $\alpha(u) = v$ . *Неподвижная* вершина не подобна ни одной другой вершине. Два ребра  $x_1 = u_1v_1$  и  $x_2 = u_2v_2$  называются *подобными*, если существует такой автоморфизм  $\alpha$  графа  $G$ , что  $\alpha(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$ .

Будем рассматривать сейчас только графы, не имеющие изолированных вершин. Граф называется *вершинно-симметрическим*, если любая пара его вершин подобна, и *реберно-симметрическим*, если любая пара его ребер подобна. Граф называется *симметрическим*, если он вершинно- и реберно-симметричен. На рис. 14.8

приведены графы с наименьшим числом вершин, один из которых вершинно-симметричен, но не реберно-симметричен (треугольная призма  $K_3 \times K_2$ ), а другой наоборот (звезда  $K_{1,2}$ ).

Заметим, что если  $\alpha$  — автоморфизм графа  $G$ , то графы  $G - u$  и  $G - \alpha(u)$  изоморфны. Поэтому, если вершины  $u$  и  $v$  подобны, то  $G - u \cong G - v$ . Удивительно, но утверждение, обратное этому, не верно <sup>1)</sup>. Примером тому служит граф, изображенный на рис. 14.9.



Рис. 14.9. Контрпример к гипотезе.

Он имеет наименьшее число вершин из всех графов, у которых существуют такие неподобные вершины  $u$  и  $v$ , что  $G - u \cong G - v$  (см. Харари и Палмер [5]).

*Степенью ребра*  $x = uv$  называется неупорядоченная пара  $(d_1, d_2)$ , где  $d_1 = \deg u$  и  $d_2 = \deg v$ . Граф называется *реберно-регулярным*,

если все его ребра имеют одну и ту же степень. На рис. 14.10 показан полный двудольный граф  $K_{2,2}$ ; он реберно-симметричен, реберно-регулярен степени  $(2,2)$ , но не является вершинно-симметрическим.



Рис. 14.10. Реберно-регулярный реберно-симметрический граф.

описываются свойства реберно-симметрических графов. Сделаем очевидное, но важное замечание: любой реберно-симметрический граф реберно-регулярен.

**Теорема 14.12.** *Реберно-симметрический граф без изолированных вершин является или вершинно-симметрическим, или двудольным.*

**Доказательство.** Рассмотрим реберно-симметрический граф  $G$  без изолированных вершин, имеющий  $q$  ребер. Тогда для любого ребра  $x$  существует по крайней мере  $q$  автоморфизмов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  графа  $G$ , отображающих ребро  $x$  на множество ребер графа  $G$ . Пусть  $x = v_1 v_2$ ,  $V_1 = \{\alpha_1(v_1), \dots, \alpha_q(v_1)\}$  и  $V_2 = \{\alpha_1(v_2), \dots, \alpha_q(v_2)\}$ . Поскольку в  $G$  нет изолированных вершин, объединение множеств

<sup>1)</sup> Одно из предлагавшихся доказательств гипотезы Улама в сильной степени зависело от этого обратного утверждения.

$V_1$  и  $V_2$  дает  $V$ . Рассмотрим отдельно два случая: множества  $V_1$  и  $V_2$  не пересекаются и множества  $V_1$  и  $V_2$  пересекаются.

*Случай 1.* Если  $V_1$  и  $V_2$  не пересекаются, то  $G$  — двудольный граф.

Пусть  $u_1$  и  $w_1$  — любая пара вершин из  $V_1$ . Если они смежны, обозначим через  $y$  ребро, соединяющее их. Тогда  $\alpha_t(x) = y$  для некоторого автоморфизма  $\alpha_t$ . Отсюда следует, что одна из этих вершин принадлежит  $V_1$ , а другая  $V_2$  вопреки предположению. Следовательно, подмножества  $V_1$  и  $V_2$  образуют такое разбиение множества  $V$ , что в каждом из них нет смежных вершин, т. е.  $G$  — двудольный граф.

*Случай 2.* Если  $V_1$  и  $V_2$  пересекаются, то  $G$  — вершинно-симметрический граф.

Пусть  $u$  и  $w$  — любая пара вершин графа  $G$ . Нам нужно показать, что  $u$  и  $w$  подобны. Если  $u$  и  $w$  принадлежат одновременно или  $V_1$ , или  $V_2$ , то рассмотрим два автоморфных отображения: отображение  $\alpha$  ребра  $x$  на ребро, инцидентное  $u$ , и отображение  $\beta$  ребра  $x$  на ребро, инцидентное  $w$ . Тогда  $\beta\alpha^{-1}(u) = w$ , так что любые две вершины  $u$  и  $w$ , принадлежащие одному множеству, подобны. Если же  $u$  принадлежит  $V_1$ , а  $w$  принадлежит  $V_2$ , обозначим через  $v$  вершину, принадлежащую  $V_1$  и  $V_2$ . Так как  $v$  подобна и  $u$ , и  $w$ , то  $u$  и  $w$  также подобны.

*Следствие 14.12 (а).* Если  $G$  — реберно-симметрический граф и степень каждого ребра равна  $(d_1, d_2)$ ,  $d_1 \neq d_2$ , то граф  $G$  двудольный.

*Следствие 14.12 (б).* Если  $G$  — реберно-симметрический граф с нечетным числом вершин и степень каждого ребра равна  $(d_1, d_2)$ ,  $d_1 = d_2$ , то граф  $G$  вершинно-симметрический.

*Следствие 14.12 (в).* Если реберно-симметрический граф  $G$  имеет четное число вершин и регулярен степени  $d \geq p/2$ , то он вершинно-симметрический.

Сравнивая эти следствия, можно заметить, что из всех реберно-симметрических графов не описаны лишь те, которые имеют четное число вершин и регулярен степени  $d < p/2$ . Примером реберно-симметрического графа, который также вершинно-симметричен и двудольен, служит многоугольник с шестью вершинами. Икосаэдр, додекаэдр и граф Петерсена дают примеры реберно-симметрических графов, которые являются вершинно-симметрическими, но не двудольными. Наконец, как показал Фолкман [1], не все регулярные реберно-симметрические графы вершинно-симметричны.

*Теорема 14.13.* Для любого числа  $p \geq 20$ , делящегося на 4, существует регулярный граф  $G$  с  $p$  вершинами, являющийся реберно-симметрическим, но не вершинно-симметрическим.



## Графы с более сильной симметрией

Следуя Татту [15], определим  $n$ -путь как маршрут длины  $n$  с выделенной начальной вершиной, в котором нет повторяющихся ребер. Граф  $G$  называется  $n$ -транзитивным,  $n \geq 1$ , если в нем имеется  $n$ -путь и для любых двух  $n$ -путей всегда найдется автоморфизм, отображающий один из этих путей на другой. Очевидно, что для любого  $n$  простой цикл длины  $n$   $n$ -транзитивен и простая цепь длины  $n$   $n$ -транзитивна. Заметим, что не каждый реберно-симметрический граф 1-транзитивен. Например, в реберно-симметрическом графе  $K_{1,2}$ , представленном на рис. 14.8, нет автоморфизма, переводящего 1-путь  $uv$  на 1-путь  $vw$ .



Рис. 14.11. Граф Хивуда.

Если  $W$  есть  $n$ -путь  $v_0v_1 \dots v_n$  и  $u$  — любая вершина, отличная от  $v_{n-1}$  и смежная с  $v_n$ , то  $n$ -путь  $v_1 \dots v_n u$  называется *последователем*  $n$ -пути  $W$ . Если  $W$  оканчивается висячей вершиной графа  $G$ , то очевидно, что  $W$  не имеет последователей. Поэтому в следующих двух теоремах говорится о графах без висячих вершин. Сформулируем теперь достаточное условие (Татт [15, стр. 60])  $n$ -транзитивности.

**Теорема 14.14.** Пусть  $G$  — связный граф без висячих вершин. Если  $W$  — такой  $n$ -путь, что существуют автоморфизмы графа  $G$ , отображающие  $W$  на любой из его последователей, то граф  $G$   $n$ -транзитивен.

Имеется тесная связь между  $n$ -транзитивностью графа и его обхватом (Татт [15, стр. 61]).

**Теорема 14.15.** Если связный  $n$ -транзитивный граф, не содержащий висячих вершин и отличный от простого цикла, имеет обхват  $g$ , то  $n \leq 1 + g/2$ .

С помощью теоремы 14.14 можно показать, что граф Хивуда, изображенный на рис. 14.11, 4-транзитивен. Более того, как легко видно из теоремы 14.15, этот граф не является 5-транзитивным.

Существуют регулярные графы, называемые *клетками*, обладающие в некотором смысле еще более сильной симметрией, чем  $n$ -транзитивные графы. Граф  $G$  называется  $n$ -унитранзитивным<sup>1)</sup>, если он связный, кубический и  $n$ -транзитивный и если для любых двух  $n$ -путей  $W_1$  и  $W_2$  существует точно один такой автоморфизм  $\alpha$  графа  $G$ , что  $\alpha W_1 = W_2$ . Кубический граф, имеющий обхват  $n$  и наименьшее возможное число вершин, называется  $n$ -клеткой,  $n \geq 3$ . Информацию о клетках (см. Татт [15, стр. 71—83]) содержит

<sup>1)</sup> В монографии Татта [15, стр. 62] такой граф называется  $n$ -регулярным.

**Теорема 14.16.** Для любого  $n \geq 3$  существует  $n$ -клетка. Для любого  $n$ , удовлетворяющего неравенствам  $3 \leq n \leq 8$ , существует единственная  $n$ -клетка. Каждая из этих  $n$ -клеток для некоторых  $t = t(n)$  является  $t$ -унитранзитивным графом:  $t(3) = 2$ ,  $t(4) = t(5) = 3$ ,  $t(6) = t(7) = 4$  и  $t(8) = 5$ .

Теперь описаны все известные клетки (см. табл. 14.4).

Таблица 14.4

## Известные клетки

$n$	$n$ -клетка	$n$	$n$ -клетка
3	$K_4$ (показана на рис. 2.1)	6	Граф Хивуда (рис. 14.11)
4	$K_{3,3}$ (рис. 2.5)	7	Граф Мак-Джи (рис. 14.12)
5	Граф Петерсена (рис. 9.6)	8	Граф Леви (рис. 14.13)

Для  $n > 5$   $n$ -транзитивные кубические графы не существуют, следовательно, не существуют и  $n$ -унитранзитивные графы (см. Татт [3]). Однако, кроме указанных выше клеток для  $n \leq 5$  существуют и другие  $n$ -унитранзитивные графы. В частности, 1-унитранзитивный граф, имеющий 432 вершины и обхват 12, построен Фрух-

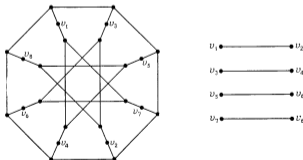


Рис. 14.12. 7-клетка, равная объединению указанных выше подграфов с соответствующей нумерацией.

том [4], куб  $Q_3$  и додекаэдр (рис. 1.5) 2-унитранзитивны, а 3-унитранзитивные графы, отличные от 4- и 5-клеток, найдены Коксетером [1]. Один из них показан на рис. 14.14.

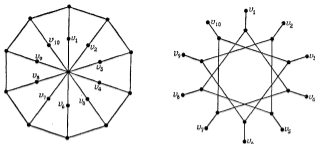


Рис. 14.13. 8-клетка, равная объединению указанных выше подграфов с соответствующей нумерацией.

Этот граф принадлежит классу графов, введенных в статье Чартрэнда и Харари [1]. Для любой подстановки  $\alpha$  из  $S_p$  назовем  $\alpha$ -перестановочным графом для помеченного графа  $G$  объединение

двух непересекающихся копий  $G_1$  и  $G_2$  графа  $G$ , между которыми проведены ребра, соединяющие вершины  $v_i$  графа  $G_1$  с вершинами  $v_{\alpha(i)}$  графа  $G_2$ . Так, на рис. 14.14 показан перестановочный граф для простого цикла  $C_{10}$ . На обложке этой книги приведены все четыре перестановочных графа для  $C_5$ .

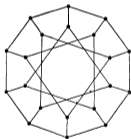


Рис. 14.14. Другой 3-унитранзитивный граф.

### Упражнения

14.1. Найти группы следующих графов:

- а)  $\overline{3K_2}$ , б)  $\overline{K_2} \dot{+} C_4$ , в)  $K_{m,m}$ , г)  $K_{1,2}[K_2]$ , д)  $K_4 \cup C_4$ .

14.2. Если в графе  $G$  есть вершина, не принадлежащая простому циклу длины четыре, то  $G$  — простой граф.

(Сабидусси [2])

14.3. Если  $G$  — связный граф с  $p > 3$  вершинами, то его реберный граф  $L(G)$  простой тогда и только тогда, когда граф  $G$  не есть  $K_{m,n}$  при  $m, n \geq 2$ .

(Палмер [1])

14.4. Построить граф с 9 вершинами и 15 ребрами (отличный от графа, изображенного на рис. 14.7), у которого группой автоморфизмов является циклическая группа порядка 3.

(Харари и Палмер [3])

14.5. Построить связный граф с 11 вершинами, у которого группой автоморфизмов является циклическая группа порядка 6.

14.6. Построить граф с 14 вершинами, у которого группой автоморфизмов является циклическая группа порядка 7.

(Сабидусси [3])

\*14.7. Обозначим через  $c(m)$  наименьшее число вершин в графах, у которых группа автоморфизмов изоморфна группе  $C_m$ . Тогда значения  $c(m)$  при  $m=n^r$  и  $n$  простым равны:

а)  $c(2^r) = 2$  и  $c(2^r) = 2^r + 6$  при  $r > 1$ ;

б)  $c(n^r) = n^r + 2n$  при  $n = 3, 5$ ;

в)  $c(n^r) = n^r + n$  при  $n \geq 7$ .

(Замечание:  $c(m)$  можно также вычислить и тогда, когда  $m$  не равно степени простого числа, но соответствующее выражение будет очень сложным.)

(Мериветер)

14.8. Не существует нетривиальных асимметрических графов, имеющих меньше 6 вершин.

14.9. Не существует кубических асимметрических графов, имеющих меньше 12 вершин.

14.10. Построить кубический граф, у которого группой автоморфизмов является циклическая группа порядка 3.

14.11. Группа (автоморфизмов) графа Петерсена идентична реберной группе графа  $K_5$ .

14.12. Существует граф  $G$ , у которого группой автоморфизмов является диэдральная группа  $D_p$ , причем граф  $G$  отличен от простого цикла и его дополнения. Каково наименьшее значение  $p$ , для которого это утверждение справедливо?

14.13. Для  $p \geq 3$  не существует таких графов  $G$ , что  $\Gamma(G) \cong A_p$  или  $\Gamma(G) \cong S_p$ . Для  $p \geq 4$  не существует таких орграфов  $D$ , что  $\Gamma(D) \cong A_p$ .

(Каньо [1], Харари и Палмер [10])

14.14. Единственный связный граф  $G$ , у которого группа автоморфизмов изоморфна группе  $S_n$ ,  $n \geq 3$ , — это

а)  $K_n$ , если  $G$  имеет  $n$  вершин;

б)  $K_{1,n}$ , если  $G$  имеет  $n+1$  вершин;

в)  $K_1 + \bar{K}_{1,n}$ , если  $G$  имеет  $n+2$  вершин.

(Гевирц и Квинтас [1])

14.15. Пусть даны конечная группа  $F$  и граф  $G(F)$ , полученный по теореме Фрухта. Тогда каждый нетривиальный автоморфизм графа  $G(F)$  не имеет неподвижных вершин.

14.16. Каково наименьшее дерево  $T$  (с наименьшим числом вершин), содержащее такие неподобные вершины  $u$  и  $v$ , что  $T-u \cong T-v$ ?

(Харари и Палмер [2])

14.17. Любой связный вершинно-симметрический граф  $G$  является блоком.

14.18. Звездным многоугольником называется такой граф  $G$ , содержащий основной цикл  $v_1 v_2 \dots v_p v_1$ , что если в графе  $G$  имеется ребро  $v_i v_n$ , то в нем имеются также все ребра  $v_i v_j$ , где  $j-i \equiv n-1 \pmod{p}$ . Связный граф  $G$  с простым числом  $p$  вершин вершинно-симметричен тогда и только тогда, когда  $G$  — звездный многоугольник.

(Тёрнер [1])

14.19. Доказать или опровергнуть следующие восемь утверждений: если два графа вершинно-симметричны (реберно-симметричны), то таковы же их соединение, произведение, композиция и корона.

14.20. Каждый симметрический связный граф нечетной степени 1-транзитивен.

(Гатт [15, стр. 59])

14.21. Каждый симметрический связный кубический граф  $n$ -транзитивен для некоторого  $n$ .

(Татт [15, стр. 63])

14.22. Найти необходимые и достаточные условия того, что вершинная и реберная группы (автоморфизмов) графа идентичны.

(Харари и Палмер [15])

14.23. Если  $G$  — связный граф, то  $\Gamma(G) \cong \Gamma(L(G))$  тогда и только тогда, когда  $G \neq K_2, K_{2,2}+x, K_4-x, K_4$ .

(Уитни [2])

14.24. Если граф  $G$  вершинно-симметричен, то его группа  $\Gamma(G)$  имеет вид  $S_2 + S_2 + \dots + S_2$ .

(Мак-Эндрю [2])

14.25. Единственная 2-транзитивная группа подстановок степени  $p$ , которая является группой автоморфизмов некоторого графа, есть  $S_p$ .

14.26. Пусть  $A$  и  $B$  — две группы подстановок, действующие соответственно на множествах  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  и  $Y$ . Экспоненцирование  $[B]^A$  действует на функции из множества  $Y^X$ . Для любой подстановки  $\alpha$  из  $A$  и любой последовательности  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  из  $B$  существует такая единственная подстановка  $[\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d]$  из  $[B]^A$ , что для  $x_i$  из  $X$  и  $f$  из  $Y^X$

$$[\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d] f(x_i) = \beta_{if}(\alpha x_i).$$

Группой куба  $Q_n$  является  $[S_2]^{S_n}$ , а реберной группой графа  $K_{n,n}$  является  $[S_n]^{S_2}$ .

(Харари [9])

\*14.27. Существует единственный наименьший регулярный граф степени 4, имеющий обхват 5. В нем 19 вершин и его группа (автоморфизмов) изоморфна диэдральной группе  $D_{12}$ .

(Робертсон [1])

14.28. Пусть  $G$  — трехсвязный планарный  $(p, q)$ -граф, у которого группа (автоморфизмов) имеет порядок  $s$ . Число  $4q/s$  целое, и  $s=4q$  тогда и только тогда, когда  $G$  совпадает с одним из пяти правильных многогранников (или платоновых графов).

(Вайнберг [2], Харари и Татт [3])

14.29. Группу автоморфизмов любого дерева можно получить из симметрических групп с помощью операций сложения и композиции.

(Поля [1, стр. 209])

14.30. Набор  $p-1$  транспозиций  $(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_{p-1} a_p)$  объектов порождает симметрическую группу  $S_p$  тогда и только тогда, когда граф, имеющий  $p$  вершин и  $p-1$  ребер вида  $a_i a_{i+1}$ , является деревом.

(Поля [1])

14.31.  $\alpha$ -перестановочный граф помеченного двусвязного графа  $G$  планарен тогда и только тогда, когда  $G$  — внешнепланарный граф и с помощью циклической нумерации его вершин можно нарисовать его на плоскости так, чтобы  $\alpha$  была подстановкой из диэдральной группы  $D_p$ .

(Чартрэнд и Харари [3])

\*14.32. Эндоморфизмом графа  $G$  называется гомоморфизм графа  $G$  в себя. Полугруппой графа называется множество всех его эндоморфизмов. Каждая конечная полугруппа с единицей изоморфна полугруппе некоторого графа.

(Хедрлин и Пультр [1])

\*14.33. Наименьший нетривиальный граф, имеющий только тождественный эндоморфизм, содержит 8 вершин.

(Хедрлин и Пультр [2])

\*14.34. Для каждого  $m \geq 2$  существует единственный граф с  $m+2$  вершинами, группа автоморфизмов которого изоморфна симметрической группе  $S_m$  степени  $m$ .

(Гевирц, Квинтас [2])

## ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

---

Как я люблю тебя? Позволь мне перечислить!  
Элизабет Баррет Браунинг<sup>1)</sup>

Имеются основания утверждать, что методы перечисления в комбинаторном анализе можно рассматривать скорее как искусство, а не как науку. Будем надеяться, что с появлением и развитием более общих и более мощных концепций и методик эта ситуация коренным образом изменится. Первые работы по теории перечисления графов принадлежат Кэли, Редфилду и Пойа. На самом деле (см. Харари и Палмер [11]) все известные в настоящее время методы перечисления графов предвосхищены в уникальной работе Редфилда [1], которая была опубликована в 1927 г., но не была оценена по достоинству.

Мы начнем с самых простых задач перечисления, а именно с перечисления помеченных графов. Затем приведем классическую теорему перечисления, принадлежащую Пойа, и применим ее к нахождению перечисляющих рядов для деревьев и других видов графов. Будет дано также обобщение теоремы Пойа (так называемая теорема перечисления степенной группы), полезное при исследовании проблем перечисления, в которых эквивалентные классы задаются с помощью двух групп подстановок. Ради полноты мы закончим изложение списками решенных и нерешенных проблем в теории перечисления графов.

### Помеченные графы

Все помеченные графы с тремя вершинами показаны на рис. 15.1. Мы видим, что 4 различных графа с 3 вершинами приводят к 8 различным помеченным графам. Для нахождения числа помеченных графов с  $p$  вершинами нужно только заметить, что каждое из  $\binom{p}{2}$  возможных ребер либо принадлежит графу, либо нет.

**Теорема 15.1.** *Число помеченных графов с  $p$  вершинами равно  $2^{\binom{p}{2}}$ .*

---

<sup>1)</sup> Элизабет Баррет Браунинг (1806—1861) — английская поэтесса. — *Прим. перев.*

Следствие 15.1 (а). Число помеченных  $(p, q)$ -графов равно

$$\binom{p}{q}.$$

Кэли [5] первым установил соответствующий результат для деревьев: число помеченных деревьев с  $p$  вершинами равно  $p^{p-2}$ .

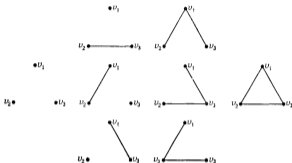


Рис. 15.1. Помеченные графы с 3 вершинами.

С 1889 г., когда появилась работа Кэли, было найдено много различных доказательств этой формулы. Наброски их приведены Муном [3]; один из них дан в следствии 13.4 (а).

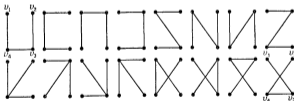


Рис. 15.2. Помеченные деревья с 4 вершинами.

На рис. 15.2 показаны все 16 помеченных деревьев с 4 вершинами. Пометки на этих деревьях следует понимать так, как это показано на первом и последнем деревьях. Заметим, что среди этих 16 помеченных деревьев 12 изоморфны цепи  $P_4$  и 4 изоморфны графу  $K_{1,3}$ . Порядок группы  $\Gamma(P_4)$  равен 2, а порядок группы  $\Gamma(K_{1,3})$  равен 6. Так как здесь  $p=4$ , то имеем  $12=4!/|\Gamma(P_4)|$  и  $4=4!/|\Gamma(K_{1,3})|$ . Ес-

тественное обобщение этих двух равенств справедливо не только для деревьев, но также для графов, орграфов, отношений и т. д.; см. Харари, Рид [1] и Харари, Палмер, Рид [1].

**Теорема 15.2.** *Данный граф  $G$  можно пометить  $p!/|\Gamma(G)|$  способами.*

**Набросок доказательства.** Пусть  $A$  — группа подстановок, действующая на множестве  $X$ . Для всякого элемента  $x$  из  $X$  *орбитой*  $\theta(x)$  элемента  $x$  называется подмножество множества  $X$ , состоящее из всех таких элементов  $y$  из  $X$ , что  $\alpha x = y$  для некоторой подстановки  $\alpha$  из  $A$ . *Стабилизатором*  $A(x)$  элемента  $x$  называется подгруппа группы  $A$ , состоящая из всех подстановок из  $A$ , оставляющих элемент  $x$  неподвижным. Теорема следует из хорошо известной формулы  $|\theta(x)| \cdot |A(x)| = |A|$  и ее интерпретации в настоящем контексте.

### Теорема пересчета Пойа

Многие проблемы пересчета формулируются так, что ответ можно дать, найдя формулу для числа орбит (систем транзитивности), определяемых группой подстановок. Часто орбитам приписываются веса; Пойа [1] показал, как получить формулу, перечисляющую орбиты в соответствии с весами и зависящую от циклической структуры подстановок данной группы. Обращение теоремы Пойа связано с обобщением хорошо известной перечислительной формулы, принадлежащей Бернсайдю [1, стр. 191].

**Теорема 15.3.** *Пусть  $A$  — группа подстановок, действующая на множестве  $X$  с орбитами  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , и  $\omega$  — функция, приписывающая веса каждой орбите (весовая функция). Более того,  $\omega$  определяется на  $X$  так, что  $\omega(x) = \omega(\theta_i)$ , если  $x \in \theta_i$ . Тогда сумма весов орбит равна*

$$|A| \sum_{i=1}^n \omega(\theta_i) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{x \in \alpha x} \omega(x). \quad (15.1)$$

**Доказательство.** Мы уже видели, что порядок  $|A|$  группы  $A$  равен  $|A(x)| \cdot |\theta(x)|$  для любого  $x$  из  $X$ , где  $A(x)$  — стабилизатор элемента  $x$ . Кроме того, поскольку весовая функция постоянна на элементах данной орбиты, то

$$|\theta_i| \omega(\theta_i) = \sum_{x \in \theta_i} \omega(x)$$

для каждой орбиты  $\theta_i$ . Сопоставляя эти факты, находим, что

$$|A| \omega(\theta_i) = \sum_{x \in \theta_i} |A(x)| \omega(x).$$



Суммируя по всем орбитам, имеем

$$|A| \sum_{i=1}^n \omega(\theta_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in \theta_i} |A(x)| \omega(x),$$

откуда сразу следует (15.1).

Традиционную форму леммы Бернсайда теперь можно установить как следствие этой теоремы. Пусть для подстановки  $\alpha$ , представленной в виде произведения непересекающихся циклов,  $j_k(\alpha)$  обозначает число циклов длины  $k$ .

