

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Интегральное исчисление функций многих переменных

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей
«Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика»

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2011



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

«»

Страница 1 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Авторы:

Шило Таисия Ильинична - кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

Семенчук Николай Павлович - кандидат физико-математических наук, доцент

Климашевская Ирина Николаевна - кандидат физико-математических наук, доцент

Книга знакомит читателя с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами и с методами их вычисления. В ней приведены примеры геометрического, механического и физического содержания. В заключительной главе предлагаются контрольные (аттестационные) работы для самостоятельного решения, приведены образцы решения типовых задач.

Книга предназначена для студентов высших учебных заведений математических специальностей.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 2 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
Содержание учебного материала	9
Глава 1 Двойные интегралы	12
1.1 Задача, приводящая к понятию двойного интеграла	12
1.2 Определение двойного интеграла	14
1.3 Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла	17
1.4 Классы интегрируемых функций	22
1.5 Свойства двойного интеграла	23
1.6 Вычисление двойного интеграла	27
1.7 Сведение двойного интеграла по элементарной области к повторному	33
1.8 Криволинейные координаты на плоскости	42
1.9 Замена переменных в двойном интеграле	47
Глава 2 Тройные интегралы	67
2.1 Задача о вычислении массы тела	67
2.2 Определение тройного интеграла	68
2.3 Свойства тройного интеграла	73
2.4 Вычисление тройного интеграла	77
2.5 Замена переменных в тройном интеграле	83



Кафедра
математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 3 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 4 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

2.5.1	Криволинейные координаты в пространстве	83
2.5.2	Цилиндрические координаты	85
2.5.3	Сферические координаты	90

Глава 3 **Криволинейные интегралы** 93

3.1	Криволинейный интеграл первого рода	93
3.2	Вычисление криволинейного интеграла первого рода и его геометрическая интерпретация	97
3.3	Работа силы на криволинейном пути	102
3.4	Криволинейный интеграл второго рода	106
3.5	Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода	111
3.6	Свойства криволинейного интеграла второго рода	117
3.7	Формула Грина	121
3.8	Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	125
3.9	Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала	135

Глава 4 **Поверхностные интегралы** 142

4.1	О задании поверхности в пространстве	142
4.2	Площадь поверхности	146
4.3	Поверхностный интеграл первого рода	152

4.4	Ориентация кусочно-гладкой поверхности	157
4.5	Поверхностный интеграл второго рода	160
4.6	Физический смысл поверхностного интеграла второго рода	169
4.7	Формула Стокса	172
4.8	Условия независимости криволинейного интеграла второ го рода от пути интегрирования в пространстве	180
4.9	Формула Остроградского-Гаусса	183
4.10	Векторный анализ. Элементы теории поля	190
Глава 5	Практические задания	204
5.1	Контрольная работа №1. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы (аудиторная работа)	204
5.2	Индивидуальные домашние задания. Приложение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.	209.
5.3	Контрольная работа №2. Дифференциальное и интеграль ное исчисление функций многих переменных (для специальности «Математика» (ОЗО))	216
5.4	Образцы решения типовых задач контрольной работы №2 .	227
5.4.1	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	227
5.4.2	Интегральное исчисление функций многих перемен ных	240



Кафедра

математического

анализа и

дифференци-

альных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 5 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Глава 6 Приложение	265
6.1 Приложение двойных и тройных интегралов	265
6.1.1 Двойные интегралы	265
6.1.2 Тройные интегралы	266
6.2 Приложение криволинейных интегралов	268
6.2.1 Криволинейные интегралы первого рода	268
6.2.2 Криволинейные интегралы второго рода	269
6.3 Приложение поверхностных интегралов	270
6.3.1 Поверхностный интеграл первого типа	270
6.3.2 Поверхностный интеграл второго типа	270
Перечень вопросов к экзамену (зачету)	272
Литература	274



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 6 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно - методический комплекс написан на основе курса лекций и практических занятий, которые автор на протяжении ряда лет проводит на математическом факультете БрГУ имени А.С. Пушкина.

Цель настоящего учебного издания - помочь студенту разобраться в фундаментальных понятиях математического анализа, таких как кратные интегралы, криволинейные интегралы, поверхностные интегралы и научить их самостоятельно работать над курсом, отрабатывать практические навыки по умению применять интегралы к решению прикладных задач. Глубокое изучение материала студентами возможно только при условии успешной организации самостоятельной работы. Учебно - методический комплекс обеспечивает достижение основной дидактической цели - самообразования.

Изложение теоретического материала подкрепляется достаточно большим количеством задач с подробными решениями, чтобы студенты имели возможность самостоятельно изучить алгоритмы решения типовых задач, ибо важные и интересные задачи, связывающие теорию с приложениями и обеспечивающие межпредметные связи, имеют порой очень громоздкие решения. Ясно, что учеба студента заключается не только в просмотре лекций и решений типовых задач. Главное - студент должен обдумать и осознанно усвоить изучаемый материал. В этой связи учебно-методический комплекс



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 7 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

содержит достаточно обширный материал для индивидуальных домашних заданий, контрольных и самостоятельных работ, а также вопросы для подготовки к зачету и экзамену.

Подобная структура и содержание учебно - методического комплекса позволяет надеяться, что представленный материал окажется полезным не только для студентов, но и окажет помощь молодым преподавателям, ведущим практические занятия, в их работе.

Автор благодарен рецензентам - кандидату физ.- мат. наук, доценту Семенчуку Николаю Павловичу, кандидату физ.- мат. наук, доценту Климашевской Ирине Николаевне.

В оформлении электронного издания оказали помощь зам. декана по учебной работе Ткач С. Н., преподаватель - стажер Островский А.С., а также студенты Голик О., Дыбко А., Корчук О., Логвинович В., Соц Т., Терешкевич В., Федорук С., Демянко И..

Выражаю им искреннюю признательность и благодарность.

Отдельная благодарность начальнику учебно - методического отдела Жуковскому А. Т. за рекомендации в оформлении учебно - методического комплекса.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 8 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Содержание учебного материала

№	Интегральное исчисление	ЛК	ПР
1	Кратные интегралы (42 ч.)	22	20
1.1	Двойной интеграл 1. Квадрируемые фигуры и их площади. Условия квадрируемости плоских фигур 2. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла 3. Понятие двойного интеграла и его свойства 4. Условие существования двойного интеграла 5. Вычисление двойных интегралов в случае прямоугольной и криволинейной области	8	4
1.2	Замена переменных в двойном интеграле 1. Отображение плоских областей 2. Вычисление площади плоской области в криволинейных координатах 3. Замена переменных в двойном интеграле 4. Двойной интеграл в полярных координатах	4	4
1.3	Тройной интеграл 1. Понятие тройного интеграла 2. Условие существования 3. Вычисление тройных интегралов 4. Замена переменных в тройном интеграле 5. Цилиндрические и сферические координаты	4	2



Кафедра
математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 9 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

1.4	Приложения кратных интегралов 1. Вычисление площадей плоских фигур 2. Вычисление объемов тел 3. Вычисление массы материальной пластины и массы тела 4. Нахождение координат центра тяжести пластины и тела	2	6
1.5	Несобственные кратные интегралы 1. Исчерпывающие последовательности множеств 2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций 3. Мажорантный признак сходимости несобственного интеграла 4. Замена переменных в несобственном интеграле	2	2
2	Поверхности (6 ч.)	6	
2.1	Вектор-функция скалярного аргумента 1. Предел, непрерывность дифференцируемость вектор-функции 2. Кривые на плоскости и в пространстве 3. Векторные уравнения кривой	2	
2.2	Поверхности 1. Понятие поверхности в трехмерном пространстве, способы задания поверхности 2. Параметрические уравнения поверхности 3. Кривые на поверхности 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 5. Первая квадратичная форма поверхности 6. Площадь поверхности 7. Сторона поверхности	4	
3	Криволинейные и поверхностные интегралы (26 ч.)	12	14

Начало

Содержание



Страница 10 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

3.1	Криволинейные интегралы первого рода 1. Гладкие и кусочно-гладкие кривые 2. Криволинейные интегралы первого рода и их свойства 3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода 4. Сведение криволинейного интеграла к определенному	2	2
3.2	Криволинейные интегралы второго рода 1. Задача о работе плоского силового поля 2. Понятие криволинейного интеграла второго рода 3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода 4. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина 5. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	4	4
3.3	Поверхностные интегралы первого рода 1. Понятие поверхностного интеграла первого рода 2. Сведение поверхностного интеграла первого рода к двойному	2	2
3.4	Поверхностные интегралы второго рода 1. Понятие поверхностного интеграла второго рода 2. Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода	2	4
3.5	Основные интегральные формулы 1. Формула Остроградского и ее применение 2. Формула Стокса	2	2
3.6	Векторный анализ. Формула Стокса и Гаусса-Остроградского в терминах векторного анализа	2	2

Начало

Содержание



Страница 11 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 1

Двойные интегралы

1.1 Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

Задача о площади криволинейной трапеции привела нас к понятию определенного интеграла. Рассмотрим задачу, которая приводит к понятию двойного интеграла.

Задача об объеме цилиндрического бруса. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ Рассмотрим тело Q , ограниченное снизу ограниченной замкнутой областью D на плоскости xOy , сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , и сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, причем $f(x, y) \geq 0$ при $(x, y) \in D$ (рис.1.1).

Объем V тела Q будем искать следующим образом. Разобьем основание D произвольными кривыми на n частичных областей D_i , не имеющих общих внутренних точек. Тогда все тело Q можно представить из n цилиндрических столбиков $Q_i, i = \overline{1, n}$, основаниями которых являются частичные области D_i . В каждой частичной области выберем произвольно $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Если приближенно принять каждый цилиндрический столбик за прямой цилиндр высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$, то объем ΔV_i отдельного столбика Q_i будет приближенно равен произведению $f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь частичной области D_i .



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 12 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

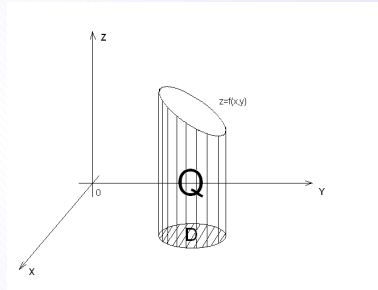


Рис. 1.1

В таком случае объем тела Q приближенно можно представить в виде суммы:

$$V \simeq \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.1)$$

Для повышения точности соотношения (1.1) следует, очевидно, уменьшать размеры частичных областей D_i , увеличивая их количество. За точное значение объема V целесообразно принять предел суммы в (1.1) при стремлении наибольшего диаметра d среди диаметров множеств $D_i, i = \overline{1, n}$ к нулю, т.е.

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.2)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 13 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

1.2 Определение двойного интеграла

Для определения двойного интеграла нам понадобится понятие квадратуемой фигуры. Напомним, что **плоскую фигуру** называют квадратуемой, если точная верхняя грань S_* множества площадей всех включенных в эту фигуру многоугольников равна точной нижней грани S^*

множества площадей всех многоугольников, включающих в себя эту фигуру, причем число $S = S^* = S_*$ называют площадью данной **плоской фигуры**. Для квадратуемости замкнутой области D необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие два многоугольника D_1 и D_2 с площадями S_1 и S_2 соответственно, что $D_1 \subset D \subset D_2$ и $S_2 - S_1 < \varepsilon$.

Всякое множество на плоскости (в частности, кривую) будем называть **множеством меры (площади) нуль**, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы замкнутая область была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль.*

Известно, что всякая **плоская спрямляемая кривая** имеет площадь нуль.

В дальнейшем будем рассматривать только квадратуемые замкнутые области D .



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 14 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Разбиением P Квадрируемой замкнутой области D называют конечное множество $P = \{D_1, \dots, D_n\}$ квадрируемых **частичных областей** разбиением D_i , которые обладают следующими свойствами:

1. никакие две частичные области не имеют общих внутренних точек;
2. объединение частичных областей составляет замкнутую область D , т.е.

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Наибольший из диаметров частичных областей разбиения P называют **диаметром** $d(P)$ этого разбиения. Таким образом, $d(P) = \max_{i=1, \dots, n} d_i$, где d_i — диаметр частичной области D_i . В силу свойства аддитивности площадь S квадрируемой замкнутой области D равна сумме площадей ΔS_i частичных областей любого разбиения D , т.е. $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Пусть в области D на плоскости xOy определена ограниченная функция $f(x, y)$. Для некоторого разбиения $P = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ замкнутой области D составим сумму

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.3)$$

где (ξ_i, η_i) — выбранная произвольным образом точка в частичной области D_i , а ΔS_i — площадь D_i . Сумму $\sigma(P)$ вида (1.3) назовем инте-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 15 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

гральной суммой функции $f(x, y)$ в замкнутой области D . Эта сумма определена разбиением P и выбором точек (ξ_i, η_i) .

Функцию $f(x, y)$ называют **интегрируемой функцией** в D , если существует конечный предел I ее интегральных сумм $\sigma(P)$, не зависящий от выбора разбиения и точек (ξ_i, η_i) в частичных областях, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $P = \{D_1, \dots, D_n$ замкнутой области D с диаметром $d(P) < \delta$ и любого выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ для соответствующей интегральной суммы $\sigma(P)$ выполняется неравенство $|\sigma(P) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по замкнутой области D и обозначают

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

а D называют **областью интегрирования**.

Итак, можно записать

$$I = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(P) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

ИЛИ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.4)$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 16 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

1.3 Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Теорема 1.2. (необходимое условие интегрируемости). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в замкнутой области D , то она ограничена в D .



Предположим противное: пусть $f(x, y)$ интегрируема, но не ограничена в D . Согласно определению интегрируемости, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения P замкнутой области D с диаметром разбиения $d(P) < \delta$ при любом выборе точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ выполнено неравенство $|\sigma(P) - I| < \varepsilon$, где I - значение двойного интеграла функции $f(x, y)$ по области интегрирования D .

Выберем одно из разбиений $P = \{D_1, \dots, D_n\}$ с диаметром $d(P) < \delta$ и рассмотрим соответствующую этому разбиению интегральную сумму с некоторым набором точек $(\xi_j, \eta_j) \in D_j$. Так как по предположению функция $f(x, y)$ не ограничена в замкнутой области D , то она не ограничена по крайней мере в одной из частичных областей D_j . За счет выбора $(\xi_j, \eta_j) \in D_j$ слагаемое $f(\xi_j, \eta_j) \Delta S_j$ можно сделать сколь угодно большим по абсолютной величине. Тогда и всю интегральную сумму можно сделать по модулю сколь угодно большой, но это противоречит неравенству $|\sigma(P) - I| < \varepsilon$. Полученное противоречие опровергает пред-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 17 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

положение о неограниченности функции f и доказывает утверждение теоремы. ■

Замечание 1.1. *Ограниченность функции в замкнутой области является лишь необходимым условием ее интегрируемости в этой области, но недостаточным.*

Покажем это на примере.

Рассмотрим функцию

$$X(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ являются рациональными числами,} \\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ иррациональные числа,} \end{cases}$$

определенную на множестве

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Для такой функции не существует предела интегральных сумм. Действительно, если для любого разбиения $P = \{D_1, \dots, D_n\}$ квадрата D выбирать в частичных областях D_i точки (ξ_i, η_i) с рациональными значениями координат, то любая интегральная сумма примет вид

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^n X(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i = S_D,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 18 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 19 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

где S_D - площадь квадрата D . Но тогда при стремлении диаметра разбиения к нулю предельное значение таких интегральных сумм равно S_D . Если же в частичных областях D_i выбирать точки (ξ_i, η_i) с иррациональными значениями координат, то любая интегральная сумма будет равна нулю, поэтому и предельное значение таких интегральных сумм равно нулю. Это говорит о том, что множество всех интегральных сумм не имеет предела при стремлении диаметра разбиения к нулю, а функция $X(x, y)$ не является интегрируемой в квадрате D .

Для того, чтобы установить условия, при которых функция $f(x, y)$ интегрируема в квадратуемой замкнутой области $D \subset R^2$, введем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу. Если $P = \{D_1, \dots, D_n\}$ - некоторое разбиение D на области D_i с площадями $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$, а m_i и M_i - точные нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в D_i , то нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x, y)$, соответствующие разбиению P , определяются равенствами

$$s(P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i. \tag{1.5}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i.$$

Для сумм Дарбу, как и в случае действительной функции одного действительного переменного, верны следующие свойства.

1. Для любого разбиения P интегральная сумма $\sigma(P)$ при любом выборе точек (ξ_i, η_i) в частичных областях удовлетворяет неравенствам

$$s(P) \leq \sigma(P) \leq S(P). \quad (1.6)$$

2. Для заданного разбиения P области D верхняя $S(P)$ и нижняя $s(P)$ суммы Дарбу являются соответственно точной верхней и точной нижней гранями множества интегральных сумм, отвечающих разбиению P и произвольном выборе точек (ξ_i, η_i) в частичных областях, т.е.

$$s(P) = \inf_{(\xi_i, \eta_i) \in D_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.7)$$

$$S(P) = \sup_{(\xi_i, \eta_i) \in D_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

3. Для любых разбиений P' и P'' области D верны неравенства

$$s(P'') \leq S(P'), \quad s(P') \leq S(P''),$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 20 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

т.е. для данной функции $f(x, y)$ любая верхняя сумма Дарбу не меньше любой нижней суммы Дарбу.

Из последнего свойства следует, что множество всех верхних сумм Дарбу данной функции имеет точную нижнюю грань I^* , а множество всех нижних сумм Дарбу - точную верхнюю грань I_* , т.е.

$$I^* = \inf S(P), I_* = \sup s(P).$$

Отметим, что для любого разбиения P

$$s(P) \leq I_* \leq I^* \leq S(P). \quad (1.8)$$

Числа I_* и I^* называют соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции $f(x, y)$ в D .

Рассмотренные свойства сумм Дарбу позволяют установить критерий интегрируемости функций $f(x, y)$ в области D .

Теорема 1.3. *Для того, чтобы ограниченная в квадратуемой замкнутой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D , необходимо и достаточно, чтобы в D совпадали ее нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу, т.е.*

$$I_* = I^*. \quad (1.9)$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 21 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Следствие 1.1. Для того, чтобы ограниченная в квадратуемой области D функция $f(x, y)$ была интегрируема в D , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} (S(P) - s(P)) = 0 \quad (1.10)$$

или

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i = 0, \quad (1.11)$$

где $\omega_i = M_i - m_i$, $i = \overline{1, n}$ - колебание функции $f(x, y)$ в областях D_i разбиения P , а ΔS_i - площади частичных областей.

1.4 Классы интегрируемых функций

Теорема 1.4. Всякая непрерывная в квадратуемой замкнутой области $D \subset R^2$ функция $f(x, y)$ интегрируема в D .



Поскольку область D является компактом, а функция $f(x, y)$ непрерывная в D , то она ограничена и равномерно непрерывна в D . Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $P = D_1, \dots, D_n$ с диаметром $d(P) < \delta$ колебание функции



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 22 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$f(x,y)$ ω_i в каждой частичной области D_1 удовлетворяет неравенству $\omega_i < \frac{\varepsilon}{S_n}, i = 1, n$, где S - площадь D . Для каждого разбиения имеем

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \frac{\varepsilon}{S} * S = \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{d(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i = 0$$

Согласно следствию 1.1 функция $f(x,y)$ интегрируема в D . ■

Приведем без доказательства теорему, имеющее важное значение при решении задач.

