Контрольная работа
по дисциплине Математическая логика и теория алгоритмов

Выполнил: ст. гр. БИСЗ20-
01

Бурдыкин А.Г

Проверил: доцент каф. ВМ
Сливина Т. А.

Вариант 3

<u>1.</u> Приведите примеры предложений

а) являющихся высказываниями,

б) не являющихся высказываниями.

Решение.

Высказывание в математической логике – это повествовательное предложение, выражающее суждение. Это суждение должно принимать определённое логическое значение – быть истинным или ложным.

Примеры высказываний:

1) “Число 18 делится на 6” – это простое высказывание, которое имеет значение “истина”.

3) “Если число делится на 6, то оно делится на 3” – это сложное высказывание, которое имеет значение “истина”, оно состоит из двух простых высказываний “число делится на 6” и “число делится на 3”, которые связываются между собой импликацией (логическим следованием).

3) “Земля вращается вокруг Луны” – это ложное высказывание.

Следующие предложения не являются высказываниями”:

1) “Который час?” – это вопросительное предложение, оно не является суждениям, которое имеет определённое значение истинности.

2) “Число x меньше 7.” – относительно истинности этого предложения ничего нельзя сказать определённого, зависит от конкретного значения числа x.

3) “Да будет свет!” – восклицательное предложение, которое также не имеет определённого логического значения.

<u>2.</u> Определить логические значения высказываний при $x = 1, y = 1, z = 0$.

а) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \bar{y})$

б) $\big((x \vee y) \wedge z\big) \leftrightarrow \big((x \wedge z) \vee (y \wedge z)\big)$

Решение.

$$\text{а) } (x \land y) \leftrightarrow (z \lor \bar{y})$$

Конъюнкция $x \land y$ принимает значение 1 (истина) только в случае одновременной истинности x и y, значит при $x = 1, y = 1$ $x \land y = 1$.

Отрицание $\bar{y}$ меняет значение истинности y на противоположное, значит, $\bar{y} = 0$при $y = 1$.

Дизъюнкция $z \lor \bar{y}$ принимает значение 0 (ложь) только в случае одновременной ложности z и $\bar{y}$, значит $z \lor \bar{y} = 0$ при $z = 0, \bar{y} = 0$.

Эквиваленция принимает значение 1 (истина) только в случае совпадения логических значений операндов. Значит при $x \land y = 1$ и $z \lor \bar{y} = 0$ значение $(x \land y) \leftrightarrow (z \lor \bar{y})$ – ложь: $(x \land y) \leftrightarrow (z \lor \bar{y}) = 0$.

$$\text{б) } \big((x \lor y) \land z\big) \leftrightarrow \big((x \land z) \lor (y \land z)\big)$$

Дизъюнкция $x \lor y$ принимает значение 0 (ложь) только в случае одновременной ложности z и y, значит $x \lor y = 1$ при $x = 1, y = 1$.

Конъюнкция $(x \lor y) \land z$ принимает значение 1 (истина) только в случае одновременной истинности $x \lor y$ и z, значит $(x \lor y) \land z = 0$ при $x \lor y = 1, z = 0$.

Аналогично, $x \land z = 0$ при $x = 1, z = 0$ и $y \land z = 0$ при $y = 1, z = 0$.

Дизъюнкция $(x \land z) \lor (y \land z)$ принимает значение 0 (ложь) только в случае одновременной ложности $x \land z$ и $x \land z$, значит $(x \land z) \lor (y \land z) = 0$ при $x \land z = 0$ и $y \land z = 0$.

Эквиваленция принимает значение 1 (истина) только в случае совпадения логических значений операндов. Значит при $(x \lor y) \land z = 0$ и $(x \land z) \lor (y \land z) = 0$ значение $\big((x \lor y) \land z\big) \leftrightarrow \big((x \land z) \lor (y \land z)\big)$ – истина:

$$\big((x \lor y) \land z\big) \leftrightarrow \big((x \land z) \lor (y \land z)\big) = 1$$

Заметим, что заданное высказывание всегда истинно – при любых значениях логических переменных, так как выражает закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции: $(x \lor y) \land z = (x \land z) \lor (y \land z)$.

<u>3.</u> Доказать равносильность формулы

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \equiv x \wedge y \longrightarrow z$$

Решение. Докажем равносильность формулы двумя способами: с помощью таблиц истинности и с помощью равносильных преобразований.

Составляем таблицу истинности для формулы $x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$. Учитываем, что импликация ложна только в случае, когда из истины следует ложь.

x	y	z	$y \longrightarrow z$	$x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Теперь составляем таблицу истинности для формулы $x \wedge y \longrightarrow z$. Учитываем, что конъюнкция истинна только в случае, когда оба операнда истинны.

x	y	z	$x \wedge y$	$x \wedge y \longrightarrow z$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Видим, что таблицы истинности для формул $x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$ и $x \wedge y \longrightarrow z$ совпадают, значит они равносильны (или вся формула равносильна):

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \equiv x \wedge y \longrightarrow z$$

Другой способ доказательства: используем равносильные преобразования.