Следствие 15.3 (а) (лемма Бернсайда). Число  $N(A)$  орбит группы подстановок  $A$  равно

$$N(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha).$$

Пусть  $A$  — группа подстановок порядка  $m$  и степени  $d$ . Цикловым индексом  $Z(A)$  называется многочлен от  $d$  переменных  $a_1, a_2, \dots, a_d$ , задаваемый формулой

$$Z(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^d a_k^{j_k(\alpha)}. \quad (15.2)$$

Так как для любой подстановки  $\alpha$  числа  $j_k = j_k(\alpha)$  удовлетворяют соотношению

$$1j_1 + 2j_2 + \dots + dj_d = d,$$

они составляют разбиение целого положительного числа  $d$ . Обычно для описания  $\alpha$  применяют векторное обозначение  $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_d)$ . Заметим, что этот метод выражения разбиений отличается от использованного в гл. 6; например, разбиение  $5 = 3 + 1 + 1$  соответствует вектору  $(j) = (2, 0, 1, 0, 0)$ .

Все классические проблемы перечисления, к которым применяется теорема Пойа, имеют одну и ту же общую форму. Пусть дана область определения  $D$ , множество значений  $R$  и весовая функция  $\omega$ , определенная на  $R$ . В качестве примера можно взять весовую функцию  $\omega$ , приписывающую каждому  $r \in R$  упорядоченную пару  $\omega(r) = (\omega_1 r, \omega_2 r)$  неотрицательных целых чисел. Объекты, подлежащие счету, — это функции, действующие из  $D$  в  $R$ . Для завершения постановки проблемы надо условиться о том, когда две функции из  $R^D$  рассматриваются как неразличимые (эквивалентные). Это достигается указанием группы  $A$ , действующей на  $D$ ; при этом две функции считаются эквивалентными, когда они принадлежат одной и той же орбите из  $E^A$ , где  $E$  — тождественная группа степени  $|R|$ .

Задержимся на минуту и проиллюстрируем эти идеи на «проблеме ожерелья». Рассмотрим ожерелья, скажем, с 4 бусинками, в которых одни бусинки красные, а другие синие. Два таких ожерелья

считаются эквивалентными, если их можно сделать «конгруэнтными» с сохранением цветов бусинок. Здесь  $D$  — множество ячеек (мест), в которых могут находиться бусинки,  $R$  — множество {красная бусинка, синяя бусинка}, а функция  $f \in R^D$  — приписывание бусинок каждому месту (каждой ячейке) на ожерелье. В этом примере группа  $A$  — диэдральная группа  $D_4$ ; весовую функцию  $w$  можно определить равенствами  $w(\text{красная бусинка}) = (1, 0)$  и  $w(\text{синяя бусинка}) = (0, 1)$ .

Следуя интуитивной терминологии Пойа, элементы области определения  $D$  будем называть *местами*, элементы множества значений — *фигурами*, функции — *конфигурациями*, а группу подстановок  $A$  — *группой конфигураций*. Припишем вес  $W(f)$  каждой функции  $f \in R^D$ :

$$W(f) = \prod_{d \in D} x^{w_1 f(d)} y^{w_2 f(d)}. \quad (15.3)$$

Легко видеть, что все функции из данной орбиты множества  $R^D$ , определяемой группой  $E^A$ , имеют один и тот же вес, так что вес орбиты можно определить как вес любой функции из нее.

Предположим, имеются  $c_{mn}$  фигур с весом  $(m, n)$  в  $R$  и  $C_{mn}$  орбит (эквивалентные классы конфигураций) с весом  $x^m y^n$  в  $R^D$ . *Перечисляющий ряд для фигур*

$$c(x, y) = \sum c_{mn} x^m y^n \quad (15.4)$$

нумерует элементы из  $R$ , приписывая им веса, а *перечисляющий ряд для конфигураций*

$$C(x, y) = \sum C_{mn} x^m y^n \quad (15.5)$$

является производящей функцией для классов эквивалентности функций  $f \in R^D$ . Теорема Пойа [1] дает возможность выразить  $C(x, y)$  через  $c(x, y)$ .

Если в (15.2) написать  $Z(A) = Z(A; a_1, a_2, \dots, a_d)$ , то для любой функции  $h(x, y)$

$$Z(A, h(x, y)) = Z(A; h(x, y), h(x^2, y^2), \dots, h(x^d, y^d)). \quad (15.6)$$

Теорема 15.4 (теорема перечисления Пойа). *Перечисляющий ряд для конфигураций получается подстановкой перечисляющего ряда для фигур в цикловой индекс группы конфигураций, т. е.*

$$C(x, y) = Z(A, c(x, y)). \quad (15.7)$$

Доказательство. Пусть  $\alpha$  — подстановка в группе  $A$  и  $\bar{\alpha}$  — соответствующая подстановка в степенной группе  $\bar{E}^A$ . Предположим сначала, что  $f$  — конфигурация, остающаяся неподвижной при действии  $\bar{\alpha}$ , и  $\zeta$  — цикл длины  $k$  в разложении  $\alpha$  на непересекающиеся циклы. Тогда  $f(d) = f(\zeta^k d)$  для каждого элемента  $d$  в

представлении  $\zeta$ , так что все элементы, переставляемые при помощи  $\zeta$ , должны иметь один и тот же образ при  $f$ . Обратно, если элементы каждого цикла подстановки  $\alpha$  имеют один и тот же образ при конфигурации  $f$ , то  $\tilde{\alpha}$  оставляет  $f$  неподвижной. Таким образом, все конфигурации, остающиеся неподвижными при действии  $\tilde{\alpha}$ , получаются с помощью независимого выбора элемента  $r$  из  $R$  для каждого цикла  $\zeta$  подстановки  $\alpha$  и проверки равенства  $f(d)=r$  для всех элементов  $d$ , переставляемых циклом  $\zeta$ . Тогда если  $w(r) = (m, n)$ , где  $m = \omega_r$  и  $n = \omega_r$ , и  $\zeta$  имеет длину  $k$ , то цикл  $\zeta$  вносит множитель  $\sum_{f \in R} (x^m y^n)^k$  в произведение, задающее сумму весов  $\sum_{f \in R} W(f)$ . Следовательно, так как

$$\sum_{r \in R} (x^m y^n)^k = c(x^k, y^k),$$

то для каждого  $\alpha$  из  $A$

$$\sum_{f \in \tilde{\alpha}} W(f) = \prod_{k=1}^{\infty} c(x^k, y^k)^{i_k(\alpha)}.$$

Суммируя обе части этого соотношения по всем подстановкам  $\alpha$  из  $A$  (или, что то же самое, по всем  $\tilde{\alpha}$  из  $E^A$ ) и деля обе части на  $|A| = |E^A|$ , получаем

$$\frac{1}{|E^A|} \sum_{\tilde{\alpha} \in E^A} \sum_{f \in \tilde{\alpha}} W(f) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^{\infty} c(x^k, y^k)^{i_k(\alpha)}. \quad (15.8)$$

Правая часть этого равенства есть  $Z(A, c(x, y))$ . Чтобы показать, что левая часть есть  $C(x, y)$ , применим тот вариант леммы Бернсайда, который дается теоремой 15.3. Сначала заметим, что для степенной группы  $E^A$  сумма весов орбит равна

$$\sum_{i=1}^n w(\theta_i) = \sum C_{m_i} x^{m_i} y^{n_i} = C(x, y). \quad (15.9)$$

Но, как следует из формулы (15.1), левые части в (15.9) и (15.8) совпадают, так что  $Z(A, c(x, y)) = C(x, y)$ ; теорема доказана.

Возвращаясь к упомянутой выше проблеме ожерелья с четырьмя бусинками, заметим, что цикловой индекс диэдральной группы  $D_4$  равен

$$Z(D_4) = \frac{1}{8} (a_1^4 + 2a_2^2 a_2 + 3a_2^2 + 2a_4), \quad (15.10)$$

а перечисляющий ряд для фигур имеет вид  $c(x, y) = x^4 y^0 + x^2 y^2 + x^0 y^4 = x + y$ . Подставляя  $x + y$  в (15.10) и учитывая (15.6), находим

$$\begin{aligned} Z(D_4, x + y) &= \frac{1}{8} \{ (x + y)^4 + 2(x + y)^2(x^2 + y^2) + \\ &\quad + 3(x^2 + y^2)^2 + 2(x^4 + y^4) \} = \\ &= x^4 + x^3 y + 2x^2 y^2 + x y^3 + y^4. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Коэффициент при  $x^m y^n$  в (15.11) равен числу различных ожерелий с четырьмя бусинками, из которых  $m$  красные и  $n$  синие. Эти 6 различных ожерелий показаны на рис. 15.3.

Случайно оказывается, что ожерелья можно также перечислить, используя в качестве перечисляющего ряда для фигур  $1+x$  вместо  $x+y$ . При этом красная бусинка имеет вес 1, а синяя бусинка — вес 0. Тогда в многочлене  $Z(D_4, 1+x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$  коэффициент при  $x^m$  равен числу ожерелий с  $m$  красными бусинками и, следовательно, с  $4-m$  синими бусинками; ср. с (15.11). Как мы

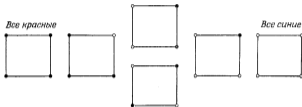


Рис. 15.3.

увидим в следующем разделе, перечисляющий ряд для фигур, имеющий вид  $1+x$ , играет важную роль в проблемах перечисления, так как  $x^0$  означает отсутствие фигуры, а  $x^1$  — ее наличие. Причина такой важности перечисляющего ряда  $1+x$  вскрывается в приводимом ниже следствии (см. Харари [22]) теоремы Пойа. Будем называть  $n$ -подмножеством множества  $X$  подмножество, содержащее ровно  $n$  элементов.

**Следствие 15.4 (а).** Если  $A$  — группа подстановок, действующая на  $X$ , то число индуцированных группой  $A$  орбит  $n$ -подмножества множества  $X$  равно коэффициенту при  $x^n$  в  $Z(A, 1+x)$ .

В приложениях теоремы перечисления Пойа часто встречаются определенные группы подстановок. Приведем формулы для цикловых индексов пяти важных групп подстановок, указанных в табл. 14.2. В формулах (15.12) и (15.13) суммирование ведется по всем разбиениям  $(j)$  числа  $p$ . В (15.14)  $\varphi(k)$  есть  $\varphi$ -функция Эйлера, ее значение при  $k \geq 2$  равно числу положительных целых чисел, меньших  $k$  и взаимно простых с  $k$ , причем по определению  $\varphi(1) = 1$ . Итак

$$Z(S_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod_{k=1}^p k^{j_k} j_k!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_p^{j_p}, \quad (15.12)$$

$$Z(A_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p! [1 + (-1)^{j_1 + j_2 + \dots}]}{\prod_{k=1}^p k^{j_k} j_k!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_p^{j_p}, \quad (15.13)$$

$$Z(C_p) = \frac{1}{p} \sum_{k|p} \varphi(k) a_k^{p/k}, \quad (15.14)$$

$$Z(D_p) = \frac{1}{2} Z(C_p) + \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 a_2^{(p-1)/2}, & p \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{4} (a_2^{p/2} + a_1^2 a_2^{(p-2)/2}), & p \text{ четно,} \end{cases} \quad (15.15)$$

$$Z(E_p) = a_1^p. \quad (15.16)$$

Существует несколько очень полезных формул, позволяющих по цикловым индексам  $Z(A)$  и  $Z(B)$  групп  $A$  и  $B$  вычислять цикловые индексы суммы  $A+B$ , произведения  $A \times B$ , композиции  $A[B]$  и степенной группы  $B^A$ . Эти формулы указаны ниже (см. (15.17) — (15.22)) и приводятся в работе Харари [22]. Под  $Z(A)Z(B)$  мы понимаем многочлен, полученный заменой каждой переменной  $a_k$  в  $Z(A)$  многочленом, который строится из многочлена  $Z(B)$  с помощью умножения всех индексов переменных из  $Z(B)$  на число  $k$ .

$$Z(A+B) = Z(A)Z(B), \quad (15.17)$$

$$Z(A \times B) = \frac{1}{|A|} \frac{1}{|B|} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{r, s=1}^{d, e} a_m^{d(r, s) j_r(\alpha) j_s(\beta)}, \quad (15.18)$$

где  $d(r, s)$  и  $m(r, s)$  обозначают соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел  $r$  и  $s$ ,

$$Z(A[B]) = Z(A)[Z(B)], \quad (15.19)$$

$$Z(B^A) = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \sum_{(\alpha; \beta)} a_k^{k(\alpha; \beta)}, \quad (15.20)$$

где  $(\alpha; \beta) = \beta^\alpha$  и

$$j_1(\alpha; \beta) = \prod_{k=1}^d \left( \sum_{s|k} s j_s(\beta) \right)^{i_k(\alpha)}, \quad (15.21)$$

$$j_k(\alpha; \beta) = \frac{1}{k} \sum_{s|k} \mu \left( \frac{k}{s} \right) j_1(\alpha^s; \beta^s), \quad k > 1, \quad (15.22)$$

$\mu$  — известная теоретико-числовая функция Мёбиуса<sup>1)</sup>.

## Перечисление графов

Опишем, как получить многочлен  $g_p(x)$ , перечисляющий графы с данным числом вершин  $p$ . Пусть  $g_{pq}$  — число  $(p, q)$ -графов и

$$g_p(x) = \sum_q g_{pq} x^q. \quad (15.23)$$

<sup>1)</sup> По определению  $\mu(n) = 0$ , если  $n$  не является произведением различных простых чисел  $p_1, \dots, p_m$ , и  $\mu(n) = (-1)^m$ , если  $n = p_1 \dots p_m$ , где все  $p_i$  — различные простые числа.

Перебрав все графы с 4 вершинами, легко проверить, что

$$g_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, \quad (15.24)$$

Пусть  $V = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $R = \{0, 1\}$ . Обозначим через  $D = V^{2^2}$  набор подмножеств  $\{i, j\}$  различных элементов множества  $V$ , т. е. 2-подмножеств множества  $V$ . Тогда каждая функция  $f$  из  $D$  в  $R$  представляет граф,  $p$  вершин которого принадлежат множеству  $V$  и в котором вершина  $i$  смежна с вершиной  $j$ , если  $f\{i, j\} = 1$ . Следовательно, образ подмножества  $\{i, j\}$  при отображении  $f$  есть 1 или 0 в зависимости от того, существует или нет ребро, соединяющее  $i$  и  $j$ . Весовая функция  $\omega$  на  $R$  определяется соотношениями  $\omega(0) = 0$  и  $\omega(1) = 1$ , так что это тождественная функция. Поэтому перечисляющим рядом для фигур будет  $c(x) = 1 + x$ . Применяя (15.3) в случае одной переменной, получаем вес функции  $f$ :

$$W(f) = x \sum \omega(f\{i, j\}), \quad (15.25)$$

где суммирование ведется по всем парам  $\{i, j\}$  в  $V^{2^2}$ . Таким образом, вес функции  $f$  есть число ребер в графе, соответствующем функции  $f$ .

Далее, пусть  $E_p$  — тождественная группа, действующая на  $R$ , и пусть группа  $S_p$  действует на  $V$ . Обозначим через  $S_p^{(2)}$  парную группу, действующую на множестве  $V^{2^2}$ , у которой подстановки индуцируются группой  $S_p$ , т. е. для каждой подстановки  $\alpha$  в  $S_p$  существует такая подстановка  $\alpha'$  в  $S_p^{(2)}$ , что  $\alpha'\{i, j\} = \{\alpha i, \alpha j\}$ . Применяя теорему Пойа к группе конфигураций  $S_p^{(2)}$ , получаем следующий результат, также принадлежащий Пойа (см. Харари [2]).

**Теорема 15.5.** *Перечисляющий многочлен для графов с  $p$  вершинами имеет вид*

$$g_p(x) = Z(S_p^{(2)}, 1 + x), \quad (15.26)$$

где

$$Z(S_p^{(2)}) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod_{k=1}^p j_k! k^{j_k}} \prod_{k=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} (a_k a_{2k}^{k-1})^{j_{2k}} \times \\ \times \prod_{k=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} a_{2k+1}^{j_{2k+1}} \prod_{k=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} a_k^{\binom{j_k}{2}} \prod_{1 \leq r < s \leq p-1} a_m^{\binom{r, s}{2}}. \quad (15.27)$$

Вывод формулы (15.27) также приведен в работе Харари [22, стр. 38]. В приложении I дана таблица, в которой указывается число  $(p, q)$ -графов для  $p \leq 9$ .

Аналогичные формулы были получены для перечисления графов с корнем и связных графов. С помощью модификаций этого метода были перечислены различные классы графов. Среди них классы

ориентированных графов, псевдографов и мультиграфов. Проиллюстрируем некоторые из этих перечислительных формул, показывая, как они непосредственно получаются из предыдущей теоремы. Для того чтобы перечислить графы с корнем, необходимо зафиксировать корневую вершину и до построения парной группы считать остальные  $p-1$  вершин неразличимыми<sup>1)</sup>.

Следствие 15.5 (а). *Перечисляющий многочлен для графов с корнем и с  $p$  вершинами имеет вид*

$$r_p(x) = Z((S_1 + S_{p+1})^{[2]}, 1+x). \quad (15.28)$$

Когда существует не более двух ребер, соединяющих каждую пару вершин, достаточно заменить перечисляющий ряд для фигур  $c(x) = 1+x$  (для графов) на  $1+x+x^2$ .

Следствие 15.5 (б). *Перечисляющий многочлен для мультиграфов, у которых каждая пара вершин соединяется не более чем двумя ребрами, имеет вид*

$$g'_p(x) = Z(S_p^{[2]}, 1+x+x^2). \quad (15.29)$$

В случае перечисления произвольных мультиграфов, перечисляющий ряд для фигур есть

$$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}.$$

Следствие 15.5 (в). *Перечисляющий многочлен для мультиграфов с  $p$  вершинами имеет вид*

$$m_p(x) = Z\left(S_p^{[2]}, \frac{1}{1-x}\right). \quad (15.30)$$

Перечисление орграфов (Харари [2]) было завершено так же, как для графов: была найдена формула для циклового индекса при соответствующей группе конфигураций и затем была применена теорема Пойа. Для орграфов нужно использовать *редуцированную упорядоченную парную группу*  $S_p^{[2]}$ . Как и прежде,  $S_p$  действует на множестве  $V = \{1, 2, \dots, p\}$ . Множество  $V^{[2]}$  состоит из упорядоченных пар различных элементов множества  $V$ . По определению группа  $S_p^{[2]}$  действует на множестве  $V^{[2]}$  как индуцированная группой  $S_p$ : каждая подстановка  $\alpha$  из  $S_p$  индуцирует такую подстановку  $\alpha'$  из  $S_p^{[2]}$ , что  $\alpha'(i, j) = (\alpha i, \alpha j)$  для  $(i, j)$  из  $V^{[2]}$ . Применяя теорему Пойа к цикловому индексу группы  $S_p^{[2]}$ , получаем многочлен  $d_p(x)$ , в котором коэффициент при  $x^q$  равен числу орграфов с  $q$  ориентированными ребрами.

<sup>1)</sup> В оригинале interchangeable. Иногда мы будем употреблять термин «однородные» или «взаимозаменяемые». — *Прим. перев.*

Теорема 15.6. *Перечисляющий многочлен для орграфов с  $p$  вершинами имеет вид*

$$d_p(x) = Z(S_p^{[2]}, 1+x), \quad (15.31)$$

где

$$Z(S_p^{[2]}) = \frac{1}{p!} \sum_{\Omega} \frac{p!}{\prod_{k=1}^p j_k! k^{j_k}} \prod_{k=1}^p a_k^{(k-1)j_k+2k} \binom{j_k}{2} \times \\ \times \prod_{1 \leq r < s \leq p-1} a_m^{2j_r j_s d(r,s)}. \quad (15.32)$$

Разумеется, следствия из этой теоремы аналогичны следствиям из теоремы 15.5.

В приложении II приведена таблица для числа орграфов с  $p \leq 8$  вершинами.

Хотя корневые деревья и деревья были перечислены гораздо раньше, чем графы, мы рассмотрели сначала перечисление графов, поскольку их перечисляющий ряд для фигур имеет очень простой вид, а именно  $1+x$ . Мы увидим, что для перечисления деревьев самый полезный перечисляющий ряд для фигур — это производящая функция для корневых деревьев.

### Перечисление деревьев

Для нахождения числа деревьев необходимо начать с перечисления корневых деревьев. *Корневое дерево* имеет одну вершину (его корень), выделенную из остальных. Пусть  $T_p$  — число корневых

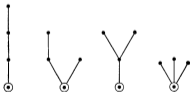


Рис. 15.4. Корневые деревья с 4 вершинами.

деревьев, имеющих  $p$  вершин. Из рис. 15.4, где корень каждого дерева четко отличается от остальных вершин, видно, что  $T_4=4$ . Перечисляющий ряд для корневых деревьев обозначим

$$T(x) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p x^p. \quad (15.33)$$

Аналогично определяются  $t_p$  и  $t(x)$  для деревьев без корня.



Рекуррентную формулу для перечисления деревьев с корнем нашел Кэли [11].

Теорема 15.7. *Перечисляющий ряд для корневых деревьев имеет вид*

$$T(x) = x \prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r)^{-T_r}, \quad (15.34)$$

Можно привести (15.34) к виду, где  $T(x)$  выражается само через себя. Для этого надо взять логарифм от обеих частей и затем произвести соответствующие преобразования степенного ряда. Это приведет к формуле (15.35) — результату, впервые полученному Пойа [1] с помощью его теоремы перечисления.

Теорема 15.8. *Перечисляющий ряд для корневых деревьев удовлетворяет функциональному уравнению*

$$T(x) = x \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} T(x^r). \quad (15.35)$$

Доказательство. Пусть  $T^{(n)}(x)$  — производящая функция для корневых деревьев с корнями степени  $n$ , так что

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(x). \quad (15.36)$$

Так, например,  $T^{(0)}(x) = x$  перечисляет тривиальные графы с корнем, а *деревья с висячими корнями* (т. е. деревья, корни которых находятся в висячих вершинах) перечисляются с помощью функции

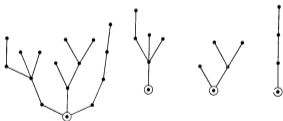


Рис. 15.5. Корневое дерево  $T$  и его компоненты при данном «расщеплении».

$T^{(1)}(x) = x T(x)$ . В общем случае корневое дерево с корнем степени  $n$  можно рассматривать как конфигурацию, фигурами которой служат  $n$  корневых деревьев, полученных «расщеплением» первоначального корня. Рис. 15.5. иллюстрирует это для  $n=3$ .

Так как эти  $n$  корневых деревьев можно переставлять друг с другом без изменения класса изоморфизма данного корневого де-

рева, то перечисляющий ряд для фигур есть  $T(x)$ , а группа конфигураций есть  $S_n$ , откуда

$$T^{(n)}(x) = x Z(S_n, T(x)). \quad (15.37)$$

Множитель  $x$  добавляется при удалении корня данного дерева, так как вес дерева равен числу его вершин.

К счастью, существует хорошо известное и легко дифференцируемое тождество, которым можно сейчас воспользоваться (где  $Z(S_n)$  по определению равно 1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n, h(x)) = \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} h(x^r). \quad (15.38)$$

Сопоставляя соотношения (15.36) — (15.38), получаем (15.35).

Кэли [4] был первым, кто дал выражение для  $t_p$  через числа  $T_n$  с  $n < p$ . Он сделал это, подсчитав отдельно число деревьев с 1 и 2 центрами. Пойа [1] получил другое выражение для  $t_p$ , рассмотрев отдельно деревья с 1 и 2 центральными вершинами. Оттер [1] вывел с помощью производящих функций наиболее изящную из всех известных формул, выражающих число деревьев через число корневых деревьев. Действительно, как показано в работе Харари [3], действуя многократно в соответствии с изречением: «Если видишь два последовательных знака суммирования, поменяй их порядок», можно непосредственно вывести равенство Оттера (15.41) из выражений для  $t_p$ , полученных Кэли и Пойа. Сам Оттер вывел соотношение (15.41) из следующего соотношения, представляющего и самостоятельный интерес; его иногда называют «уравнением характеристики неподобия для деревьев». Симметричным ребром называется ребро, соединяющее две подобные вершины.

**Теорема 15.9.** Пусть  $p^*$  и  $q^*$  для любого дерева  $T$  обозначают соответственно число классов подобия вершин и число классов подобия ребер, а  $s$  — число симметричных ребер. Тогда  $s$  равно 0 или 1 и

$$p^* - (q^* - s) = 1. \quad (15.39)$$

**Набросок доказательства.** Если дерево  $T$  имеет одну центральную вершину или две неподобные центральные вершины, то в нем нет симметричного ребра, так что  $s=0$ . В этом случае найдется поддерево дерева  $T$ , содержащее ровно по одной вершине из каждого класса подобия вершин в  $T$  и ровно по одному ребру из каждого класса подобия ребер. Так как это поддерево имеет  $p^*$  вершин и  $q^*$  ребер, то  $p^* - q^* = 1$ .

При другой возможности дерево  $T$  имеет две подобные центральные вершины, и поэтому  $s=1$ . В этом случае найдется поддерево, содержащее ровно по одной вершине из каждого класса подобия вершин в  $T$  и по одному ребру из каждого класса подобия ребер,

кроме симметричного ребра. Следовательно, это поддерево имеет  $p^*$  вершин и  $q^* - 1$  ребер и потому  $p^* - (q^* - 1) = 1$ . Таким образом, в обоих случаях (15.39) выполняется.

Нам также потребуется специальная теорема Пойа [1], предназначенная для подсчета взаимно однозначных отображений. Для удобства будем употреблять  $Z(A_n - S_n)$  как сокращение для  $Z(A_n) - Z(S_n)$ .

**Теорема 15.10.** *Перечисляющий ряд  $C(x)$  для взаимно однозначных отображений, действующих из множества  $n$  взаимозаменяемых элементов в множество фигур, перечисляемых рядом  $c(x)$ , получается подстановкой  $c(x)$  в  $Z(A_n - S_n)$ :*

$$C(x) = Z(A_n - S_n, c(x)). \quad (15.40)$$

Хотя мы будем использовать соотношение (15.40) лишь в случае  $n=2$ , оно снабдит нас полезным перечислительным механизмом, пригодным и в других контекстах (Харари и Принс [1]). Это соотношение позволяет дать очень краткое доказательство формулы Оттера для перечисления деревьев.