Теорема 1.5. *Если функция $f(x,y)$ ограничена в квадратуемой замкнутой области D и непрерывна в D всюду, кроме точек некоторого множества площади (меры) нуль, то эта функция интегрируема в D .*

15 Свойства двойного интеграла

Поскольку все переменные свойства доказываются так же, как и соответствующие свойства определенного интеграла, то эти свойства не будут обосновываться подробными доказательствами.

Свойство 1.1. *Если D имеет площадь S , то существует двойной интеграл $\iint_D dx dy = S$.*

$$\blacktriangle \iint_D dx dy = \lim_{d(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \Delta S_i = S, \text{ где } 1 \equiv f(x,y) \text{ в области } D. \blacksquare$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 23 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример 1.1. Найти среднее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

в замкнутом круге

$$D = \{(x; y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

и точку $(x_0, y_0) \in D$, в которой достигается это значение.

Решение. Графиком функции $z = f(x, y)$ в D является полусфера радиуса R с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (рис. 1.2)

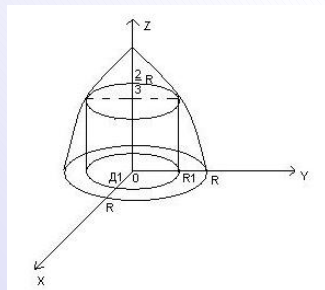


Рис. 1.2



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 24 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Двойной интеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

равен объему V полушара радиуса R , т.е $I = \frac{2\pi R^3}{3}$, а площадь S области интегрирования D равно площади круга того же радиуса, т.е $S = \pi R^2$. Согласно равенству

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S,$$

где S - площадь области интегрирования, имеем

$$M = f(x_0, y_0) = \frac{V}{S} = \frac{2R}{3}.$$

Свойство 1.2. (Линейность двойного интеграла). Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D , то их линейная комбинация $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ - произвольные константы, также интегрируема в D , причем

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (1.12)$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 25 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Свойство 1.3. Если $f(x, y) \geq 0$ и $f(x, y)$ - интегрируема в области D , то $\iint_D dx dy \geq 0$.

Свойство 1.4. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ - интегрируемы в области D и $f(x, y) \geq g(x, y)$, $(x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Свойство 1.5. (Об оценке двойного интеграла по модулю). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D , то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в D , причем

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (1.13)$$

Свойство 1.6. (Об оценке двойного интеграла). Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в D и удовлетворяют в D неравенствам

$$m \leq f(x, y) \leq M, g(x, y) \geq 0.$$

Тогда

$$m \iint_D g(x, y) dx dy \leq \iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy \leq M \iint_D g(x, y) dx dy \quad (1.14)$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 26 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Замечание 1.2. Если в свойстве b положить $g(x, y) \equiv 1$, то двойное неравенство (1.13) примет вид

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS, \quad (1.15)$$

где S - площадь замкнутой области D .

Свойство 1.7. (О среднем значении для двойного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадратуемой замкнутой области D , то в D существует такая точка (x_0, y_0) , что

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0)S, \quad (1.16)$$

где S - площадь области D .

1.6 Вычисление двойного интеграла

Теорема 1.6. Пусть:

1. Функция $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике $P = f(x, y): \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

2. интеграл $\int_c^d f(x, y) dy$ существует для любого $x \in [a, b]$.



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 27 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Тогда $\int_c^d f(x, y) dy$ есть интегрируемая функция x на отрезке $[a, b]$ и справедлива следующая формула:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1.17)$$

Доказательство

Возьмем произвольные разбиения отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ и $y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$. Если p_1, \dots, p_n и p'_1, \dots, p'_m соответствующие промежутки, образующие разбиения $[a, b]$ и $[c, d]$, то $P = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m P_{ij}$, где $P_{ij} = \{x, y) : x \in p_i, y \in p_j\}$.

Положим

$$M_{ij} = \sup_{(x, y) \in P_{ij}} F(x), \quad m_{ij} = \inf_{(x, y) \in P_{ij}} F(x).$$

Так как $\int_c^d f(x, y) dy$ существует для любого $x \in [a, b]$, то при $x \in p_i$ справедливы неравенства

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j. \text{ где } \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Суммируя эти неравенства по индексу j , получим



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание

Страница 28 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j. \quad (1.18)$$

Введем следующие обозначения:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad M_i = \sup_{x \in p_j} F(x), \quad m_i = \inf_{x \in p_i} F(x)$$

Тогда из (1.18) следует, что

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq m_i \leq M_i \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j. \quad (1.19)$$

$$0 \leq M_i - m_i \leq \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) \Delta y_j. \quad (1.20)$$

Умножая неравенство (1.20) на Δx_i и суммируя по i от 1 до n , получаем $0 \leq (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) m(p_{ij}) = S_T(f, P) - x_T(f, P) \rightarrow 0$,

так как функция $f(x, y)$ интегрируема на промежутке P . Но тогда и $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \rightarrow 0$ при $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ и, следовательно, в силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, т.е. повторный интеграл



Кафедра

математического
анализа и диффе-

ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 29 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy$$

существует. Покажем, что он равен двойному интегралу.

Интегрируя неравенство (1.18), получаем

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x, y)dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Проведем суммирование по i и по j от 1 до n . Получаем

$$s_T \leq \int_a^b F(x)dx \leq S_T.$$

Так как $s_T \leq \iint_P f(x, y)dx dy \leq S_T$, а разность $S_T - s_T$ может быть сделана сколь угодно малой, то

$$\iint_P f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Следствие 1.2. Пусть существует $\iint_P f(x, y)dx dy$, при каждом $x \in$

$[a, b]$ существует $\int_c^d f(x, y)dx dy$ и при каждом $y \in [c, d]$ существует

$\int_a^b f(x, y)dx$. Тогда справедлива формула



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 30 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.21)$$

Следствие 1.3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P . Тогда выполнены все условия предыдущего следствия и справедлива формула (1.21)

Пример 1.2. Для вычисления двойного интеграла от функции

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

по области интегрирования $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 2], y \in [1, 2]\}$ целесообразно применить формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \int_1^2 dy \int_0^2 \frac{x dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_0^2 dy = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+y^2}} \right) dy = \ln \left(\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{5+y^2}} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{2+\sqrt{5}}{5} - \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} = \ln \frac{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{6})}{5(1+\sqrt{2})}. \end{aligned}$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 31 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

⏪ ⏩

Страница 32 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Замечание 1.3. Рассмотрим двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику D . Предположим, что y подынтегральной функции переменные разделяются, т. е. она имеет вид

$$f(x, y) = h(x)g(y), \quad (x; y) \in D.$$

Тогда при сведении двойного двойного интеграла к повторному мы фактически приходим к произведению двух определенных интегралов:

$$\iint_D h(x)g(y)dx dy = \int_a^b h(x) \int_c^d g(y)dy dx = \int_c^d g(y)dy \int_a^b h(x)dx:$$

Этот эффект вызван тем обстоятельством, что в повторном интеграле внутренний определенный интеграл $\int_c^d g(y)dy$ не зависит от x и, как числовой множитель, может быть вынесен за пределы внешнего интеграла.

Пример 1.3. Для двойного интеграла от функции $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}$ по прямоугольнику $D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ имеем

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_1^3 x^2 dx \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 \arcsin y \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{13\pi}{6}.$$

1.7 Сведение двойного интеграла по элементарной области к повторному

Пусть $\phi(x)$ и $\psi(x)$ - непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции и $\phi(x) < \psi(x)$ при $x \in (a, b)$. Область (рисунок 1.3)

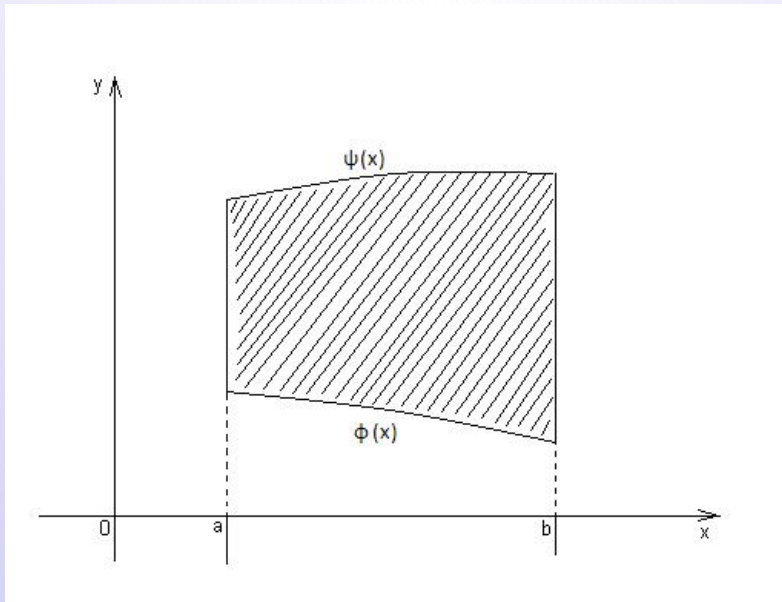


Рис. 1.3



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 33 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\Omega = \{(x, y) : \phi(x) < y < \psi(x), a < x < b\} \quad (1.22)$$

будем называть элементарной относительно оси y . Так как граница $\partial\Omega$ состоит из графиков непрерывных функций, то Ω - измеримая по Жордану область.

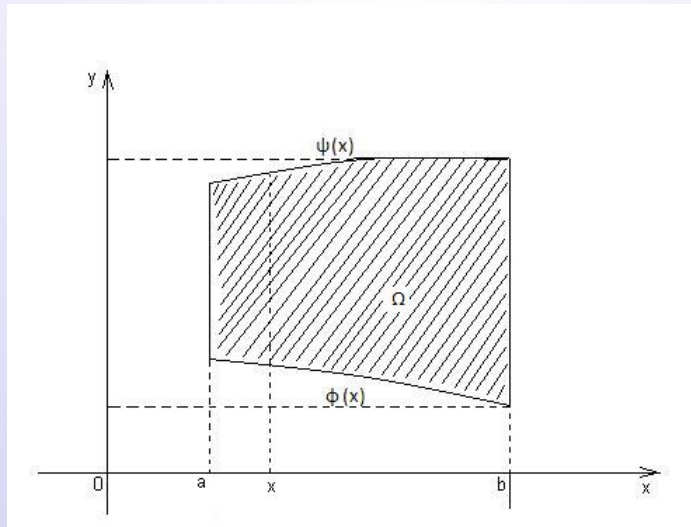


Рис. 1.4



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 34 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Теорема 1.7. Пусть Ω - элементарная относительно оси y область, функция $f(x, y)$ интегрируема на $\bar{\Omega}$, где $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, и при любом $x \in [a, b]$ существует $\int_{\phi(x)}^{(x)} f(x, y)dy$. Тогда справедлива следующая формула

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{(x)} f(x, y) dy. \quad (1.23)$$

Доказательство

Пусть

$$c = \min_{x \in [a, b]} \phi(x), \quad d = \max_{x \in [a, b]} \psi(x).$$

Область Ω (рисунок 1.4) лежит в прямоугольнике $\Pi = [a, b] \times [c, d]$.

Положим

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus \Omega. \end{cases} \quad (1.24)$$

Так как функция интегрируема на $\bar{\Omega}$ и на множестве $\Pi \setminus \bar{\Omega}$, то существует двойной интеграл $\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy$.

Аналогично из существования при любом $x \in [a, b]$ интегралов



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 35 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\int_c^{\phi(x)} F(x, y) dy, \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy \text{ и } \int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy$$

следует, что при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_c^d F(x, y) dy$

Таким образом выполнены все условия теоремы (1.6). Поэтому

$$\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Подставляя сюда выражение (1.24) для функции $F(x, y)$ получаем формулу (1.23). ■

Следствие 1.4. Для функции $f(x, y)$, непрерывной на $\bar{\Omega}$, справедлива формула (1.23).

Пример 1.4. Вычислить интеграл $\iint_G x^2 dx dy$ по области $G = \{(x, y) : -1 < x < 1, x^2 < y < 1\}$, изображенной на рисунке (1.5 а)).



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 36 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Применяя формулу (1.23), получаем $\iint_G x^2 dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 dy =$

$$= \int_{-1}^1 x^2(1 - x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 - x^4 dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}.$$



Если область интегрирования не является элементарной относительно оси y , то иногда удастся разбить ее на конечное число областей, элементарных относительно оси y .

Пример 1.5. Пусть G есть область, ограниченная окружностями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 - 2x + y^2 = 0$ (1.5 б). Свести интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$ к повторному.

△ Область G осью y разбивается на три элементарных относительно оси y области. Поэтому $\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy +$

$$+ \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy. \blacksquare$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 37 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 38 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

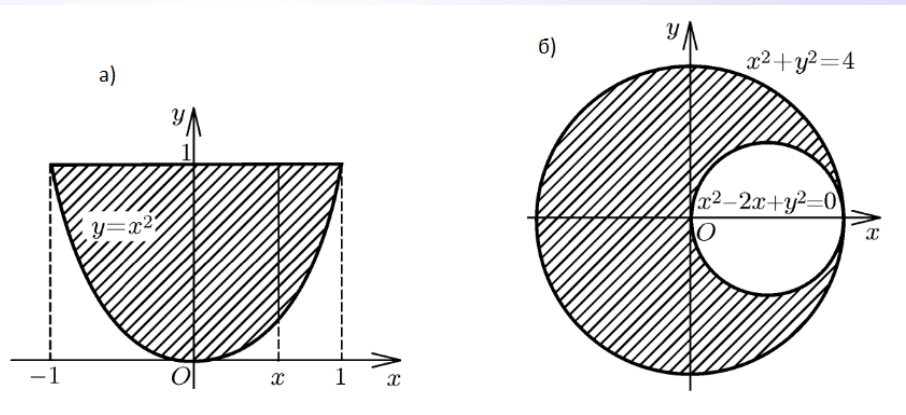


Рис. 1.5

Можно, по аналогии с областью, элементарной относительно оси x определить область, элементарную относительно оси y . Пусть функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на $[c, d]$ и $\alpha(y) < \beta(y)$ при $c < y < d$.

Область

$$\Omega = \{(x, y) : \alpha(y) < x < \beta(y), c < y < d\}$$

будем называть элементарной относительно оси x (1.6 а)).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замыкании области Ω , элементарной относительно оси x , то аналогично (1.23) получаем



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 39 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

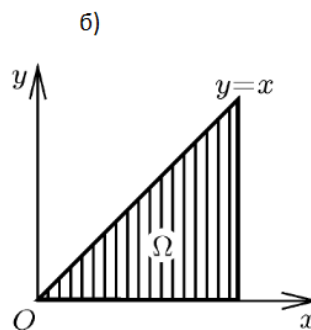
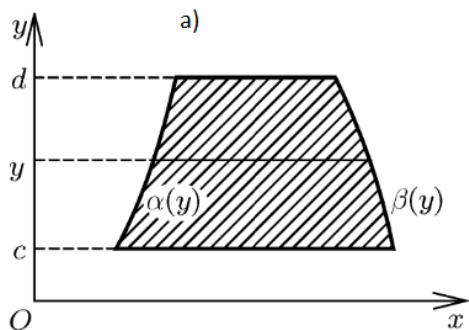


Рис. 1.6

формулу:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Если область Ω элементарна и относительно оси x , и относительно оси y , то двойной интеграл по этой области от непрерывной на Ω функции $f(x, y)$ может быть выражен двумя способами через повторные интеграла-

ЛЫ:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (1.25)$$

Пример 1.6. Вычислить повторный интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

△ Интеграл I равен двойному интегралу от функции $f(x, y) = \frac{\sin x}{x}$ по области Ω , изображенной на рис. (1.6 б)). Эта область элементарна и относительно оси x , и относительно оси y .

Пользуясь формулой (1.25), получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1.7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy.$$



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 40 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

△ Этому повторному интегралу соответствует двойной интеграл с областью интегрирования

$$D = (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 3x^2 \leq y \leq 12x.$$

Замкнутая область D ограничена прямой $y = 12x$ и параболой, заданной уравнением $y = 3x^2$ (рис. 1.7). Прямая и парабола пересекаются в начале координат и в точке $A(4; 48)$.

Переменная y изменяется в пределах отрезка $[0; 48]$, а $\frac{y}{12} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{3}}$

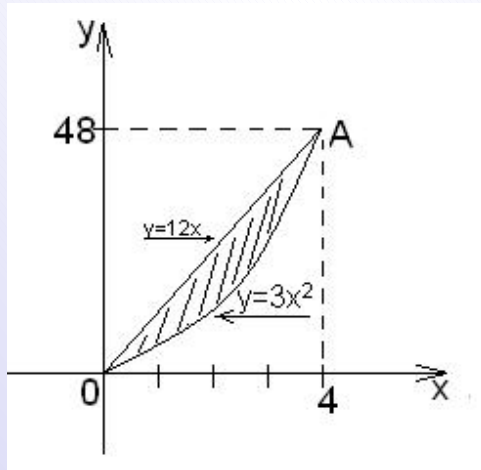


Рис. 1.7



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 41 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Таким образом $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy = \int_0^4 8 dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) dx$. ■

1.8 Криволинейные координаты на плоскости

Пусть в области $G^* \subset R^2$ заданы функции

$$x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in G \quad (1.26)$$

осуществляющие отображение области G^* на области $D^* \subset R^2$. Предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям.

1. Отображение (1.26) является биекцией (т.е. взаимно однозначно) и имеет обратное отображение

$$u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in D^*. \quad (1.27)$$

2. Функции $x(u, v), y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в G^* , причем якобиан отображения (1.26)

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

отличен от нуля в каждой точке $(u, v) \in G$.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 42 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 43 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Второе условие означает, что якобиан отображения в силу непрерывности частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в области G^* сохраняет в G^* знак. По теореме об обратной функции обратное отображение (1.27) также непрерывно дифференцируемо и имеет ненулевой якобиан.

Рассмотрим замкнутую область $G \subset G^*$ и ее образ $D \subset D^*$ при отображении (1.26). В силу непрерывности прямого (1.26) и обратного (1.27) отображений множество D замкнуто. Кроме того, между внутренностью $intG$ множества G и внутренностью $intD$ множества D отображение (1.26) устанавливает взаимно однозначное соответствие. Множество $intD$, как непрерывный образ линейного связного множества $intG$, линейно связно, т. е. $intD$ - область. Каждая точка множества D является предельной точкой его внутренности $intD$. Действительно, пусть $(x_0; y_0) \in D$. Выберем произвольную окрестность $V \subset D^*$ этой точки. Прообраз V при отображении (1.26) - это окрестность $U \subset G^*$ точки $(u_0; v_0) \in G$, являющейся прообразом точки $(x_0; y_0) \in D$. Так как G - замкнутая область, в окрестности U есть внутренние точки множества G . Им соответствуют точки в V , внутренние для множества D .

Все сказанное означает, что множество D - замкнутая область в D^* при отображении (1.27) есть замкнутая область в G^* . Таким образом, отображение (1.26) устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми областями в G^* и замкнутыми областями в D^* . Оказывается, что если отображение (1.26) удовлетворяет условиям 1 и 2, то образ

любой квадратируемой замкнутой области также является квадратируемой замкнутой областью.