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \equiv [\text{заменыем импликацию по закону } A \longrightarrow B = \bar{A} \vee B] \equiv$$

$$\equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee z) \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$$

$$x \wedge y \longrightarrow z \equiv \overline{x \wedge y} \vee z \equiv [\text{используем закон де Моргана}] \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$$

Отсюда:

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \equiv x \wedge y \longrightarrow z$$

4. Составить РКС (схему):

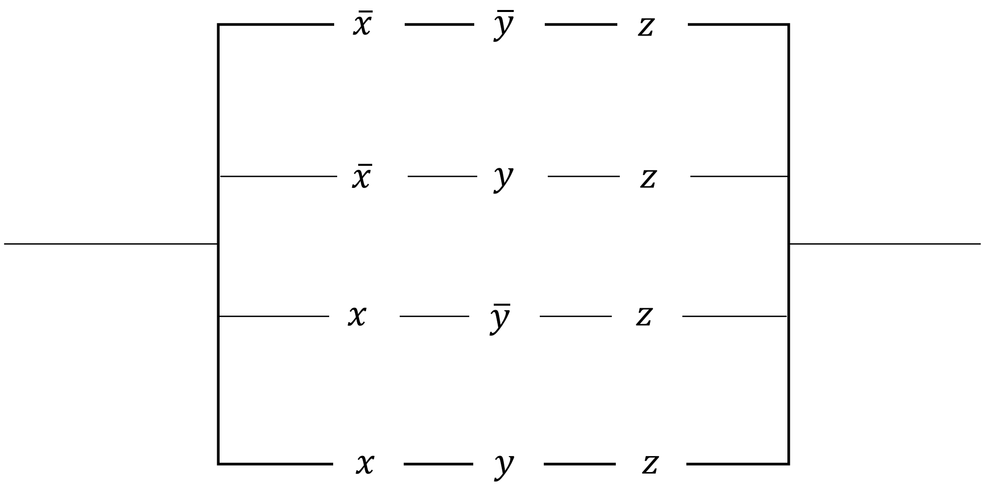
$$F(0,0,1) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$$

Решение.

Нам заданы наборы функции от трёх логических переменных x, y, z, на которых функция принимает значение 1. По этим данным составляем совершенную дизъюнктивную нормальную форму – СДНФ: в каждой элементарной конъюнкции этой формы переменная входит с отрицанием, если в соответствующем наборе она принимает значение 0:

$$F = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

Сначала составим РКС для этой формы, затем упростим форму и составим РКС для упрощённой формы. Каждую элементарную конъюнкцию в этой форме представляем тремя последовательно соединёнными элементами (последовательное соединение соответствует логическому умножению - конъюнкции), которые соответствуют переменным в конъюнкции, а все эти тройки элементов соединяются параллельно (соответствует дизъюнкции – логическому сложению):



Теперь упростим полученную форму СДНФ:

$$\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz = [\text{используем закон дистрибутивности}] = \bar{x}z(\bar{y} \vee y) =$$

$$= [\text{используем закон исключённого третьего}] = \bar{x}z \cdot 1 =$$

$$= [\text{используем закон единицы}] = \bar{x}z$$

Аналогично,

$$x\bar{y}z \vee xyz = xz(\bar{y} \vee y) = xz \cdot 1 = xz$$

Получаем:

$$F = \bar{x}z \vee xz = (\bar{x} \vee x)z = 1 \cdot z = z$$

В итоге получаем упрощённую формулу для F:

$$F = z$$

Релейно-контактная схема для $F = z$:

5. Найти СДНФ и СКНФ:

а) с помощью равносильных преобразований;

б) с помощью таблицы истинности.

$$(x \vee \bar{z}) \longrightarrow y \wedge x$$

Решение.

а) $(x \vee \bar{z}) \longrightarrow y \wedge x =$ [заменяем импликацию по закону $A \longrightarrow B = \bar{A} \vee B$] $=$

$$= \left(\overline{x \vee \bar{z}}\right) \vee (y \wedge x) = [\text{используем закон де Моргана}] =$$

$$= (\bar{x} \wedge \bar{\bar{z}}) \vee (y \wedge x) = \left[\begin{matrix}\text{снимаем двойное отрицание и используем} \\ \text{закон коммутативности}\end{matrix}\right] =$$

$$= (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

Получили дизъюнктивную нормальную форму. Из неё получим СДНФ – совершенную дизъюнктивную нормальную форму, используя закон единицы, закон исключенного третьего и закон дистрибутивности.

$$\bar{x} \wedge z = \bar{x} \wedge 1 \wedge z = \bar{x} \wedge (y \vee \bar{y}) \wedge z = \bar{x} \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$$

$$x \wedge y = x \wedge y \wedge 1 = x \wedge y \wedge (z \vee \bar{z}) = x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z}$$