**Теорема 15.11.** *Перечисляющий ряд для деревьев можно представить с помощью перечисляющего ряда для корневых деревьев:*

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)]. \quad (15.41)$$

**Доказательство.** Пусть  $p_i^*$ ,  $q_i^*$  — числа классов подобия для вершин и ребер, а  $s_i$  — число симметричных ребер для  $i$ -го дерева с  $n$  вершинами,  $i=1, 2, \dots, t_n$ . Так как в силу (15.39)  $p_i^* - (q_i^* - s_i) = 1$  для всех  $i$ , то суммированием по  $i$  получаем

$$t_n = T_n - \sum_i (q_i^* - s_i). \quad (15.42)$$

Далее,  $\sum (q_i^* - s_i)$  — это число деревьев, имеющих  $n$  вершин, корни которых лежат на ребре, не являющемся симметричным. Рассмотрим дерево  $T$  и возьмем любое его несимметричное ребро  $y$ . Тогда  $T - y$  можно рассматривать как два корневых дерева, которые должны быть неизоморфными. Таким образом, каждое несимметричное ребро дерева соответствует неупорядоченной паре различных корневых деревьев. Перечисление этих пар деревьев равносильно перечислению взаимно однозначных отображений, действующих из множества двух взаимозаменяемых элементов в множество корневых деревьев. Поэтому, применяя теорему 15.10 с  $T(x)$  в качестве перечисляющего ряда для фигур, находим, что

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{t_n} (q_i^* - s_i) x^\sigma \right] = Z(A_2 - S_2, T(x)). \quad (15.43)$$

Так как  $Z(A_2) = a_1^2$  и  $Z(S_2) = (a_1^2 + a_0)/2$ , то

$$Z(A_2 - S_2, T(x)) = \frac{1}{2} [T^2(x) - T(x^2)]. \quad (15.44)$$

Теперь формула (15.41) следует из соотношений (15.42) — (15.44).

С помощью формул (15.35) и (15.41) получим числа корневых и некорневых деревьев для  $p = 1, 2, \dots, 12$ :

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + \\ + 286x^9 + 719x^{10} + 1842x^{11} + 4766x^{12} + \dots \quad (15.45)$$

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + \\ + 47x^9 + 106x^{10} + 235x^{11} + 511x^{12} + \dots \quad (15.46)$$

Диаграммы для деревьев, перечисляемых первыми 10 слагаемыми в (15.46), приведены в приложении III; там же приведена таблица значений  $t_p$  и  $T_p$  для  $p \leq 26$ .

Методы, используемые для доказательства теоремы 15.11, можно применить для перечисления различных видов деревьев. Проиллюстрируем это на двух видах деревьев: на гомеоморфно несводимых деревьях и на асимметрических деревьях (Харари и Принс [1]); остальные виды рассматриваются аналогично, например раскрашиваемые деревья (Риордан [1]), деревья с заданным разбиением (Харари и Принс [1]) и т. д. Пусть  $h(x)$ ,  $H(x)$  и  $\bar{H}(x)$  — перечисляющие ряды гомеоморфно несводимых деревьев, корневых деревьев и деревьев с висячими корнями соответственно.

**Теорема 15.12.** *Все три типа гомеоморфно несводимых деревьев перечисляются соотношениями*

$$\bar{H}(x) = \frac{x^2}{1+x} \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\bar{H}(x^r)}{rx^r}, \quad (15.47)$$

$$H(x) = \frac{1+x}{x} \bar{H}(x) - \frac{1}{2x} [\bar{H}^2(x) - \bar{H}(x^2)], \quad (15.48)$$

$$h(x) = H(x) - \frac{1}{x^2} [\bar{H}^2(x) - \bar{H}(x^2)]. \quad (15.49)$$

Числа гомеоморфно несводимых деревьев, имеющих не более 12 вершин, можно найти из соотношения

$$h(x) = x + x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 5x^9 + \\ + 10x^{10} + 14x^{11} + 26x^{12} + \dots \quad (15.50)$$

Пусть  $u(x)$  и  $U(x)$  — перечисляющие ряды для асимметрических деревьев и корневых деревьев, для которых группой автоморфизмов является тождественная группа.

**Теорема 15.13.** *Асимметрические деревья переисчисляются соотношениями*

$$U(x) = x \exp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{U(x^n)}{n}, \quad (15.51)$$

$$u(x) = U(x) - \frac{1}{2} [U^2(x) + U(x^2)]. \quad (15.52)$$

Числа асимметрических деревьев, имеющих не более 12 вершин, можно найти из соотношения

$$u(x) = x + x^2 + x^4 + 3x^6 + 6x^{10} + 15x^{11} + 29x^{12} + \dots \quad (15.53)$$

### Теорема пересчисления степенной группы

Существует класс задач пересчисления, которые можно решить с использованием степенной группы в качестве группы конфигураций. Рассмотрим степенную группу  $B^A$ , действующую на  $R^D$ . Число конфигураций (классов эквивалентности функций, определяемых группой  $B^A$ ) можно найти из теоремы Пойа (см. Харари и Палмер [8]); это было сделано де Брёйном [1] и [2] в иной формулировке. Формулу (15.54) можно легко приспособить для пересчисления функций в соответствии с их весами.

**Теорема 15.14** (теорема пересчисления степенной группы). *Число классов эквивалентности функций в  $R^D$ , определяемых степенной группой  $B^A$ , равно*

$$N(B^A) = \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} Z(A; m_1(\beta), m_2(\beta), \dots, m_d(\beta)), \quad (15.54)$$

где

$$m_k(\beta) = \sum_{s|k} s j_s(\beta). \quad (15.55)$$

Для примера рассмотрим еще раз проблему ожерелья, проиллюстрированную на рис. 15.3, но здесь мы допускаем, что два цвета  $a, b$  бусинок (скажем, красный и синий) взаимозаменяемы. Ясно, что число ожерелий с 4 бусинками двух взаимозаменяемых цветов равно числу  $N(S_2^{D_4})$  орбит степенной группы  $S_2^{D_4}$ . Для тождественной подстановки  $(a)(b)$  из  $S_2$  в силу (15.55) имеем

$$m_k((a)(b)) = 2$$

для всех  $k$ . Для транспозиции  $(ab)$  в  $S_2$  число  $m_k((ab))$  равно 0 для четного  $k$  и 2 для нечетного  $k$ . Применяя (15.54), видим, что число ожерелий с взаимозаменяемыми цветами равно

$$\frac{1}{2} [Z(D_4; 2, 2, 2, 2) + Z(D_4; 0, 2, 0, 2)].$$

Подстановкой в формулу (15.10) для  $Z(D_4)$  находим, что это число равно 4. Этот результат легко проверить, заметив, что последние два ожерелья на рис. 15.3 эквивалентны первым двум, когда красные и синие бусинки взаимозаменяемы.

Самодополнительные графы с 4 и 5 вершинами показаны на рис. 2.13. Результат Рида [3] для числа  $s_p$  самодополнительных графов с  $p$  вершинами можно вывести из теоремы перечисления степенной группы. Для этого определим новое отношение эквивалентности  $\sim$  для графов с  $p$  вершинами:  $G_1 \sim G_2$ , если  $G_1 \cong G_2$  или  $G_1 \cong \bar{G}_2$ . Пусть  $c_p$  — число определяемых отношением  $\sim$  классов эквивалентности для графов с  $p$  вершинами. Так как мы рассматриваем графы, у которых  $p$  вершин, то возьмем  $A = S_p^{(2)}$  в качестве группы, действующей на  $D^{(2)}$ . Так как граф и его дополнение эквивалентны, будем считать, что группа  $B = S_2$  действует на  $R = \{0, 1\}$ . Тогда две функции  $f_1$  и  $f_2$  из  $R^{D^{(2)}}$  эквивалентны относительно степенной группы  $B^A$ , если они обе представляют один и тот же граф или одна из них представляет граф, являющийся дополнением другого. Мы уже видели результат применения формулы (15.55) к подстановкам из  $S_2$ . Таким образом имеем

$$c_p = \frac{1}{2} [Z(S_p^{(2)}; 2, 2, 2, 2, \dots) + Z(S_p^{(2)}; 0, 2, 0, 2, \dots)]. \quad (15.56)$$

Но так как  $s_p = 2c_p - g_p$ , получаем следующую формулу, найденную Ридом:

**Теорема 15.15.** Число  $s_p$  самодополнительных графов с  $p$  вершинами равно

$$s_p = Z(S_p^{(2)}; 0, 2, 0, 2, \dots). \quad (15.57)$$

Конечные автоматы также были перечислены с помощью теоремы перечисления степенной группы (Харрисон [1], Харари и Палмер [12]). Группы для этой задачи являются подгруппами произведения двух степенных групп.

## Решенные и нерешенные задачи перечисления графов

В литературе уже приводились три списка нерешенных задач перечисления графов: Харари [15], [21] и [23, стр. 206]. Время от времени эти списки необходимо обновлять. Благодаря тому что возникают новые задачи и решаются старые, общее количество нерешенных задач остается примерно постоянным — около 27 задач. Стоит заметить, что крайне невероятно, чтобы все эти задачи были решены в ближайшее время. Для обоснования этого замечания достаточно сказать, что среди таких решений в результате сравнения числа планарных графов с числом 4-раскрашиваемых графов было

## Нерешенные задачи перечисления графов, IV

Категория	Задача
Орграфы	Сильные орграфы Односторонние орграфы Орграфы с источником Транзитивные орграфы Самодополнительные самообратные орграфы
Обходы	Гамильтоновы графы Гамильтоновы циклы в данном графе Эйлеровы цепи в данном графе
Топология	Симплициальные комплексы $k$ -раскрашиваемые графы Планарные $k$ -раскрашиваемые графы Корневые планарные графы Плоские карты с корневым ребром
Симметрия	Симметрические графы Асимметрические графы Графы с данным автоморфизмом
Приложения	Четные подграфы помеченной 3-решетки Четные подграфы помеченной 2-решетки с данной площадью Четные подграфы данного помеченного графа Замощения 2-решетки Задача о росте клеток
Разное	Реберные графы Латинские квадраты Графы с данным радиусом или диаметром Графы с данным обхватом или окружением Графы с данной связностью Графы с данным родом, толщиной, хроматическим числом и т. д.

бы получено достаточно информации для того, чтобы решить вопрос о справедливости гипотезы четырех красок.

В табл. 15.1 приведен четвертый список нерешенных задач перечисления графов, который так и озаглавлен. Все эти задачи можно, конечно, сформулировать и для помеченных графов, причем некоторые из них для помеченных графов уже решены. Чтобы понять эти задачи, в каждой из которых требуется выразить число конфигураций через подходящие параметры, необходимо ввести дополнительные определения. Определения, связанные с орграфами, можно найти в следующей главе.

Татт [10] изучал задачи перечисления плоских карт, вводя корень таким образом, чтобы «разрушить» все симметрии в каждой карте. *Плоская карта с корневым ребром* получается из плоской карты с помощью ориентации произвольного ребра с последующим выделением одной из двух граней, инцидентных этому ребру; эта грань объявляется внешней гранью карты.

*2-решеткой (двумерной решеткой)* называется граф, вершинами которого являются все упорядоченные пары  $(i, j)$  целых чисел, где  $i=0, 1, \dots, m$  и  $j=0, 1, \dots, n$ ; две вершины считаются смежными тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между ними равно 1. Аналогично определяется *3-решетка*. *Четный подграф  $H$  графа  $G$*  — это подграф в  $G$ , каждая вершина которого имеет четную степень. Таким образом, каждый четный подграф 2-решетки имеет определенную площадь — число квадратов, содержащихся в его простых циклах.

*Замоцением 2-решетки* называется покрытие квадратов этой решетки заданным числом единичных и сдвоенных (как в домино) квадратиков. Конечно, можно предложить и более сложные задачи о замощении решеток большей размерности.

Известны три типа задач о росте клеток, а именно для треугольника, квадрата и шестиугольника, т. е. для тех единственных правильных многоугольников, которыми можно покрыть плоскость. Связная конфигурация, содержащая данное число треугольников, квадратов или шестиугольников, называется *животным* (см. Харари [23, стр. 208—212]).

Приведем сейчас довольно большой список решенных задач (который неизбежно будет неполным) в надежде на то, что нежелательные повторные затраты усилий по их решению будут минимизированы. В списке даются ссылки на статьи, где получены решения; неопубликованные решения отмечаются только именем (возможного) автора. Эти решенные задачи (табл. 15.2) разбиты на четыре группы: деревья, графы, орграфы и разное.



## Решенные задачи перечисления графов

Деревья	
Деревья	Пойа [1], Оттер [1]
Помеченные деревья	Кэли [5], Мун [3]
Корневые деревья	Пойа [1]
Корневые деревья с данной высотой	Риордан [3]
Бесконечные помеченные деревья	Харари, Мовшовиц, Риордан [1]
Плоские деревья	Харари, Принс, Татт [1]
Плоские деревья с данным разбиением	Татт [13], Харари, Татт [1]
Гомеоморфно несводимые деревья	Харари, Принс [1]
Асимметрические деревья	Харари, Принс [1]
Деревья с данным разбиением	Харари, Принс [1]
Деревья с данной группой	Принс [1]
Деревья с данным диаметром	Харари, Принс [1]
Ориентированные деревья	Харари, Принс [1]
Направленные деревья	Харари, Принс [1]
Деревья, снабженные знаками	Харари, Принс [1]
Деревья данной мощности	Харари, Принс [1]
Деревья данного типа	Харари, Принс [1]
Деревья блоков и точек сочленения	Харари, Принс [1]
Раскрашиваемые деревья	Риордан [1]
Леса	Харари, Палмер [16]

## Графы

Графы	Пойа (Харари [2]), Дэвис [1]
Корневые графы	Харари [2]
Реберные корневые графы	Харари [22]
Корневые графы с ориентированным корневым ребром	Харари, Палмер [1]
Связные графы	Риддел, Уленбек [1], Харари [2]
Мультиграфы	Харари [2]
Графы данной мощности	Харари [2]
Графы данного типа	Харари [2]
Остовные подграфы и надграфы	Харари [4], [5], [10]
Самодополнительные графы	Рид [3]
Графы, снабженные знаками	Харари [1], Харари, Палмер [13]
Графы с одним простым циклом	Ости, Фаген, Пенни, Риордан [1]
Эйлеровы графы	(Робинсон)
Графы с данным разбиением	Партасарати [1]
Псевдографы с данным разбиением	Рид [1]

## Графы

Составленные графы	Рид [1]
Составленные графы с взаимозаменяемыми цветами	Палмер, Робинсон [1]
Кубические графы	(Робинсон)
Неразделимые графы	(Робинсон)
k-раскрашиваемые графы	Робинсон [1]
Бихроматические графы	Харари, Принс [2]
Триангулированные карты с корневым ребром	Татт [9]
Киктусы (деревья Хусими)	Харари, Норман [2], Харари, Уленбек [1]
Графы с данными блоками	Форд, Норман, Уленбек [1]
Графы блоков	Харари, Принс [3]

## Орграфы

Орграфы	Харари [2], Дэвис [1]
Слабо связанные орграфы	Харари [2]
Самодополнительные орграфы	Рид [3]
Симметричные орграфы	Харари, Палмер [9]
Направленные графы	Харари [7]
Ориентации данного графа	Харари, Палмер [4]
Турниры	Дэвис [2]
Сильные турниры	Мун [4]
Помеченные транзитивные орграфы	Эванс, Харари, Линн [1]
Орграфы с данным разбиением	Харари, Палмер [7]
Орграфы, у которых полустепень исхода каждой вершины равно 2	(Юзе)
Орграфы без контуров	(Робинсон)
Функциональные орграфы	Харари [14], Рид [2]
Эйлеровы пути в данном орграфе	де Брейн, ван Аарден-Эренфест [1], Снит, Татт [1]

## Разное

Автоматы	Харрисон [1], Харари, Палмер [12]
Задачи об ожерельях	Харари [22]
Алгебры различных типов	Харрисон [2]
Булевы функции	Пойа [1], Слепян [1]
Помеченные последовательно-параллельные сети	Карлиц, Риордан [1]
Периодические последовательности	Гильберт, Риордан [1]
Адическиские симплицисльные комплексы	Харари, Палмер [17], Байнеке, Мун [1] Байнеке, Пинперг [1]

## Упражнения

15.1. Сколькими способами можно пометить графы

$$а) \bar{K}_3 + K_2, б) K_3 \times K_2, в) K_{1,3}[K_2]?$$

15.2. Написать выражения для цикловых индексов групп

$$а) S_3 + S_2, б) S_3 \times S_2, в) S_3[S_2], г) S_3^{S_2}, д) S_2^{S_3}.$$

15.3. Существует такое целое число  $k$ , что равенство  $Z(C_n, 2) = Z(D_n, 2)$  выполняется для всех  $n \leq k$  и не выполняется для  $n > k$ . Найти  $k$ .

15.4. Число разбиений числа  $n$  на не более  $m$  слагаемых равно коэффициенту при  $x^n$  в разложении

$$Z\left(S_m, \frac{1}{1-x}\right).$$

15.5. Вычислить  $Z(S_5^{(2)})$  и  $g_5(x)$ . Проверить полученный результат, используя приложение 1.

15.6. Найти перечисляющий ряд для графов, имеющих один простой цикл. (Остин, Фаген, Пенни, Риордан [1])

15.7. Пусть  $g(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} g_p(x) y^p$  — производящая функция для графов, а  $c(x, y)$  — производящая функция для связанных графов. Тогда

$$g(x, y) = \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} c(x^r, y^r).$$

Отметим, что это уравнение похоже на уравнение (15.38).

15.8. Найти числа помеченных деревьев с  $p$  вершинами:

а) с висячим корнем, б) с корнем.

15.9. Пусть  $G$  — помеченный граф, получающийся из полного графа  $K_p$  в результате удаления  $r$  независимых ребер. Число остовов графа  $G$  равно  $(p-2) r p^{p-r-2}$ .

(Вайнберг [1])

15.10. Число корневых деревьев удовлетворяет неравенству  $T_{n-1} \leq \sum_{i=1}^n T_i T_{n-i+1}$ . Отсюда следует, что

$$T_n \leq \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

(Оттер [1])

15.11. Определим числа  $R_n^{(i)}$  с помощью рекуррентного соотношения  $R_n^{(i)} = R_{n-1}^{(i)} + T_{n+1-i}$ . Число корневых деревьев можно найти, используя соотношение

$$n T_{n+1} = \sum_{i=1}^n i T_i R_n^{(i)}.$$

(Оттер [1])

15.12. Определить число  $s_p$  самодополнительных графов для  $p=8$  и 9; а) с помощью формулы (15.57), б) непосредственно строить их.

15.13. Получить перечислительную формулу для самодополнительных орграфов.

(Рид [3])

15.14. Пусть  $s_p$  и  $s_{p^*}$  — числа самодвойственных графов и орграфов соответственно. Тогда  $s_{4n} = s_{2n}$ .

(Рид [3])

15.15. Для любой группы подстановок  $A$  с цикловым индексом  $Z(A)$ , определяемым по формуле (15.2), число орбит группы  $A$  равно

$$N(A) = \frac{\partial}{\partial a_1} Z(A) \Big|_{\text{все } a_i = 1}.$$

Поэтому число классов подобия вершин данного графа  $G$  (у которого группа  $\Gamma(G)$  имеет переменные  $y_i$  в представлении циклового индекса) равно

$$p^* = \frac{\partial}{\partial y_1} Z(\Gamma(G)) \Big|_{\text{все } y_i = 1}.$$

15.16. Пусть  $G$  — связный граф, имеющий  $n$  классов подобия блоков. Если  $p^*$  — число неподобных вершин графа  $G$ , а  $p_k^*$  — число неподобных вершин в блоках  $k$ -го класса подобия, то

$$p^* - 1 = \sum_{k=1}^n (p_k^* - 1).$$

Как следствие получить теорему 15.9.

(Харари, Норман [2])

Из лука высь выплала стрела...  
 Не знаю, где она летит.

Лонгфелло Г.<sup>1)</sup>

В теории ориентированных графов сделано так много, что на эту тему можно написать целую книгу<sup>2)</sup>. В настоящей главе мы уделяем особое внимание тем свойствам орграфов, которые отличают их от графов. Поэтому мы начнем с введения трех различных типов соединимости: сильной, односторонней и слабой. Сформулировав принцип ориентированной двойственности, мы перейдем к изучению матриц, связанных с орграфами, и затем приведем аналог матричной теоремы о деревьях в графах. Глава заканчивается кратким описанием турниров и их свойств.

### Орграфы и соединимость

Мы уже видели на рис. 2.4 все ориентированные графы с 3 вершинами и 3 дугами. Все же для полноты изложения мы начнем с определений, включая и те, что уже были приведены в гл. 2. *Орграф*  $D$  состоит из конечного множества  $V$  вершин и набора *упорядоченных пар* различных вершин. Любая такая пара  $(u, v)$  называется *дугой*, или *ориентированным ребром*, и обычно обозначается  $uv$ . Дуга  $uv$  идет из вершины  $u$  в вершину  $v$  и называется *инцидентной*  $u$  и  $v$ . Будем также говорить, что  $u$  смежна *к*  $v$ , а  $v$  смежна *из*  $u$ . *Полустепенью исхода*  $od(v)$  вершины  $v$  называется число вершин, смежных из  $v$ , а *полустепенью захода*  $id(v)$ <sup>3)</sup> — число вершин, смежных к  $v$ .

В орграфе (*ориентированным*) *маршрутом* называется чередующаяся последовательность вершин и дуг  $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ . В которой каждая дуга  $x_i$  есть  $v_{i-1}v_i$ . *Длина* такого маршрута равна числу  $n$  входящих в него дуг. В *замкнутом маршруте* первая и по-

<sup>1)</sup> Лонгфелло Г., Избранное, изд-во «Худож. лит-ра», М., 1958: «Стрела и песня», перевод Б. Томашевского, стр. 61. Автор ошибочно приписывает эту цитату Стивенсону. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> И действительно, это было сделано (см. Харари, Норман и Картрайт [1]). В этой книге приведены доказательства большей части теорем данной главы. Кроме того, Мул [4] написал монографию о турнирах.

<sup>3)</sup> Сокращения от *outdegree* и *indegree*. — *Прим. перев.*

следняя вершины совпадают; *остовный маршрут* содержит все вершины. *Путь* — это маршрут, в котором все вершины различны, *контур* — нетривиальный замкнутый маршрут, у которого все вершины различны (за исключением первой и последней). Если существует путь из вершины  $u$  в вершину  $v$ , то будем говорить, что  $v$  *достижима* из  $u$ ; *расстоянием*  $d(u, v)$  от  $u$  до  $v$  называется длина такого кратчайшего пути.

Каждый маршрут ориентирован от первой вершины  $v_0$  к последней  $v_n$ . Нам также понадобится понятие, которое не обладает этим свойством ориентации и аналогично маршруту в графе. *Полумаршрут* — это опять-таки чередующаяся последовательность  $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$  вершин и дуг, но дугой  $x_i, 1 \leq i \leq n$ , может быть как  $v_{i-1}v_i$ , так и  $v_iv_{i-1}$ . *Полупуть*, *полукуонтур* и другие понятия определяются аналогично.

Поскольку граф может быть либо связным, либо нет, то существуют три различных способа определения связности орграфа и каждый из них имеет свою собственную идиосинкразию<sup>1)</sup>. Орграф называется *сильно связным*, или *сильным*, если любые две его вершины взаимно достижимы; *односторонне связным*, или *односторонним*, если для любых двух вершин по крайней мере одна достижима из другой; *слабо связным*, или *слабым*, если любые две вершины соединены полупутьем. Ясно, что каждый сильный орграф — односторонний, а каждый односторонний орграф — слабый, но обратные утверждения не верны. Орграф называется *несвязным*, если он даже не слабый. Заметим, что *тривиальный орграф*, состоящий только из одной вершины, является (по определению) сильным, поскольку в нем нет двух различных вершин.

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия, обеспечивающие орграфу одну из этих трех типов соединимости.

**Теорема 16.1.** *Орграф сильный тогда и только тогда, когда он имеет остовный замкнутый маршрут; односторонний тогда и только тогда, когда он имеет остовный маршрут; слабый тогда и только тогда, когда он имеет остовный полупуть.*

Для орграфа определены три типа компонент (связности). *Сильной компонентой* орграфа называется максимальный сильный подграф, *односторонней компонентой* — максимальный односторонний подграф и *слабой компонентой* — максимальный слабый подграф. Легко проверить, что любая вершина и любая дуга орграфа  $D$  принадлежат точно одной слабой компоненте и по крайней мере одной односторонней компоненте. Более того, каждая вершина находится точно в одной сильной компоненте, а дуга либо лежит в одной сильной компоненте, либо не лежит ни в одной, в зависимости от того, принадлежит эта дуга или нет некоторому контуру.

<sup>1)</sup> Здесь — предпочтительная терминология. — *Прим. перек.*

Сильные компоненты орграфа  $D$  наиболее важны. Это, в частности, демонстрирует способ построения по сильным компонентам орграфа  $D$  нового орграфа, который хотя и проще  $D$ , но сохраняет некоторые его структурные свойства. Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — сильные компоненты орграфа  $D$ . *Конденсацией*<sup>1)</sup>  $D^*$  орграфа  $D$  называется оргграф, множеством вершин которого служит множество  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  всех сильных компонент орграфа  $D$ , а дуга идет из  $S_i$  к  $S_j$ , если в орграфе  $D$  имеется по крайней мере одна дуга, идущая из некоторой вершины компоненты  $S_i$  к вершине компоненты  $S_j$  (см. рис. 16.1).

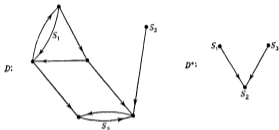


Рис. 16.1. Орграф и его конденсация.

Из максимальности сильных компонент следует, что в конденсации  $D^*$  любого орграфа  $D$  нет контуров. Очевидно, что конденсация каждого сильного орграфа есть тривиальный оргграф. Можно показать, что оргграф является односторонним тогда и только тогда, когда его конденсация имеет единственный остовный путь.

### Ориентированная двойственность и бесконтурные орграфы

Орграф  $D'$ , *обратный* к данному орграфу  $D$ , имеет те же вершины, что и  $D$ , а дуга  $uv$  принадлежит  $D'$  тогда и только тогда, когда дуга  $vu$  принадлежит  $D$ . Другими словами, оргграф, обратный к орграфу  $D$ , получается изменением ориентации каждой дуги орграфа  $D$ . Мы уже сталкивались с другими «обратными» понятиями, такими, как полустепень захода и полустепень исхода. Относительно ориентации все эти понятия связаны между собой довольно мощным принципом. Этот принцип представляет собой классический результат в теории бинарных отношений.

**Принцип ориентированной двойственности.** Для любой теоремы об орграфах можно сформулировать соответствующую

<sup>1)</sup> В отечественной литературе используется термин «факторграф». — *Прим. перев.*

щую двойственную теорему, заменив каждое понятие на обратное к нему.