Непрерывно дифференцируемое отображение также устанавливает взаимно однозначное соответствие между гладкими (кусочно гладкими) кривыми в G^* и гладкими (кусочно гладкими) кривыми в D^* . Действительно, пусть кривая Γ в области G^* задана параметрическими уравнениями

$$u = u(t), v = v(t), t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда ее образ в области D^* при отображении (1.26) будет описываться параметрическими уравнениями

$$x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), t \in [\alpha, \beta].$$

Если кривая Γ гладкая, то функции $u(t)$ и $v(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми. В силу непрерывной дифференцируемости отображения (1.26) и цепного правила заключаем, что сложные функции $x = x(u(t), v(t))$, и $y = y(u(t), v(t))$ непрерывно дифференцируемы, а их производные можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (1.29)$$

Для гладкой кривой Γ производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ одновременно не обращаются в нуль. Из этого следует, что и производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ одновременно



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 44 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 45 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

не обращаются в нуль. Действительно, равенства (1.29) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ с правыми частями $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Определитель этой системы есть якобиан отображения (1.26) и не равен нулю. Следовательно, она имеет единственное решение при любых правых частях. Значит, нулевые значения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ могут соответствовать только нулевым значениям $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$. Иначе говоря, если $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ в некоторой точке одновременно обращаются в нуль, то и $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ в некоторой точке кривой Γ одновременно обращаются в нуль.

Кусочно гладкую кривую можно представить как объединение конечного числа гладких кривых. Ясно, что образом кусочно гладкой кривой в G^* при отображении (1.26) является кусочно гладкая кривая в D^* .

Поскольку отображение (1.27), обратное к отображению (1.26), также непрерывно дифференцируемо, любой гладкой (кусочно гладкой) кривой в D^* соответствует гладкая (кусочно гладкая) кривая в G^* .

Прямой $u = u_0$ в области G^* соответствует гладкая кривая L в области D^* (рис. 1.8), задаваемая параметрическими уравнениями

$$x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), (u_0, v) \in G. \quad (1.30)$$

А прямой $u = u_0$ отвечает в области D^* кривая l , определяемая уравнениями

$$x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), (u, v_0) \in G. \quad (1.31)$$

Из взаимной однозначности отображения (1.26) следует, что через каждую точку $(x; y) \in D^*$ проходят единственная линия вида (1.30)



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 46 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

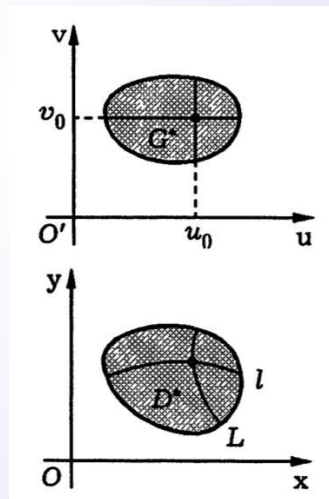


Рис. 1.8

и единственная линия вида (1.31), отвечающие некоторым значениям $u = u_0$ и $v = v_0$. Следовательно, значения u и v можно рассматривать как координаты точки $(x; y)$ области D^* . Так как линии (1.30), (1.31), отвечающие этим координатам, в общем случае являются кривыми, то значения u и v называют **криволинейными координатами в плоской области D** .

1.9 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть G^* и D^* - области в R^2 и отображение (1.26), переводящее область G^* в область D^* , удовлетворяет условиям, оговоренным в . Рассмотрим *квадрируемую замкнутую область* $D \subset D^*$ и двойной интеграл от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D^* . Задача о замене переменных в двойном интеграле состоит в том, чтобы преобразовать двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в двойной интеграл по области G , переходя в подынтегральном выражении от переменных x, y к переменным u, v .

Теорема 1.8. Пусть отображение

$$x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in G^*, \quad (1.32)$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset R^2$ на область $D^* \subset R^2$, причем *якобиан* $J(u, v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Тогда площадь S квадрируемой замкнутой области $D \subset D^*$ может быть выражена двойным интегралом по ее прообразу $G \subset G^*$:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_G |J(u, v)| du dv. \quad (1.33)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 47 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Страница 48 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

◀ Дадим доказательство этой теоремы не вполне строгое, но зато прозрачное с геометрической точки зрения.

Рассмотрим в координатной плоскости uOv прямоугольник $N_1N_2N_3N_4$ с малыми сторонами Δu и Δv , параллельными координатным осям Ou и Ov (рис. 1.9). Этот прямоугольник, имеющий площадь $\Delta\sigma = \Delta u\Delta v$, при отображении (1.32) переходит в криволинейный четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ в D^* . Вершины прямоугольника $N_1N_2N_3N_4$, которые можно записать в виде

$$N_1(u; v), N_2(u; v + \Delta v), N_3(u + \Delta u; v + \Delta v), N_4(u + \Delta u; v),$$

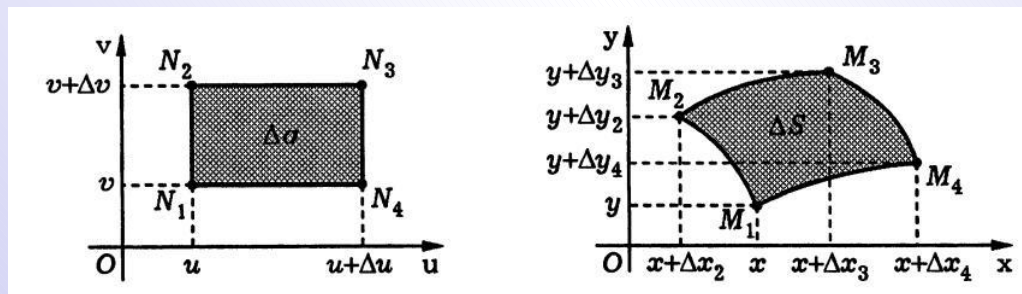


Рис. 1.9

при отображении (1.33) преобразуются в точки

$$M_1(x, y), M_i(x + \Delta x_i; y + \Delta y_i), i = 2, 3, 4. \quad (1.34)$$

Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с Δu и Δv , приближенно получаем

$$\Delta x \approx dx = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \Delta y \approx dy = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v, \quad (1.35)$$

где все производные вычислены в точке $(u, v) \in G^*$.

Точки M_2 и M_4 лежат на линиях $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответственно, и поэтому для точки M_2 имеем $\Delta u = 0$, а для точки M_4 — $\Delta v = 0$. Учитывая (1.35), записываем

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &\approx \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \Delta y_2 \approx \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; \\ \Delta x_3 &\approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \Delta y_3 \approx \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; \\ \Delta x_4 &\approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \Delta y_4 \approx \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u. \end{aligned}$$

Используя (1.34), заключаем, что

$$\overrightarrow{M_1 M_4} = \{\Delta x_4; \Delta y_4\} \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\},$$

$$\overrightarrow{M_2 M_3} = \{\Delta x_3 - \Delta x_2; \Delta y_3 - \Delta y_2\}; \approx \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\},$$

где все производные вычислены в точке (u, v) . Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{M_1 M_4}$ и $\overrightarrow{M_2 M_3}$ коллинеарны и равны по длине. Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка по сравнению



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 49 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

с Δu и Δv можно четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ приближенно считать параллелограммом, а его площадь считать равной длине векторного произведения векторов $\overrightarrow{M_1M_4}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Учитывая значения координат векторов в системе координат Oxy , находим

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx |\overrightarrow{M_1M_4} \times \overrightarrow{M_1M_2}| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v = |J(u, v)| \Delta u \Delta v. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Рассматривая *разбиение* замкнутой области G прямыми, параллельными координатным осям Ou и Ov , на прямоугольники с малыми сторонами и пренебрегая "неправильными" элементами у ее границы ∂G , в результате отображения (1.32) получаем разбиение области $D \subset D^*$ на криволинейные четырехугольники рассмотренного вида. Суммируя полученные выражения для площадей этих четырехугольников, приходим к (1.33). ►

Замечание 1.4. Выражение

$$\Delta S = |J(u, v)| \Delta u \Delta v, \quad (1.37)$$

входящее в (1.36), обычно называют *элементом площади в криволинейных координатах*. Если произведение $\Delta u \Delta v$ рассматривать как



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 50 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

элемент $\Delta\sigma$ площади в координатах u и v , то (1.37) можно переписать в виде $\Delta S = |J(u, v)| \Delta\sigma$, откуда $|J(u, v)| = \Delta S / \Delta\sigma$, т.е. абсолютная величина якобиана отображения играет роль коэффициента растяжения элемента площади в окрестности точки (u, v) при заданном отображении (1.32).

Замечание 1.5. В теореме 1.8 предполагалось, что отображение (1.26) области G^* на область D^* является взаимно однозначным. Однако выражение (1.33) для площади в криволинейных координатах остается в силе и в том случае, если это условие нарушено в отдельных точках или вдоль отдельных линий. Рассмотрим в качестве примера отображение прямоугольника $G = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ на круг при помощи отображения

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \quad (1.38)$$

которое соответствует введению на плоскости xOy полярных координат. Это отображение не удовлетворяет условиям теоремы 1.8, так как в любой области, содержащей G , отображение (1.38) не является взаимно однозначным. Тем не менее в данном случае формула (1.33) верна. Покажем это.

Пусть область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ задана неравенствами $0 < r < a + \delta, 0 < \varphi < 2\pi$, а замкнутая область G'' - неравенствами $\delta \leq r \leq a, \delta \leq \varphi \leq 2\pi - \delta$. Тогда $G' \subset G^*$, при отображении (1.38) область G^* переходит в область D^* , представляющую собой круг радиуса a с разрезом по радиусу,



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 51 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

а замкнутая область G' - в замкнутую область D' , получающуюся из замкнутого круга радиуса a с центром в начале координат выбрасыванием круга радиуса $\delta < a$ с тем же центром и сектора с центральным углом 2δ (рис. 1.10). На основании теоремы 1.8 для площади S_δ замкнутой области D' , можно записать формулу (1.33). Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, заключаем, что формула (1.33) остается верной и для прямоугольника G .

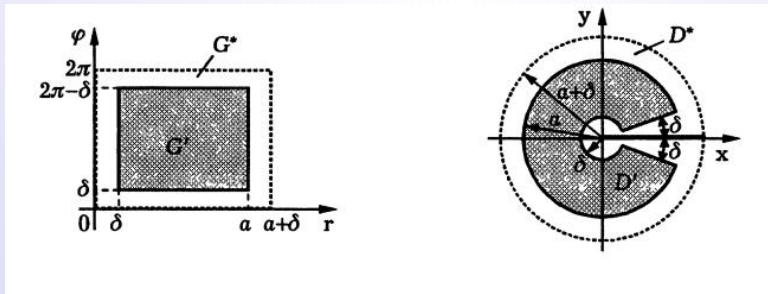


Рис. 1.10:

Пример 1.8. Вычислим якобиан отображения $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, соответствующего полярным координатам на плоскости:

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 52 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Якобиан этого отображения отличен от нуля всюду, кроме полюса полярной системы координат ($r = 0$), совпадающего с началом прямоугольной системы координат ($x = y = 0$). Следовательно, в соответствии с (1.37), элемент площади в полярных координатах равен $\Delta S = r \Delta r \Delta \varphi$.

Перейдем теперь к выводу общей формулы замены переменных в двойном интеграле, а именно докажем следующее утверждение.

Теорема 1.9. Пусть отображение (1.32) взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset R^2$, причем якобиан $J(u, v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Если $D \subset D^*$ - квадратуемая замкнутая область и $f(x, y)$ - функция, непрерывная в D или же ограниченная в D и непрерывная в D всюду, кроме некоторого множества площади нуль, то верна следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (1.39)$$

◀ Рассмотрим разбиение замкнутой области G на n частичных областей G_i с площадями $\Delta \sigma_i, i = \overline{1, n}$. Образы D_i частичных областей $G_i, i = \overline{1, n}$, при отображении (1.32) образуют разбиение замкнутой области D . В каждой частичной области D_i , площадь которой обозначим



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 53 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

через ΔS_i , выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (1.40)$$

для функции $f(x, y)$, отвечающую двойному интегралу в левой части (1.39).

Для каждой из частичных областей в соответствии с (1.33) имеем

$$\Delta S_i = \iint_{G_i} |J(u, v)| du dv, i = \overline{1, n}.$$

Согласно свойству 1.7 о среднем значении для двойного интеграла, в частичной области G_i найдется точка $(u_i^*, v_i^*) \in G_i$, для которой справедливо равенство $\Delta S_i = |J(u_i^*, v_i^*)| \Delta \sigma_i$. Так как в (1.40) выбор точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i, i = \overline{1, n}$, произволен, то можно положить $\xi_i = x(u_i^*, v_i^*)$ и $\eta_i = y(u_i^*, v_i^*)$. Тогда (1.40) примет вид

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*)) |J(u_i^*, v_i^*)| \Delta \sigma_i, \quad (1.41)$$

а это есть интегральная сумма, отвечающая двойному интегралу в правой части (1.39). Этот интеграл существует, поскольку подынтегральная функция ограничена в G и непрерывна всюду, кроме, быть может, множества площади нуль. Если теперь диаметр разбиения замкнутой



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 54 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

области G устремить к нулю, то в силу равномерной непрерывности отображения $x = x(u, v), y = y(u, v)$ в G диаметр разбиения замкнутой области D также будет стремиться к нулю. При этом (1.41) перейдет в (1.39). ►

Замечание 1.6. *Замену переменных в двойном интеграле (как и в определенном интеграле) применяют для приведения его к виду, более удобному для вычисления. Однако в случае двойного интеграла, используя замену переменных, стремятся упростить не только подынтегральную функцию, но и вид области интегрирования, причем вторая цель зачастую более важна, чем первая. Упрощение вида области интегрирования облегчает расстановку пределов в двойном интеграле и вычисление повторного интеграла.*

В результате замены переменных область интегрирования двойного интеграла изменяется. В общем случае необходимо построить новую область интегрирования и в ней провести расстановку пределов интегрирования. В простейших ситуациях расстановку пределов можно выполнять на эскизе исходной области интегрирования, используя координатные линии криволинейной системы координат.

Пример 1.9. *В следующих интегралах перейдем к полярным координатам и расставим в этих координатах пределы интегрирования:*

$$а) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy; \quad б) \int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy; \quad в) \iint_D f(x, y) dx dy,$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 55 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

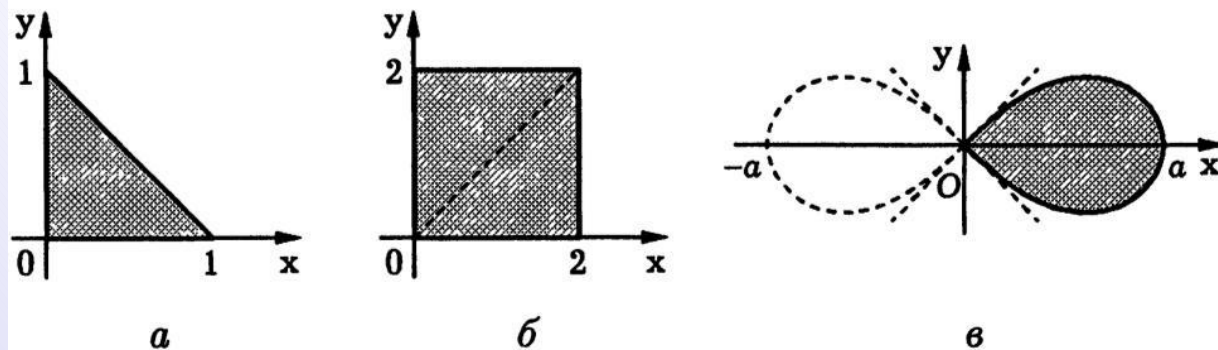


Рис. 1.11

а. Область интегрирования в данном случае описывается неравенствами $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ (1.11, а). Уравнение линии $y = 1 - x$, или $x + y = 1$, в полярных координатах имеет вид $r(\cos \varphi + \sin \varphi) = 1$. Поэтому область интегрирования в полярных координатах r, φ задается неравенствами

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Начало

Содержание



Страница 56 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Исходный интеграл в новых координатах имеет вид

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б. В полярных координатах линии $x=2$ и $y=2$ (1.11, б) описывается уравнениями $r \cos \varphi = 2$ и $r \sin \varphi = 2$. Поскольку область интегрирования в данном случае находится в первом квадрате, полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Но при этом луч $\varphi = \varphi_0$, выходящий из начала координат, пересекает границу области в точке $r = \frac{2}{\cos \varphi_0}$, если $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{4}$. Поэтому при расстановке пределов в полярных координатах область определения следует разделить на две части. Тем самым двойной интеграл будет представлен как сумма двух повторных. учитывая уравнение ограничивающих область линий в полярных координатах, получаем

$$\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr +$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 57 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

в. Лемниската (1.11, в) в полярных координатах имеет уравнение $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Пределы изменения переменного φ находим из условия неотрицательности подкоренного выражения. Это дает неравенство $\cos 2\varphi \geq 0$, откуда получаем два отрезка изменения φ : $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. В соответствии с условиями задачи выбираем первый из них. При этом двойной интеграл преобразуется в повторный:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример 1.10. Вычислим массу m полукруглой пластины диаметра a с центром в точке $C(a/2; 0)$, плотность которой в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат (рис. 1.12).

Пластина занимает замкнутую область D , ограниченную снизу осью Ox , а сверху окружностью $x^2 + y^2 = ax$. Плотность пластины определяется функцией $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, где k - коэффициент пропорциональности. Масса пластины может быть выражена двойным интегралом.