Получаем СДНФ (знаки конъюнкции опустим):

$$\bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee x y z \vee x y \bar{z}$$

Форму СКНФ получим из найденной формы $(\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$:

$$(\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y) = [\text{ставим двойное отрицание}] =$$

$$= \overline{\overline{(\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)}} = [\text{используем закон де Моргана}] =$$

$$= \overline{\left(\overline{\bar{x} \wedge z}\right) \wedge \left(\overline{x \wedge y}\right)} = \overline{(x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})} = [\text{закон дистрибутивности}] =$$

$$= \overline{(x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{x}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y})} = \overline{0 \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{x}) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y})} =$$

$$= \overline{(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})} = [\text{используем закон де Моргана}] =$$

$$= \left(\overline{x \wedge \bar{y}}\right) \wedge \left(\overline{\bar{x} \wedge \bar{z}}\right) \wedge \left(\overline{\bar{y} \wedge \bar{z}}\right) = \left[\begin{matrix}\text{используем закон де Моргана и} \\ \text{снимаем двойное отрицание}\end{matrix}\right] =$$

$$= (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

Получили КНФ. Из неё получим СКНФ, используя законы нуля, противоречия и закон дистрибутивности.

$$\bar{x}\vee y = (\bar{x}\vee y)\vee 0 = (\bar{x}\vee y)\vee(z\wedge\bar{z}) = (\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})$$

Аналогично, $x\vee z = (x\vee y\vee z)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)$ и $y\vee z = (x\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee z)$

Учитывая каждую дизъюнкцию только один раз, получаем СКНФ:

$$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\wedge(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)$$

б) Найдём СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности.

Составляем таблицу истинности для формулы $(x\vee\bar{z}) \longrightarrow y\wedge x$.

x	y	z	$\bar{z}$	$x\vee\bar{z}$	$y\wedge x$	$(x\vee\bar{z}) \longrightarrow y\wedge x$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

СДНФ составляется по наборам переменных, на которых функция принимает значение 1: в каждую элементарную конъюнкцию переменная входит с отрицанием, если в наборе она принимает значение 0: $\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee xy\bar{z}\vee xyz$.

СКНФ составляется по наборам переменных, на которых функция принимает значение 0: в каждую элементарную дизъюнкцию переменная входит с отрицанием, если в наборе она принимает значение 1:

$$(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})$$

Получили такие же формы СДНФ и СКНФ, только с перестановкой членов.

<u>6.</u> Записать на языке логики предикатов:

а) “Из перпендикулярности векторов a и b следует равенство нулю их скалярного произведения”,

б) “Если a и b делятся на c, то $(a-b)$ и $(a+b)$ делятся на c”.

Решение.

а) Вводим два 2-местных предиката, определённых на множестве пар векторов:

$$P(a,b) - \text{"векторы } a \text{ и } b \text{ перпендикулярны"}$$

$$Q(a,b) - \text{"скалярное произведение векторов } a \text{ и } b \text{ равно нулю"}$$

Тогда заданное высказывание с использованием импликации и кванторов общности для двух переменных имеет вид:

$$\forall a \forall b \big(P(a,b) \longrightarrow Q(a,b)\big)$$

а) Вводим 2-местный предикат, определённый на множестве пар целых чисел $Z \times Z$:

$$P(a,b) - \text{"}a \text{ делится на } b\text{"}$$

Вводим два 3-местных предиката, определённых на множестве троек целых чисел $Z \times Z \times Z$:

$$Q(a,b,c) - \text{"}a-b \text{ делится на } c\text{"}$$

$$R(a,b,c) - \text{"}a+b \text{ делится на } c\text{"}$$

Тогда заданное высказывание с использованием конъюнкций, импликации и кванторов общности для трёх переменных имеет вид:

$$\forall a \forall b \forall c \big(P(a,c) \wedge P(b,c) \longrightarrow Q(a,b,c) \wedge R(a,b,c)\big)$$

<u>7.</u> Изобразите на координатной плоскости область истинности предиката

$$(\overline{x \geq 2}) \wedge (x \leq y)$$

Решение.

Область истинности предиката "$x \geq 2$", определённого на множестве точек координатной плоскости – полуплоскость, лежащая правее прямой $x = 2$ (включая точки прямой, т.к. неравенство нестрогое). Область истинности отрицания этого предиката $\overline{x \geq 2}$ – это область истинности предиката $x < 2$ - полуплоскость, лежащая левее прямой $x = 2$ (исключая точки прямой, т.к. неравенство строгое).

Область истинности предиката "$x \leq y$", определённого на множестве точек координатной плоскости – полуплоскость, лежащая выше прямой $y = x$ (включая точки прямой, т.к. неравенство нестрогое).

Берём пересечение этих областей (так как предикаты $\overline{x \geq 2}$ и $x \leq y$ соединены конъюнкцией) – получаем область истинности заданного предиката (заштрихована на рисунке, это неограниченная область):