Провиллюстрируем теперь, как этот принцип порождает новые результаты. *Бесконтурным* оргграфом называется оргграф, не содержащий контуров.

**Теорема 16.2.** *Бесконтурный оргграф содержит по крайней мере одну вершину с нулевой полустепенью исхода.*

**Доказательство.** Рассмотрим последнюю вершину некоторого максимального пути оргграфа  $D$ . Для этой вершины нет вершин, смежных из нее, поскольку иначе или нашелся бы контур, или путь не был бы максимальным.

Применяя принцип ориентированной двойственности, сразу получаем двойственную теорему. В соответствии с обозначением  $D'$  оргграфа, обратного к  $D$ , будем также отмечать штрихами двойственные результаты.

**Теорема 16.2'.** *Бесконтурный оргграф  $D$  содержит по крайней мере одну вершину с нулевой полустепенью захода.*

Ранее было указано, что конденсация любого оргграфа есть бесконтурный оргграф, а приведенные выше утверждения дают некоторую информацию о бесконтурных оргграфах. Дадим теперь несколько характеристик оргграфов.

**Теорема 16.3.** *Следующие свойства оргграфа  $D$  эквивалентны:*

- (1)  $D$  — бесконтурный оргграф;
- (2)  $D^*$  изоморфен  $D$ ;
- (3) каждый маршрут оргграфа  $D$  есть путь;
- (4) вершины оргграфа  $D$  можно упорядочить таким образом, что матрица смежностей  $A(D)$  будет верхней треугольной матрицей.

Особый интерес представляют два двойственных типа бесконтурных оргграфов. *Источником* в оргграфе  $D$  называется вершина, из которой можно достичь все другие вершины оргграфа; *сток* определяется двойственным образом. *Выходящее дерево*<sup>1)</sup> — это оргграф с источником, не имеющий полуконтуров; *входящее дерево* — двойственный ему оргграф (см. рис. 16.2).

**Теорема 16.4.** *Слабый оргграф является выходящим деревом тогда и только тогда, когда точно одна его вершина имеет нулевую полустепень захода, а у всех остальных вершин полустепень захода равна 1.*

<sup>1)</sup> В книге Берга [2] оно называется «корневым деревом».



**Теорема 16.4'.** Слабый орграф является входящим деревом тогда и только тогда, когда точно одна его вершина имеет нулевую полу-степеню исхода, а у всех остальных вершин полу-степень исхода равна 1.



Рис. 16.2. Выходящее дерево и обратное к нему входящее дерево.

Рассмотрим теперь некоторые орграфы, тесно связанные с определенными выше. В функциональном орграфе каждая вершина имеет полу-степень исхода, равную 1; двойственный к нему орграф называется контрафункциональным орграфом (рис. 16.3). В следующей теореме и двойственной к ней дается характеристика структуры этих орграфов.



Рис. 16.3. Слабый функциональный орграф.

**Теорема 16.5.** Для слабого орграфа  $D$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $D$  — функциональный орграф;
- (2) в  $D$  точно один такой контур, что удаление его дуг приводит к орграфу, в котором каждая слабая компонента является входящим деревом;
- (3) в  $D$  точно один такой контур, что удаление любой его дуги приводит к образованию входящего дерева.

Минимальный набор вершин, из которого достижимы все вершины орграфа  $D$ , называется *вершинной базой* орграфа. Таким образом, множество  $S$  вершин орграфа  $D$  является вершинной базой тогда и только тогда, когда каждая вершина орграфа  $D$  достижима из некоторой вершины множества  $S$  и ни одна из вершин множества  $S$  не достижима из любой другой вершины этого множества.

**Теорема 16.6.** *Каждый бесконтурный орграф имеет единственную вершинную базу, состоящую из всех вершин с нулевыми полустепенями захода.*

**Следствие 16.6 (а).** *Любая вершинная база орграфа  $D$  содержит точно одну вершину из каждой сильной компоненты орграфа  $D$ , принадлежащей вершинной базе конденсации  $D^*$  орграфа  $D$ .*

$1$ -базой называется минимальный набор  $S$  таких попарно несмежных вершин, что любая вершина орграфа  $D$  или принадлежит  $S$ , или смежна из некоторой вершины множества  $S$ . Каждый орграф имеет вершинную базу, но не каждый имеет  $1$ -базу. Например, ни один из контуров нечетной длины не имеет  $1$ -базы. Критерий существования  $1$ -базы у произвольного орграфа еще не найден. В теореме Ричардсона [1] обобщается следствие 16.7 (а), полученное фон Нейманом и Моргенштерном [1] при исследовании ими теории игр.

**Теорема 16.7.** *Каждый орграф, не содержащий контуров нечетной длины, имеет  $1$ -базу.*

**Следствие 16.7 (а).** *Каждый бесконтурный орграф имеет  $1$ -базу.*

## Орграфы и матрицы

*Матрицей смежностей  $A(D)$  орграфа  $D$  называется  $(p \times p)$ -матрица  $\|a_{ij}\|$ , у которой  $a_{ij} = 1$ , если  $v_i v_j$  — дуга орграфа  $D$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. На рис. 16.4 изображен орграф, матрица смежностей которого имеет вид*

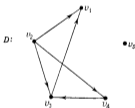


Рис. 16.4. Пример орграфа.

$$A(D) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \text{Сумма по столбцу} \end{array} \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \text{Сумма по строке} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Легко проверить, что суммы элементов по строкам матрицы  $A(D)$  равны полустепеням исхода вершин орграфа  $D$ , а суммы элементов по столбцам — полустепеням захода.

Как и в случае графов, степени матрицы смежностей  $A$  орграфа дают полную информацию о числе маршрутов, идущих из одной вершины в другую.

**Теорема 16.8.**  $(i, j)$ -й элемент  $a_{ij}^n$  матрицы  $A^n$  равен числу маршрутов длины  $n$ , идущих из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ .

Упомянем здесь вкратце еще о трех матрицах, связанных с орграфом  $D$  — о матрице достижимостей, матрице расстояний и матрице обходов. В матрице достижимостей  $R$  элемент  $r_{ij}$  равен 1, если вершина  $v_i$  достижима из  $v_j$ , и равен 0 в противном случае. В матрице расстояний  $(i, j)$ -й элемент равен расстоянию из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ ; если же из  $v_i$  в  $v_j$  нет путей, то соответствующий элемент полагаем равным бесконечности. В матрице обходов  $(i, j)$ -й элемент равен длине наиболее длинного пути из  $v_i$  в  $v_j$ , а если таких путей нет, то опять-таки полагаем этот элемент равным бесконечности. Для орграфа  $D$ , показанного на рис. 16.4, эти три матрицы имеют вид

Матрица достижимостей	Матрица расстояний	Матрица обходов
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

**Следствие 16.8 (а).** Элементы матриц достижимостей и расстояний связаны со степенями матрицы  $A$  следующими соотношениями:

- 1)  $r_{ii}=1$  и  $d_{ii}=0$  для всех  $i$ ;
- 2)  $r_{ij}=1$  тогда и только тогда, когда  $a_{ij}^n > 0$  для некоторого  $n$ ;
- 3)  $d(v_i, v_j)$  равно наименьшему из чисел  $n$ , для которых  $a_{ij}^n > 0$ , и  $\infty$ , если таких чисел нет.

Эффективных методов для нахождения элементов матрицы обходов не существует. Эта проблема тесно связана с некоторыми другими давно поставленными алгоритмическими проблемами теории графов, такими, как нахождение остовных циклов и контуров, а также решение задачи о коммивояжере<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Рассмотрим сеть  $N$ , полученную из сильного орграфа  $D$  присвоением каждой дуге в  $D$  некоторого положительного целого числа (стоимости). В задаче о коммивояжере требуется построить алгоритмы для нахождения в сети  $N$  маршрута, двигаясь по которому коммивояжер может посетить каждую вершину и вернуться в первоначальную, потратив на прохождение дуг минимум суммарной стоимости.

Поэлементное произведение<sup>1)</sup>  $B \times C$  матриц  $B = \|b_{ij}\|$  и  $C = \|c_{ij}\|$  имеет своим  $(i, j)$ -м элементом  $b_{ij}c_{ij}$ . Матрицу достижимостей орграфа можно использовать для нахождения его сильных компонент.

Следствие 16.8 (6). Пусть  $v_i$  — вершина орграфа  $D$ . Сильные компоненты орграфа  $D$ , содержащие  $v_i$ , определяются единичными<sup>2)</sup> элементами  $i$ -й строки (или  $i$ -го столбца) матрицы  $R \times R^T$ .

Формула для числа остовных входящих деревьев данного орграфа была найдена Боттом и Мейберри [1], а доказана Таттом [4]. Чтобы сформулировать этот результат, известнейший как матричная теорема о деревьях для орграфов, введем еще матрицы, связанные с  $D$ . Обозначим через  $M_{od}$  матрицу, полученную из  $-A$  заменой  $i$ -го элемента главной диагонали на  $od(v_i)$ . Двойственным образом определим матрицу  $M_{id}$ .

Теорема 16.9. Для каждого помеченного орграфа  $D$  алгебраическое дополнение любого элемента  $i$ -й строки матрицы  $M_{od}$  равно числу остовных входящих деревьев, у которых вершина  $v_i$  является стоком.

Теорема 16.9'. Для каждого помеченного орграфа  $D$  алгебраическое дополнение любого элемента  $j$ -го столбца матрицы  $M_{id}$  равно числу остовных выходящих деревьев, у которых вершина  $v_j$  является источником.

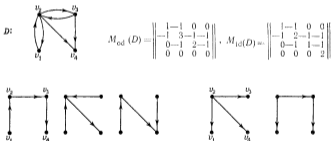


Рис. 16.5. Остовные входящие и выходящие деревья.

В соответствии с теоремой 16.9 у матрицы  $M_{od}$  орграфа, представленного на рис. 16.5, все алгебраические дополнения элементов четвертой строки равны 3. На этом же рисунке показаны три остовных входящих дерева орграфа  $D$ , у которых  $v_4$  — сток. Двойственная теорема 16.9' иллюстрируется вторым столбцом

<sup>1)</sup> Иногда оно называется «произведением Адамара».

<sup>2)</sup> Равными 1.— Прим. перев.

матрицы  $M_{id}$  и двумя остовными выходящими деревьями с  $v_2$  в качестве источника.

*Эйлеров контур* в орграфе  $D$  — это замкнутый остовный маршрут, в котором каждая дуга орграфа  $D$  встречается по одному разу. Орграф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров контур. Точно так же, как в теореме 7.1 для графов, можно легко показать, что слабый орграф  $D$  эйлеров тогда и только тогда, когда у каждой его вершины полустепень захода равна полустепени исхода. Сформулируем теперь теорему, в которой дается формула для числа эйлеровых контуров в эйлеровых орграфах. Этот результат иногда называют теоремой BEST<sup>1)</sup> по первым буквам фамилий де Брёйна, ван Аардена-Эренфеста, Смита и Татта; первые два автора (см. де Брёйн, ван Аарден-Эренфест [II]) и два последние (см. Смит, Татт [II]) получили результат независимо. Эту теорему можно доказать очень изящно с помощью матричной теоремы о деревьях для орграфов; см. Кастелейн [2, стр. 76].

Следствие 16.9 (а). *В эйлеровом орграфе число эйлеровых контуров равно с  $\prod_{i=1}^p (d_i - 1)!$ , где  $d_i = id(v_i)$ , а с — общее значение*

*всех алгебраических дополнений элементов матрицы  $M_{od}$ .*

Заметим, что для эйлерова орграфа  $M_{od} = M_{i1}$ ; и все суммы и по строкам, и по столбцам равны нулю, так что все алгебраические дополнения равны между собой. Для орграфа, показанного на

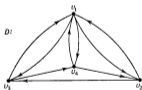


Рис. 16.6. Перечисление эйлеровых путей.

рис. 16.6,  $c=7$ ; в этом орграфе 14 эйлеровых контуров. Два из них такие:  $v_1v_2v_3v_1v_2v_3v_1v_4v_1$  и  $v_1v_2v_1v_3v_2v_3v_1v_4v_1$ . Матрица  $M_{od}$  для этого орграфа равна

$$M_{od} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Итак, мы дали некоторые указания к использованию матриц в изучении орграфов. С другой стороны, можно использовать орграфы в исследовании матриц. Любая квадратная матрица  $M = \|m_{ij}\|$  порождает орграф  $D$ , в котором дуга  $v_i v_j$  существует тогда, когда  $m_{ij} \neq 0$ ; в  $D$  могут быть петли. Следующий алгоритм (Харари [16]) иногда упрощает вычисление собственных значений матрицы  $M$ , а также нахождение матрицы, обратной к  $M$  (если она существует).

<sup>1)</sup> Игра слов: best — наилучший. — Прим. пер.

1. Образовать орграф  $D$ , связанный с  $M$ .
2. Определить сильные компоненты орграфа  $D$ .
3. Образовать конденсацию  $D^*$ .
4. Упорядочить сильные компоненты так, чтобы матрица смежностей орграфа  $D^*$  стала верхней треугольной.
5. Используя сильные компоненты, переупорядочить вершины орграфа  $D$  так, чтобы привести его матрицу смежностей  $A$  к верхнему треугольному виду.
6. Заменить каждый единичный элемент матрицы  $A$  соответствующим ему элементом матрицы  $M$ .

Собственные значения матрицы  $M$  являются собственными значениями диагональных блоков новой матрицы, а матрицу, обратную к  $M$ , можно найти, обращая эти диагональные блоки.

Если  $M$  — разреженная матрица<sup>1)</sup> (или, скорее, матрица с таким расположением нулевых элементов, что в графе имеется несколько сильных компонент), то указанный алгоритм может быть весьма эффективным. Вариант этого алгоритма (иногда более эффективный, но также и более сложный) для двудольных графов был дан Далмеджем и Мендельсоном [2].

## Турниры

*Турнир* — это направленный полный граф. Все турниры с двумя, тремя и четырьмя вершинами показаны на рис. 16.7. Первый орграф с тремя вершинами называется *транзитивной тройкой*, второй — *циклической тройкой*.

В турнире состязаний данный состав игроков или команд ведет такую игру, правилами которой запрещен ничейный исход. Каждый игрок встречается с каждым другим игроком по одному разу и точно один из них одерживает победу. Игроки изображаются вершинами, и для каждой пары вершин дуга идет от победителя к побежденному; так строится турнир.

Из всех полученных когда-либо теорем о турнирах первая принадлежит Редди [1]; для турниров с малым количеством вершин ее можно проверить с помощью рис. 16.7.

**Теорема 16.10.** *Каждый турнир имеет остовный путь.*

**Доказательство.** Утверждение доказывается индукцией по числу вершин. В каждом турнире с 2, 3 или 4 вершинами есть остовный путь, в чем убеждаемся, просматривая на рис. 16.7 все такие турниры.

Предположим, что теорема верна для всех турниров с  $n$  вершинами, и рассмотрим турнир  $T$  с  $n+1$  вершинами. Пусть  $v_0$  — произвольная вершина турнира  $T$ . Тогда турнир  $T - v_0$  имеет  $n$  вершин и в нем есть остовный путь  $P$ , скажем  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Одна из дуг

<sup>1)</sup> Разреженной называют матрицу с большим числом нулевых элементов.

$v_0v_1$  или  $v_1v_0$  обязательно принадлежит  $T$ . Если  $v_0v_1 \in T$ , то путь  $v_0v_1v_2 \dots v_n$  в  $T$  является остовным. Если же  $v_1v_0 \in T$ , то обозначим через  $v_i$  первую вершину пути  $P$ , для которой дуга  $v_0v_i$  принадлежит  $T$  (если такая вершина есть). Тогда в  $T$  существует дуга  $v_{i-1}v_0$  и, следовательно,  $v_1v_2 \dots v_{i-1}v_0v_i \dots v_n$  — остовный путь. Если такой вершины  $v_i$  нет, то остовным путем будет  $v_1v_2 \dots v_nv_0$ . Итак, в любом случае в турнире существует остовный путь. Теорема доказана.

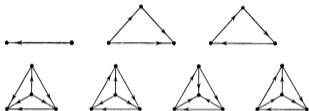


Рис. 16.7. Турниры с небольшим числом вершин.

Селе [1] обобщил этот результат, доказав, что каждый турнир имеет нечетное число остовных путей. Другое обобщение теоремы Редди дали Галлаи и Мильгрэм [1], доказавшие, что в любом направленном графе  $D$  существует набор из не более чем  $\beta_0(D)$  непересекающихся по вершинам путей, покрывающих множество  $V(D)$  его вершин.

Следующая теорема принадлежит Мозеру (см. Харари, Мозер [1]); ее следствие, полученное Фолксом [1] и Камбионом [1], аналогично предыдущей теореме (о произвольных турнирах) для случая сильных турниров.

**Теорема 16.11.** *Каждый сильный турнир с  $p$  вершинами имеет контур длины  $n$  для  $n=3, 4, \dots, p$ .*

**Доказательство.** Это доказательство также проводим с помощью индукции, но по длине контуров. Если турнир  $T$  сильный, то в нем обязательно есть циклическая тройка. Предположим, что  $T$  имеет контур  $Z=v_1v_2 \dots v_nv_1$  длины  $n < p$ . Покажем, что  $T$  имеет также контур длины  $n+1$ . Возникают два случая: 1) существует вершина  $u$ , не принадлежащая контуру  $Z$  и такая, что найдутся вершины  $v$  и  $w$ , принадлежащие контуру  $Z$ , первая из которых смежна из  $u$ , а вторая смежна к  $u$ ; 2) такой вершины нет.

**Случай 1.** Предположим, что существует вершина  $u$ , не принадлежащая контуру  $Z$ , и вершины  $v$  и  $w$ , принадлежащие  $Z$  и такие, что дуги  $uv$  и  $wu$  содержатся в  $T$ . Не теряя общности, можно

считать, что дуга  $v_i u$  также содержится в  $T$ . Пусть  $v_i$  — первая вершина при обходе контура  $Z$  из  $v_1$ , для которой дуга  $uv_i$  принадлежит  $T$ . Тогда дуга  $v_{i-1}u$  также содержится в  $T$ , а поэтому  $v_1 v_2 \dots v_{i-1} u v_i \dots v_n v_1$  — контур длины  $n+1$ .

*Случай 2.* Пусть такой вершины  $u$ , как в случае 1, нет. Тогда все вершины, не принадлежащие  $Z$ , можно разбить на два подмножества  $U$  и  $W$ , где  $U$  — множество вершин, смежных к каждой вершине контура  $Z$ , а  $W$  — множество вершин, смежных из каждой вершины контура  $Z$ . Ясно, что эти множества не пересекаются и ни одно из них не пусто, так как иначе  $T$  не был бы сильным турниром. Далее, существуют такая вершина  $u \in U$  и такая вершина  $w \in W$ , что дуга  $wu$  принадлежит  $T$ . Поэтому  $uv_1 v_2 \dots v_{n-1} w u$  — контур длины  $n+1$  в турнире  $T$ .

Таким образом, существование контура длины  $n+1$  доказано.

**Следствие 16.11 (а).** *Турнир является сильным тогда и только тогда, когда он имеет остовный контур.*

Используя терминологию турниров состязаний, назовем количеством очков вершины ее полустепень исхода. Следующая теорема, доказанная Ландау [11], появилась в результате эмпирического изучения специальных турниров (так называемых «pecking orders»), в которых вершины представляют кур, а дуги — клевки.

**Теорема 16.12.** *Расстояние от вершины с наибольшим количеством очков до любой другой равно 1 или 2.*

Число транзитивных троек можно выразить через количества очков вершин; см. Харари и Мозер [11]. Как следствие отсюда немедленно получается хорошо известная формула Кендалла и Смита [11], имеющая большое значение в статистическом анализе. Она была также получена Байнеке и Харари [4] с помощью перехода от циклических троек к сильным подтурнирам большего размера.

**Теорема 16.13.** *Число транзитивных троек в турнире с набором количеств очков  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  равно*

$$\sum s_i(s_i-1)/2.$$

**Следствие 16.13 (а).** *Наибольшее число циклических троек среди всех турниров с  $p$  вершинами равно*

$$t(p, 3) = \begin{cases} \frac{p^3-p}{24}, & \text{если } p \text{ нечетно,} \\ \frac{p^3-4p}{24}, & \text{если } p \text{ четно.} \end{cases}$$



## Обзор по проблеме восстановления турниров

Для турниров было дано частичное обоснование специального случая гипотезы Улама. Каждый турнир  $T$  с  $p$  вершинами определяет  $p$  подтурниров  $T_i = T - v_i$ . Было доказано<sup>1)</sup>, что можно восстановить любой несильный турнир, имеющий по крайней мере пять вершин. Однако для сильных турниров с  $p=5$  и  $p=6$  гипотеза не верна. Это

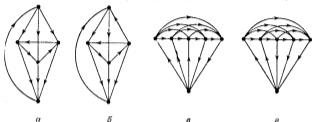


Рис. 16.8. Две пары невозстанавливаемых сильных турниров.

установили Байнеке и Паркер, показав, что две пары турниров, изображенные на рис. 16.8, а, б и в, г, противоречат гипотезе Улама. Но подобных контрпримеров для турниров с большим числом вершин пока не известно, так что мы предполагаем, что их нет!

## Упражнения

16.1. Орграф называется *строго слабым*, если он слабый и не односторонний; *строго односторонним*, если он односторонний и не сильный. Пусть  $C_0$  — класс всех несвязных орграфов,  $C_1$  — класс всех строго слабых орграфов,  $C_2$  — класс всех строго односторонних орграфов и  $C_3$  — класс всех сильных орграфов. Тогда максимум и минимум числа  $q$  дуг среди всех орграфов с  $p$  вершинами, относящихся по связности к категории  $C_i$ ,  $i=0, 1, 2, 3$ , можно найти в следующей таблице:

Категория	Наименьшее число дуг	Наибольшее число дуг
0	0	$(p-1)(p-2)$
1	$p-1$	$(p-1)(p-2)$
2	$p-1$	$(p-1)^2$
3	$p$	$p(p-1)^2$

(Картрайт и Харари [1])

16.2. Орграф, являющийся декартовым произведением  $D_1 \times D_2$  двух орграфов, имеет  $V_1 \times V_2$  в качестве множества вершин, и вершина  $(u_1, u_2)$  смежна к вершине  $(v_1, v_2)$  тогда и только тогда, когда или  $[u_1 = v_1 \text{ и } u_2 \text{ адж } v_2]$ , или  $[u_2 = v_2 \text{ и } u_1 \text{ адж } v_1]$ .

<sup>1)</sup> Харари и Палмер [18].

(В гл. 2 такое же определение дано для графов, только здесь у нас ориентированная смежность.) Если оргграф  $D$  относительно соединимости находится в категории  $C_p$ , то будем писать  $c(D) = p$ . Тогда  $c(D_1 \times D_2) = \min \{c(D_1), c(D_2)\}$ , за исключением случая  $c(D_1) = c(D_2) = 2$ , когда  $c(D_1 \times D_2) = 1$ .

(Харари, Трот [1])

16.3. Ни один строго слабый оргграф не содержит вершину, удаление которой приводит к сильному оргграфу.

(Харари, Росс [1])

\*16.4. Оргграф с данными последовательностями полустепеней исхода  $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ , где  $p - 1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p$ , и полустепеней захода  $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ , где  $t_j \leq p - 1$ , существует тогда и только тогда, когда  $\sum s_i = \sum t_i$  и для любого целого числа  $k < p$

$$\sum_{i=1}^k s_i \leq \sum_{i=1}^k \min \{k-1, t_i\} + \sum_{i=k+1}^p \min \{k, t_i\}.$$

(Райзер [1], Фалкерсон [1])

\*16.5. Сильный оргграф с данными последовательностями полустепеней захода и исхода, удовлетворяющими условиям упражнения 16.4, существует тогда и только тогда, когда  $\sum s_i = \sum t_i$ ,  $s_i > 0$ ,  $t_i > 0$  для всех  $i$  и для любого целого  $k < p$

$$\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{i=1}^k t_i + \sum_{i=k+1}^p \min \{k, t_i\}.$$

(Байнеке, Харари [1])

16.6. Реберный оргграф  $L(D)$  имеет множество всех дуг данного оргграфа  $D$  в качестве множества вершин, и две его вершины  $x$  и  $y$  смежны тогда и только тогда, когда дуги  $x$  и  $y$  порождают маршрут в оргграфе  $D$ . Выразить число вершин и число дуг оргграфа  $L(D)$  через соответствующие величины оргграфа  $D$ .

(Харари, Норман [3])

16.7. Реберный оргграф  $L(D)$  слабого оргграфа  $D$  изоморфен самому оргграфу  $D$  тогда и только тогда, когда  $D$  или  $D'$  — функциональный оргграф.

(Харари, Норман [3])

16.8. Если  $D$  — несвязный оргграф, то утверждение, содержащееся в предыдущем упражнении, не верно.

\*16.9. Пусть  $S$  и  $T$  — непересекающиеся множества вершин оргграфа  $D$ , а  $X(S, T)$  — множество всех дуг, идущих из  $S$  в  $T$ . Оргграф  $D$  реберный тогда и только тогда, когда не существует множество  $S$  и  $T$ , имеющих по две вершины и таких, что  $|X(S, T)| = 3$ .

(Геллер, Харари [1], Хёчен [1])

16.10. Число эйлеровых путей оргграфа  $D$  равно числу гамильтоновых контуров реберного оргграфа  $L(D)$ .

(Кастелейн [1])

16.11. Пусть оргграф  $T_1$  состоит из одной вершины с двумя ориентированными петлями. Пусть  $T_2 = L(T_1)$  — реберный оргграф (здесь, если быть более точным, нужно использовать термин «псевдоорграф») оргграфа  $T_1$ , определенный естественным образом; рекурсивно определяется  $T_n = L(T_{n-1})$ . (Такие оргграфы  $T_n$  известны под названием «телеграфных диаграмм».) Тогда число эйлеровых путей в оргграфе  $T_n$  равно  $2^{n-1}$ .

(де Брёйн, ван Аарден-Эренфест [1])

\*16.12. Каждый оргграф, у которого  $\text{id}(v) \geq p/2$ ,  $\text{od}(v) \geq p/2$  для любой вершины  $v$ , гамильтонов.

(Гуйя-Ури [1])

16.13. Рассмотрим орграфы, у которых для любой вершины  $u$  сумма  $\sum d(u, v)$  расстояний от этой вершины до всех остальных постоянна. Найти среди этих орграфов орграф, не являющийся вершинно-симметрическим.

(Харари [11])

16.14. Орграф  $D$ , его дополнение  $\bar{D}$  и обратный к нему  $D'$  имеют одну и ту же группу (автоморфизмов).