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Форма области интегрирования D и подынтегральной функции подсказывает, что в данном случае удобно вычислять двойной интеграл в по-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 58 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

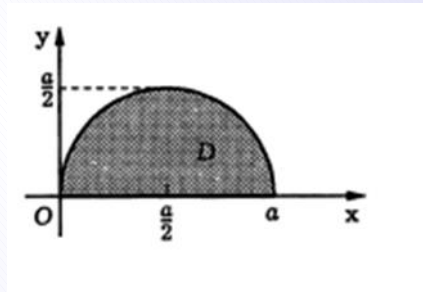


Рис. 1.12

лярных координатах r и φ Полярный угол при движении луча $\varphi = \varphi_0$ по области интегрирования пробегает отрезок $[0, \pi/2]$, а полярный радиус r при фиксированном значении $\varphi \in [0, \pi/2]$ - отрезок от $[0, a \cos \varphi]$. Поэтому

$$m = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr =$$

$$\frac{ka^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{ka^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 59 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$\frac{ka^3}{3} \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{ka^3}{3} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{9} ka^3.$$

Пример 1.11. Найти площадь замкнутой области D , ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ и прямыми $x=y$, $y=0$ (рис. 1.13)

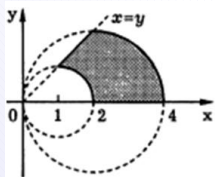


Рис. 1.13

Согласно свойствам двойного интеграла, площадь D равна двойному интегралу от единичной функции с областью интегрирования D . На рисунке 1.13 видно, что область изменения полярного угла φ есть отрезок $[0, \frac{\pi}{4}]$, а изменения полярного радиуса описывается неравенствами $2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi$. Действительно, произвольный луч



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 60 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$\varphi = \varphi_0$, выходящий из начала координат, пересекает границу области при $r = 2 \cos \varphi_0$ (точка входа) и при $r = 4 \cos \varphi_0$ (точка выхода). Найденные соотношения позволяют расставить пределы интегрирования в двойном интеграле в полярной системе координат, и в результате мы получаем

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4}(\pi + 2).
 \end{aligned}$$

Если область интегрирования ограничена эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.42}$$

то для вычисления двойного интеграла удобно использовать замену переменных $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Эта замена переменных соответствует переходу к криволинейным координатам, называемым **обобщенными полярными координатами**. В этих координатах уравнения эллипса имеет вид $r = 1$, а якобиан замены переменных равен



Кафедра
 математического
 анализа и диф-
 ференциальных
 уравнений

Начало

Содержание



Страница 61 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Пример 1.12. Вычислим объем V тела, ограниченного трехосным эллипсоидом (рис. 1.14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

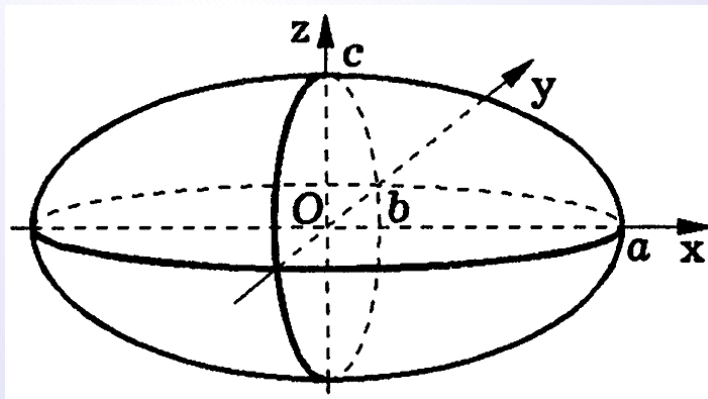


Рис. 1.14:

Из соображений симметрии вытекает, что искомый объем равен удвоенному значению интеграла от функции

$$z(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 62 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

по замкнутой области D , ограниченной эллипсом (1.42). В обобщенных полярных координатах функция $z(x, y)$ преобразуется к виду $z(r, \varphi) = c\sqrt{1 - r^2}$, а области интегрирования D соответствует прямоугольник

$$G = \{(r, \varphi) \in R^2 : r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D z(x, y) dx dy = 2 \iint_G z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) abr dr d\varphi = \\ &= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} dr = -\frac{4\pi}{3} abc(1 - r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

Отметим, что обобщенные полярные координаты можно ввести в более общем виде с помощью отображения

$$\begin{cases} x = ar \cos^m \varphi, \\ y = br \sin^m \varphi, \end{cases} \quad (1.43)$$

, где $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $m \in N$

В этом случае $I(r, \varphi) = mabr(\sin \varphi \cos \varphi)^{m-1}$. При вычислении площади области

$$D' = \{(x; y) \in R^2 : (x/a)^{1/4} + (y/b)^{1/4} = 1, x \in [0, a], y \in [0, b]\}.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 63 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

целесообразно в (1.43) выбрать $m = 8$. Тогда преобразуем D' при отображении (1.43) будет прямоугольник

$$G' = \{(r, \varphi) \in R^2 : r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi/2]\}.$$

Используя (1.33), находим

$$\begin{aligned} S' &= \iint_{D'} dx dy = 8ab \iint_{G'} r(\sin \varphi \cos \varphi)^7 dr d\varphi = \\ &= 8ab \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi \cos \varphi)^7 d\varphi \int_0^1 r dr = 4ab \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^3 \sin^7 \varphi d(\sin \varphi) = \\ &= 4ab \int_0^1 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)t^7 dt = 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{12} - \frac{1}{14} \right) = \frac{ab}{70}. \end{aligned}$$

Пример 1.13. Найдем площадь области D , ограниченной кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ и $y = 2x^2$ (рис.1.15). Положим $xy = u$ и $y/x^2 = v$. Отсюда $x = (u/v)^{1/3}$ и $y = u^{2/3}v^{1/3}$, и в соответствии с (1.28)

$$I(u, v) = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| = \left| \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} \quad -\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-4/3} \right| =$$

$$\left| \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} \quad -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \right| =$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 64 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$= \frac{1}{9}(u^{-1} + 2v^{-1}) = \frac{1}{3v}.$$

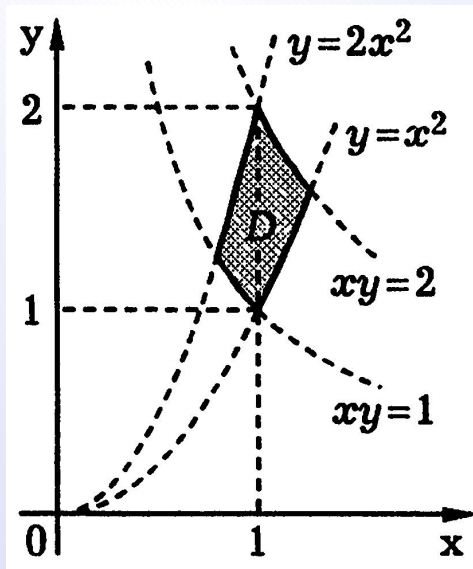


Рис. 1.15

Криволинейному четырехугольнику в плоскости xOy (см. рис.1.15) в криволинейных координатах u, v соответствует квадрат



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 65 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$G = \{(u; v) \in R^2 : u \in [1, 2]\}.$$

Поэтому при помощи (1.33) находим

$$S = \iint_D dx dy = \int_G \frac{du dv}{3v} = \frac{1}{3} \ln v \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{3}.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 66 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 2

Тройные интегралы

Перейдем к рассмотрению интегралов от функций трех переменных, называемых тройными. Эти интегралы, как и **двойные интегралы**, имеют широкое применение при решении различных геометрических, физических и технических задач.

2.1 Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое материальное тело, занимающее в пространстве замкнутую область Q и имеющее неоднородное распределение массы по своему объему. Это распределение в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ характеризуется функцией плотности $\rho(x, y, z)$ трех переменных. Для нахождения массы m материального тела разобьем замкнутую область Q произвольным образом на n *частичных областей* $Q_i, i = \overline{1, n}$, объем каждой из которой обозначим ΔV_i . Выберем в каждой частичной области Q_i произвольную точку $(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i) \in Q_i, i = \overline{1, n}$, и приближенно примем, что в пределах Q_i плотность тела постоянна и равна $\rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$. Тогда масса частичной области Q_i будет $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i$, а для массы всего тела получим приближенное равен-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 67 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i. \quad (2.1)$$

Ясно, что формула (2.1) тем точнее, чем меньше размеры каждой из частичных областей Q_i . За точное значение массы рассматриваемого тела можно принять предел, к которому стремиться правая часть формулы (2.1) при стремлении к нулю наибольшего диаметра d из диаметров d_i частичных областей $Q_i, i = \overline{1, n}$, т.е.

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i. \quad (2.2)$$

Итак, задача вычисления массы материального тела привела к конструкции, очень похожей на двойной интеграл. Отличие лишь в том, что рассматривается замкнутая область не на плоскости, а в пространстве, а плотность зависит не от двух переменных, а от трех.

2.2 Определение тройного интеграла

Напомним вначале, что *тело* называют *кубируемым*, если точная верхняя грань V^* множества объемов всех включенных в это тело многогранников равна точной нижней грани V_* множества объемов всех многогранников, включающих в себя данное тело, причем число $V = V^* =$



Начало

Содержание



Страница 68 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

V_* и называют *объемом тела*. Для кубируемости тела $Q \subset R^3$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие два многогранника Q_1 и Q_2 с объемами V_1 и V_2 соответственно, что $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ и $V_2 - V_1 < \varepsilon$. Далее под **телом** будем понимать ограниченную замкнутую область в пространстве, а кубируемое тело в будущем также называть **кубируемой замкнутой областью**.

Будем говорить, что некоторое множество в R^3 , в частности кривая или поверхность, является **множеством объема нуль**, если его можно заключить внутрь многогранника сколь угодно малого объема. Используя это понятие, приведенный выше критерий кубируемости тела можно сформулировать иначе: для кубируемости ограниченной замкнутой области необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела объем нуль.

Важным классом кубируемых замкнутых областей являются те, которые ограничены конечным числом гладких поверхностей. Множество точек, принадлежащих таким поверхностям, имеет объем нуль. Напомним, что поверхность называют гладкой, если в каждой ее точке определен единичный вектор нормали к поверхности, непрерывно меняющийся от точки к точке. Далее будем рассматривать только гладкие и кусочно-гладкие поверхности. Отметим, что для объема пространственной замкнутой области (как и для площади плоской замкнутой области) справедливы свойства *неотрицательности, монотонности, аддитивности и инвариантности*.

Пусть в некоторой кубируемой замкнутой области Q в пространстве



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 69 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

с прямоугольной системой координат $Oxyz$ определена ограниченная функция $f(x, y, z)$. Рассмотрим разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q на частичные области $Q_i, i = \overline{1, n}$, каждая из которых имеет объем $\Delta V_i > 0$ и диаметр d_i . Наибольший из диаметров d_i , как и в плоском случае, назовем *диаметром разбиения* P и обозначим $d(P)$. В каждой частичной области Q_i выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i)$. Значение функции $f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ умножим на объем ΔV_i и составим интегральную сумму

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i \quad (2.3)$$

функции $f(x, y, z)$. Таким образом, интегральная сумма определяется разбиением T и набором точек $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ в частичных областях разбиения.

Функцию $f(x, y, z)$ называют *интегрируемой функцией* в кубируемой замкнутой области $Q \in R_3$, если существует конечный предел I ее интегральных сумм $\sigma(P)$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q с диаметром $d(P) < \delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \in Q_i$ для соответствующей интегральной суммы $\sigma(T)$ выполняется неравенство $|\sigma(T) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 70 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

по замкнутой области Q и обозначают

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \int_Q f(x, y, z) dV.$$

Итак, резюмируя, можно записать

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i. \quad (2.4)$$

Как и в плоском случае, замкнутую область Q будем называть *областью интегрирования*.

Задача вычисления массы тела показывает, что при

$$f(x, y, z) \geq 0, (x; y; z) \in Q,$$

тройной интеграл можно интерпретировать как массу неоднородного тела с плотностью $\rho = f(x, y, z)$.

Конечный предел интегральных сумм вида 2.3 может существовать только для ограниченных функций. Но, как и в случае функций одного и двух действительных переменных, не всякая ограниченная в замкнутой пространственной области функция интегрируема в ней. Чтобы сформулировать условия интегрируемости функций (условия существования тройного интеграла), как и в случае двойного интеграла, для функции



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 71 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$f(x, y, z)$ при заданном разбиении P кублируемой замкнутой области Q введем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$s(P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta V_i, S(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta V_i,$$

где m_i и M_i — точная нижняя и точная верхняя грани этой функции в частичной области $Q_i, i = \overline{1, n}$. Свойства сумм Дарбу, сформулированные для функции двух переменных, можно дословно перенести на случай трех переменных. Эти свойства приводят к следующему критерию существования тройного интеграла.

Теорема 2.1. Для того чтобы ограниченная в кублируемой замкнутой области $Q \subset R^3$ функция $f(x, y, z)$ была интегрируемой в Q , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ замкнутой области Q , что соответствующие этому разбиению суммы Дарбу будут удовлетворять условию $S(P) - s(P) < \varepsilon$.

С помощью этого критерия можно установить некоторые классы интегрируемых функций.

Теорема 2.2. Всякая непрерывная в кублируемой замкнутой области $Q \subset R^3$ функция $f(x, y, z)$ интегрируема в ней.



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 72 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Теорема 2.3. Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в кубируемой замкнутой области $Q \subset R^3$ и непрерывна в Q всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуля, то эта функция интегрируема в Q .

Функции трех переменных (как и функции одного и двух переменных), интегрируемые в замкнутой области $Q \subset R^3$, обладают следующими свойствами.

1. Произведение интегрируемых в Q функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ являются интегрируемым в Q .
2. Если функция $g(x, y, z)$ интегрируема в Q и удовлетворяет условию $|g(x, y, z)| \geq c > 0, (x, y, z) \in Q$, то функция $1/g(x, y, z)$ также интегрируема в Q .

2.3 Свойства тройного интеграла

Поскольку свойства **тройных интегралов** аналогичны **свойствам двойных интегралов**, ограничимся лишь их перечислением.

1°. Если $Q \subset R^3$ - кубируемая замкнутая область объема V , то

$$\int_Q dV = V. \quad (2.5)$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 73 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

2°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q , то их линейная комбинация $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$ с произвольными константами α и β также интегрируема в Q , причем

$$\int_Q (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dV = \alpha \int_Q f(x, y, z) dV + \beta \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.6)$$

Это свойство называют **линейностью тройного интеграла**. Отметим, что равенство (2.6) можно распространить на любое конечное число интегрируемых функций.

3°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в замкнутых областях Q_1 и Q_2 , то она интегрируема и в их объединении $Q = Q_1 \cup Q_2$, причем если замкнутые области Q_1 и Q_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_{Q_1} f(x, y, z) dV + \int_{Q_2} f(x, y, z) dV. \quad (2.7)$$

Свойство 3° называют **аддитивностью тройного интеграла**. Это свойство, как и соответствующее свойство двойного интеграла, можно распространить на любое конечное число замкнутых областей.

4°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в Q и $f(x, y, z) \geq 0$, $(x; y; z) \in$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 74 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Q , то

$$\int_Q f(x, y, z) dV \geq 0. \quad (2.8)$$

5°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q и $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, $(x; y; z) \in Q$, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV \leq \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.9)$$

6°. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в Q , то функция $|f(x, y, z)|$ также интегрируема в Q , причем

$$\left| \int_Q f(x, y, z) dV \right| \leq \int_Q |f(x, y, z)| dV. \quad (2.10)$$

Свойство 6° часто называют **теоремой об оценке тройного интеграла по модулю**.

7°. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в Q и удовлетворяют в Q неравенствам $m \leq f(x, y, z) \leq M$ и $g(x, y, z) \geq 0$, то

$$m \int_Q g(x, y, z) dV \leq \int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV \leq M \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.11)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 75 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Отметим, что если в сформированном утверждении условие неотрицательности функции $g(x, y, z)$ заменить условием ее неположительности, то неравенства (2.11) модифицируются следующим образом:

$$M \int_Q g(x, y, z) dV \leq \int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV \leq m \int_Q g(x, y, z) dV.$$

Свойство 7° в частном случае, когда $g(x, y, z) \equiv 1$ в Q приводит к неравенствам

$$mV \leq \int_Q f(x, y, z) dV \leq MV, \quad (2.12)$$

где V - объем замкнутой области Q . В таком виде свойство 7° иногда называют **теоремой об оценке тройного интеграла**.

8°. Если функции $f(x, y, z)$ непрерывна в кублируемой замкнутой области Q , являющейся линейно связным множеством, а функция $g(x, y, z)$ интегрируема и знакопостоянна в Q , то существует такая точка

$(x_0; y_0; z_0) \in Q$, что

$$\int_Q f(x, y, z) g(x, y, z) dV = f(x_0; y_0; z_0) \int_Q g(x, y, z) dV. \quad (2.13)$$

9°. Если функции $f(x, y, z)$ непрерывна в кублируемой замкнутой об-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 76 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

ласти Q , являющейся линейно связным множеством, то

$$\int_Q f(x, y, z) dV = f(x_0; y_0; z_0) V, \quad (2.14)$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ - некоторая точка области Q .

Свойство 9° называют **теоремой о среднем значении для тройного интеграла**, а значение $(x_0; y_0; z_0)$ в правой части равенства (2.14) - **средним значением функции $f(x, y, z)$ в Q** .

2.4 Вычисление тройного интеграла

Как и в случае **двойных интегралов**, основной прием при вычислении **тройных интегралов** заключается в их **сведении к повторному интегралу**, т. е. в переходе от интегрирования по пространственной замкнутой области к последовательному интегрированию по каждому переменному.

Рассмотрим замкнутую область $Q \subset R^3$, которая снизу и сверху ограничена поверхностями $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, и боковой цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz . Здесь $D \subset R^2$ - замкнутая область, являющаяся проекцией Q на плоскость xOy (рис. 2.1). Обобщая определение **элементарной области** на пространственный случай, всякую замкнутую область описанного вида назовем **z-цилиндрической областью** или



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 77 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

элементарной областью в направлении оси Oz . Любая вертикальная прямая, проходящая через внутреннюю точку такой области, пересекает ее границу в двух точках.

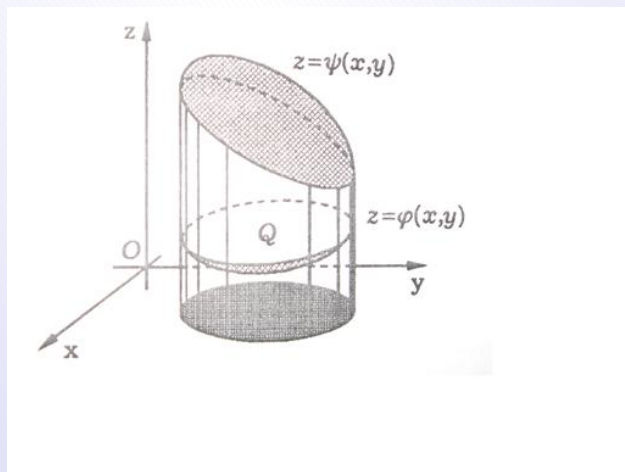


Рис. 2.1

Теорема 2.4. Если существует тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по замкнутой области

$$Q = \{(x; y; z) \in R^3 : (x; y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 78 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

а для каждой фиксированной точки $(x; y) \in D$ существует определенный интеграл

$$\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (2.15)$$

то существует повторный интеграл

$$\iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \quad (2.16)$$

причем имеет место равенство

$$\iiint_Q dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.17)$$

В случае, если область интегрирования Q является элементарной в направлении оси Oy или Ox , то поменяв (2.17) местами переменные x, y, z можно свести тройной интеграл к повторному с иным порядком интегрирования.

Замечание 2.1. Если пространственная область интегрирования Q не является элементарной в направлении ни одной из координатных



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание

Страница 79 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

осей, то эту область следует разбить на части, которые являлись бы областями, элементарными в направлении хотя бы одной из осей. Тогда к каждой из таких областей можно применить (2.4), а затем в силу аддитивности тройного интеграла просуммировать полученные результаты.

Конкретизируем этот подход, ограничившись случаем, когда в повторных интегралах внутренний интеграл берется по переменному z . В алгоритме сведения тройного интеграла к повторному можно выделить следующие этапы.

1. Пространственную область интегрирования разобьем на такие части, чтобы каждая из них была элементарной в направлении оси Oz . Для каждой из частей разбиения выполняем следующий шаг, предполагая, что эта часть обозначена через Q^* , а ее проекция на плоскости xOy – через D^* .
2. Зафиксируем точку $(x; y) \in D^*$ и проведем через эту точку вертикальную прямую, параллельную оси Oz . Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – аппликаты точек пересечения этой прямой с поверхностями, ограничивающими соответственно снизу и сверху рассматриваемую замкнутую область Q^* , аналогично замкнутой области Q , изображенной на 2.1. Тогда значения $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будут соответственно нижним и верхним пределами интегрирования во внутреннем определенном интеграле повторного интеграла по пе-



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 80 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

ременному z .

3. После интегрирования по z получаем функцию двух переменных x и y . Двойной интеграл от этой функции по плоской замкнутой области D^* заменяем повторным.

Преобразование тройного интеграла в повторный вида

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y) dz \quad (2.18)$$

или аналогичный ему с другим порядком переменных называют **расстановкой пределов интегрирования** в тройном интеграле.