16.15. Пусть  $A$  — матрица смежностей реберного орграфа полного симметрического орграфа. Тогда все элементы матрицы  $A^2 + A$  равны 1.

(Гоффман [3])

16.16. Два орграфа называются *коспектральными*, если их матрицы смежностей имеют один и тот же характеристический многочлен. Существуют в точности три различных коспектральных сильных орграфа с четырьмя вершинами.

(Харари, Кинг, Рид)

16.17. Орграф, называемый *конъюнкцией*  $D = D_1 \wedge D_2$  двух орграфов  $D_1$  и  $D_2$ , имеет в качестве множества вершин  $V = V_1 \times V_2$ , и вершина  $u = (u_1, u_2)$  смежна к вершине  $v = (v_1, v_2)$  тогда и только тогда, когда  $u_1 \text{ адж } v_1$  в орграфе  $D_1$  и  $u_2 \text{ адж } v_2$  в орграфе  $D_2$ . Матрица смежностей  $A$  конъюнкции  $D = D_1 \wedge D_2$  есть тензорное произведение матриц смежностей орграфов  $D_1$  и  $D_2$ .

(Харари, Трот [1])

16.18. Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — два орграфа, а  $d_i$  — наибольший общий делитель длин всех простых контуров орграфа  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Конъюнкция  $D_1 \wedge D_2$  является сильным орграфом тогда и только тогда, когда  $D_1$  и  $D_2$  — сильные орграфы, а  $d_1$  и  $d_2$  взаимно просты.

(Мак-Эндрю [1])

16.19. Орграф называется *примитивным*, если какая-нибудь степень его матрицы смежностей целиком состоит из положительных чисел. Орграф примитивен тогда и только тогда, когда длины его простых контуров имеют наибольший общий делитель, равный 1.

(См. Далмедж и Мендельсон [3, стр. 204])

\*16.20. Пусть  $D$  — примитивный орграф.

а) Если  $n$  — наименьшее из целых чисел, для которых  $A^n > 0$ , то  $n \leq (p-1)^2 + 1$ .

(Виландт [1])

б) Если  $n$  принимает наибольшее значение  $(p-1)^2 + 1$ , то существует такая матрица перестановки  $P$ , что  $PAP^{-1}$  имеет вид  $\|a_{ij}\|$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $j = i + 1$ ,  $a_{p,1} = 1$  и  $a_{ij} = 0$  в остальных случаях.

(Далмедж и Мендельсон [3, стр. 209])

16.21. *Ориентацией графа  $G$*  называется приписывание ориентации каждому его ребру. Граф имеет сильно связную ориентацию тогда и только тогда, когда он связан и не содержит мостов.

(Роббинс [1])

16.22. Пусть  $B$  — матрица инцидентий размера  $p \times q$  произвольной ориентации  $D$  данного помеченного графа  $G$ , так что ее элемент  $b_{ij}$  равен  $+1$ , если ориентированное ребро  $x_i$  инцидентно к вершине  $v_j$ , равен  $-1$ , если  $x_i$  инцидентно из вершины  $v_j$ , и равен 0 в остальных случаях. Тогда  $\det BB^T$  равен числу остовов графа  $G$ . (Сравните матрицу  $BB^T$  с матрицей  $M$  из гл. 13.)

(Кирхгоф [1])

16.23. Напомним (гл. 5), что  $\lambda(u, v)$  — наименьшее число ребер графа  $G$ , удаление которых разделяет вершины  $u$  и  $v$ . Аналогично для вершин  $u$  и  $v$  орграфа  $D$  пусть  $\bar{\lambda}(u, v)$  — наименьшее число дуг, удаление которых разрывает все пути

из  $u$  в  $v$ . Для каждой ориентации  $D$  эйлерова графа  $G$  и каждой пары его вершин  $u$  и  $v$

$$\vec{\lambda}(u, v) = \vec{\lambda}(v, u) = \frac{1}{2} \lambda(u, v).$$

(Замечание. Гораздо более трудно доказывалось обобщение этого утверждения на произвольный граф  $G$ : граф  $G$  имеет такую ориентацию  $D$ , что  $\vec{\lambda}(D) \geq n$ , тогда и только тогда, когда  $\lambda(G) \geq 2n$ .)

(Нэш-Вильямс [1])

**16.24.** Любая ориентация  $n$ -хроматического графа  $G$  содержит простой путь длины  $n-1$ .

(Галлан [4])

**16.25.** Набор всех полустепеней исхода  $s_i$  турнира удовлетворяет равенству  $\sum s_i^2 = \sum (p-s_i)^2$ .

**16.26.** Все турниры, за исключением двух, имеют остовный путь  $v_1 v_2 \dots v_p$ , замкнутый дугой  $v_1 v_p$ . Исключения представляют циклическая тройка и турнир, показанный на рис. 16.8, а.

(Грюнбаум)

**16.27.а)** Число контуров длины 4 в любом контуре с  $p$  вершинами равно числу его сильных подтурниров с 4 вершинами.

б) Наибольшее число сильных подтурниров с 4 вершинами в любом турнире с  $p$  вершинами равно  $t(p, 4) = \binom{p-3}{2} t(p, 3)$ ; см. следствие 16.13 (а).

(Байнеке, Харари [4])

**16.28.** Группа изоморфна вершинной группе некоторого турнира тогда и только тогда, когда она имеет нечетный порядок.

(Мун [2])

**16.29.** Пусть  $\Gamma$  — вершинная группа, а  $\Gamma_1$  — «дуговая» группа турнира  $T$ . Группа  $\Gamma_1$  транзитивна тогда и только тогда, когда парная группа группы  $\Gamma$  транзитивна.

(Жан [1])

**16.30.** Пусть  $f(x)$  и  $s(x)$  — производящие функции для турниров и сильных турниров соответственно. Тогда

$$s(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)}. \quad (\text{Мун [4, стр. 88]})$$

**16.31.** Рассмотрим последовательность неотрицательных целых чисел  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$ .

а) Эта последовательность является набором полустепеней исхода некоторого турнира  $T$  тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^p s_i = p(p-1)/2$  и  $\sum_{i=1}^k s_i \geq k(k-1)/2$  для всех  $k < p$ .

(Ландау [1])

б) Турнир  $T$  сильный тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^k s_i > k(k-1)/2$  для всех  $k < p$ .

(Харари, Мозер [1])

## ДИАГРАММЫ ГРАФОВ

---

Лучше один раз увидеть,  
чем сто раз услышать.

*Пословица*

Для накопления фактов, позволяющих выдвигать различные гипотезы о свойствах графов, очень полезно иметь диаграммы графов. Легко изобразить все графы, содержащие менее 6 вершин. Диаграммы графов с 6 вершинами, представленные здесь, были выполнены Кроуэм. Он же, по-видимому, был первым, кто изобразил все графы с 7 вершинами. При составлении диаграмм никто еще не пытался решить задачу канонического упорядочения различных графов с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами. Тем не менее каждому графу  $G$  приписывается индекс  $n$  и тот же индекс приписывается дополнительному графу  $\bar{G}$ . Таким образом, граф  $G_{p,q,n}$  есть  $n$ -й  $(p, q)$ -граф и он отождествляется с диаграммой, имеющей (в естественном порядке слева направо) номер  $n$ ; кроме того,  $\bar{G}_{p,q,n} = G_{p, \binom{p}{2} - q, n}$ .

Исключение составляют (4,3)-граф и (5,5)-граф.

В качестве дополнения к таблицам подобного типа Хил написал программу для электронно-вычислительной машины Национальной физической лаборатории в Мидлсексе. Эта программа печатает каждый граф с 7 вершинами на отдельной карте. Сейчас заканчивается работа над программой, выдающей на печать графы с 8 вершинами. В ходе работы было установлено, что наиболее удобно задавать графы их матрицами смежностей. В преимуществе такого задания уже убедились исследователи, использующие вычислительные методы.

Для удобства мы приводим здесь таблицу для числа графов с  $p \leq 9$  вершинами и  $q \leq 18$  ребрами (ср. Риордан [2, стр. 173]). Указанные в таблице числа были найдены по формуле Пойа (15.47).

Таблица III









Число графов с  $p \leq 9$  вершинами и  $q \leq 18$  ребрами













$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	2	2
3			1	3	4	5	5	5	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1637
11						9	148	980	3252
12						5	131	1312	5995
13						2	97	1557	10 120
14						1	65	1646	15 615
15						1	41	1557	21 933
16							21	1312	27 987
17							10	980	32 403
18							5	663	34 040
$g_p$	1	2	4	11	34	156	1044	12 344	308 168

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$p=1$							
$p=2$	•	•	•	•	•	•	•
$p=3$	•	•	•	•	•	•	•
$p=4$	•	•	•	•	•	•	•
















$p=5$ 

$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
			
			
			
			










$q=4$		$q=5$	
			
			
			



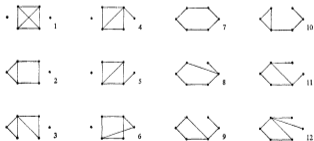
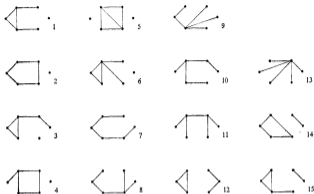
$p=5$  (продолжение)

$q=6$	$q=7$	$q=8$
 		
		
		
		
$q=9$	$q=10$	
		

$p=6$ 

$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
			
			
			
			
			
$q=4$			







13



15



17



19



14



16



18



20



21



1



5



9



13



2



6



10



14



3



7



11



15



4



8



12



16





21



22



23



24



1



7



13



19



2



8



14



20



3



9



15



21



4



10



16



5



11



17



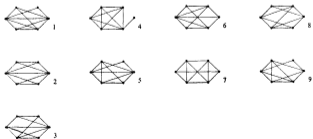
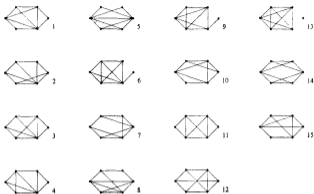
6












12



18



$q=12$	$q=13$	$q=14$	$q=15$
			
			
			
			
			



## ДИАГРАММЫ ОРГРАФОВ

---

... он вскочил на коня и бешеным  
галопом помчался по все стороны

Ликок С. Ч)

Здесь представлены ориентированные графы, имеющие не более 4 вершин. Эти графы расположены в соответствии с числом вершин и числом дуг, и каждому из них приписывается индекс так, чтобы граф, являющийся его дополнением, получил тот же индекс. Исключение составляют (3,3)-орграф и (4,6)-орграф. Диаграммы даются только для орграфов, имеющих не более 4 вершин, потому что включение орграфов с 5 вершинами потребовало бы почти столько же бумаги, сколько пошло на всю книгу. В табл. П2, составленной Обершельпом [1], приведены числа орграфов с  $p$  вершинами,  $p \leq 8$ . Эти числа вычислены с помощью соотношения (15.30).
















Таблица П2

Число орграфов с  $p \leq 8$  вершинами

$p$	$d_p$
1	1
2	3
3	16
4	218
5	9 608
6	1 540 944
7	882 033 440
8	1 793 359 192 848

---

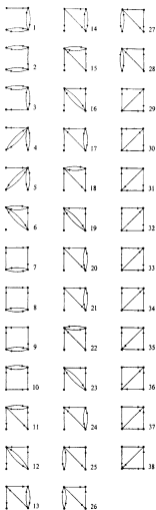
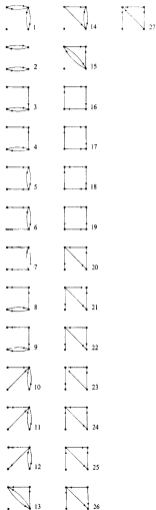
<sup>1)</sup> Стивен Ликок (1869—1944) — канадский педагог и юморист. — *Прим. перев.*











































































	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$p=1$	•						
$p=2$	• •	—••					
$p=3$	• • •	•••	 . 1	 1	 1	 1	 1
			 2	 2	 2		
			 3	 3	 3		
			 4	 4	 4		








































	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	
$p=4$					
			1	1	8
			2	2	9
			3	3	10
			4	4	11
			5	5	12
				6	13
				7	




















$q=4$

$q=5$



$q=7$		$q=8$			
 27	 34	 1	 8	 15	 22
 28	 35	 2	 9	 16	 23
 29	 36	 3	 10	 17	 24
 30	 37	 4	 11	 18	 25
 31	 38	 5	 12	 19	 26
 32		 6	 13	 20	 27
 33		 7	 14	 21	

$q=9$		$q=10$	$q=11$	$q=12$
 1	 6	 11	 1	
 2	 7	 12	 2	
 3	 8	 13	 3	
 4	 9		 4	
 5	 10		 5	

## ДИАГРАММЫ ДЕРЕВЬЕВ

Из-за деревьев леса не видно.

Писемница

Диаграммы всех деревьев с  $p \leq 12$  вершинами были составлены Принсом и опубликованы как приложение к его докторской диссертации (Принс [1]). Мы приводим здесь только диаграммы для  $p \leq 10$ ; они опубликованы также в работе Харари и Принса [2]. Порядок следования деревьев с данным числом вершин довольно произволен, но в целом деревья перечисляются в соответствии с увеличением числа вершин, имеющих степень больше 2. В табл. ПЗ приведены числа деревьев и корневых деревьев с  $p$  вершинами для  $p \leq 26$  (см. Риордан [2]), а также числа асимметрических деревьев и гомеоморфно несводимых деревьев для  $p \leq 12$  (см. Харари, Принс [1]). Все эти числа получены с помощью формул (15.41), (15.35), (15.51), (15.52), (15.47) — (15.49).

Таблица ПЗ

Число деревьев, корневых деревьев, асимметрических деревьев и гомеоморфно несводимых деревьев с  $p$  вершинами



$p$	$i_p$	$T_p$	$i_p$	$h_p$	$p$	$i_p$	$T_p$
1	1	1	1	1	13	1 301	12 486
2	1	1	0	1	14	3 159	32 973
3	1	2	0	0	15	7 741	87 811
4	2	4	0	1	16	19 320	235 381
5	3	9	0	1	17	48 629	634 847
6	6	20	0	2	18	123 867	1 721 159
7	11	48	1	2	19	317 955	4 688 676
8	23	115	1	4	20	823 065	12 826 228
9	47	286	3	5	21	2 144 505	35 221 832
10	105	719	6	10	22	5 623 756	97 055 181
11	235	1842	15	14	23	14 828 074	268 282 855
12	551	4766	29	26	24	39 299 897	743 724 984
					25	104 636 890	2 067 174 645
					26	279 793 450	5 759 636 510






$p=1$  •











$p=2$  ••
















$p=3$  •••


































































$p=4$  •••• 

$p=5$  •••••  

$p=6$  ••••••     

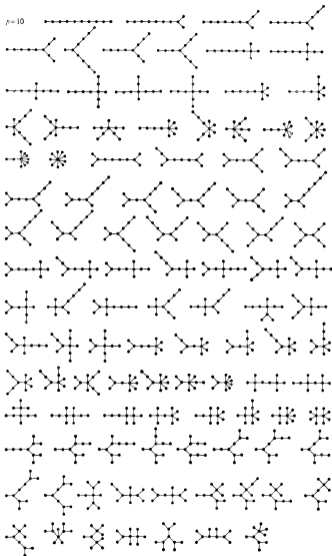
$p=7$  •••••••        
   

$p=8$  ••••••••        
        

$p=9$  •••••••••       
          
          
          
          
          
          
     



$p=10$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ<sup>1)</sup>

Они спешат, они волазут  
Одна вслед другой,  
За Плотником и за Моржом  
Весело гурыбой.

Льюис Кэрролл<sup>2)</sup>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Приведенный ниже список литературы содержит такие работы (и только такие), на которые имеются ссылки в тексте книги. Нужно, однако, отметить, что этот перечень значительно более выборочный, чем обширная библиография по теории графов и ее применениям, составленная Тёрнером [2].

Авондо-Бодино Дж.

<sup>1)</sup>1. Применение в экономике теории графов, изд-во «Прогресс», М., 1966.

Андерсон, Харари (Anderson S. S., Harary F.)

1. Trees and unicyclic graphs, *Math. Teacher*, **60** (1967), 345—348.

Байнеке (Beineke L. W.)

1. Decompositions of complete graphs into forests, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, **9** (1964), 589—594.
2. The decomposition of complete graphs into planar subgraphs, гл. 4 в сб. *Graph Theory and Theoretical Physics* (под ред. Harary F.), Academic Press, London, 1967, pp. 139—154.
3. Complete bipartite graphs: decomposition into planar subgraphs, гл. 7 в сб. *Seminar in Graph Theory* (под ред. Harary F.), New York, 1967, pp. 42—53.
4. Derived graphs and digraphs, в сб. *Beiträge zur Graphentheorie* (под ред. Sachs H., Voss H., Walther H.), Leipzig, 1968, pp. 17—33.

Байнеке, Мун (Beineke L. W., Moon J. W.)

1. The number of labelled  $k$ -trees, в сб. *Proof Techniques in Graph Theory* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.

Байнеке, Пипперт (Beineke L. W., Pippert R. E.)

1. The enumeration of labelled  $k$ -dimensional trees, *J. Combinatorial Theory* (в печати).

Байнеке, Плэммер (Beineke L. W., Plummer M. D.)

1. On the 1-factors of a nonseparable graph, *J. Combinatorial Theory*, **2** (1967), 285—289.

Байнеке, Харари (Beineke L. W., Harary F.)

1. Local restrictions for various classes of directed graphs, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 87—95.

---

<sup>1)</sup> Литература, отмеченная кружочком, добавлена при переводе. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Льюис Кэрролл, кн. 1 «Алиса в стране чудес», кн. 2 «Сквозь зеркало и что там увидела Алиса», Изд-во литературы на иностранных языках, София, 1967, стр. 156, перевод Д. Орловской. Дословный перевод последней строки: «Их становилось все больше, больше и больше». — *Прим. перев.*

2. Inequalities involving the genus of a graph and its thickness, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **7** (1965), 19—21.
  3. The genus of the  $n$ -cube, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 494—496.
  4. The maximum number of strongly connected subtournaments, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 491—498.
  5. The thickness of the complete graph, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 850—859.
  6. The connectivity function of a graph, *Mathematika*, **14** (1967), 197—202.
- Байнеке, Харари, Мун (Beineke L. W., Harary F., Moon J. W.)
1. On the thickness of the complete bipartite graph, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 1—5.
- Байнеке, Харари, Пламмер (Beineke L. W., Harary F., Plummer M. D.)
1. On the critical lines of a graph, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 205—212.
- Балабан (Balaban A. T.)
1. Valence-isomerism of cyclopolynes, *Rev. Roumaine Chim.*, **11** (1966), 1097—1116.
- Барнетт (Barnett D.)
1. Trees in polyhedral graphs, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 731—736.
- Баттл, Харари, Кодاما (Battle J., Harary F., Kodama Y.)
1. Every planar graph with nine points has a nonplanar complement, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 569—571.
- Баттл, Харари, Кодاما, Янгс (Battle J., Harary F., Kodama Y., Youngs J. W. T.)
1. Additivity of the genus of a graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962).
- Бензер (Benzer S.)
1. On the topology of the genetic fine structure, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 1607—1620.
- Берж К. (Berge C.)
1. Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43**(1957), 842—844.
  2. Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962.
  3. Graphes et hypergraphes. Paris, 1970.
- Берж, Гуйя-Ури (Berge C., Ghouila-Houri A.)
1. Programming, games and transportation networks, London, 1965.
- Бернсайд (Burnside W.)
1. Theory of groups of finite order (2nd edition), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911.
- Бехзад (Behzad M.)
1. A criterion for the planarity of a total graph, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63** (1967), 679—681.
- Бехзад, Раджави (Behzad M., Radjavi H.)
1. The line analog of Ramsey numbers, *Israel J. Math.*, **5** (1967), 93—96.
- Бехзад, Чартрэнд (Behzad M., Chartrand G.)
1. Total graphs and traversability, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **15** (1966), 117—120.
  2. No graphs is perfect, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 962—963.
- Бехзад, Чартрэнд, Купер (Behzad M., Chartrand G., Cooper J.)
1. The colour numbers of complete graphs, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 226—228.
- Бехзад, Чартрэнд, Нордхауз (Behzad M., Chartrand G., Nordhaus E. A.)
1. Triangles in line-graphs and total graphs, *Indian J. Math.* (в печати).
- Биркгоф (Birkhoff G.)
1. Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, 3d edition. Providence, 1967. (Русский перевод первого издания: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, М., 1952.)
- Биркгоф, Льюис (Birkhoff G. D., Lewis D.)
1. Chromatic polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 355—451.
- Боланд, Леккеркеркер (Boland J., Lekkerkerker C.)
1. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.*, **51** (1962), 45—64.

- Бола, Коксетер (Ball W. W. R., Coxeter H. S. M.)  
1. Mathematical recreations and essays, New York, 1947.
- Боллобаш (Bollobás B.)  
1. On graphs with at most three independent paths connecting any two vertices, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1** (1966), 137—140.
- Бонди (Bondy J. A.)  
1. On Kelly's congruence theorem for trees, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **65** (1969), 1—11.
- Ботт, Мейберри (Bott R., Mayberry J. P.)  
1. Matrices and trees, в сб. *Economic Activity Analysis* (под ред. Morgenstern O.), New York, pp. 391—400.
- Браун, Джонсон (Brown E., Johnson L.)  
1. A class of planar four-colorable graphs, *Israel J. Math.*, **11** (1972), 53—56.
- де Брёйн (deBruijn N. G.)  
1. Generalization of Polya's fundamental theorem in enumeration combinatorial analysis, *Indagationes Math.*, **21** (1959), 59—69.  
2. Теория перечисления Поля, в сб. *Прикладная комбинаторная математика* (под ред. Беккенбаха Э.), изд-во «Мир», М., 1968, стр. 61—106.
- де Брёйн, ван Аарден-Эренфест (deBruijn N. G., van Aardenne-Ehrenfest T.)  
1. Circuits and trees in oriented graphs, *Simon Stevin*, **28** (1951), 203—217.
- Бруальди (Brualdi R. A.)  
1. Kronecker products of fully indecomposable matrices and of ultrastrong digraphs, *J. Combinatorial Theory*, **2** (1967), 135—139.
- Брукс (Brooks R. L.)  
1. On colouring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **37** (1941), 194—197.
- Брукс, Смит, Стоун, Татт (Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.)  
1. The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 312—340.
- Бэблер (Bäbler F.)  
1. Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen, *Comment. Math. Helv.*, **27** (1953), 81—100.
- Вагнер (Wagner K.)  
1. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *Jber. Deutsch. Math.-Verein*, **46** (1936), 26—32.  
2. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.*, **114** (1937), 570—590.  
3. Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung, *Math. Ann.*, **153** (1964), 139—141.  
4. *Graphentheorie*, Mannheim — Wien — Zürich, 1970.
- Вайда (Vajda S.)  
1. *Mathematical programming*, Addison-Wesley, Reading, 1961.
- Вайнберг (Weinberg L.)  
1. Number of trees in a graph, *Proc. IRE*, **46** (1958), 1954—1955.  
2. On the maximum order of the automorphism group of a planar triply connected graph, *SIAM J.*, **14** (1966), 729—738.
- Вальтер (Walther H.)  
1. On intersections of paths in a graph, *J. Combinatorial Theory* (в печати).
- Варга (Varga R. S.)  
1. *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- Веблен (Veblen O.)  
1. *Analysis situs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 5, Cambridge, 1922; 2nd edition, New York, 1931.
- Вейцел (Wechsel P. M.)  
1. The Kronecker product of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1963), 47—52.
- Визинг В. Г.  
1. Об оценке хроматического класса  $p$ -графа, *Дискретный анализ*, **3** (1964), 25—30.

2. О числе ребер в графе с данным радиусом, *Доклады АН СССР*, **173** (1967), 1245—1246.
- Виландт (Wielandt H.)
1. Unzerlegbare, nichtnegative Matrizen, *Math. Z.*, **52** (1950), 642—648.
- Волмерхауз (Vollmerhaus H.)
1. Über die Einbettung von Graphen in zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts, в сб. *Beiträge zur Graphentheorie* (под ред. Sachs H., Voss H., Walther H.), Leipzig, 1968, pp. 163—168.
- Гавел (Havel V.)
1. Замечание по вопросу существования конечных графов (на венгерском языке), *Časopis Pěst Mat.*, **80** (1955), 477—480.
  2. On the completeness-number of a finite graph, в сб. *Beiträge zur Graphentheorie* (под ред. Sachs H., Voss H., Walther H.), Leipzig, 1968, pp. 71—74.
- Гаф (Guy R. K.)
1. The decline and fall of Zarankiewicz's theorem, в сб. *Proof Techniques in Graph Theory* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.
  2. Latest results on crossing numbers. *Recent Trends in Graph Theory*, v. 186 (Lecture Notes in Mathematics), 1971.
- Гаф, Байнеке (Guy R. K., Beineke L. W.)
1. The coarseness of the complete graph, *Canad. J. Math.*, **20** (1966), 888—894.
  2. The coarseness of  $K_{m,n}$ , *Canad. J. Math.* (в печати).
- Галин (Halin R.)
1. A theorem on  $n$ -connected graphs, *J. Combinatorial Theory*, **7** (1969), 150—154.
- Галлай (Gallai T.)
1. On factorisation of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **1** (1950), 133—153.
  2. Über extreme Punkt- und Kantenmengen, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **2** (1959), 133—138.
  3. Elementare Relationen bezüglich der Glieder und trennenden Punkte von Graphen, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **9** (1964), 235—236.
  4. On directed paths and circuits, в сб. *Theory of Graphs* (под ред. Erdős P., Katona G.), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. См. также Academic Press, New York, 1968, pp. 115—119.
- Галлай, Мильграм (Gallai T., Milgram A. N.)
1. Verallgemeinerung eines graphen theoretischen Satzes von Rédei, *Acta Scient. Math.*, **21** (1960), 181—186.
- Гевирц, Квинтас (Gewirtz A., Quintas L. V.)
1. Connected extremal edge graphs having symmetric automorphism group, в сб. *Recent Progress in Combinatorics* (под ред. Tutte W. T.), Academic Press, New York, 1969.
  2. The uniqueness of a certain graph, *J. Combinatorial Theory*, **11** (1971), 45—53.
- Геллер (Geller D. P.)
1. Outerplanar graphs (в печати).
- Геллер, Харари (Geller D. P., Harary F.)
1. Arrow diagrams are line digraphs, *J. SIAM Appl. Math.*, **16** (1968), 1141—1145.
- Геренсер (Geregsér L.)
1. О проблемах раскраски (на венгерском языке), *Mat. Lapok*, **16** (1965), 274—277.
- Гилберт, Риордан (Gilbert E. N., Riordan J.)
1. Symmetry types of periodic sequences, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 657—665.
- Гилмор, Гофман (Gilmore P., Hoffman A. J.)
1. A characterization of comparability graphs and interval graphs, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 539—548.
- Годин, Герц, Росси (Gaudin T., Herz J. C., Rossi P.)
1. Solution du problème N° 29, *Rev. Franc. Rech. Oper.*, **8** (1964), 214—218.

Гоффман (Hoffman A. J.)

1. On the uniqueness of the triangular association scheme, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 492—497.
2. On the exceptional case in a characterization of the arcs of complete graphs, *IBM J. Res. Develop.*, **4** (1960), 487—496.
3. On the polynomial of a graph, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 30—36.
4. On the line-graph of the complete bipartite graph, *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 883—885.

Гоффман, Синглтон (Hoffman A. J., Singleton R. R.)

1. On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.*, **4** (1960), 497—504.

Гравер, Якель (Graver J. E., Yackel J.)

1. Some graph theoretic results associated with Ramsey's theorem, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1968), 1—51.

Грётцш (Grötzsch H.)

1. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel, *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg. Math. Naturwiss. Reihe*, **8** (1958), 109—120.

Грюнбаум (Grünbaum В.)

1. Grötzsch's theorem on 3-colorings, *Michigan Math. J.*, **10** (1963), 303—310.
2. *Convex polytopes*, Wiley (Interscience), New York, 1967.

Гуйя-Ури (Ghouila-Houri A.)

1. Un résultat relatif à la notion de diamètre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 4254—4256.

Гунта (Gupta R. P.)

1. Independence and covering numbers of line graphs and total graphs, в сб. *Proof Techniques in Graph Theory* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.
2. Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs, в сб. *Recent Progress in Combinatorics* (под ред. Tutte W. T.), Academic Press, 1969, pp. 229—235.

Далмедж, Мендельсон (Dulmage A. L., Mendelsohn N. S.)

1. Coverings of bipartite graphs, *Canad. J. Math.*, **10** (1958), 517—534.
2. On the inversion of sparse matrices, *Math. Comp.*, **16** (1962), 491—496.
3. Graphs and matrices, гл. 6 в сб. *Graph Theory and Theoretical Physics*, (под ред. Harary F.), Academic Press, London, 1967, pp. 167—229.

Данцер, Кле (Danzer L., Klee V.)

1. Lengths of snakes in boxes, *J. Combinatorial Theory*, **2** (1967), 258—265.

Декарт (Descartes B.)

1. Solution to advanced problem N 4526, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), 352.

Дилуорс (Dilworth R. P.)

1. A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. Math.*, **51** (1950), 161—165.

Дирак (Dirac G. A.)

1. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 85—92.
2. Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3, **2** (1952), 69—81.
3. The structure of  $k$ -chromatic graphs, *Fund. Math.*, **40** (1953), 42—55.
4. 4-chrome Graphen und vollständige 4-Graphen, *Math. Nachr.*, **22** (1960), 51—60.
5. In abstrakten Graphen verhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.*, **22** (1960), 61—85.
6. Généralisations du théorème de Menger, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 4252—4253.
7. Short proof of Menger's graph theorem, *Mathematika*, **13** (1966), 42—44.
8. On the structure of  $k$ -chromatic graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63** (1967), 683—691.

- Дирак, Шустер (Dirac G. A., Schuster S.)  
1. A theorem of Kuratowski, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A*, **57** (1954), 343—348.
- Донец Г. А.  
1. О нижней границе числа вершин плоских критических графов, *Кибернетика*, **4** (1971), 76—85.
- Дэвис (Davis R. L.)  
1. The number of structures of finite relations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 486—495.  
2. Structures of dominance relations, *Bull. Math. Biophys.*, **16** (1954), 131—140.
- Евдокимов А. А.  
1. О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе, *Матем. заметки*, **6** (1969), 309—319.
- Жан (Jean M.)  
1. Edge-similar tournaments, в сб. *Recent Progress in Combinatorics* (под ред. Tutte W. T.), Academic Press, New York, 1969, pp. 265—272.
- Жордан (Jordan C.)  
1. Sur les assemblages de lignes, *J. Reine Angew. Math.*, **70** (1869), 185—190.
- Закс (Sachs H.)  
1. Über selbstkomplementäre Graphen, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 270—288.  
2. Regular graphs with given girth and restricted circuits, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 423—429.
- Зыков А. А.  
1. О некоторых свойствах линейных комплексов, *Матем. сборник*, **24**, № 2 (1949), 163—188.  
2. Теория конечных графов, т. I, изд-во «Наука», Новосибирск, 1969.  
3. О количестве ребер графа с числом Хадвицера не более 4, в сб. *Прикладная математика и программирование*, вып. 7, Казань, 1972, стр. 52—55.
- Избицкий (Izbicki H.)  
1. Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften, *Monatsh. Math.*, **63** (1959), 298—301.
- Каммон (Camion P.)  
1. Chemie et circuits hamiltoniens des graphes complets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **249** (1959), 2151—2152.
- Каньо (Kagno I. N.)  
1. Linear graphs of degree  $\leq 6$  and their groups, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 505—520; **69** (1947), 872; **77** (1955), 392.
- Караганис (Karaganis J. J.)  
1. On the cube of a graph, *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 295—296.
- Карлиц, Риордан (Carlitz L., Riordan J.)  
1. The number of labelled two-terminal series-parallel networks, *Duke Math. J.*, **23** (1955), 435—445.
- Картрайт, Харари (Cartwright D., Harary F.)  
1. The number of lines in a digraph of each connectedness category, *SIAM Review*, **3** (1961), 309—314.  
2. On colorings of signed graphs, *Elem. Math.*, **23** (1968), 85—89.
- Кастелейн (Kasteleyn P. W.)  
1. A soluble self-avoiding walk problem, *Physica*, **29** (1963), 1329—1337.  
2. Graph theory and crystal physics, гл. 2 в сб. *Graph Theory and Theoretical Physics* (под ред. Harary F.), Academic Press, London, 1967, pp. 44—110.
- Кей, Чарtrand (Kay D. C., Chartrand G.)  
1. A characterization of certain ptolemaic graphs, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 342—346.
- Келли Дж., Келли Л. (Kelly J. B., Kelly L. M.)  
1. Path and circuits in critical graphs, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 786—792.

- Келли П. (Kelly P. J.)  
1. A congruence theorem for trees, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 961—968.
- Келли П., Мерриелл (Kelly P. J., Merriell D.)  
1. A class of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 488—492.
- Кемпе (Kempe A. B.)  
1. On the geographical problem of four colours, *Amer. J. Math.*, **2** (1879), 193—204.
- Кендалл, Смит (Kendall M. G., Smith B. B.)  
1. On the method of paired comparisons, *Biometrika*, **31** (1940), 324—345.
- Кёниг (König D.)  
1. Graphen und Matrizen, *Mat. Fiz. Lapok*, **38** (1931), 116—119.  
2. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936; перепечатано в Chelsea, New York, 1950.
- Кирхгоф (Kirchhoff G.)  
1. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.*, **72** (1847), 497—508.
- Клейнерт (Kleinert M.)  
1. Die Dicke des  $n$ -dimensionalen würfel-Graphen, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1967), 10—15.
- Козырев В. П.  
1. Теория графов, *Итоги науки и техники, серия Теория вероятн., матем. статист., теорет. кибернетика*, **10** (1972), 25—74.
- Коксетер (Coxeter H. S. M.)  
1. Self-dual configurations and regular graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 413—455.
- Коман (Coman M.)  
1. On the crossing numbers of graphs, *Acta Univ. Carol. Math. et Phys.*, **10** (1969), 9—46.
- Кошиг (Kotzig A.)  
1. О некотором разложении графа (на словацком языке), *Mat.-Fyz. Časopis*, **5** (1955), 144—151.
- Крауз (Krausz J.)  
1. Démonstration nouvelle d'une theoreme de Whitney sur les réseaux, *Mat. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 75—89.
- Кронк (Kronk H. V.)  
1. Generalization of a theorem Pósa, *Proc. Amer. Math. Soc.* (в печати).
- Курант Р., Роббинс Г.  
1. Что такое математика? изд-во «Просвещение», М., 1967.
- Куратовский (Kuratowski K.)  
1. Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), 271—283.
- Кэли (Cayley A.)  
1. On the theory of the analytical forms called trees, *Philos. Mag.*, **13** (1857), 19—33; *Mathematical Papers*, Cambridge, **3** (1891), 242—246.  
2. On the mathematical theory of isomers, *Philos. Mag.*, **67** (1874), 444—446; *Mathematical Papers*, Cambridge, **9** (1895), 202—204.  
3. The theory of groups, graphical representation, *Mathematical Papers*, Cambridge, **10** (1895), 26—28.  
4. On the analytical forms called trees, *Amer. Math. J.*, **4** (1881), 266—268; *Mathematical Papers*, Cambridge, **11** (1896), 365—367.  
5. A theorem on trees, *Quart. J. Math.*, **23** (1889), 376—378; *Mathematical Papers*, Cambridge, **13** (1897), 26—28.
- Ландау (Landau H. G.)  
1. On dominance relations and structure of animal societies. III; the condition for a score structure, *Bull. Math. Biophys.*, **15** (1955), 143—148.



- Левин (Lewin K.)  
1. Principles of topological psychology, New York, 1939.
- Ли, Янг (Lee T. D., Yang C. N.)  
1. Many-body problems in quantum statistical mechanics, *Phys. Rev.*, **113** (1969), 1165—1177.
- Лик (Lick D. R.)  
1. Minimally  $n$ -line connected graphs, *J. Reine und Angew. Math.*, **252** (1972), 178—182.
- Литтлвуд (Littlewood J. E.)  
1. The theory of group characters, Oxford, 1940.
- Ловац (Lovasz L.)  
1. On decomposition of graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1** (1966), 237—238.  
2. On chromatic number of finite set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 59—67.
- Мак-Лейн (MacLane S.)  
1. A structural characterization of planar combinatorial graphs, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 340—472.
- Мак-Эндрю (McAndrew M. H.)  
1. On the product of directed graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 600—606.  
2. The polynomial of a directed graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 303—309.
- Манвел (Manvel B.)  
1. Reconstruction of trees, *Canad. J. Math.*, **22**, № 1 (1970), 55—60.  
2. Reconstruction of unicyclic graphs, в сб. Proof Techniques in Graph Theory (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.
- Марчевский (Marczewski E.)  
1. Sur deux propriétés des classes d'ensembles, *Fund. Math.*, **33** (1945), 303—307.
- Мей (May K. O.)  
1. The origin of the four-color conjecture, *Isis*, **56** (1965), 346—348.
- Мейер (Mayer J.)  
1. Le problème des régions voisines sur les surfaces closes orientables, *J. Combinatorial Theory*, **6**, № 2 (1969), 177—195.
- Менгер (Menger K.)  
1. Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, **10** (1927), 96—115.
- Менон (Menon V.)  
1. On repeated interchange graphs, *Amer. Math. Monthly*, **13** (1966), 986—989.
- Миллер (Miller D. J.)  
1. The categorical product of graphs, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 1511—1521.
- Минти (Minty G.)  
1. On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network-programming, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 485—520.
- Мирский, Перфект (Mirsky L., Perfect H.)  
1. Systems of representatives, *J. Math. Anal. Applic.*, **15** (1966), 520—568.
- Мовшовиц (Mowshowitz A.)  
1. The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigenvalues, в сб. Proof Techniques in Graph Theory (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.
- Мотскин, Штраус (Motzkin T. S., Straus E. G.)  
1. Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 533—540.
- Мукхопадхая (Mukhopadhyay A.)  
1. The square root of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **2** (1967), 290—295.
- Мун (Moon J.)  
1. On the line-graph of the complete bigraph, *Ann. Math. Statist.*, **34** (1963), 664—667.

2. An extension of Landau's theorem on tournaments, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1343—1345.
  3. Various proofs of Cayley's formula for counting trees, гл. II в сб. *A Seminar on Graph Theory* (под ред. Harary F.), New York, 1967, pp. 70—78.
  4. Topics on tournaments, New York, 1968.
- Мун, Моер (Moon J., Moser L.)
1. On cliques in graphs, *Israel J. Math.*, **3** (1965), 23—28.
- Мысльский (Mycielski J.)
1. Sur le coloriage des graphes, *Colloq. Math.*, **3** (1955), 161—162.
- фон Нейман Дж., Моргенштерн О.
1. Теория игр и экономическое поведение, изд-во «Наука», М., 1970.
- Нордауэ, Гаддум (Nordhaus E. A., Gaddum J. W.)
1. On complementary graphs, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 175—177.
- Норман, Рабин (Norman R. Z., Rabin M.)
1. Algorithm for a minimal cover of a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 315—319.
- Нэш-Вильямс (Nash-Williams C. St. J. A.)
1. On orientations, connectivity and odd-vertex pairings in finite graphs, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 555—567.
  2. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 445—450.
  3. Infinite graphs — a survey, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1967), 286—301.
  4. Hamiltonian lines in infinite graphs with few vertices of small valency, *Aequat. Math.*, **7** (1971), 59—81.
- Обершельп (Oberschelp W.)
1. Kombinatorische Anzahlbestimmungen in Relationen, *Math. Ann.*, **174** (1967), 53—78.
- Оре О. (Ore O.)
1. A problem regarding the tracing of graphs, *Elemente der Math.*, **6** (1951), 49—53.
  2. Note on Hamilton circuits, *Amer. Math. Monthly*, **67** (1960), 55.
  3. Arc coverings of graphs, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **55** (1961), 315—322.
  4. Теория графов, изд-во «Наука», М., 1968.
  5. Hamilton connected graphs, *J. Math. Pures Appl.*, **42** (1963), 21—27.
  6. The four color problem, Academic Press, New York, 1967.
- Оре, Стемпл (Ore O., Stemple G. J.)
1. Numerical methods in the four color problem. в сб. *Recent Progress in Combinatorics* (под ред. Tutte W. T.), Academic Press, New York, 1969.
- Остин, Фэген, Пенни, Рюрдан (Austin T. L., Fagen R. E., Penney W. F., Riordan J.)
1. The number of components in random linear graphs, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 747—754.
- Оттер (Otter R.)
1. The number of trees, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 583—599.
- Палмер (Palmer E. M.)
1. Prime line-graphs, *Elem. Math.* (в печати).
- Палмер, Робинсон (Palmer E. M., Robinson R. W.)
1. The matrix group of two permutation groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 204—207.
- Партасарати (Parthasarathy K. R.)
1. Enumeration of ordinary graphs with given partition, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 40—47.
- Петерсен (Petersen J.)
1. Die Theorie der regulären Graphen, *Acta Math.*, **15** (1891), 193—220.
- Плэммер (Plummer M. D.)
1. On line-critical blocks, *Trans. Amer. Math. Soc.* (в печати).

Поля (Pólya G.)

1. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.*, **68** (1937), 145—254.
2. Sur les types des propositions composées, *J. Symb. Logic*, **5** (1940), 98—103.

Поша (Pósa L.)

1. A theorem concerning Hamilton lines, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **7** (1962), 225—226.

Принс (Prins G.)

1. The automorphism group of a tree, Doctoral dissertation, University of Michigan, 1957.

Радо (Rado R.)

1. Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 321—324.

Райзер (Ryser H. J.)

1. Matrices of zeros and ones, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 442—464.

Рамачандра Рао, Рао (Ramachandra Rao A., Rao S. B.)

1. On the power sequence of a graph, *Israel J. Math.*, **6** (1970), 52—71.

Рамсей (Ramsey F. P.)

1. On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, **30** (1930) 264—286.

Редеи (Rédei L.)

1. Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Szeged*, **7** (1934), 39—43.

Редфилд (Redfield J. H.)

1. The theory of group-reduced distributions, *Amer. J. Math.*, **49** (1927), 433—455.

Рид (Read R. C.)

1. The enumeration of locally restricted graphs, I and II, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 417—436; **35** (1960), 344—351.
2. A note on the number of functional digraphs, *Math. Ann.*, **143** (1961), 109—110.
3. On the number of self-complementary graphs and digraphs, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 99—104.
4. An introduction to chromatic polynomials, *J. Combinatorial Theory*, **4** (1968), 52—71.

Риддел, Уленбек (Riddell R. J., Uhlenbeck G. E.)

1. On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases, *J. Chem. Physics*, **21** (1953), 2056—2064.

Рингель (Ringel G.)

1. Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
2. Selbstkomplementäre Graphen, *Arch. Math.*, **14** (1963), 354—358.
3. Das Geschlecht des vollständiger paaren Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **28** (1965), 139—150.
4. Über drei kombinatorische Probleme am  $n$ -dimensionalen Würfel und Würfelgitter, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20** (1955), 10—19.

Рингель, Янгс (Ringel G., Youngs J. W. T.)

1. Solution of the Heawood map-colouring problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **60** (1968), 438—445.
2. Remarks on the Heawood conjecture, в сб. Proof Techniques in Graph Theory (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.

Риордан (Riordan J.)

1. The number of labelled coloured and chromatic trees, *Acta Math.*, **97** (1957), 211—225.
2. Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. The enumeration of trees by height and diameter, *IBM J. Res. Develop.*, **4** (1960), 473—478.

Ричардсон (Richardson M.)

1. On weakly ordered systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 113—116.

- Роббинс (Robbins H. E.)  
1. A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control, *Amer. Math. Monthly*, **46** (1939), 281—283.
- Робертс, Спенсер (Roberts F., Spencer J.)  
1. Characterization of clique-graphs, *J. Combinatorial Theory*, **10** (1971), 102—108.
- Робертсон (Robertson N.)  
1. The smallest graph of girth 5 and valency 4, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 824—825.
- Робинсон (Robinson R. W.)  
1. Enumeration of coloured graphs, *J. Combinatorial Theory*, **4** (1968), 181—190.
- ван Роон, Вилф (van Rooij A., Will H.)  
1. The interchange graphs of a finite graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 263—269.
- Рота (Rota G.-C.)  
1. On the foundations of combinatorial theory, 1: Theory of Möbius function, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **2** (1964), 340—368.
- Саати (Saaty T. L.)  
1. Thirteen colorful variation on Guthrie's four-color conjecture, *Amer. Math. Monthly*, **72** (1972), 2—43.
- Сабидусси (Sabidussi G.)  
1. Loewy-groupoids related to linear graphs, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 477—487.  
2. Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J. Math.*, **9** (1957), 515—525.  
3. On the minimum order of graphs with given automorphism group, *Monatsh. Math.*, **63** (1959), 124—127.  
4. The composition of graphs, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 693—696.  
5. Graph multiplication, *Math. Z.*, **72** (1960), 446—457.  
6. The lexicographic product of graphs, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 573—578.  
7. Graph derivatives, *Math. Z.*, **76** (1961), 385—401.
- Светковић (Svetković Dragoš M.)  
1. Graphs and their spectra, *Publ. Elektrotehn. Fak. Univ. Beogradu., Ser. mat. i fiz.*, **354—356** (1971), 1—50.
- Седлачек (Sedláček J.)  
1. Some properties of interchange graphs, в сб. *Theory of Graphs and its Applications* (под ред. Fiedler M.), Prague, 1962; перепечатано в *Academic Press, New York*, 1962, pp. 145—150.
- Секереш, Вилф (Szekeres G., Will H. S.)  
1. An inequality for the chromatic number of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **4** (1968), 1—3.
- Селе (Szele T.)  
1. Kombinatorische Untersuchungen über den gerichteten vollständigen graphen, *Mat. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 223—256.
- Сеньор (Senior J. K.)  
1. Partitions and their representative graphs, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 663—689.
- Сешу С., Рид М.  
1. Линейные графы и электрические цепи, изд-во «Высшая школа», М., 1971.
- Синглетон (Singleton R. R.)  
1. There is no irregular Moore graph, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968), 42—43.
- Слепня (Slepian D.)  
1. On the number of symmetry types of Boolean functions of  $n$  variables, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 185—193.
- Смит, Татт (Smith C. A. B., Tutte W. T.)  
1. On unicursal paths in a network of degree 4, *Amer. Math. Monthly*, **48** (1941), 233—237.

- Танг (Tang D. T.)  
1. Bi-path networks and multicommodity flows, *IEEE Trans. Circuit. Theory*, **11** (1964), 468—474.
- Татт (Tutte W. T.)  
1. On Hamilton circuits, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 98—101.  
2. The factorizations of linear graphs, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 107—111.  
3. A family of cubical graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **43** (1947), 459—474.  
4. The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **44** (1948), 463—482.  
5. The factors of graphs, *Canad. J. Math.*, **4** (1952), 314.  
6. A short proof of the factor theorem for finite graphs, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 347—352.  
7. An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 905—917.  
8. A theory of 3-connected graphs, *Indag. Math.*, **23** (1961), 441—455.  
9. A census of planar triangulations, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 21—38.  
10. A new branch of enumerative graph theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 500—504.  
11. On the non-biplanar character of the complete 9-graph, *Canad. Math. Bull.*, **6** (1963), 319—330.  
12. How to draw a graph, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 743—767.  
13. The number of planted plane trees with a given partition, *Amer. Math. Monthly*, **71**(1964), 272—277.  
14. Lectures on matroids, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Sect. B, **69** (1965), 1—47.  
15. The connectivity of graphs, Toronto Univ. Press, Toronto, 1967.
- Тейлр (Tait P. G.)  
1. Remarks on the colouring of maps, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **10**(1880), 729.
- Тех. Яп (Teh H. H., Yap H. D.)  
1. Some construction problems of homogeneous graphs, *Bull. Math. Soc. Nanyang Univ.* (1964), 164—196.
- Тёрнер (Turner J.)  
1. Point-symmetric graphs with a prime number of points, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1967), 136—145.  
2. A bibliography of graph theory, в сб. *Proof. Techniques in Graph Theory* (под ред. Harary F.), Academic Press, New York, 1969.
- Тёрнер, Кэу (Turner J., Kautz W. H.)  
\*1. A survey of progress in graph theory in the Soviet Union, *SIAM Rev.*, **12** (1970), Suppl., 1—68.
- Туран (Turán P.)  
1. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 436—452.
- Уитни (Whitney H.)  
1. The colouring of graphs, *Ann. Math. (2)*, **33** (1932), 688—718.  
2. Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, **54** (1932), 150—168.  
3. Non-separable and planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 339—362.  
4. A set of topological invariants for graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 231—235.  
5. Planar graphs, *Fund. Math.*, **21**(1933), 73—84.  
6. On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 509—533.  
7. A theorem on graphs, *Ann. Math.*, **32** (1931), 378—390.
- Улам С.  
1. Нерешенные математические задачи, изд-во «Наука», М., 1964.

- Уленбек (Uhlenbeck G. E.)  
1. Successive approximation methods in classical statistical mechanics, *Physica*, **26** (1960), 17—27.
- Уоткинс (Watkins M. E.)  
1. A lower bound for the number of vertices of graph, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 297.
- Уэлш (Welsh D. J. A.)  
1. Euler and bipartite matroids, *J. Combinatorial Theory*, **6**, № 4 (1969), 375—377.
- Уэлш, Пауэлл (Welsh D. J. A., Powell M. B.)  
1. An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems, *Computer J.*, **10** (1967), 85—87.
- Фалкерсон (Fulkerson D. R.)  
1. Zero-one matrices with zero trace, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 831—836.  
2. Networks, frames and blocking systems, в сб. Mathematics of the Decision Sciences, vol. II, Lectures in Applied Mathematics (под ред. Dantzig G. B., Scott A. F.), pp. 303—334.
- Фари (Fáry I.)  
1. On straight line representation of planar graphs, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **11** (1948), 229—233.
- Фейнманн (Feynmann R. P.)  
1. Space-time approaches to quantum electrodynamics, *Physical Review*, **76** (1949), 769—789.
- Феллер В.  
1. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, изд-во «Мир», М., 1964.
- Финк (Finck H. J.)  
1. Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und Seines Komplements, I and II, *Wiss. Z. T. H. Ilmenau*, **12** (1966), 243—251.
- Финк, Закс (Finck H. J., Sachs H.)  
1. Über eine von H. S. Wilf angegebene Schranke für die chromatische Zahl endlicher Graphen, *Math. Nachr.*, **39** (1969), 373—386.
- Флейшнер (Fleischner H.)  
1. The square of every nonseparable graph is Hamiltonian, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 1052—1054.
- Фолкман (Folkman J.)  
1. Regular line-symmetric graphs, *J. Combinatorial Theory*, **3**, № 3 (1967), 215—232.
- Фолкс (Foulkes J. D.)  
1. Directed graphs and assembly schedules, *Proc. Symp. Appl. Math. Amer. Math. Soc.*, **10** (1960), 281—289.
- Форд, Норман, Уленбек (Ford G. W., Norman R. Z., Uhlenbeck G. E.)  
1. Combinatorial problems in the theory of graphs, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 529—535.
- Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. (Ford L. R., Fulkerson D. R.)  
1. Maximal flow through a network, *Canad. J. Math.*, **8** (1956), 399—404.  
2. Потоки в сетях, изд-во «Мир», М., 1966.
- Фостер (Foster R. M.)  
1. Geometrical circuits of electrical networks, *Trans. Amer. Inst. Elec. Engrs.*, **51** (1932), 309—317.
- Фрухт (Frucht R.)  
1. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe, *Compositio Math.*, **6** (1938), 239—250.  
2. Graphs of degree three with a given abstract group, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 365—378.  
3. On the groups of repeated graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949).  
4. A one-regular graph of degree three, *Canad. J. Math.*, **4** (1952), 240—247.