Пример 2.1. Расставим пределы интегрирования в тройном интеграле по тетраэдру (под тетраэдром часто понимают произвольную треугольную пирамиду, не обязательно правильную)

$$Q = \{(x; y; z) \in R^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

(рис. 2.2)

Замкнутая область Q является элементарной в направлении любой координатной оси. Вертикальная прямая, проходящая через точку $(x; y)$ плоскости xOy , пересекают границу замкнутой области Q в



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 81 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 82 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

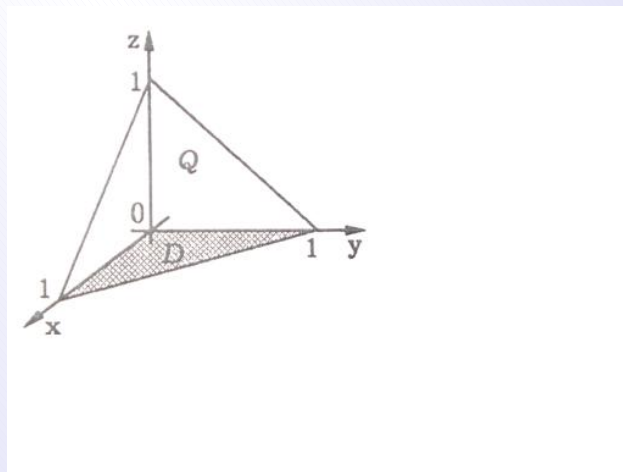


Рис. 2.2

точке $(x; y; 0)$ и точке $(x; y; z)$ пересечения с плоскостью $x + y + z = 1$, т. е. при $z = 1 - x - y$. Проекция Q на плоскости xOy есть треугольник

$$D = \{(x; y) \in R^2 : x \in [0, 1], x + y \leq 1\},$$

а прямые, параллельные оси Oy , пересекают его стороны при $y = 0$ и $y = 1 - x$. Следовательно тройной интеграл можно представить в

vide

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$$

2.5 Замена переменных в тройном интеграле

2.5.1 Криволинейные координаты в пространстве

Пусть функции

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.19)$$

осуществляют отображение области Ω на область $Q^* \subset R^3$. Предположим, что эти функции удовлетворяют условиям:

1) отображение, заданное функциями (2.19), является *биекцией* (т.е. взаимно однозначно);

2) функции (2.19) непрерывно дифференцируемы и в каждой точке $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^*$ *якобиан* отображения (2.19)

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 83 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 84 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

В силу непрерывности частных производных якобиан отображения (2.19) является непрерывной функцией переменных ξ, η, ζ , а поэтому в области Ω^* сохраняет знак.

По теореме об обратной функции отображение, обратное к отображению, осуществляется непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z) \quad (2.20)$$

заданными в области Ω^* . Якобиан $\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$ этого отображения в точке (x, y, z) связан с якобианом $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ отображения (2.19) в точке $(\xi(x, y, z); \eta(x, y, z); \zeta(x, y, z))$ соотношением

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = 1,$$

а значит, отличен от нуля и сохраняет знак всюду в Q^* .

Формулы замены переменных в тройном интеграле можно получить, рассуждая так же, как и в случае двойного интеграла, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой теоремы.

Теорема 2.5. Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение (2.19) области $\Omega^* \subset R^3$ на область $Q^* \subset R^3$ или же ограничена в Q и непрерывна в Q всюду, кроме некоторого

множества объема нуль, то

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Omega f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.21)$$

где Ω — прообраз замкнутой области Q при отображении (2.19)

Наиболее употребительными криволинейными координатами в пространстве R^3 являются цилиндрические и сферические координаты.

2.5.2 Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты точки (рис.2.3) связаны с прямоугольными декартовыми соотношениями (2.22)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z; \end{cases} \quad (2.22)$$

которые можно рассматривать как отображение замкнутой области $\Omega = \{(r, \varphi, z) \in R^3 : z \in [0; +\infty), \varphi \in [0; 2\pi], z \in R\}$ на $Q = R^3$.

Якобиан отображения (2.22) легко вычисляется:

$$I(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (2.23)$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-

ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 85 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 86 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

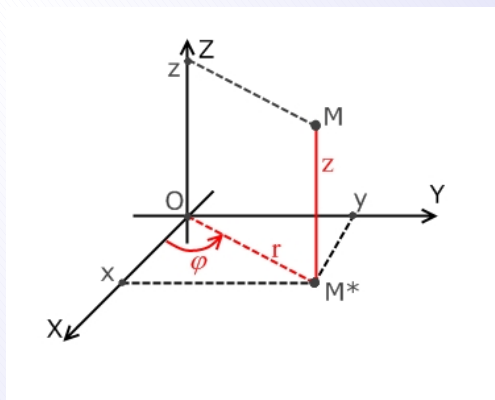


Рис. 2.3

Пример 2.2. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_Q z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

по замкнутой области Q , ограниченной плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = a$ и поверхностью $y = \sqrt{2x - x^2}$ (рис. 2.4, а)

В прямоугольной системе координат тройной интеграл преобразуется

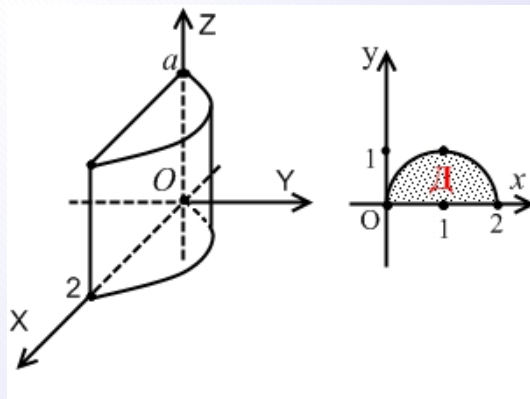


Рис. 2.4

$$0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$$

в повторный следующим образом:

$$I = \iiint_Q z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz.$$

Замкнутая область D , является проекцией области интегрирования Q на координатную плоскость xOy , описывается с помощью неравенств $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$ (рис. 2.4, б). Эти неравенства можно заменить двумя неравенствами $y \geq 0$ и $x^2 + y^2 \leq 2x$.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 87 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

координатам в плоскости xOy , получим представление замкнутой области D :

$$D = \{(r; \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}.$$

С помощью этого представления для тройного интеграла получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^a z r dz = \frac{a^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Вычислить объем тела Q , ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$ (рис. 2.5)

Объем тела Q равен $V = \iiint_Q dx dy dz$.

Поскольку рассматриваемое тело Q является z -цилиндрическим, т.е. $\frac{x^2+y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$, D -проекция тела Q на плоскость xOy , то

$$V = \iint_D dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 88 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 89 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

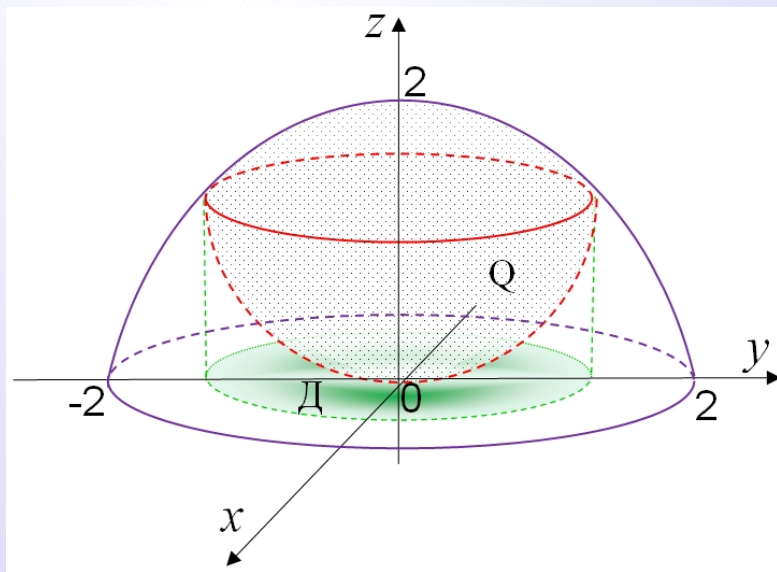


Рис. 2.5

В данном случае граница замкнутой области $d(\mathbf{D})$ совпадает с проекцией линии пересечения сферы и параболоида, а чтобы найти уравнение этой проекции, достаточно из уравнений двух поверхностей исключить переменную z . Из уравнения параболоида $x^2 + y^2 = 3z$ выражаем z и

подставляем в уравнение сферы. Получаем

$$x^2 + y^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{9} = 4.$$

Откуда получим уравнение границы в виде $x^2 + y^2 = 3$. Итак, замкнутая область \mathbf{D} есть круг $x^2 + y^2 \leq 3$.

При переходе к цилиндрической системе координат область \mathbf{D} определяется неравенствами $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{3}$. Вертикальная прямая, проходящая через точку $(x; y) \in \mathbf{D}$ пересекает тело по отрезке, причем нижний конец (точка входа) расположен на параболе, а верхний конец (точка выхода) на сфере, т.е. $\frac{r^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - z^2}$.

Итак,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^3) dr = \\ &= -\frac{2\pi}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}r^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}(-1 + 8 - \frac{9}{4}) = \frac{19\pi}{6}. \end{aligned}$$

2.53 Сферические координаты

Сферические координаты r , φ и θ (рис.2.6) связаны с декартовыми координатами x , y , z соотношениями (2.24)



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 90 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 91 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

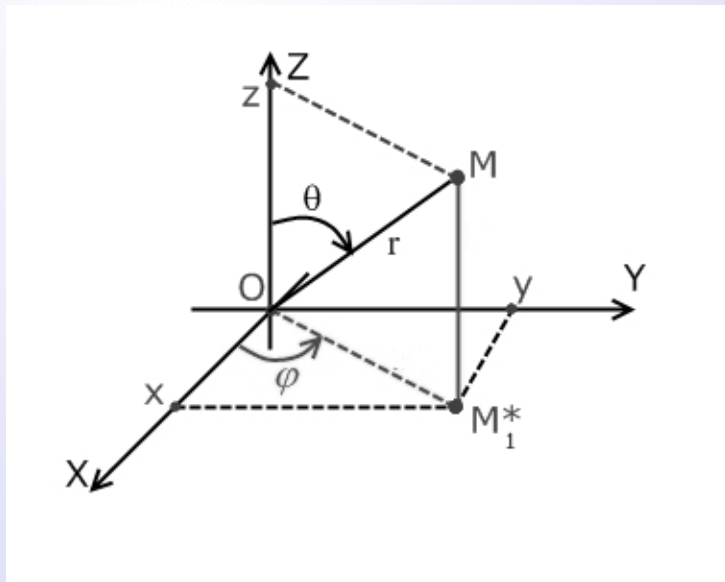


Рис. 2.6

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta; \end{cases} \quad (2.24)$$

которые определяют отображение замкнутой области $\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \in R^3 : r \in [0; +\infty), \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [a; \pi]\}$ в замкнутую область $Q = R^3$

Сферические координаты имеют следующий геометрический смысл:

- 1) величина r есть длина радиус-вектора \overrightarrow{OM} точки M ;
- 2) величина φ угол между осью Ox и проекцией \overrightarrow{OM}_1 радиус-вектора \overrightarrow{OM} на плоскость xOy ;
- 3) величина θ есть угол между осью Oz и вектором \overrightarrow{OM} .

Якобиан отображения (2.24) равен

$$I(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Пример 2.4. Вычислить массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, если плотность ρ изменяется по закону $\rho = r$, где r - расстояние точки шара от начала координат.

Масса шара равна следующему тройному интегралу:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = [\text{Перейдя к сферической системе координат будем заменять}] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r r^2 \sin \theta dr = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^a d\theta = \\ &= \frac{\pi a^4}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \pi a^4. \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 92 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 3

Криволинейные интегралы

3.1 Криволинейный интеграл первого рода

Используя понятие *длины кривой*, а также формулы для ее вычисления при различных способах задания кривой, можно ввести понятие интеграла вдоль спрямляемой (в частности, гладкой или кусочно гладкой) кривой так же, как вдоль прямолинейного отрезка.

Пусть на плоскости R^2 с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеется непрерывная спрямляемая кривая AB (3.1), в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x, y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i , а максимальную из этих длин - через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i(x_i; y_i)$.

Отметим, что подобное разбиение можно построить и в случае замкнутой кривой, если за точку A_0 , совпадающую в этом случае с A_n , взять любую точку кривой AB , а остальные точки $A_i, i = \overline{1, n-1}$, расположить в соответствии с выбранным направлением на на этой замкнутой кривой.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 93 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 94 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

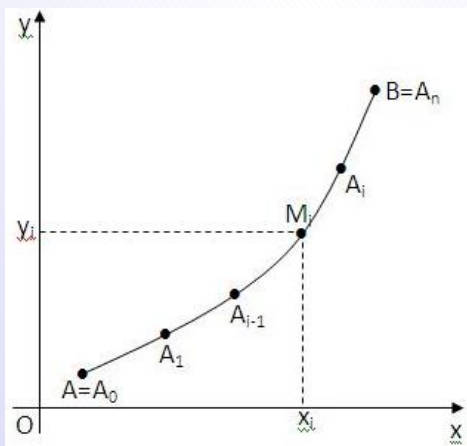


Рис. 3.1

Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (3.1)$$

которую называют интегральной суммой функции $f(x, y)$ вдоль кривой

AB.

Пусть существует предел I интегральных сумм (3.1) при $\lambda(T) \rightarrow 0$, не зависящий ни от выбора точек M_i на элементарных дугах, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого разбиения $T = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой AB с параметром $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ при любом выборе точек M_i на дугах $A_{i-1}A_i$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i - I \right| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Такой предел называют *криволинейным интегралом первого рода* (иногда - первого типа) вдоль кривой (или дуги) AB и обозначают

$$I = \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (3.3)$$

Итак,

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i.$$

Отметим, что в определении криволинейного интеграла первого рода направление обхода кривой не играет никакой роли, так как от выбора направления не зависит интегральная сумма. Пусть, например, кривая AB не замкнута, а BA обозначает ту же кривую, но с противоположным



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 95 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

направлением обхода (от B к A , если исходным является направление от A к B). Тогда можно записать

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds. \quad (3.4)$$

Можно определить криволинейный интеграл первого рода и другим способом. Пусть на некотором множестве, содержащем кривую Γ , задана функция $F(x, y, z)$. Если гладкая кривая Γ , задана уравнением

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, t \in [\alpha, \beta]$, то определенный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt$$

будем называть **криволинейным интегралом первого рода** от функции $F(x, y, z)$ по кривой Γ , и обозначать $\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds$. Таким образом, по определению

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt. \quad (3.5)$$

Так как криволинейный интеграл первого рода, согласно формуле (3.5), фактически есть определенный интеграл, на него переносятся основные свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность,



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 96 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

оценка интеграла по модулю (модуль интеграла не превосходить интеграла от модуля функции), теорема о среднем.

3.2 Вычисление криволинейного интеграла первого рода и его геометрическая интерпретация

1. Если гладкая кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t) \end{cases}$$

а функция $F(x, y, z)$ непрерывна на кривой Γ , то

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3.6) \end{aligned}$$

В частности, если Γ – плоская кривая, то

$$\int_{\Gamma} F(x, y) ds =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 97 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t)) \sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} dt. \quad (3.7)$$

2. Пусть гладкая кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то формула (3.7) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x, y) ds &= \\ &= \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогично при задании кривой функцией вида $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x, y) ds &= \\ &= \int_c^d F(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3. Пусть кривая Γ задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда, учитывая формулы $x = r \cos \varphi$ и



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 98 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$y = r \sin \varphi$ связи декартовых и полярных координат, а также выражение для дифференциала длины дуги в полярных координатах $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$, находим

$$\int_{\Gamma} F(x, y) ds =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (3.10)$$

Если функция $F(x, y, z)$ неотрицательна, то ее можно интерпретировать как линейную плотность распределения массы вдоль этой кривой, а криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds$ — как массу этой кривой.

Действительно, при мелком разбиении кривой Γ на дуги $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$, можно приближенно принять, что линейная плотность распределения массы во всех точках каждой элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ — постоянна и равна значению $\rho(M_i)$ линейной плотности в произвольной точке $M_i(x_i, y_i)$ этой дуги. Обозначив через ΔS_i длину дуги $A_{i-1}A_i$, для массы этой дуги будем иметь

$$m_i \simeq \rho(M_i) \Delta S_i, \quad i = \overline{1, n}.$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 99 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

В этом случае для массы m всей кривой Γ получим

$$m \simeq \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta S_i.$$

Погрешность этого приближенного равенства тем меньше, чем мельче разбиение кривой Γ , т.е. чем меньше длины ΔS_i всех элементарных дуг. Поэтому естественно за массу кривой Γ принять значение предела

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta S_i,$$

где $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta S_i$ — наибольшая из длин ΔS_i элементарных дуг.

Сравнивая данное определение массы кривой с определением криволинейного интеграла первого рода, получаем

$$m = \int_{\Gamma} \rho(M) ds = \int_{\Gamma} \rho(x, y) ds. \quad (3.11)$$

Пример 3.1. Вычислим криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} \frac{y}{x} dS,$$

где AB дуга параболы $y = \frac{x^2}{2}$, заключенная между точками $A(1; \frac{1}{2})$ и $B(2; 2)$.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 100 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

► В данном случае

$$dS = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dx.$$

и в соответствии с (3.8)

$$\int_{AB} \frac{y}{x} dS = \frac{1}{2} \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{6} \sqrt{(1 + x^2)^3} \Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Найдем криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} ye^{-x} dS$$

вдоль кривой AB , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t, t \in [0; 1]. \end{cases}$$

► В соответствии с (3.7) имеем

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{\frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{4}{(1 + t^2)^2} + 1 - \frac{4}{1 + t^2}} dt = dt.$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 101 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Кроме того, $e^{-x}y = (2 \operatorname{arctg} t - t) \frac{1}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{AB} ye^{-x} dS &= \int_0^1 (2 \operatorname{arctg} t - t) \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \operatorname{arctg}^2 t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln^2}{2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 3.3. Пусть Γ - правый лепесток лемнискаты Бернулли, который в полярных координатах описывается уравнением $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Вычислим $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dS$ вдоль кривой Γ

Решение: Так как $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, то $r'(\varphi) = -a \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 = a^2 \cos 2\varphi + a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. Учитывая, что в данном случае $\sqrt{x^2 + y^2} = r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, и используя 3.10 находим

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dS = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\pi}{2} a^2.$$

3.3 Работа силы на криволинейном пути

Пусть материальная точка перемещается вдоль некоторой кривой AB в плоскости xOy в каждой точке M ее пути на точку действует сила



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 102 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 103 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$F(M)$. Выясним, как можно вычислить работу силы, действующей на материальную точку. Будем считать, что кривая AB является гладкой.

Разобьем кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ с длинами Δs_i и выберем на каждой из таких дуг точку M_i (рис. 3.2). Если выбранное разбиение кривой AB достаточно мелкое, то можно принять два допущения:

1) перемещение материальной точки на участке $A_{i-1}A_i$ ее пути является прямолинейным, т.е. из положения A_{i-1} в положение A_i точка перемещается вдоль прямолинейного отрезка $\Delta \vec{s}_i$;

2) сила, действующая на материальную точку при ее перемещении на участке $A_{i-1}A_i$ постоянна и совпадает с $F(M_i)$.