- Фрухт, Харари (Frucht R., Harary F.)  
 1. On the corona of two graphs, *Aequationes Math.*, **4**, № 3 (1970), 322—325.
- Хадвигер (Hadwiger H.)  
 1. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, *Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, **88** (1943), 133—142.
- Хайёш (Hajós G.)  
 1. Über eine Art von Graphen, *Internat. Math. Nachr.*, **2** (1957), 65.  
 2. Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen, *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, **10** (1961), 116—117.
- Хакими (Hakimi S.)  
 1. On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph *J. SIAM Appl. Math.*, **10** (1962), 496—506.
- Хамادا, Нонэда, Ешимура (Hamada T., Nonada T., Yoshimura I.)  
 1. On the connectivity of total graphs, *Math. Ann.*, **196** (1972), 30—38.
- Хамелинк (Hamelink R. C.)  
 1. A partial characterization of clique graphs, *J. Combinatorial Theory*, **7** (1969).
- Харари (Harary F.)  
 1. On the notion of balance of a signed graph, *Mich. Math. J.*, **2** (1953), 143—146.  
 2. The number of linear, directed, rooted, and connected graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 445—463.  
 3. Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees, *Mich. Math. J.*, **3** (1956), 109—112.  
 4. On the number of dissimilar line-subgraphs of a given graph, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 57—64.  
 5. The number of dissimilar supergraphs of a linear graph, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 903—911.  
 6. Structural duality, *Behavioral Sci.*, **2** (1957), 255—265.  
 7. The number of oriented graphs, *Mich. Math. J.*, **4** (1957), 221—224.  
 8. On arbitrarily traceable graphs and directed graphs *Scripta Math.*, **23** (1957), 37—41.  
 9. On the number of bicolored graphs, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 743—755.  
 10. On the number of dissimilar graphs between a given graph-subgraph pair, *Canad. J. Math.*, **10** (1958), 513—516.  
 11. Status and contrastatus, *Sociometry*, **22** (1959), 23—43.  
 12. On the group of the composition of two graphs, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 29—34.  
 13. An elementary theorem on graphs, *Amer. Math. Monthly*, **66** (1959), 405—407.  
 14. The number of functional digraphs, *Math. Ann.*, **138** (1959), 203—210.  
 15. Unsolved problems in the enumeration of graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5** (1960), 63—95.  
 16. A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning, *Numer. Math.*, **4** (1962), 128—135.  
 17. The maximum connectivity of a graph, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **48** (1962), 1142—1146.  
 18. The determinant of the adjacency matrix of a graph, *SIAM Review*, **4** (1962), 202—210.  
 19. A characterization of block-graphs, *Canad. Math. Bull.*, **6** (1963), 1—6.  
 20. On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs, в сб. *Theory of Graphs and its Applications* (под ред. Fiedler M.), Prague, 1964, pp. 47—52; перепечатано в Academic Press, New York, 1964.  
 21. Комбинаторные задачи перечисления графов, в сб. *Прикладная комбинаторная математика* (под ред. Беккенбаха Э.), изд-во «Мир», М., 1968, стр. 107—140.  
 22. Applications of Pólya's theorem to permutation groups, гл. 5 в сб. *A Seminar on Graph Theory* (под ред. Harary F.), New York, 1967, pp. 25—33.

23. Задачи перечисления графов, *УМН*, **24**, № 5 (1969).
24. Variations on a theorem by Menger, *J. SIAM Appl. Math.* (в печати).
- Харари, Вилкокс (Harary F., Wilcox G.)
1. Boolean operations on graphs, *Math. Scand.*, **20** (1967), 41—51.
- Харари, Карп, Тутт (Harary F., Karp R. M., Tutte W. T.)
1. A criterion for planarity of the square of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **2** (1967), 395—405.
- Харари, Кодама (Harary F., Kodama Y.)
1. On the genus of an  $n$ -connected graph, *Fund. Math.*, **54** (1964), 7—13.
- Харари, Манвел (Harary F., Manvel B.)
1. On the number of cycles in a graph, *Math. Časopis*, **21**, № 1 (1971), 55—63.
- Харари, Мошшовиц, Риордан (Harary F., Mowshowitz A., Riordan J.)
1. Labeled trees with unlabeled endpoint, *J. Combinatorial Theory*, **6** (1969), 60—64.
- Харари, Мозер (Harary F., Moser L.)
1. The theory of round robin tournaments, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 231—246.
- Харари, Норман (Harary F., Norman R. Z.)
1. The dissimilarity characteristic of Husimi trees, *Ann. of Math.*, **58** (1953), 134—141.
  2. Dissimilarity characteristic theorems for graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 332—334.
  3. Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **9** (1961), 161—168.
- Харари, Норман, Картрайт (Harary F., Norman R. Z., Cartwright D.)
1. Structural models: an introduction to the theory of directed graphs, New York, 1965.
- Харари, Нэш-Вильямс (Harary F., Nash-Williams C. St. J. A.)
1. On Eulerian and Hamiltonian graphs and line-graphs, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 701—709.
- Харари, Палмер (Harary F., Palmer E. M.)
1. The number of graphs rooted at an oriented line, *ICC Bull.*, **4** (1965), 91—98.
  2. A note on similar points and similar lines of a graph, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **10** (1965), 1489—1492.
  3. The smallest graph whose group is cyclic, *Czech. Math. J.*, **16** (1966), 70—71.
  4. On the number of orientations of a given graph, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **14** (1966), 125—128.
  5. On similar points of a graph, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 623—630.
  6. The reconstruction of a tree from its maximal proper subtrees, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 803—810.
  7. Enumeration of locally restricted digraphs, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 853—860.
  8. The power group enumeration theorem, *J. Combinatorial Theory*, **1** (1966), 157—173.
  9. Enumeration of self-converse digraphs, *Mathematika*, **13** (1966), 151—157.
  10. The groups of the small digraphs, *J. Indian Statist. Assoc.*, **4** (1966), 155—169.
  11. The enumeration methods of Redfield, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 373—384.
  12. Enumeration of finite automata, *Information and Control*, **10** (1967), 499—508.
  13. On the number of balanced signed graphs, *Bull. Math. Biophysics*, **29** (1967), 759—765.
  14. On the group of a composite graph, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **3** (в печати).
  15. On the point-group and line-group of a graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **19** (1968), 263—269.
  16. On the number of forests, *Mat. Časopis*, **19**, № 2 (1969), 110—112.
  17. On acyclic simplicial complexes, *Mathematika*, **15** (1968), 119—122.



18. On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments, *Monatshefte für Math.*, **71** (1967), 14—23.
- Харари, Палмер, Рид (Harary F., Palmer E. M., Read R. C.)
1. The number of ways to label a structure, *Psychometrika*, **32** (1967), 155—156.
- Харари, Пламмер (Harary F., Plummer M. D.)
1. On the point-core of a graph, *Math. Z.*, **94** (1966), 382—386.
  2. On the core of a graph, *Proc. London Math. Soc.*, **17** (1967), 305—314.
- Харари, Принс (Harary F., Prins G.)
1. The number of homeomorphically irreducible trees, and other species, *Acta Math.*, **101** (1959), 141—162.
  2. Enumeration of bicolourable graphs, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 237—248.
  3. The block-cutpoint-tree of a graph, *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 103—107.
- Харари, Принс, Татт (Harary F., Prins G., Tutte W. T.)
1. The number of plane trees, *Indagationes Math.*, **26** (1964), 319—329.
- Харари, Рид (Harary F., Read R. C.)
1. The probability of a given 1-choice structure, *Psychometrika*, **31** (1966), 271—278.
- Харари, Росс (Harary F., Ross I. C.)
1. A description of strengthening and weakening group members, *Sociometry*, **22** (1959), 139—147.
- Харари, Татт (Harary F., Tutte W. T.)
1. The number of plane trees with a given partition, *Mathematika*, **11** (1964), 99—101.
  2. A dual form of Kuratowski's theorem, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 17—20, 373.
  3. On the order of the group of a planar map, *J. Combinatorial Theory*, **1** (1966), 394—395.
- Харари, Траут (Harary F., Trauth C. A., Jr.)
1. Connectedness of products of two directed graphs, *J. SIAM Appl. Math.*, **14** (1966), 250—254.
- Харари, Уленбек (Harary F., Uhlenbeck G. E.)
1. On the number of Husimi trees, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **30** (1953), 315—322.
- Харари, Хедетниemi (Harary F., Hedetniemi S.)
1. The achromatic number of a graph, *J. Combinatorial Theory*, **8** (1970), 154—161.
- Харари, Хедетниemi, Принс (Harary F., Hedetniemi S., Prins G.)
1. An interpolation theorem for graphical homomorphisms, *Port. Math.*, **26** (1967), 453—462.
- Харари, Хедетниemi, Робинсон (Harary F., Hedetniemi S. T., Robinson R. W.)
1. Uniquely colorable graphs, *J. Combinatorial Theory*, **6** (1969), 264—270.
- Харрисон (Harrison M. A.)
1. A census of finite automata, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 100—113.
  2. Note on the number of finite algebras, *J. Combinatorial Theory*, **1** (1966), 394.
- Хаус (House L. C.)
1. A  $k$ -critical graph of given density, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 829—831.
- Хедетниemi (Hedetniemi S.)
1. On hereditary properties of graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.* (в печати).
- Хедрлин, Пульгр (Hedrlin Z., Pultr A.)
1. Symmetric relations (undirected graphs) with given semigroup, *Monatsh. Math.*, **69** (1965), 318—322.
  2. On rigid undirected graphs, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 1237—1242.
- Хемминджер (Hemminger R. L.)
1. On reconstructing a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 185—187.
- Хейфтер (Heffter L.)
1. Über das Problem der Nachbargebiete, *Ann. Math.*, **38** (1891), 477—508.

- Хёчен (Heuchenne C.)  
1. Sur une certaine correspondance entre graphes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **33** (1964), 743—753.
- Хивуд (Heawood P. J.)  
1. Map colour theorems, *Quart. J. Math.*, **24** (1890), 332—338.
- Хоббс (Hobbs A. M.)  
1. A survey of thickness, *Recent Progr. Combinator.*, New York, London, 1969, pp. 255—264.
- Хоббс, Гроссман (Hobbs A. M., Grossman J. W.)  
1. Thickness and connectivity in graphs, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **B-72**, № 3 (1968), 239—244.
- Холл Д. (Hall D. W.)  
1. A note on primitive skew curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 935—937.
- Холл М.  
1. Комбинаторика, изд-во «Мир», М., 1970.
- Холл Ф. (Hall Ph.)  
1. On representations of subsets, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 26—30.
- Чанг (Chang L. C.)  
1. The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme, *Sci. Record*, **3** (1959), 604—613.
- Чарtrand (Chartrand G.)  
1. A graph-theoretic approach to a communications problem, *J. SIAM Appl. Math.*, **14** (1966), 778—781.  
2. On Hamiltonian line graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**, № 3 (1968), 559—566.
- Чарtrand, Геллер (Chartrand G., Geller D.)  
1. Uniquely colorable planar graphs, *J. Combinatorial Theory*, **6**, № 3 (1969), 271—278.
- Чарtrand, Геллер, Хедетниemi (Chartrand G., Geller D., Hedetniemi S.)  
1. A generalization of the chromatic number, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **64** (1968), 265—271.  
2. Graphs with forbidden subgraphs, *J. Combinatorial Theory*, **B-10**, № 1 (1971), 12—41.
- Чарtrand, Капур, Кронк (Chartrand G., Kapoor S. F., Kronk H. V.)  
1. The Hamiltonian hierarchy (в печати).
- Чарtrand, Коуарс, Лик (Chartrand G., Kougars A., Lick D. R.)  
1. Critically  $n$ -connected graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32**, № 1 (1972), 63—68.
- Чарtrand, Кронк (Chartrand G., Kronk H. V.)  
1. Randomly traceable graphs, *J. SIAM Appl. Math.* (в печати).
- Чарtrand, Стюарт (Chartrand G., Stewart M. J.)  
1. The connectivity of line-graphs, *Math. Ann.* **182** (1969), 170—174.
- Чарtrand, Харари, (Chartrand G., Harary F.)  
1. Planar permutation graphs, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Sec. B*, **3** (1967), 433—438.  
2. Graphs with prescribed connectivities, в сб. *Theory of Graphs* (под ред. Erdős P., Katona G.), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, pp. 61—63.
- Шрикханде (Shrikhande S. S.)  
1. On a characterization of the triangular association scheme, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 39—47.
- Штейн (Stein S. K.)  
1. Convex maps, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 464—466.
- Штейниц, Радемахер (Steinitz E., Rademacher H.)  
1. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin, 1934.
- Эванс, Харари, Линн (Evans J. W., Harary F., Lynn M. S.)  
1. On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. Assoc. Comp. Mach.*, **10** (1967), 295—298.

- Эдмондс (Edmonds J.)  
1. Existence of  $k$ -edge connected ordinary graphs with prescribed degrees, *J. Res. Nat. Bur. Stand., Sect. B*, **68** (1964), 73—74.
- Эйлер (Euler L.)  
1. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, **8** (1736), 128—140; *Opera Omnia, Series 1-7* (1766), 1—10.  
2. The Königsberg bridges, *Sci. Amer.*, **18** (1953), 66—70.
- Элиас П., Файнштейн А., Шеннон К.  
1. О максимальном потоке через сеть, в сб. К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963, стр. 729—734.
- Эрдёш (Erdős P.)  
1. Graph theory and probability II, *Canad. J. Math.*, **13** (1961), 346—352.  
2. Extremal problems in graph theory, гл. 8 в сб. A Seminar on Graph Theory (под ред. Harary F.), New York, 1967, pp. 54—59.  
3. Applications of probabilistic methods to graph theory, гл. 9 в сб. A Seminar on Graph Theory (под ред. Harary F.), New York, 1967, pp. 60—64.
- Эрдёш, Галлай (Erdős P., Gallai T.)  
1. Графы с заданными степенями вершин (на венгерском языке), *Mat. Lapok*, **11** (1960), 264—274.
- Эрдёш, Гудман, Поша (Erdős P., Goodman A., Pósa L.)  
1. The representation of a graph by set intersections, *Canad. J. Math.*, **18** (1963), 106—112.
- Эрдёш, Реньи (Erdős P., Rényi A.)  
1. Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 295—315.
- Эрдёш, Секереш (Erdős P., Szekeres G.)  
1. A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463—470.
- Эрдёш, Хайнал (Erdős P., Hajnal A.)  
1. On chromatic numbers of graphs and set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 61—99.
- Юнг (Jung H. A.)  
1. Zu einem Isomorphiesatz von Whitney für Graphen, *Math. Ann.*, **164** (1966), 270—271.
- Якобсен (Jakobsen I. T.)  
\*1. A homomorphism theorem with an application to the conjecture of Hadwiger, *Stud. Sci. Math. Hung.*, **6** (1971), 151—160.
- Янгс (Youngs J. W. T.)  
1. The Heawood map colouring conjecture, гл. 12 в сб. Graph Theory and Theoretical Physics (под ред. Harary F.), Academic Press, London, 1967, pp. 313—354.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- |   |   |                        |   |
|---|---|------------------------|---|
| ван Аарден-Эренфест (van Aardenne-Ehrenfest T.) | 229, 240, 245   | Берж (Berge C.)        | 6—8, 19, 24, 36, 62, 118—120, 124, 153, 235 |
| Авондо-Бодино (Avondo-Bodino G.)                | 70  | Бернсайд (Burnside W.) | 211   |
| Андерсон (Anderson S. S.)                       | 59  | Бехзад (Behzad M.)     | 81, 91, 103—105, 149, 176                   |
| Байнеке (Beineke L. W.)                         | 10, 62, 69, 91, 95, 107, 115, 116, 122, 143—147, 150, 229, 243—245, 247 | Биркгоф (Birkhoff G.)  | 73, 172                                     |
| Балабан (Balaban A. T.)                         | 81  | Боланд (Boland J.)     | 35  |
| Барнетт (Barnett D.)                            | 88, 149   | Болл (Ball W. W. R.)   | 16, 205                                     |
| Баттл (Battle J.)                               | 132, 145  | Боллобаш (Bollobás B.) | 74  |
| Бензер (Benzer S.)                              | 35  | Бонди (Bondy J. A.)    | 58, 176                                     |
|   |   | Босак (Bosak J.)       | 88  |
|   |   | Ботт (Bott R.)         | 239   |
|   |   | Браун (Brown E.)       | 177   |

- де Брёйн (de Bruijn N. G.) 224, 229, 240, 245  
 Бруальди (Brualdi R. A.) 36  
 Брукс (Brooks R. L.) 149, 153, 154, 187  
 Бэблер (Bäbler F.) 89
- Вагнер (Wagner K.) 8, 130, 137, 161  
 Вайда (Vajda S.) 19  
 Вайнберг (Weinberg L.) 208, 230  
 Вальтер (Walther H.) 39  
 Варга (Varga R. S.) 19  
 Веблен (Veblen O.) 20  
 Вейцел (Weichsel P. M.) 36  
 Визинг В. Г. 59, 159  
 Виландт (Wielandt H.) 246  
 Вилкокс (Wilcox G.) 36  
 Вилф (Will H. S.) 94, 152  
 Волмерхауз (Vollmerhaus H.) 142
- Гавел (Havel V.) 77, 176  
 Гаддум (Gaddum J. W.) 154  
 Гай (Guy R. K.) 141, 147, 148, 150  
 Галин (Halin R.) 75  
 Галлаи (Gallai T.) 46, 53, 77, 78, 108, 118, 177, 242, 247  
 Гамильтон (Hamilton W.) 13, 16, 85  
 Гевирц (Gewirtz A.) 207, 208  
 Геллер (Geller D. P.) 10, 40, 105, 124, 133, 149, 165—167, 176, 177, 245  
 Геренсер (Gerenser L.) 125  
 Герц (Herz J. C.) 90  
 Гилберт (Gilbert E. N.) 229  
 Гилмор (Gilmore P.) 35  
 Годин (Gaudin T.) 90  
 Гоффман (Hoffman A. J.) 32, 35, 40, 91, 99, 100, 188, 246  
 Гравер (Graver J. E.) 30  
 Грётш (Grötzsch H.) 157  
 Гроссман (Grossman J. W.) 146  
 Грюнбаум (Grunbaum V.) 10, 88, 142, 157, 247  
 Гудман (Goodman A.) 34  
 Гуля-Ури (Ghouila-Houri A.) 19, 245  
 Гупта (Gupta R. P.) 120  
 Густин (Gustin) 144  
 Гутри (Guthrie) 17
- Далмедж (Dulmage A. L.) 122, 123, 241, 246  
 Данцер (Danzon L.) 40  
 Декарт (Descartes B.) 154  
 Джонсон (Johnson L.) 177  
 Дилворс (Dilworth R. P.) 73
- Дирак (Dirac G. A.) 63, 65, 68, 69, 85, 87, 133, 154, 161, 167—169, 176  
 Дюбер (Dauber E.) 202  
 Дэвис Г. А. 158, 177  
 Дэвис (Davis R. L.) 228, 229
- Евдокимов А. А. 40  
 Эшикура (Yoshimura I.) 105
- Жан (Jean M.) 247  
 Жордан (Jordan C.) 16, 51, 52
- Закс (Sachs H.) 39, 116, 157  
 Зыков А. А. 6, 36, 154, 173, 177
- Избицкий (Izbicki H.) 201
- Камерон (Cameron J.) 39  
 Каммон (Camion P.) 242  
 Каньо (Kagno I. N.) 207  
 Капур (Kapur S. F.) 89, 90  
 Караганис (Karaganis J. J.) 88, 89  
 Карлиц (Carlitz L.) 229  
 Карп (Karp R. M.) 149  
 Картрайт (Cartwright D.) 19, 164, 176, 232, 244  
 Кастелейн (Kasteleyn P. W.) 91, 240, 245  
 Кауц (Kautz W. H.) 8  
 Квинтас (Quintas L. V.) 207, 208  
 Кей (Kay D. C.) 39  
 Келли Дж. (Kelly J. B.) 154, 168  
 Келли Л. (Kelly L. M.) 154, 168  
 Келли П. (Kelly P. J.) 40, 58  
 Кемпе (Kempe A. B.) 17, 162  
 Кендалл (Kendall M. G.) 243  
 Кёниг (König D.) 16, 20, 32, 51, 71, 106, 119, 141, 142, 152, 198  
 Кинг (King C.) 188, 246  
 Кирхгоф (Kirchhoff G.) 13—15, 180, 246  
 Клайнерт (Kleinert M.) 146  
 Клейтман (Kleitman D.) 148  
 Кля (Klee V.) 40  
 Когарс (Kaugars A.) 46, 75  
 Кодاما (Kodama Y.) 64, 132, 145  
 Козырев В. П. 8  
 Коксетер (Coxeter H. S. M.) 16, 205  
 Коман (Coman M.) 141  
 Коциг (Kotzig A.) 67, 149  
 Крауц (Krausz J.) 94  
 Кронк (Kronk H. V.) 89, 90  
 Кроуз (Crowe D. W.) 248

- Курант (Courant R.) 143  
 Куратовский (Kuratoski K.) 5, 126, 133  
 Купер (Cooper J.) 176  
 Кэли (Cauley A.) 13, 15, 16, 199, 209, 210, 220, 221, 228, 229
- Ландау (Landau H. G.)** 243, 247  
 Левин (Lewin K.) 18  
 Ледерберг (Lederberg J.) 88  
 Леккеркеркер (Lekkerkerker C.) 35  
 Ли (Lee T. D.) 19  
 Лик (Lick D. R.) 75  
 Линн (Lynn M. S.) 229  
 Литтлауд (Littlewood J. E.) 194  
 Ловас (Lovasz L.) 82, 154  
 Лоус (Lowes P.) 229  
 Льюис (Lewis D.) 172
- Мак-Лейн (MacLane S.)** 126, 140  
 Мак-Эндрю (McAndrew M. H.) 36, 208, 246  
 Манвел (Manvel B.) 10, 40, 58, 187  
 Марчевский (Marczewski E.) 33  
 Мей (May K. O.) 17  
 Мейберри (Mauberry J. P.) 239  
 Мейер (Mayer J.) 144, 146  
 Менгер (Menger K.) 64, 68  
 Мендельсон (Mendelshon N. S.) 122, 123, 241, 246  
 Менов (Menon V.) 91  
 Мериветер (Meriwether R. L.) 207  
 Мерриел (Merriell D.) 40  
 Мёбиус (Möbius) 17  
 Миллер (Miller D. J.) 40  
 Мильгрэм (Milgram A. N.) 242  
 Минти (Minty G.) 58  
 Мирский (Mirsky L.) 73  
 Митхэм (Meetham A. R.) 39  
 Мовшовиц (Mowsowitz A.) 188, 228  
 Мозер (Mozer L.) 40, 242, 243, 247  
 де Морган (de Morgan) 17  
 Morgenштерн (Morgenstern O.) 237  
 Моцкин (Motzkin T. S.) 33  
 Мукхорадхья (Mukhopadhyay A.) 38  
 Мун (Moon J. W.) 40, 100, 105, 146, 183, 210, 228, 229, 232, 247  
 Мыцельский (Mycielsky J.) 154
- фон Нейман (von Neumann J.)** 237  
 Нонада (Nonada T.) 105  
 Нордхауз (Nordhaus E. A.) 105, 154  
 Норман (Norman R. Z.) 19, 59, 119, 120, 229, 231, 232, 245
- Нэш-Вильямс (Nash-Williams C. St. J. A.) 30, 101, 105, 106, 114, 247
- Обершельп (Oberschelp W.)** 260  
 Оре (Ore O.) 6, 7, 18, 36, 81, 85, 87—91, 153, 158, 159, 161  
 Остин (Austin T. L.) 228, 230  
 Оттер (Otter R.) 221, 228, 230
- Палмер (Palmer E. M.)** 10, 36, 58, 192, 200, 202, 206—209, 211, 224, 225, 228, 229, 244  
 Паркер (Parker E. M.) 244  
 Партасарати (Parthasarathy K. R.) 228  
 Пауэлл (Powell M. B.) 175  
 Пенни (Penly W. F.) 228, 230  
 Перфект (Perfect H.) 73  
 Петерсен (Petersen J.) 113  
 Пипперт (Pippert R. E.) 229  
 Пламмер (Plummer M. D.) 10, 47, 74, 88, 107, 116, 122—125  
 Поля (Pólya G.) 191, 194, 208, 209, 211, 213, 217, 220—222, 228, 229  
 Понтрягин Л. С. 126  
 Поша (Pósa L.) 34, 85  
 Принс (Prins G.) 53, 170, 171, 177, 222, 223, 228, 229, 266  
 Пультр (Pultr A.) 208
- Рабин (Rabin M.)** 119, 120  
 Радемахер (Rademacher H.) 130  
 Раджани (Radjavi H.) 104  
 Радо (Rado R.) 72  
 Райзер (Ryser H. J.) 245  
 Рамачандра Рао (Ramachandra Rao A.) 82  
 Рамсей (Ramsey F. P.) 30  
 Рао (Rao S. B.) 82  
 Реден (Rédei L.) 241, 242  
 Редфилд (Redfield J. H.) 209  
 Реньи (Rényi A.) 32  
 Рид М. (Reed M.) 91  
 Рид Р. (Read R. C.) 173, 175, 188, 211, 225, 228—231, 246  
 Риддел (Riddell R. J.) 228  
 Рингель (Ringel G.) 39, 143—145, 150, 162, 163  
 Риордан (Riordan J.) 172, 223, 228—230, 248, 266  
 Ричардсон (Richardson M.) 237  
 Роббинс (Robbins H. E.) 143, 246  
 Робертс (Roberts F.) 35  
 Робертсон (Robertson N.) 95, 208

- Робинсон (Robinson R. W.) 89, 165, 176, 228, 229  
 ван Роои (van Rooij A.) 94  
 Росс (Ross I. C.) 245  
 Росси (Rossi P.) 90  
 Рота (Rota G.-G.) 174  
  
 Саати (Saaty T.) 148, 159  
 Сабидусси (Sabidussi G.) 36, 91, 192, 197, 200, 201, 206, 207  
 Светкович (Svetkovič D.) 188  
 Седлачек (Sedláček J.) 149  
 Сечереш (Szekeres G.) 30, 152  
 Селе (Szele T.) 242  
 Сеньор (Senior J. K.) 82  
 Сешу (Seshu S.) 91  
 Сильвестр (Sylvester J. J.) 13, 16, 51  
 Синглтон (Singleton R. R.) 40  
 Слелян (Slepian D.) 229  
 Смит Б. (Smith B. B.) 243  
 Смит К. (Smith C. A. B.) 149, 154, 187, 229, 240  
 Спенсер (Spencer J.) 35  
 Стемпл (Stemple G. J.) 18, 158  
 Стоун (Stone A. H.) 149, 154, 187  
 Стюарт (Stewart M. J.) 104  
  
 Танг (Tang D. T.) 150  
 Татт (Tutte W. T.) 58, 63, 87, 106, 108, 111, 116, 132, 137, 148, 149, 154, 186, 187, 204, 205, 207, 208, 227—229, 239, 240  
 Тейт (Tait P. G.) 87  
 Терри (Terry) 144  
 Тех (Teh H. H.) 36  
 Тёрнер (Turner J.) 8, 207, 269  
 Трот (Trauth C. A., Jr.) 36, 245, 246  
 Туран (Turán P.) 30, 33, 39  
  
 Уитни (Whitney H.) 57, 60, 66, 91, 92, 126, 129, 138, 139, 140, 148, 159, 174, 208  
 Улам (Ulam S. M.) 25  
 Уленбек (Uhlenbeck G. E.) 19, 228, 229  
 Уоткинс (Watkins M. E.) 74  
 Уэлч (Welch) 144  
 Уэлш (Welsh D. J. A.) 10, 175, 176, 188  
  
 Феген (Fagen R. E.) 228, 230  
 Файнштейн (Feinstein A.) 67  
 Фалкерсон (Fulkerson D. R.) 19, 67, 70, 245  
 Фари (Fáry I.) 130  
  
 Фейнманн (Feynmann R. P.) 19  
 Феллер (Feller W.) 19  
 Фестингер (Festinger L.) 19  
 Финк (Finck H. J.) 157, 175, 176  
 Флейшнер (Fleischner H.) 88, 90  
 Фолкман (Folkman J.) 203  
 Фолкс (Foulkes J. D.) 242  
 Форд Г. (Ford G. W.) 229  
 Форд Л. (Ford L. R.) 19, 67, 70  
 Фостер (Foster R. M.) 201  
 Фрухт (Frucht R.) 196, 198—200, 205  
  
 Хадвигер (Hadwiger H.) 161  
 Хайнал (Hajnal A.) 175  
 Хайош (Hajós G.) 35, 170  
 Хакими (Hakimi S.) 77, 81, 82  
 Хамада (Hamada T.) 105  
 Хамелинк (Hamelink R. C.) 35  
 Харари (Harary F.) 6—8, 19, 26, 36, 40, 45, 46, 53, 58, 59, 61, 62, 64, 69, 73, 89, 101, 105, 122, 123, 125, 132, 137, 143—146, 149, 150, 153, 164, 165, 170, 171, 176, 177, 179, 187, 188, 192, 193, 197, 198, 200, 202, 206—209, 211, 215—218, 221—225, 227—229, 231, 232, 240, 242—247, 266  
 Харрисон (Harrison M. A.) 225, 229  
 Хауз (House L. C.) 176  
 Хедетниemi (Hedetniemi S.) 10, 40, 119, 124, 149, 153, 165, 167, 170, 171, 175—177  
 Хедрлин (Hedrlin Z.) 208  
 Хемминджер (Hemminger R. L.) 104  
 Хэффлер (Heffler L.) 144, 162  
 Хёнен (Heuchenne C.) 245  
 Хивуд (Heawood P. J.) 17, 143, 144, 155, 162  
 Хип (Hear V. R.) 248  
 Хоббс (Hobbs A. M.) 141, 146  
 Холл Д. (Hall D. W.) 148  
 Холл М. (Hall M.) 30, 75  
 Холл Ф. (Hall Ph.) 72  
  
 Чанг (Chang L. C.) 99  
 Чарtrand (Chartrand G.) 10, 39, 40, 61, 75, 81, 89, 90, 99, 103—105, 124, 132, 149, 165—167, 176, 177, 206, 208  
  
 Шеннон (Shannon C. E.) 67  
 Шрикханд (Shrikhande S. S.) 100  
 Штейн (Stein S. K.) 130  
 Штейниц (Steinitz E.) 130  
 Штокмейер (Stockmeyer P.) 10  
 Штраус (Straus E. G.) 33  
 Шустер (Schuster S.) 133

- Эванс (Evans J. W.) 229  
Эдмондс (Edmonds J.) 82  
Эйлер (Euler L.) 13, 14, 28, 83, 126,  
127, 143  
Элиас (Elias P.) 67  
Эрдёш (Erdős P.) 30, 32, 34, 39, 77,  
78, 146, 154, 175
- Якель (Jackel J.) 30  
Якобсен (Jakobsen I. T.) 177  
Янг (Yang C. N.) 19  
Янгс (Youngs J. W. T.) 143—145, 162,  
163  
Яп (Yap H. D.) 36
- Юнг (Jung H. A.) 92

## УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Греки это как-то называли. . .

Эйкинс<sup>1)</sup>

В этой книге использована в качестве символов и обозначений большая часть букв латинского и греческого алфавитов. Здесь приведены наиболее часто встречающиеся из них. Обозначения разделены на три категории: латинские буквы, греческие буквы и символы для представления операций над графами и группами.