При этих допущениях работа силы при перемещении материальной точки M из положения A_{i-1} в положение A_i вдоль элементарной дуги $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$, может быть записана с помощью скалярного произведения $(F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i})$. Суммирую приближенную формулу для работы A , которую сила совершает при перемещении материальной точки по криволинейному пути AB :

$$A \approx \sum_{i=1}^n (F(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}). \quad (3.12)$$

Погрешность этой формулы, определяемая принятыми допущениями, будет тем меньше, чем мельче разбиение кривой AB . Поэтому естественно в качестве точного значения A работы принять предел суммы в пра-

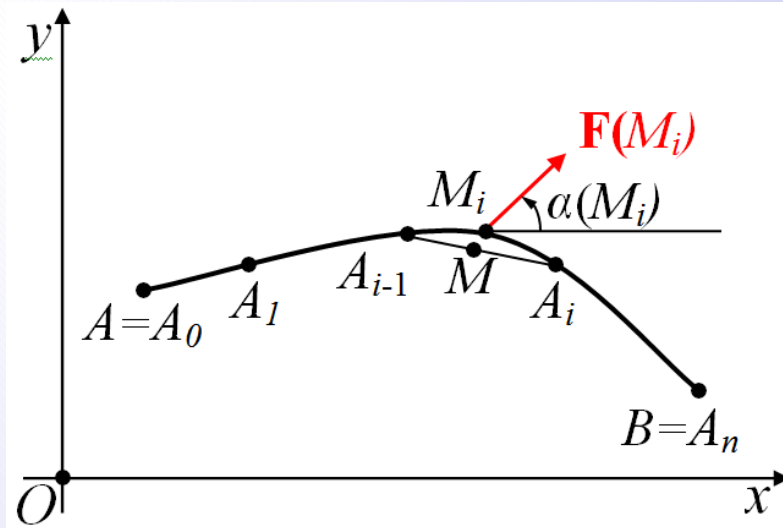


Рис. 3.2

вой части (3.12) при $\lambda = \max_i \Delta s_i$, т.е. считаем по определению, что

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}). \quad (3.13)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ длина $\Delta \overline{s}_i$ прямолинейного отрезка $A_{i-1}A_i$ и длина Δs_i элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Кроме того, при малых λ можно считать, что угол между векторами $\mathbf{F}(M_i)$ и $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ есть угол $\beta(M_i)$ между $\mathbf{F}(M_i)$ и касательным вектором к кривой в точке M_i . Это позволяет записать равенство



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 104 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cos \beta(M_i) \Delta s_i. \quad (3.14)$$

В этом равенстве сумма в правой части есть интегральная сумма для криволинейного интеграла первого рода. Поэтому

$$A = \int_{AB} \mathbf{F}(M) \cos \beta(M) ds. \quad (3.15)$$

Выражение $\mathbf{F}(M) \cos \beta(M)$ представляет собой проекцию вектора $\mathbf{F}(M)$ на касательный вектор к кривой AB в точке $M \in AB$. Обозначим через $\mathbf{t}(M)$ единичный касательный вектор к кривой в точке M . Тогда $\mathbf{F}(M) \cos \beta(M) = (\mathbf{F}(M), \mathbf{t}(M))$ и равенство (3.15) перейдет в равенство

$$A = \int_{AB} (\mathbf{F}(M), \mathbf{t}(M)) ds. \quad (3.16)$$

Пусть $P(M)$ и $Q(M)$ – проекция вектора $\mathbf{F}(M)$ на координатные оси. Вернемся к приближенной формуле (3.12). Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатные оси. Тогда в соответствии с правилом вычисления скалярного произведения

$$(\mathbf{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}) = P(x_i; y_i) \Delta x_i + Q(x_i; y_i) \Delta y_i.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 105 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Следовательно, вместо (3.13) можно записать

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(x_i; y_i) \Delta x_i + Q(x_i; y_i) \Delta y_i). \quad (3.17)$$

Полученная формула уже не приводит к криволинейному интегралу первого рода, но имеет простой геометрический смысл. Сумма в правой части этой формулы похожа на ранее встречавшиеся интегральные суммы, и на ее основе можно построить интеграл нового типа.

3.4 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB и на этой кривой — непрерывные функции $P(x, y)$ и $q(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ и выберем на каждой дуге точку $M_i(\tilde{x}_i; \tilde{y}_i)$ (см. рис. 3.1). Обозначим через x_i, y_i координаты точки A_i . Кроме того, обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции векторов $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатные оси Ox и Oy . Составим интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^n P(x_i; y_i) \Delta x_i; \quad \sum_{i=1}^n Q(x_i; y_i) \Delta y_i \quad (3.18)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Страница 106 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

вдоль кривой AB для функции $P(x; y)$ по переменной x и для функции $Q(x; y)$ по переменной y . По-прежнему через λ обозначим максимальную из длин Δs_i элементарных дуг $A_{i-1}A_i$, т.е. $\lambda = \max_{i=1, n} \Delta s_i$.

Если существуют пределы I_1, I_2 элементарных сумм (3.18) при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящие ни от разбиения кривой AB на элементарные дуги, ни от выбора точек M_i на этих дугах, то эти пределы называют **криволинейными интегралами второго рода** вдоль кривой AB от функции $P(x; y)$ по переменной x и для функции $Q(x; y)$ по переменной y и обозначают

$$\int_{AB} P(x; y)dx; \quad \int_{AB} Q(x; y)dy.$$

Итак, по определению

$$\int_{AB} P(x; y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i; y_i)\Delta x_i. \quad (3.19)$$

$$\int_{AB} Q(x; y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i; y_i)\Delta y_i. \quad (3.20)$$

В приложениях часто встречается сумма интегралов (3.19) и (3.20) от функций $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ (в частном случае эти функции могут сов-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 107 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

падать). Такую сумму называют **криволинейным интегралом второго рода общего вида** и записывают под одним знаком интеграла:

$$\int_{AB} P(x; y)dx + \int_{AB} Q(x; y)dy = \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \quad (3.21)$$

К криволинейному интеграла второго рода приводит задача вычисления работы силы при перемещении материальной точки по криволинейному пути. Действительно, предел в правой части формулы (3.17) можно представить в виде суммы двух пределов, каждый из которых есть криволинейный интеграл второго рода по соответствующей переменной. Следовательно, вместо (3.17) можем записать

$$A = \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy, \quad (3.22)$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – проекции силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ на координатные оси Ox и Oy .

Отметим, что работу силы на криволинейном пути можно представить и **криволинейным интегралом первого рода** в виде (3.16). Это позволяет записать равенство

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} \mathbf{Ft} ds.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 108 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Для пространственной кривой AB существует аналогичная связь между криволинейными интегралами первого и второго родов:

$$\int_{AB} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \\ = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)ds = \int_{AB} \mathbf{F}t \, ds,$$

где $\mathbf{F}=\mathbf{F}(M)$ – векторная функция, для которой $P(M) = P(x; y; z)$, $Q(M) = Q(x; y; z)$ и $R(M) = R(x; y; z)$ являются координатными функциями в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, а α, β, γ – углы, образованные единичным вектором $\mathbf{t}=\mathbf{t}(M)$, касательным к кривой AB в точке M , с осями Ox , Oy и Oz соответственно.

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L часто обозначают специальным символом \oint и иногда называют контурным интегралом. Для такого интеграла направление обхода уже нельзя задать, указав начальную и конечную точку кривой. Чтобы определить направление обхода контура, можно использовать различные способы. Например, при параметрическом задании контура в качестве направления его обхода можно выбрать то, которое соответствует возрастанию параметра кривой.

В плоском случае для простейших контуров (окружность, эллипс) направление обхода часто сравнивают с движением часовой стрелки. При



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 109 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

этом обход контура против хода часовой стрелки (или просто против часовой стрелки) называют положительным, а обход контура по ходу часовой стрелки (по часовой стрелке) называют отрицательным

(рис.3.3, а).

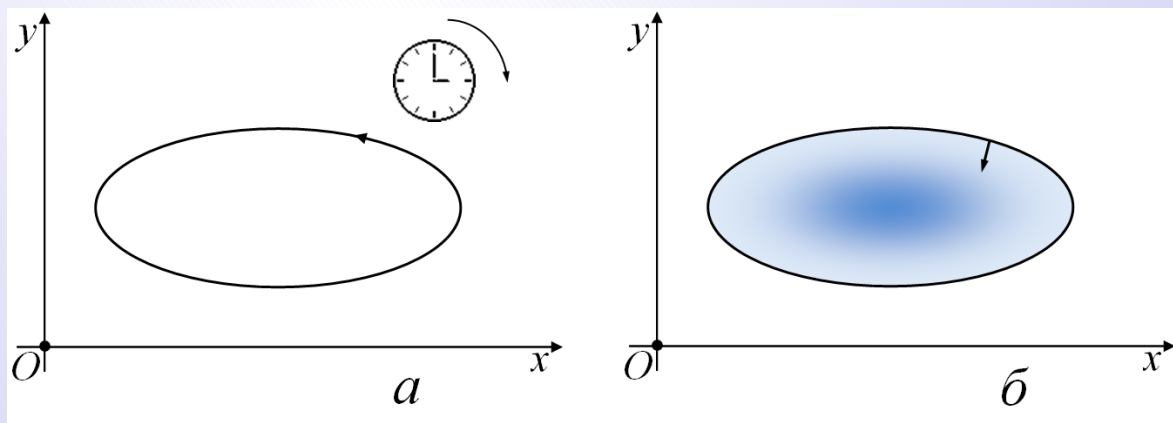


Рис. 3.3

В приложениях зачастую контур фигурирует как граница некоторой плоской области (в этом случае *контур простой*). Тогда обход контура можно соотнести с этой областью: при положительном обходе контура область все время остается слева, а при отрицательном – справа

(рис.3.3, б).



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 110 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

3.5 Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Предполагаем, что значение параметра $t = \alpha$ соответствует точке A , а значение $T = \beta$ - точке B .

Теорема 3.1. *Если функции $x(t)$ и $y(t)$ в параметрическом представлении кривой AB непрерывно дифференцируемы, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой AB , то криволинейный интеграл второго рода общего вида вдоль кривой AB от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ существует, причем для него верно равенство*

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt. \quad (3.23)$$

Доказательство



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 111 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Криволинейный интеграл второго рода общего вида состоит из двух частей, определяемых функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Можно ограничиться доказательством теоремы лишь для одной части, так как для другой части доказательство аналогично.

Итак, докажем, что для непрерывной на гладкой кривой AB функции $P(x, y)$ криволинейный интеграл второго рода по переменному x существует, причем

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt. \quad (3.24)$$

Выберем произвольное разбиение кривой AB точками

$A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$. Пусть $t_i, i = \overline{0, n}$ - значение параметра кривой, соответствующие точки A_i . Для этих значений верны соотношения

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

На каждой элементарной дуге $A_{i-1}A_i$ произвольным образом выберем точку $M_i(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$, и пусть τ_i - значение параметра, отвечающее этой точке. Очевидно, что $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, i = \overline{1, n}$. Для интегральной суммы S , соответствующей выбранному разбиению кривой AB , можем записать

$$S = \sum_{i=1}^n P(\hat{x}_i; \hat{y}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i)) (x(t_i) - x(t_{i-1})) =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 112 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(\tau_i), y(\tau_i)) x'(t) dt.$$

Интеграл I в правой части формулы 3.24 в силу условий теоремы существует, так как его подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Используя свойство аддитивности определенного интеграла, запишем

$$I = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

Из полученных представлений интегральной суммы S находим

$$S - I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))) x'(t) dt.$$

Оценим правую часть этого равенства.

Так как функция $F(t) = P(x(t), y(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для любых значений $t, t' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t - t'| < \delta(\epsilon)$, выполняется неравенство $|F(t) - F(t')| < \epsilon$. Функция $s(t)$ переменной длины дуги кривой AB , отсчитываемой от ее начальной точки A , является непрерывно дифференцируемой и возрастающей. Следовательно, существует обратная функция $t(s)$, определенная на отрезке $[0, s_{AB}]$, где s_{AB} - длина кривой AB .

Эта функция непрерывно дифференцируема, а модуль ее производной $|t'(s)|$ достигает на отрезке $[0, s_{AB}]$ некоторого максимального значения



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 113 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

K_1 , т. е. $|t'(s)| \leq K_1, 0 \leq s \leq s_{AB}$. Из формулы конечных приращений вытекает, что

$$|bt_i - t_{i-1}| = |t'(\xi_i)|\Delta s_i \leq K_1\Delta s_i \leq K_1\lambda,$$

где $s_i = s(t_i), i = \overline{0, n}, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ - длины элементарных дуг разбиения кривой, а $\lambda = \max_{i=\overline{1, n}} \Delta s_i$. Пусть разбиение кривой удовлетворяет условию $\lambda < \delta(\epsilon)/K_1$. Тогда для любых $t', t'' \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$|t' - t''| \leq t_i - t_{i-1} \leq K_1\Delta s_i < \delta(\epsilon).$$

Следовательно $|F(\tau_i) - F(t)| < \epsilon$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ и

$$|S - I| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))) x'(t) dt < \epsilon K_2 \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \epsilon K(b - a),$$

где K_2 - максимальное значение непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции $|x'(t)|$. Таким образом, $S \rightarrow I$ при $\lambda = \max_{i=\overline{1, n}} \Delta s_i \rightarrow 0$, что доказывает теорему.

Согласно доказанной теореме, для вычисления криволинейного интеграла второго рода в подынтегральном выражении необходимо от переменных x и y перейти к параметру t кривой, для чего через t следует выразить подынтегральные функции $P(x, y), Q(x, y)$ и дифференциалы



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 114 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

dx, dy . В доказательстве теоремы предполагалось, что начальной точке A кривой AB соответствует левый конец отрезка $[\alpha, \beta]$, являющегося областью изменения параметра кривой. Если же параметризация кривой не согласована с направлением ее обхода, то в формуле 3.23 определенный интеграл справа соответствует противоположному направлению обхода, т.е. левая и правая части формулы отличаются знаками. Для восстановления равенства можно в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования. Таким образом, действует следующее правило: при переходе от криволинейного интеграла второго рода к определенному нижний предел интегрирования должен соответствовать начальной точке кривой, а верхний предел интегрирования - конечной.

Рассмотрим два варианта задания плоской кривой AB . Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой можно взять абсциссу x точки на кривой. В этом случае в соответствии с формулой 3.23 получаем

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx. \quad (3.25)$$

где a и b - абсциссы точек A и B этой кривой. При задании кривой в виде $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, в качестве параметра можем взять ординату y



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 115 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

точки кривой. Тогда

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(y), y) + Q(x(y), y)) dy. \quad (3.26)$$

Здесь c и d - ординаты точек A и B кривой.

Теорема 3.1 без каких-либо затруднений переносится на случай пространственной кривой.

Пример 3.4. Найдем криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} (4x - y)dx + 5x^2ydy$$

вдоль параболы $y = 3x^2$ между ее точками $A(0; 0)$ и $B(1; 3)$.

В соответствии с (3.25) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 ((4x - 3x^2) + 5x^2 \cdot 3x^2 \cdot 6x) dx = \int_0^1 (4x - 3x^2 + 90x^5) dx = \\ &= (2x^2 - x^3 + 15x^6) \Big|_0^1 = 16. \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 116 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

3.6 Свойства криволинейного интеграла второго рода

Рассмотрим основные свойства *криволинейного интеграла второго рода общего вида*.

1°. При изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл второго рода вдоль этой кривой меняет знак:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2°. Постоянный множитель k можно выносить за знак криволинейного интеграла:

$$\int_{AB} kP(x, y)dx + kQ(x, y)dy = k \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

3°. Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждого из слагаемых:

$$\int_{AB} (P_1(x, y) + P_2(x, y))dx = \int_{AB} P_1(x, y)dx + \int_{AB} P_2(x, y)dx.$$

$$\int_{AB} (Q_1(x, y) + Q_2(x, y))dx = \int_{AB} Q_1(x, y)dx + \int_{AB} Q_2(x, y)dx.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 117 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 118 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Свойства 2° и 3° означают линейность криволинейного интеграла: интеграл от линейной комбинации функций равен такой же линейной комбинации интегралов от каждой из этих функций.

4°. Если кривая разбита на конечное число примыкающих одна к другой дуг и вдоль каждой из них в отдельности криволинейный интеграл существует, то существует и интеграл вдоль всей кривой, причем он равен сумме интегралов по отдельным составляющим ее дугам.

Это свойство есть свойство аддитивности криволинейного интеграла второго рода.

Свойства 1° – 4° несложно доказать, используя определение криволинейного интеграла второго рода как предела интегральных сумм и известные свойства предела. Эти доказательства повторяют доказательства соответствующих свойств определенного интеграла.

5°. Если кривая L является замкнутой, то значение криволинейного интеграла вдоль кривой L не зависит от выбора начальной (она же и конечная) точки на этой кривой.

Действительно, пусть A и C – произвольные не совпадающие точки на кривой L . Покажем, что если в качестве начальной точки замкнутой кривой в первом случае выбрать точку, а во втором случае – точку, то в результате получим одно и то же значение криволинейного интеграла. На двух дугах кривой L с концевыми точками A и C выберем произвольным образом точки и N (рис. 3.4).

Эти точки удобны для маркировки дуг, на которые кривая L делит-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 119 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

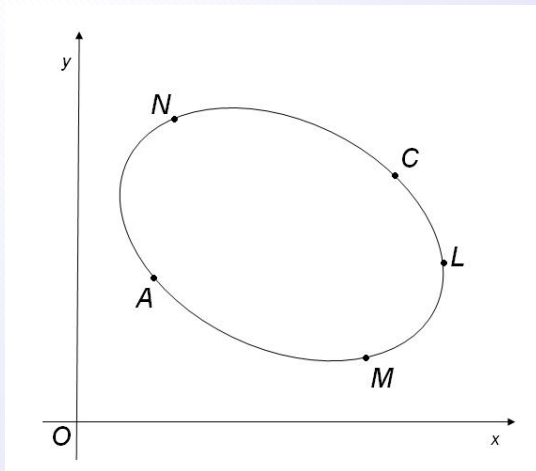


Рис. 3.4

ся точками A и B . Из свойства аддитивности криволинейного интеграла получаем

$$\int_{AMCNA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{AMC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{CNA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{CNA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AMC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{CNAMC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

6°. Если кривая представляет собой отрезок прямой, параллельной оси Oy , то

$$\int_{AB} P(x, y)dx = 0.$$

Если кривая - это отрезок прямой, параллельной оси Ox , то

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = 0.$$

Это свойство объясняется тем, что для таких интегралов соответствующие интегральные суммы равны нулю независимо от выбора разбиения кривой и выбора точек на элементарных дугах разбиения.



Кафедра

математического

анализа и дифференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 120 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

3.7 Формула Грина

Рассмотрим случай криволинейного интеграла второго рода вдоль простого замкнутого L в плоскости xOy .

В этом случае контур L является границей некоторой плоской замкнутой области D . Оказывается, что криволинейный интеграл второго рода вдоль L может быть преобразован в двойной интеграл по замкнутой области D . Установим, как и при каких условиях выполняется такое преобразование.

Теорема 3.2. Пусть замкнутая область D на плоскости xOy ограничена простым кусочно гладким контуром L , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными. Тогда имеет место следующая **формула Грина для односвязной области**:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.27)$$

где контур L обходится в положительном направлении.

◀ Формула Грина фактически распадается на две независимые формулы

$$\oint_L Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad \text{и} \quad \oint_L Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 121 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 122 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Эти две формулы являются частными случаями общей формулы (3.27), первая - при $Q \equiv 0$, вторая - при $P \equiv 0$. Доказав эти две формулы, мы получим общую формулу (3.27) их суммирование. Поэтому можно ограничиться доказательством одной из них, например первой.

Сперва рассмотрим простейший случай, когда замкнутая область D является правильной элементарной областью интегрирования относительно координатной оси Oy . Это значит, что она ограничена снизу и сверху кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \leq y_2(x)$, $x \in [a, b]$, а слева и справа - вертикальными отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 3.5). В этом случае граница L замкнутой области D является кусочно гладким простым контуром, а положительное направление обхода соответствует последовательности $ABFEA$ точек этого контура. Отметим, что в частном случае каждый из вертикальных отрезков AE и BF может вырождаться в точку.

Докажем, что в случае, когда замкнутая область, является правильной относительно оси Oy , верно равенство

$$\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = - \oint_L P dx. \quad (3.28)$$

Согласно условиям теоремы, двойной интеграл в левой части этого равенства существует, причем форма области интегрирования позволяет



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 123 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

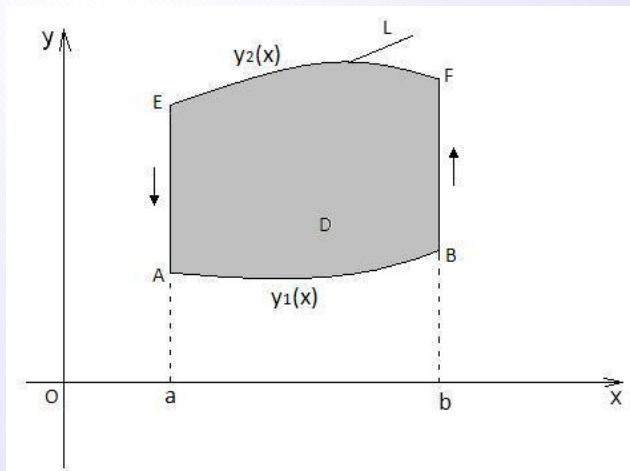


Рис. 3.5

свести его к повторному интегралу. Учитывая это, получаем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx. \quad (3.29)$$

Используя правило вычисления криволинейного интеграла второго рода и его свойство 1°, заключаем, что

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{EF} P(x, y)dx = - \int_{EF} P(x, y)dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int_{AB} P(x, y)dx.$$

Подставляя эти соотношения в (3.29), находим

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{FE} P(x, y)dx - \int_{AB} P(x, y)dx.$$

Последнее равенство не будет нарушено, если в его правую часть дописать со знаком минус интегралы

$$\int_{BF} P(x, y)dx \quad \int_{EA} P(x, y)dx,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 124 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

равные нулю, так как они берутся вдоль отрезков прямых, параллельных координатной оси Oy . В итоге будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{AB} P(x, y) dx - \int_{BF} P(x, y) dx - \\ &- \int_{FE} P(x, y) dx - \int_{EA} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (3.28).

Замечание 3.1. Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = -y$, получаем формулу для вычисления площади, ограниченной гладким контуром

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx. \quad (3.30)$$

3.8 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в некоторой области D в плоскости Oxy заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода общего вида



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 125 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$I = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (3.31)$$

где AB - произвольная кусочно гладкая кривая, целиком лежащая в D и соединяющая точки A и B этой области. Выясним условия, при которых значение такого интеграла зависит лишь от точек A и B и не меняется при изменении кривой, связывающей точки A и B (в таком случае обычно говорят, что интеграл не зависит от пути интегрирования).

Теорема 3.3. *Для того чтобы значение криволинейного интеграла (3.31) в области D не зависело от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство*

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (3.32)$$

◀ **Необходимость.** Предположим, что значение криволинейного интеграла (3.31) не зависит от пути интегрирования. Произвольный контур L , целиком лежащий в D , двумя любыми точками A и B разделим на две кривые AM_1B и AM_2B (рис. 3.6). Тогда, исходя из предположения, можно записать (аргументы у подынтегральных функций здесь и далее для краткости опущены)



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 126 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

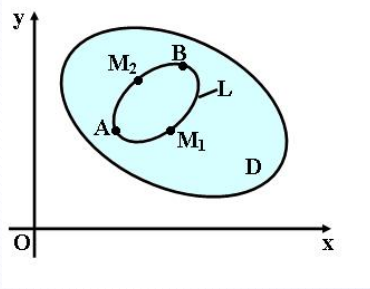


Рис. 3.6

$$\int_{AM_1B} Pdx + Qdy = \int_{AM_2B} Pdx + Qdy.$$

Отсюда, учитывая свойства криволинейного интеграла второго рода, получаем

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy &= \int_{AM_1B} Pdx + Qdy + \int_{BM_2A} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{AM_1B} Pdx + Qdy - \int_{AM_2B} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Страница 127 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 128 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Достаточность. Пусть равенство (3.32) выполнено для любого контура L , целиком лежащего в области D . Выберем произвольные точки A и B в D и соединим их двумя различными кривыми AM_1B и AM_2B , целиком лежащими в D . Из этих кривых можно составить контур L (см. рис. 3.6). В силу предположения и свойства 4 криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{AM_1B} Pdx + Qdy + \int_{BM_2A} Pdx + Qdy = 0.$$

Так как при изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл второго рода меняет знак, из последнего равенства следует, что

$$\int_{AM_1B} Pdx + Qdy = \int_{AM_2B} Pdx + Qdy.$$

Поскольку точки A и B , а также две связывающие их кривые были выбраны произвольно, заключаем, что криволинейный интеграл в области D не зависит от пути интегрирования. ►

Пусть в области D криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не зависит от пути интегрирования. Тогда его значение определяется лишь начальной точкой A и конечной точкой B пути интегрирования. Учитывая это, такой интеграл записывают в виде

$$\int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

рассматривая точки A и B как нижний и верхний пределы интегрирования.

Зафиксируем точку $A \in D$. Тогда криволинейный интеграл от точки A до произвольной точки $M(x; y)$ определяет в области D функцию

$$F(x, y) = \int_A^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (3.33)$$

С помощью этой функции значение криволинейного интеграла можно вычислить для любой пары точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в D , а именно

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \quad (3.34)$$

Действительно, путь интегрирования от точки M_1 до точки M_2 можно выбрать так, что он будет проходить через точку A . Тогда в силу свойства аддитивности интеграл можно представить как сумму двух интегралов, первый - от точки M_1 до точки A , а второй - от точки A до



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 129 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

точки M_2 . Значение первого интеграла с учетом направления будет равно - $F(x_1, y_1)$, значение второго - $F(x_2, y_2)$.

Формулу (3.34) по аналогии с определенным интегралом часто называют *формулой Ньютона - Лейбница для криволинейного интеграла*.

Теорема 3.4. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D , а криволинейный интеграл второго рода от этих функций в области D не зависит от пути, то функция $F(x, y)$, определяемая равенством (3.33), имеет в D непрерывные частные производные, причем

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y), \quad (x; y) \in D.$$

◀ Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка в области D . Выберем $\delta > 0$ настолько малое, что δ -окрестность точки M целиком попадает в область D . Для произвольного приращения $|\Delta x| < \delta$, согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле можно взять горизонтальный отрезок, соединяющий точки $M(x; y)$ и

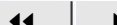


Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 130 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

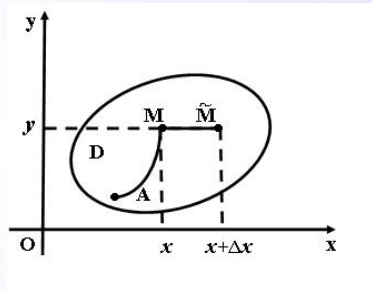


Рис. 3.7

$\widetilde{M}(x + \Delta x; y)$ (рис. 3.7).

В этом случае $dy \equiv 0$, переменное y имеет постоянное значение, и мы получаем

$$\int_{(x;y)}^{(x+\Delta x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y)d\xi,$$

где последний интеграл есть определенный интеграл по отрезку $[x, x + \Delta x]$. Итак, функция $\varphi(\Delta x) = F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$ переменного Δx представлена как определенный интеграл с переменным верхним пределом, причем подынтегральная функция является непрерывной в точке $\xi = x$. Поэтому функция $\varphi(\Delta x)$ дифференцируема при $\Delta x = 0$ и



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 131 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$\varphi'(0) = P(x, y)$. Но последнее равенство и означает, что в точке $M(x; y)$ функция $F(x, y)$ имеет частную производную по переменному x , равную $P(x, y)$.

Аналогичным образом, используя приращение Δy по переменному y , можно показать, что в точке M функция $F(x, y)$ имеет также и частную производную по переменному y , равную $Q(x, y)$. ►

Теорема 3.5. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области D в плоскости xOy . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является в области D полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.
2. Всюду в области D верно равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (3.35)$$

3. Для любого кусочно гладкого контура L , целиком лежащего в области D , верно равенство

$$\oint_L P(x, y) + Q(x, y)dy = 0.$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 132 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

4. Криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области D не зависит от пути интегрирования.

◀ Докажем эту теорему "вкруговую". Сначала покажем, что из первого условия теоремы следует второе. Пусть

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y). \quad (3.36)$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

В силу непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ правые части последних равенств равны между собой, так как непрерывные смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому равны и левые части этих равенств, т.е. выполнено второе условие теоремы.

Покажем теперь, что из второго условия теоремы следует третье. Пусть L - произвольный кусочно гладкий контур, целиком лежащий в области D . Согласно формуле Грина для односвязной области,



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 133 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 134 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\oint_L P(x, y) + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

так как в силу второго условия теоремы подынтегральная функция в двойном интеграле тождественно равна нулю. Итак, доказано, что выполнено третье условие теоремы.

Третье и четвертое условия эквивалентны в силу теоремы 3.3. Пусть выполнено четвертое условие. Согласно теоремы 3.4, функция $F(x, y)$, определяемая равенством (3.33), имеет непрерывные частные производные, равные $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Но тогда эта функция дифференцируема, а ее дифференциал имеет вид

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Это доказывает выполнение первого условия теоремы. ►

Теорема 3.5 дает не только несколько критериев независимости криволинейного интеграла от пути, но и метод, позволяющий восстановить функцию $F(x, y)$ по ее дифференциалу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ называют дифференциальной формой. В теореме 3.4 сформулированы условия, при которых дифференциальная форма является дифференциалом некоторой функции двух переменных.

3.9 Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала

В односвязной плоской области D криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не зависит от пути интегрирования, если подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют в D непрерывные частные производные, то, согласно теореме 3.5, для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, (x; y) \in D.$$

Напомним, что для криволинейных интегралов, не зависящих от пути, используют специальное обозначение

$$I = \int_{A(x_A; y_A)}^{B(x_B; y_B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Основная идея в вычислении таких интегралов состоит в выборе наиболее простого пути интегрирования. Как правило в этом случае в каче-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 135 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

стве пути интегрирования выбирают ломаную AKB , состоящую из двух отрезков прямых, параллельным координатным осям 3.8. Если такой

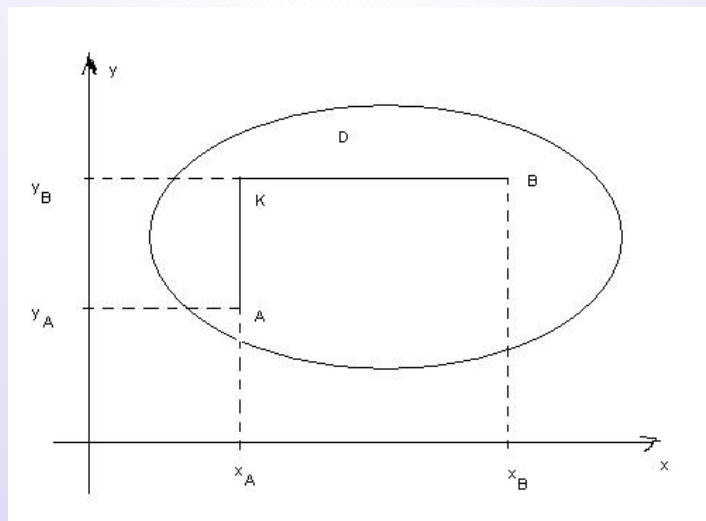


Рис. 3.8

путь интегрирования целиком попадает в область D , то в соответствии



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 136 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

со свойством 4 криволинейного интеграла второго рода можно написать

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AK} Q(x_A, y)dy + \int_{KB} P(x, y_B)dx = \\ &= \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y)dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B)dx \end{aligned}$$

поскольку при интегрировании по отрезку AK имеем $x = x_A = const$, $dx \equiv 0$ и y изменяется от y_A до y_B , а при интегрировании по отрезку KB — $y = y_B = const$, $dy \equiv 0$ и x изменяется от x_A до x_B . Таким образом, получаем формулу

$$\begin{aligned} \int_{(x_A; y_A)}^{(x_B; y_B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y)dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B)dx, \end{aligned} \quad (3.37)$$

которую удобно использовать для вычисления криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала в плоской односвязной области D . Криволинейный интеграл, не зависящий от пути, можно вычислять и с помощью формулы Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла. Это удобно в случае, когда легко найти функцию $F(x, y)$,



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 137 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

дифференциалом которой является подынтегральное выражение. Отметим, что на практике часто решают обратную задачу: с помощью криволинейного интеграла определяют функцию $F(x, y)$.

Пример 3.5. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,3)} ydx + xdy.$$

В этом случае легко сразу указать функцию $F(x, y) = xy$, для которого подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = ydx + xdy.$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$I = xy \Big|_{(1;1)}^{(3;3)} = 9 - 1 = 8.$$

Пример 3.6. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (5x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 138 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

В данном случае $P(x, y) = 5x^4 + 4xy^3$ и $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$. Нетрудно убедиться, что условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено на всей плоскости xOy , т.е. подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Однако, в отличие от примера 3.5, найти эту функцию "с ходу" не удастся. Поэтому прибегаем к непосредственному вычислению интеграла, выбирая путь интегрирования, проходящий сначала вдоль прямой $x = -2$, а затем вдоль прямой $y = 0$. Используя формулу 3.37, находим

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (6(-2)^2y^2 - 5x^4)dy + \int_{-2}^3 5x^4dx = \\ &= (8y^3 - y^5)|_{-1}^0 + x^5|_{-2}^3 = 8 - 1 + 243 + 32 = 282. \end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно задачу восстановления функции $F(x, y)$ по ее полному дифференциалу $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Ясно, что решение такой задачи может быть найдено с точностью до постоянного слагаемого. Применяя формулу Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла в случае фиксированной точки $(x_0; y_0)$ и переменной точки (x, y) , заключаем, что

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 139 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Поскольку искомую функцию можно изменить добавлением произвольной постоянной, то

$$F(x, y) = C + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, C = const. \quad (3.38)$$

Для вычисления криволинейного интеграла в правой части 3.38, как и выше, можно выбрать наиболее удобный путь интегрирования. Например, можно взять двузвенную ломаную из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Тогда 3.38 преобразуется либо в равенство

$$F(x, y) = C + \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy, \quad (3.39)$$

если движение из начальной точки идет по горизонтальному отрезку, либо в равенство

$$F(x, y) = C + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx, \quad (3.40)$$

если начальное движение идет по вертикальному отрезку.

В качестве фиксированной точки (x_0, y_0) можно выбрать любую точку области D .



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 140 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Пример 3.7. Найдём при помощи криволинейного интеграла второго рода функцию $F(x, y)$, если

$$dF(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy.$$

Сначала необходимо убедиться в том, что функция $F(x, y)$ существует. Непосредственной проверкой условия (3.35) убеждаемся, что выражение $(3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$ на всей плоскости xOy является полным дифференциалом.

Полагая, что $x_0 = y_0 = 0$ в равенстве (3.39), получаем

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C + \int_0^x 3x^2 dx - \int_0^y (x^2 - 2xy + 3y^2) dy = \\ &= C + x^3 - x^2y + xy^2 - y^3. \end{aligned}$$

Если же использовать формулу 3.40 при том же предположении $x_0 = y_0 = 0$, получим тот же результат:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C - \int_0^y 3y^2 dy + \int_0^x (3x^2 - 2xy + y^2) dx = \\ &= C - y^3 + x^3 - x^2y + xy^2. \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 141 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 4

Поверхностные интегралы

4.1 О задании поверхности в пространстве

Поверхность в пространстве может быть задана различными способами. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Поверхность в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x, y), (x; y) \in G \subset R^2. \quad (4.1)$$

Аналогичны случаи, отличающиеся другим сочетанием переменных:

$$x = f(y, z), (y; z) \in G_1 \subset R^2, \quad (4.2)$$

или

$$y = f(x, z), (x; z) \in G_2 \subset R^2. \quad (4.3)$$

В этих трех случаях поверхность называют **явно заданной поверхностью**.

Поверхность в пространстве может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4.4)$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 142 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют **неявно заданной поверхностью** . Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (4.5)$$

задает в пространстве R^3 поверхность, представляющую собой сферу радиуса R с центром в начале координат.

Наконец, поверхность S может быть задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u; v) \in D \subset R^2, \\ z = z(x, v), \end{cases} \quad (4.6)$$

где $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ - непрерывные функции в их области определения D . В этом случае говорят о **параметрически заданной поверхности** . Например, сфера радиуса R с центром в начале координат может быть описана не только как неявно заданная поверхность 4.5, но и как поверхность, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v, \\ y = R \sin u \sin v, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v < 2\pi. \\ z = R \cos u, \end{cases}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 143 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Так как между точками пространства и их радиус-векторами установлено взаимно однозначное соответствие (точке $M(x; y; z)$ соответствует ее радиус-вектор $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$), уравнения (4.6) можно записать в виде

$$\vec{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (4.7)$$

Таким образом, мы получаем векторное уравнение поверхности S .

В дальнейшем будем считать, что если поверхность S задана параметрическими уравнениями (4.6), то функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Область определения D функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ является замкнутой ограниченной областью, граница ∂D которой - простой кусочно гладкий контур.
2. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в D , т.е. определены в некоторой области, целиком содержащей D , и имеют в этой области частные производные первого порядка, непрерывные в D .
3. Отображение $F : D \subset R^2 \rightarrow S$, определяемое тремя функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, является инъекцией, т.е. различными точками $(u, v) \in D$ соответствуют различные точки $(x; y; z)$ поверхности S .



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 144 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 145 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Если условие 3 распространяется и на граничные точки области D , то поверхность S будем называть **простой поверхностью**. Множество точек поверхности, соответствующих граничным точкам области D , образует в таком случае **границу** (или **край**) этой **поверхности**. На рис. 4.1, а изображена ограниченная контуром $ABCEA$ замкнутая область

$$D = \{(u, v) : 0 < a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq \pi\} \subset R^2$$

(прямоугольник). Функции $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$, определенные в D , задают простую поверхность, которая представляет собой часть прямого кругового конуса (рис. 4.1, б). Границей (краем) этой поверхности является контур $A'B'C'E'A'$ на конусе, соответствующий контуру $ABCEA$ на плоскости.

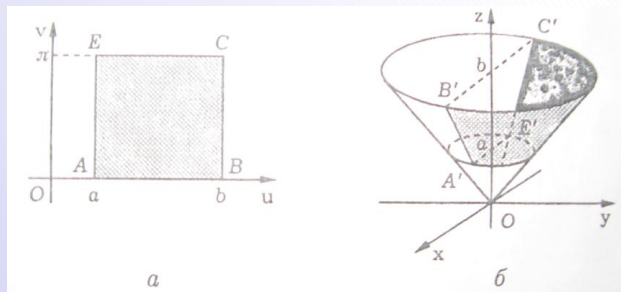


Рис. 4.1

Точки поверхности, не принадлежащие ее границе, называют **внутренними точками поверхности**. Поверхность может не иметь границы. Такую **поверхность** называют **замкнутой**. Примером замкнутой поверхности является сфера.

В каждой внутренней точке гладкой поверхности существуют касательная плоскость и нормаль к этой поверхности.

Касательная плоскость может быть задана общим уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

в котором A, B, C - координаты вектора $\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ нормали к поверхности S в точке $M_0 \in S$, а

$$\vec{r}'_u = x'_u \mathbf{i} + y'_u \mathbf{j} + z'_u \mathbf{k}, \tag{4.8}$$

$$\vec{r}'_v = x'_v \mathbf{i} + y'_v \mathbf{j} + z'_v \mathbf{k},$$

если S задана в векторной форме. Векторы \vec{r}'_u и \vec{r}'_v , отложенные от точки $M_0 \in S$, лежат в касательной плоскости P (рис. 4.2).