<p><math>A</math> матрица смежностей 178, 237</p> <p><math>A_p</math> знакопеременная группа 195</p> <p><math>B</math> матрица инцидентий 185</p> <p><math>B(G)</math> граф блоков графа <math>G</math> 45</p> <p><math>C</math> матрица циклов 183</p> <p><math>C^*</math> матрица коциклов 184</p> <p><math>C_n</math> цикл длины <math>n</math> 26</p> <p><math>C_p</math> циклическая группа 195</p> <p><math>C(G)</math> граф точек сочленения графа <math>G</math> 45</p> <p><math>C_1(G)</math> реберное ядро графа <math>G</math> 122</p> <p><math>D</math> оргграф 232</p> <p><math>D^*</math> конденсация графа <math>D</math> 234</p> <p><math>D'</math> граф, обратный к <math>D</math> 234</p> <p><math>D_p</math> диэдральная группа 195</p> <p><math>D(F)</math> цветной граф группы <math>F</math> 199</p> <p><math>E_p</math> тождественная группа 195</p> <p><math>\hat{G}</math> граф 22</p> <p><math>G-u</math> граф с удаленной вершиной <math>u</math> 25</p> <p><math>G-x</math> граф с удаленным ребром <math>x</math> 25</p> <p><math>G+x</math> граф с добавленным ребром <math>x</math> 25</p> <p><math>G^2</math> квадрат графа <math>G</math> 27</p> <p><math>G^*</math> граф, двойственный к <math>G</math> 138, 139</p>	<p><math>K_p</math> полный граф 29</p> <p><math>\bar{K}_p</math> вполне несвязный граф 29</p> <p><math>K_{m,n}</math> полный двудольный граф 32</p> <p><math>K(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)</math> полный <math>n</math>-дольный граф 37</p> <p><math>L(D)</math> реберный оргграф оргграфа <math>D</math> 246</p> <p><math>L(G)</math> реберный граф графа <math>G</math> 91</p> <p><math>N</math> сеть 70</p> <p><math>P_n</math> цепь 26</p> <p><math>R</math> матрица достижимостей 238</p> <p><math>Q_n</math> <math>n</math>-мерный куб 37</p> <p><math>S(G)</math> граф подразбиений графа <math>G</math> 101</p> <p><math>S_p</math> симметрическая группа 195</p> <p><math>S_p^{(2)}</math> парная группа 217</p> <p><math>S_p^{(2)}</math> редуцированная упорядоченная парная группа 218</p> <p><math>T</math> дерево 52</p> <p><math>T</math> турнир 241</p> <p><math>T^*</math> кодереву дерева <math>T</math> 56</p> <p><math>T(G)</math> тотальный граф графа <math>G</math> 103</p> <p><math>V</math> множество вершин 22</p> <p><math>W_n</math> колесо 63</p> <p><math>X</math> множество ребер 22</p> <p><math>Z(A)</math> цикловой индекс группы <math>A</math> 213</p>
--	---

<sup>1)</sup> Зеа Эйкинс (1886—1958) — американская поэтесса и драматург. — *Прим. перев.*



- $bc(G)$  дерево блоков и точек сочленения графа  $G$  53  
 $c(G)$  окружение графа  $G$  27  
 $d_i$  степень вершины  $v_i$  27  
 $d(G)$  диаметр графа  $G$  27  
 $d(u, v)$  расстояние между вершинами  $u$  и  $v$  27  
 $e(v)$  эксцентриситет вершины  $v$  51  
 $f(G, t)$  хроматический многочлен 172  
 $g(G)$  обхват графа  $G$  27  
 $id(v)$  полустепень захода вершины  $v$  232  
 $i_k^{(a)}$  число циклов длины  $k$  212  
 $k(G)$  число компонент графа  $G$  55  
 $m(G)$  циклический ранг графа  $G$  55  
 $m^*(G)$  коциклический ранг графа  $G$  56  
 $od(v)$  полустепень исхода вершины  $v$  232  
 $p$  число вершин 22  
 $(p, q)$   $p$  вершин,  $q$  ребер 22  
 $q$  число ребер 22  
 $r$  число граней 127  
 $r(G)$  радиус графа  $G$  51  
 $r(m, n)$  число Рамсея 30  
 $r_1(m, n)$  реберное число Рамсея 104  
 $u, v, w$  вершины 22  
 $x, y, z$  ребра 22
- $\langle S \rangle$  подграф, порожденный подмножеством  $S$  24  
 $G_1 \cup G_2$  объединение графов 36  
 $G_1 + G_2$  соединение графов 36  
 $A + B$  сумма групп 193  
 $G_1 \times G_2$  произведение графов 36
- $\alpha_0$  число вершинного покрытия 117  
 $\alpha_1$  число реберного покрытия 117  
 $\beta_0$  вершинное число независимости 118  
 $\beta_1$  реберное число независимости 118  
 $\gamma$  род 142  
 $\Gamma(G)$  группа графа  $G$  190  
 $\Gamma_1(G)$  реберная группа графа  $G$  191  
 $\delta$  минимальная степень 28  
 $\Delta$  максимальная степень 28  
 $\varepsilon$  элементарный гомоморфизм 169  
 $\eta(G)$  число Хадвигера 177  
 $\theta$  толщина 145  
 $\kappa$  связность 60  
 $\kappa(u, v)$  локальная связность 66  
 $\lambda$  реберная связность 60  
 $\nu$  число скрещиваний 148  
 $\xi$  крупность 146  
 $\Pi(G)$  разбиение графа  $G$  77  
 $\Psi(G)$  древность графа  $G$  113  
 $\varphi$  гомоморфизм 169  
 $\varphi(k)$  функция Эйлера 215  
 $\chi$  хроматическое число 152  
 $\chi$  хроматический класс 159  
 $\psi$  ахроматическое число 170  
 $\omega$  число пересечений 33  
 $\Omega(F)$  граф пересечений 33
- $A \times B$  произведение групп 193  
 $G_1[G_2]$  композиция графов 37  
 $A[B]$  композиция групп 194  
 $G_1 \wedge G_2$  конъюнкция графов 40  
 $B^A$  степенная группа 194  
 $G_1 \circ G_2$  корона графов 198

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В словах, как в модах, властвует закон:  
Все хорошо лишь для своих времен.  
Не будь вульгарным модником в науке,  
Но бойся также рутинерства скуки<sup>1)</sup>.

*А. Пол<sup>2)</sup>*

- автоморфизм графа 190
- базис кошиклов 55  
— циклов 55  
блок 41
- валентность вершины 27  
вершина графа 22, 126  
— изолированная 28  
— инцидентная ребру 22  
— концевая 28  
— критическая 121  
— неподвижная 201  
— орграфа 232  
— периферическая 51  
— центральная 51  
— центроидная 52  
вершинная база 237  
вершины подобные 201  
— смежные 22, 213  
вес вершины 52  
вес функции 213  
ветвь 56  
— к вершине 52  
вихрь 187  
внешность цикла 134  
выпуклый полиэдр 130
- гипотеза Улама 25, 26, 48, 58, 202, 244  
— Хаддингера 161, 162  
— четырех красок 151, 156—162,  
164, 167, 172  
гомоморфизм графа 169  
— полный порядка  $n$  169  
— элементарный 169  
гомоморфный образ графа 196
- граничный оператор 54  
грань 127  
— внешняя 127  
— внутренняя 127  
граф асимметрический 190  
— ациклический 48  
— базисный 132  
— бесконечный 36  
— блоков 45  
— — и точек сочленения 53  
— вершинно-критический 121  
— вершинно-симметрический 201  
— внешнепланарный 131  
— — максимальный 131  
— вполне несвязный 28  
— гамильтонов 85  
— геометрически двойственный 138  
— Давида 29  
— двудольный 31  
— дополнительный 29  
— интервалов 35  
— клик 34  
— комбинаторно двойственный 139  
— критический 167  
— кубический 28  
— Леви 205, 206  
— Мак-Джи 205  
— направленный 23  
— неразделимый 41  
— несводимый 123  
— однозначно раскрашиваемый 164  
— одвоциклический 58  
— пересечений 33  
— Петерсена 113  
— планарный 127  
— — максимальный 128  
— плоский 127  
— подразбиений 101  
— полный 29

<sup>1)</sup> Перевод с английского О. Астафьевой.— *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> A. Pore, *Essay on Criticism*.

- граф полный двудольный 32  
 — — л-дольный 37  
 — полунесводимый 123  
 — помеченный 23  
 — произвольно гамильтонов 89  
 — — проходимый 89  
 — простой 197  
 — реберно-критический 121  
 — реберно-регулярный 202  
 — реберно-симметрический 201  
 — реберный 91, 94  
 — — итерированный 91  
 — регулярный 28  
 — самодополнительный 29  
 — сводимый 123  
 — симметрический 201  
 — составной 197  
 — тороидальный 142  
 — тотальный 103  
 — точек сочленения 45  
 — тривиальный 22  
 — Хивуда 204  
 — эйлеров 83  
 — л-раскрашиваемый 152  
 — л-транзитивный 204  
 — л-унитранзитивный 204  
 — л-хроматический 152  
 —  $\alpha$ -перестановочный 206
- граф-композиция 196
- графонд 58
- графы гомеоморфные 132  
 — изоморфные 24, 190  
 — коспектральные 188
- группа 189  
 — графа 190  
 — вершинная 190  
 — диэдральная 196  
 — знакопеременная 195  
 — конфигураций 213  
 — парная 217  
 — — редуцированная 218  
 — подстановок 190  
 — реберная 191  
 — симметрическая 195  
 — степенная 194  
 — тождественная 195  
 — циклическая 195
- группы идентичные 190  
 — изоморфные 190
- дерево 48  
 — блоков и точек сочленения 54  
 — корневое 219  
 — с висячим корнем 220  
 — входящее 235  
 — выходящее 235
- диагональ блока 47  
 «диаграмма Хассе» 73  
 диаметр 27  
 длина маршрута 31  
 добавление вершины 25  
 — ребра 25  
 дополнение графа 29  
 достижимость 133  
 древность графа 113  
 дуга 23, 232
- животное 227
- замощение 2-решетки 227  
 звезда (лапа, гроздь) 32
- изоморфизм 24  
 инвариант 24  
 инцидентность ребра и вершины 22  
 искаженность графа 149  
 источник 235
- карта плоская 127  
 — — с корневым ребром 227
- квадрат графа 27  
 квадратный корень графа 38  
 клетка 204  
 количество очков 243  
 клика графа 34  
 кограница 55  
 кограницный оператор 54  
 кодереве 56  
 колесо 63  
 комплексе 20  
 композиция графов 37, 196  
 — групп 194  
 компонента 27  
 — нечетная 108  
 — односторонняя 233  
 — сильная 233  
 — слабая 233  
 конденсация 234  
 контур 233  
 — эйлеров 240  
 конфигурация 213  
 конъюнкция 40, 243  
 корона графов 198  
 цикл 55  
 крупность (зернистость, шероховатость) 146
- лемма Бернсайда 212, 214  
 лес 48

- линия матрицы 71  
 линейный подграф графа 180  
   — — орграфа 179
- маршрут 26  
   — замкнутый 26  
   — несовершенный 119  
   — открытый 26  
   — совершенный 119  
   —  $Y$ -сводимый 120
- матрица достижимостей 238  
   — инцидентий 180  
   — кошиклов 184  
   — обходов 238  
   — полустепеней захода 239  
   — — исхода 239  
   — разреженная 241  
   — смежностей графа 179  
   — — орграфа 237  
   — циклов 183
- матричная теорема о деревьях 178, 181, 239
- матроид 57  
   — бинарный 188  
   — графический 180  
   — кографический 180  
   — кошиклов графа 57  
   — циклов графа 57  
   — эйлеров 188
- многочлен деревьев графа 187
- множество вершин 22  
   — внешие устойчивое 118  
   — внутренние устойчивое 118  
   — независимое 57, 108, 118  
   — разделяющее 64  
   — ребер 22
- мост 41
- мультиграф 23
- наследственное свойство 119
- надграф 24
- независимые единицы матрицы 71
- обхват 27
- объединение графов 36
- одноцветный класс 152
- ожерелье 212—215, 224, 225
- окрестность вершины 197  
   — замкнутая 197
- окружение 27
- орбита 211
- орграф 232  
   — бесконтурный 235  
   — контрафункциональный 236
- орграф несвязный 233  
   — обратный 234  
   — односторонний 233  
   — примитивный 246  
   — реберный 245  
   — сильный 233  
   — слабый 233  
   — строго односторонний 244  
   — — слабый 244  
   — функциональный 236  
   — эйлеров 240
- ориентация графа 246
- остов 55
- пара связностей 62
- паросочетание 119  
   — наибольшее 119
- перечисляющий ряд для конфигураций 213  
   — — — фигур 213
- петля 23
- подграф 24  
   — линейный 180  
   — остоновый 24  
   — порожденный 24  
   — четный 227
- покрытие вершинное 117  
   — реберное 117
- полиэдр 127
- полная раскраска 170
- полный набор инвариантов 24
- подгруппа графа 208
- полуконтур 233
- полумаршрут 233
- полупуть 233
- полустепень захода 232  
   — исхода 232
- порядок группы 190
- последователь  $n$ -пути 204
- принцип ориентированной двойственности 234, 235
- произведение графов 36  
   — групп 190  
   — поэлементное 239
- пространство кошиклов 55  
   — циклов 55
- псевдограф 23
- путь 233
- разбиение графа 76  
   — графическое 76  
   — числа 76
- разрез 55
- ранг кошиклический 56  
   — циклический 55

- размерность симплекса 20  
 расстояние в графе 27  
   — — орграфе 233  
 раскраска графа 152  
   — плоской карты 156  
   — полная 170  
   — ребер 159  
   — / цветами 172  
 ребра кратные 23  
   — независимые 108  
   — подобные 201  
   — смежные 22  
 ребро графа 22  
   — инцидентное вершине 22  
   — критическое 121  
   — подразбитое 101  
   — симметричное 221  
 род графа 142  
   — полиэдра 142
- связность 60  
   — локальная 66  
   — односторонняя 233  
   — реберная 60  
   — сильная 233  
   — слабая 233  
 сеть 70  
 система различных представителей 72  
 стабилизатор 211  
 степень вершины 27  
   — графа 27  
   — группы 190  
   — ребра 202  
 сток 235  
 стягивание 137  
   — элементарное 137  
 сумма графов 37  
   — групп 193
- теорема Бине — Коши 181  
   — об интерполяции гомоморфизмов 171  
   — о пяти красках 151, 155, 156  
   — перечисления Пойа 211—215, 217, 218  
   — — степенной группы 224  
   — Хивуда о раскраске карт 162—164  
   — BEST 240  
 толщина графа 145  
 точка сочленения 41  
 транзитивная тройка 241  
 треугольник 26  
   — нечетный 95  
   — четный 95  
 турнир 241  
   — турнир состязаний 245  
   — тэта-граф 85
- удаление вершины 25  
   — ребра 25  
 укладка графа 126  
 уравнение характеристики неподобия для деревьев 221  
   — Эйлера — Пуанкаре 57
- фактор графа 106  
 факторизация графа 106  
 фигура 213  
 формула Оттера 222  
   — Эйлера для полиэдров 127  
 функция связности 62
- хорда 55  
 хроматический класс 159  
   — многочлен 173
- цветной граф группы 199  
 центр графа 51  
 центроид дерева 52  
 цепи непересекающиеся 64  
   — реберно-непересекающиеся 64  
 цепь 26  
   — альтернирующая 109  
   — геодезическая 27  
   — простая 26
- цикл 26  
   — гамильтонов 85  
   — графонда 58  
   — матронда 57  
   — простой 26  
   — эйлеров 83  
 циклическая тройка 241  
 циклический вектор графа 54  
 цикловой индекс группы 212
- число ахроматическое 170  
   — независимости вершинное 118  
   — — реберное 118  
   — пересечения 33  
   — покрытия вершинного 117  
   — — реберного 117  
   — Рамсея 30  
   — — реберное 104  
   — скрещиваний 148  
   — Хадвингера 177  
   — хроматическое 152  
   —  $n$ -хроматическое 177

- экспоненцирование 208  
эксцентриситет 51  
элемент графа 103  
элементы соседние 103  
эндоморфизм графа 208
- ядро вершинное 125  
— реберное 122
- 0-цепь 54  
1-база 237  
1-скелет 127
- 1-цепь 54  
2-решетка 227  
3-решетка 227  
 $n$ -клетка 204  
 $n$ -компонента 63  
 $n$ -куб 37  
 $n$ -путь 204  
 $n$ -раскраска 152  
— реберная 159  
 $n$ -связность 63  
 $n$ -фактор 106  
 $n$ -факторизация 106  
 $P$ -множество 119

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Я не люблю цитат. Скажи, что знаешь сам.  
*Р. Эмерсон<sup>1)</sup>*

Предисловие редактора перевода . . . . .	6
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Открытие!</b> . . . . .	<b>13</b>
Задача о кёнигсбергских мостах . . . . .	13
Электрические цепи . . . . .	14
Химические изомеры . . . . .	15
«Вокруг света» . . . . .	16
Гипотеза четырех красок . . . . .	17
Теория графов в двенадцатом веке . . . . .	18
<b>Глава 2. Графы</b> . . . . .	<b>21</b>
Типы графов . . . . .	21
Маршруты и связность . . . . .	26
Степени . . . . .	27
Задача Рамсея . . . . .	28
Экстремальные графы . . . . .	30
Графы пересечений . . . . .	33
Операции над графами . . . . .	35
Упражнения . . . . .	38
<b>Глава 3. Блоки</b> . . . . .	<b>41</b>
Точки сочленения, мосты и блоки . . . . .	41
Графы блоков и графы точек сочленения . . . . .	45
Упражнения . . . . .	46
<b>Глава 4. Деревья</b> . . . . .	<b>48</b>
Описание деревьев . . . . .	48
Центры и центроиды . . . . .	51
Деревья блоков и точек сочленения . . . . .	53
Независимые циклы и кошечки . . . . .	54
Матроиды . . . . .	57
Упражнения . . . . .	59
<b>Глава 5. Связность</b> . . . . .	<b>60</b>
Связность и реберная связность . . . . .	60
Графические варианты теоремы Менгера . . . . .	64

<sup>1)</sup> Р. Эмерсон (1803—1882) — американский писатель и философ. —  
*Прим. перев.*

Другие варианты теоремы Менгера . . . . .	70
Упражнения . . . . .	74
<b>Глава 6. Разбиения . . . . .</b>	<b>76</b>
Упражнения . . . . .	81
<b>Глава 7. Обходы графов . . . . .</b>	<b>83</b>
Эйлеровы графы . . . . .	83
Гамильтоновы графы . . . . .	85
Упражнения . . . . .	88
<b>Глава 8. Реберные графы . . . . .</b>	<b>91</b>
Некоторые свойства реберных графов . . . . .	91
Характеризация реберных графов . . . . .	94
Специальные реберные графы . . . . .	99
Реберные графы и обходы . . . . .	101
Тотальные графы . . . . .	103
Упражнения . . . . .	104
<b>Глава 9. Факторизация . . . . .</b>	<b>106</b>
1-факторизация . . . . .	106
2-факторизация . . . . .	111
Древесность . . . . .	113
Упражнения . . . . .	116
<b>Глава 10. Покрытия . . . . .</b>	<b>117</b>
Покрытия и независимость . . . . .	117
Критические вершины и ребра . . . . .	120
Реберное ядро . . . . .	122
Упражнения . . . . .	124
<b>Глава 11. Планарность . . . . .</b>	<b>126</b>
Плоские и планарные графы . . . . .	126
Внешнепланарные графы . . . . .	131
Теорема Понтрягина — Куратовского . . . . .	133
Другие характеристики планарных графов . . . . .	138
Род, толщина, крупность, число скрещиваний . . . . .	141
Упражнения . . . . .	148
<b>Глава 12. Раскраски . . . . .</b>	<b>151</b>
Хроматическое число . . . . .	152
Теорема о пяти красках . . . . .	155
Гипотеза четырех красок . . . . .	156
Теорема Хивуда о раскраске карт . . . . .	162
Однозначно раскрашиваемые графы . . . . .	164
Критические графы . . . . .	167
Гомоморфизмы . . . . .	169
Хроматический многочлен . . . . .	172
Упражнения . . . . .	175
<b>Глава 13. Матрицы . . . . .</b>	<b>178</b>
Матрица смежностей . . . . .	178
Матрица инцидентий . . . . .	180



Матрица циклов . . . . .	183
Обзор дополнительных свойств матроидов . . . . .	186
Упражнения . . . . .	187
<b>Глава 14. Группы . . . . .</b>	<b>189</b>
Группа автоморфизмов графа . . . . .	193
Операции на группах подстановок . . . . .	194
Группа графа-композиции . . . . .	195
Графы с данной группой . . . . .	198
Симметрические графы . . . . .	201
Графы с более сильной симметрией . . . . .	204
Упражнения . . . . .	206
<b>Глава 15. Перечисления . . . . .</b>	<b>209</b>
Помеченные графы . . . . .	209
Теорема перечисления Пойа . . . . .	211
Перечисление графов . . . . .	216
Перечисление деревьев . . . . .	219
Теорема перечисления степенной группы . . . . .	224
Решенные и нерешенные задачи перечисления графов . . . . .	225
Упражнения . . . . .	230
<b>Глава 16. Орграфы . . . . .</b>	<b>232</b>
Орграфы и связность . . . . .	232
Ориентированная двойственность и бесконтурные орграфы . . . . .	234
Орграфы и матрицы . . . . .	237
Обзор по проблеме восстановления турниров . . . . .	244
Упражнения . . . . .	244
<b>Приложение I. Диаграммы графов . . . . .</b>	<b>248</b>
<b>Приложение II. Диаграммы орграфов . . . . .</b>	<b>260</b>
<b>Приложение III. Диаграммы деревьев . . . . .</b>	<b>266</b>
Список литературы и именной указатель . . . . .	268
Указатель обозначений . . . . .	291
Предметный указатель . . . . .	293

Ф. Харари  
ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Редактор *Л. В. Штейнпресс*  
Художник *К. П. Сиротко*  
Художественный редактор *В. Н. Шаповалов*  
Технический редактор *Н. Д. Толстякова*  
Корректор *Л. Д. Панова*

Сдано в набор 9/11 1973 г.  
Подписано к печати 21/VI 1973 г.  
Бум. тип. № 1 60×90<sup>1/16</sup>—9,50 бум. л. 19 печ. л.  
Уч.-изд. л. 18,95. Изд. № 1/6962  
Цена 1 р. 56 к. Заказ № 141

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Первая Образцовая типография  
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете  
Совета Министров СССР по делам издательства,  
полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-54, Валуевая, 28