4.2 Площадь поверхности

Пусть непрерывно дифференцируемое представление $r(u, v)$ рассматриваемой гладкой поверхности S определено на замыкании \bar{D} квадри-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 146 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 147 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

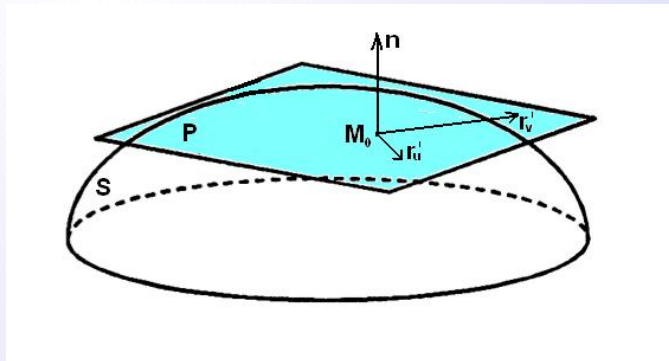


Рис. 4.2:

руемой области D . Рассмотрим разбиение $P_D = \{D_1, \dots, D_n\}$ плоскости переменных u и v на прямоугольники D_r 4.3 в силу отображения $r : D \rightarrow S \subset R^3$ соответствует фигура S_r в которую можно назвать криволинейным параллелограммом (рис. 4.4).

Поскольку

$$r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) = r'_u \Delta u + o(\Delta u), \text{ если } \Delta u \rightarrow 0,$$

$$r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0) = r'_v \Delta v + o(\Delta v), \text{ если } \Delta v \rightarrow 0,$$

смещению от M_0 на вектор $\overrightarrow{M_0 M_1} = (\Delta u, 0)$ в R^3 отвечает такое смещение от точки $r(u_0, v_0)$, которое при $\Delta u \rightarrow 0$ можно с точностью до $o(\Delta u)$ частным дифференциалом $r'_u \Delta u$, а смещению от M_0 на вектор $\overrightarrow{M_0 M_2} = (\Delta u, \Delta v)$ отвечает в R^3 также смещение от точки $r(u_0, v_0)$,



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 148 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

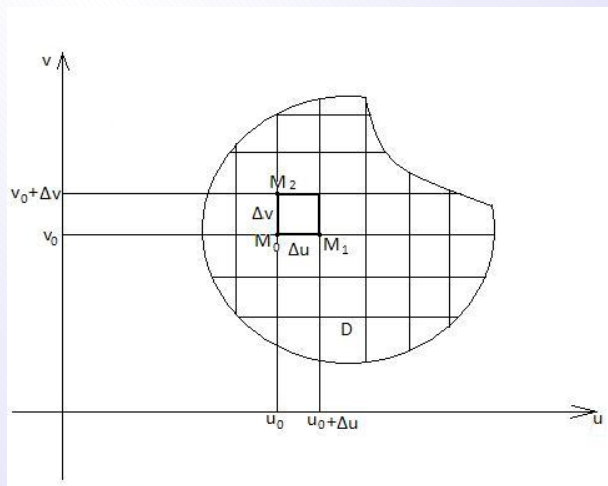


Рис. 4.3

которое при $\Delta v \rightarrow 0$ можно с точностью до $o(\Delta v)$ заменить частным дифференциалом $r_v \Delta v$. Таким образом, при малых значениях Δu , Δv , т. е. при $d(P) \rightarrow 0$ криволинейный параллелограмм мало отличается от параллелограмма, натянутого на вектора $r_u \Delta u$ и $r_v \Delta v$, касательные к поверхности S в точке $r(u_0, v_0)$.

Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначив ее через ΔS_v^* , получим



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 149 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

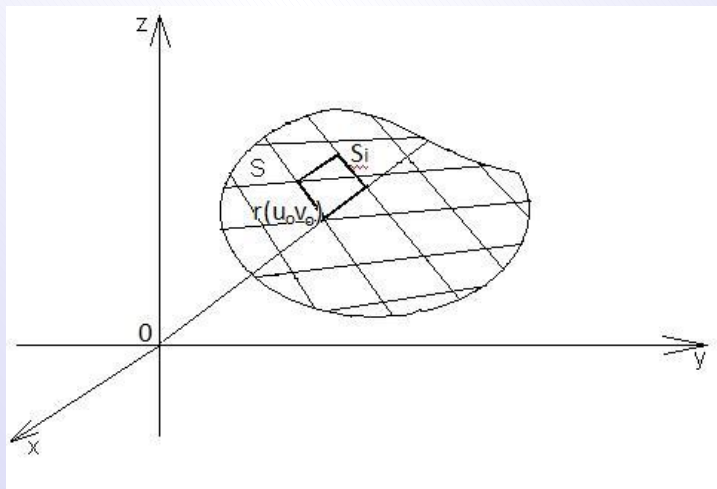


Рис. 4.4

$$\Delta S_v^* = |r_u \Delta u \times r_v \Delta v|_{m_0} = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v.$$

Функции r_u и r_v непрерывны на замкнутой квадратуемой

поэтому

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i^* = \iint_D |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v.$$

\bar{D} ,

Определение 4.1. Площадь заданной в параметрическом виде глад-

кой поверхности S лежащей в пространстве R^3 , называется величина

$$S = \iint_D |r'_u \times r'_v|_{m_0} \Delta u \Delta v. \quad (4.9)$$

Введем функции (коэффициенты Гаусса)

$$\begin{aligned} E &= (r'_u)^2 = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \\ F &= r'_u r'_v = x_u x'_v + y_u y'_v + z_u z'_v, \\ G &= (r'_v)^2 = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

В этих обозначениях формула 4.9 принимает вид

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (4.11)$$

Действительно для любых векторов \vec{a} и \vec{b} справедливы формулы

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \times |\vec{b}| \sin(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \vec{b} &= |\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}), \end{aligned}$$

где $\vec{a}; \vec{b}$ - угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

В силу (4.10) отсюда следует, что

$$|r'_u \times r'_v|^2 = r_u'^2 r_v'^2 - |r'_u r'_v|^2 = EG - F^2,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 150 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

поэтому формула 4.9 может быть заменена в виде 4.11.

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{EG - F^2}dudv$ обозначается символом dS :

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv. \quad (4.12)$$

и называется элементом площади поверхности. Применяя это обозначение, формулу (4.11) можно переписать в виде

$$S = \iint_D dS. \quad (4.13)$$

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset R^2$. В этом случае $x = u$, $y = v$, т.е.

$$r = (x, y, f(x, y)), r_x = (1, 0, f_x(x, y)), r_y = (0, 1, f_y(x, y)) \text{ и}$$
$$E = r_u^2 = 1 + f_x^2, G = r_v^2 = 1 + f_y^2, F = r_u r_v = f_x f_y,$$
$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2;$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (4.14)$$

В случае, если поверхность задана уравнением $F(x, y) = 0$, то нетрудно проверить, что для нахождения площади поверхности можно воспользоваться формулой



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 151 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'|} dx dy. \quad (4.15)$$

Пример 4.1. Найдем площадь части боковой поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, вырезаемой из нее цилиндром $x^2 - ax + y^2 = 0$. Обозначим часть боковой поверхности конуса, вырезаемую из нее цилиндром, через Σ . Если перейти к цилиндрическим координатам, то поверхность Σ можно задать параметрическими уравнениями $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = r$, $(r, \phi) \in D$, $D = \{(r, \phi) | 0 \leq r \leq a \cos \phi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Найдем коэффициенты Гаусса для этой поверхности:

$$\vec{r}' = (r \cos \phi, r \sin \phi, r), r'_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0), r'_r = (\cos \phi, \sin \phi, 1),$$

$$E = r_\phi'^2 = r^2, F = \vec{r}'_\phi \cdot \vec{r}'_r = 0, G = r_r'^2 = 2, \sqrt{EG - F^2} dr d\phi = r\sqrt{2} dr d\phi.$$

Применяя формулу 4.11, получим

$$S(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2} r dr d\phi = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \phi} r dr = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}.$$

43 Поверхностный интеграл первого рода

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой такое же естественное обобщение двойного интеграла, каким является криволи-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 152 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

нейный интеграл первого рода по отношению к обычному определенному интегралу.

Введем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть на некоторой гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S , ограниченной контуром L , определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Выберем разбиение поверхности S на конечное число частичных областей $S_i, i = \overline{1, n}$ с площадями ΔS_i . В каждой частичной области S_i возьмем производную точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$.

Пусть d – максимальный из диаметров d_i частичных областей $S_i, i = \overline{1, n}$. Сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (4.16)$$

назовем интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S .

Определение 4.2. Если интегральная сумма 4.16 при $D \rightarrow 0$ имеет конечный предел I , не зависящий ни от способа разбиения поверхности S на частичные области $S_i \subset S, i = \overline{1, n}$, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, то этот предел называют поверхностью интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначают

$$I = \int_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (4.17)$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 153 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Теорема 4.1. (без доказательства) Пусть S — гладкая поверхность задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках поверхности S . Тогда поверхностный интеграл первого рода 4.17 существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad (4.18)$$

где функции E , G и F определены соотношением 4.10.

Если же поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то элемент площади поверхности $dS = \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2 + \varphi'_y{}^2} dx dy$ и формула 1.3 примет вид:

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2 + \varphi'_y{}^2} dx dy. \quad (4.19)$$

Пример 4.2. Найдем положение центра тяжести однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 154 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Без ограничения общности считаем, что плотность $p = 1$.
 Параметризуем полученную сферу

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, y = R\sin\varphi\cos\psi, z = R\sin\psi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

находим $EG - F^2$

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\cos\psi, R\cos\varphi\cos\psi, 0),$$

$$r'_\psi = (-R\cos\varphi\sin\psi, -R\sin\varphi\sin\psi, R\cos\psi),$$

$$E = R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi,$$

$$G = R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + R^2\cos^2\psi = R^2.$$

$$F = r'_\varphi r'_\psi = R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi - R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi = 0$$

Тогда $\sqrt{EG - F^2} = R^2\cos\psi$ Масса полусферы

$$M = \iint_S p dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\psi d\psi = 2\pi R^2.$$

Координата Z_c центра тяжести есть

$$Z_c = \frac{1}{M} \iint_S z dS = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} z d\psi =$$



Кафедра

математического
 анализа и диф-
 ференциальных
 уравнений

Начало

Содержание



Страница 155 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos\psi \sin\psi d\psi = \frac{R}{2}.$$

В силу симметрии полусферы $x_c = y_c = 0$. Итак, центр тяжести находится в точке $C(0; 0; \frac{R}{2})$

Пример 4.3. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$ по кусочно-гладкой поверхности S , являющейся границей тетраэдра $V = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Решение. Граница V состоит из четырех треугольных граней: грань S_1 лежит в плоскости $z = 0$, грань S_2 лежит в плоскости $y=0$, грань S_3 лежит в плоскости $x=0$, а грань S_4 — в плоскости $x + y + z = 1$.

Обозначим поверхностные интегралы по соответствующим граням через I_1, I_2, I_3, I_4 .

Воспользовавшись формулой 4.19, получаем

$$I_1 = \iint_{S_1} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

В силу симметрии

$$I_2 = I_3 = \iint_{S_2} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \iint_{S_2} \frac{dydz}{(1+y)_2} = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} \int_0^{1-y} dz = 1 - \ln 2.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 156 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Уравнение грани S_4 можно записать в виде $z = 1 - x - y$, $(x, y) \in S_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, $z'_x = -1$, $z'_y = -1$, $dS = \sqrt{3}dxdy$.
 Воспользовавшись формулой 4.19, получаем

$$I_4 = \iint_{S_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{S_1} \frac{\sqrt{3}dS}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}I_1.$$

Складывая интегралы, находим значение интеграла I :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (1 + \sqrt{3})I_1 + 2I_2 = (1 + \sqrt{3})(\ln 2 - \frac{1}{2}) + 2(1 - \ln 2).$$

44 Ориентация кусочно-гладкой поверхности

Если поверхность задана явно, например, уравнением $Z = Z(x, y)$, то можно говорить о ее верхней или нижней стороне. Замкнутая поверхность ограничивает замкнутую область в пространстве, и можно различать внутреннюю и внешнюю стороны поверхности.

Рассмотрим гладкую поверхность S , замкнутую или же ограниченную кусочно-гладким контуром L . В каждой внутренней точке такой поверхности существует касательная плоскость и нормальный вектор. Нормальный вектор может иметь одно из двух возможных направлений. Пусть в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхность задана параметрически уравнениями 4.6. Тогда в качестве единичного вектора нормали



Кафедра

математического
 анализа и диф-
 ференциальных
 уравнений

Начало

Содержание



Страница 157 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

можно выбрать вектор

$$n = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}, \quad (4.20)$$

где векторы r'_u и r'_v определены соотношениями 4.8. Вектор n является непрерывной функцией в некоторой окрестности точки M_0 .

Выбор единичного вектора нормали позволяют задать сторону поверхности в окрестности точки M_0 . Для выбора противоположной стороны достаточно взять вектор с противоположным знаком.

Если в каждой точке поверхности можно выбрать единичный вектор нормали так, что получится векторная функция, непрерывная на всей поверхности, то такую поверхность называют двусторонней поверхностью.

Пример 4.4. а) Явно заданную поверхность $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, где функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в D , можно записать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v), (u, v) \in D. \end{cases}$$

При таком описании поверхности

$$r'_u = i + f'_u(u, v)k, r'_v = j + f'_v(u, v)k, r'_u \times r'_v = -f'_u(u, v)i - f'_v(u, v)j + k.$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 158 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

После нормировки

$$n = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|} = \frac{-f'_u i - f'_v j + k}{\sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}}. \quad (4.21)$$

Явно заданная поверхность $Z = f(u, v)$, $(u, v) \in D$, является двусторонней.

б) Пусть поверхность S задана неявно уравнением 4.4, в котором функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $G \subset R_3$. Если в каждой точке $(x, y, z) \in S$ градиент функции $F(x, y, z)$ отличен от нуля, то поверхность S является гладкой. При этом вектор

$$F'_x(x, y, z)i + F'_y(x, y, z)j + F'_z(x, y, z)k$$

есть нормальный вектор касательной плоскости к поверхности S в точке $(x, y, z) \in S$. Нормируя этот вектор, получим единичный вектор нормали к поверхности S

$$n = \frac{F'_x i + F'_y j + F'_z k}{\sqrt{F'^2_x i + F'^2_y j + F'^2_z k^2}}. \quad (4.22)$$

В данном случае поверхность S является двусторонней (ориентируемой).



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 159 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 160 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Остановимся на частном случае — сфере радиуса R , заданный уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В этом случае $F(x, y, z) = -R^2$ — непрерывно дифференцируемая в R^3 функция. Непрерывная функция единичной нормали к поверхности имеет вид

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{R}i + \frac{y}{R}j + \frac{z}{R}k$$

Эта функция определяет внешнюю сторону сферы. Если (S, \mathbf{n}) — ориентируемая поверхность и $\cos \gamma = \cos(\mathbf{n}, O_z) > 0$ в каждой точке $M \in S$, то S - верхняя сторона поверхности, если $\cos \gamma < 0$, то S - называют нижней стороной поверхности. Аналогично сторону поверхности (S, \mathbf{n}) называют правой, когда $\cos \alpha = \cos(\mathbf{n}, O_x) > 0$ и левой, если $\cos \alpha = \cos(\mathbf{n}, O_x) < 0$.

В частности, если поверхность S задана явной функцией $x = x(y, z)$, т.е. $S = \{r(y, z) = \{x(y, z), y, z\}, (y, z) \in D$, после единичных нормалей $\mathbf{n} = \frac{r'_y \times r'_z}{|r'_y \times r'_z|} = \frac{i - x'_y j - x'_z k}{\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}}$ задает правую, а после $\mathbf{n} = \frac{r'_y \times r'_z}{|r'_y \times r'_z|} = \frac{-i + x'_y j + x'_z k}{\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}}$ задает левую сторону поверхности S .

45 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть S - кусочно гладкая ограниченная двусторонняя поверхность. Выберем одну из сторон поверхности S с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$ нормали к этой поверхности. Координатами вектора \mathbf{n}

являются его *направляющие косинусы* $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, представляющие собой функции точки поверхности. Зададим на поверхности S три функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Поверхностный интеграл первого рода вида

$$\iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS. \quad (4.23)$$

называют **поверхностным интегралом второго рода** от функций P, Q, R .

Поверхностный интеграл второго рода фактически представляет собой сумму трех отдельных интегралов, соответствующих трем подынтегральным функциям $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Рассмотрим первый из этих интегралов. Входящее в него выражение $\cos \alpha dS$ можно рассматривать как проекцию элемента площади dS на координатную плоскость yOz . Это позволяет $\cos \alpha dS$ заменить элементом площади $dydz$ на координатной плоскости yOz и записать интеграл в виде

$$\iint_S P(x, y, z) dydz.$$

Аналогичным образом можно обозначить две другие составляющие поверхностного интеграла, а весь поверхностный интеграл можно представить в виде



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 161 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy. \quad (4.24)$$

Сформулируем свойства поверхностного интеграла второго рода на примере одного его слагаемого, соответствующего функции $R(x, y, z)$.

1. При изменении стороны поверхности интеграл меняет знак.
2. Интеграл от линейной комбинации m функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций:

$$\iint_S \sum_{j=1}^m \alpha_j R_j(x, y, z)dxdy = \sum_{j=1}^m \alpha_j \iint_S R_j(x, y, z)dxdy, \quad \alpha_j \in R.$$

3. Если поверхность S разбита на конечное число N частей $S_k \subset S$, $k = \overline{1, N}$, не имеющих общих *внутренних точек*, то

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} R(x, y, z)dxdy.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 162 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

4. Интеграл

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy$$

по любой цилиндрической поверхности S с образующими, параллельными оси Oz , равен нулю.

Интеграл 4.23 по выбранной стороне поверхности S является поверхностным интегралом первого рода от функции $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$. Поэтому для его вычисления можно использовать формулы 4.18 или 4.19.

Предположим, что гладкая двусторонняя поверхность S без особых точек задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset R^2.$$

Пусть A, B, C - координаты вектора нормали $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ к поверхности, где векторы \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v вычислены по формулам 4.8. Тогда получаем

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 163 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Используя 4.18, находим

$$\int_S P \cos \alpha dS = \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A(u, v) dudv, \quad (4.25)$$

$$\int_S Q \cos \beta dS = \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B(u, v) dudv, \quad (4.26)$$

$$\int_S P \cos \gamma dS = \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v) dudv. \quad (4.27)$$

Если гладкая поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D_{xy} \subset R^2$, и выбрана ее верхняя сторона, т.е. единичный вектор \mathbf{n} нормали образует с осью Oz острый угол, то

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 164 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Поэтому для верхней стороны поверхности получаем

$$\int_S R \cos \gamma dS = \iint_S R dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (4.28)$$

Для нижней стороны поверхности знак $\cos \gamma$ обратный, и поэтому в правой части 4.28 перед интегралом следует поставить знак минус:

$$\int_S R \cos \gamma dS = \iint_S R dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (4.29)$$

Аналогично можно вычислить два остальных интеграла 4.23, если гладкая поверхность S задана уравнением $x = x(y, z)$, $(y; z) \in D_{yz}$, или $y = y(x, z)$, $(x; z) \in D_{xz}$.

Пример 4.5. Вычислим поверхностный интеграл второго рода $\iint_S z dx dy$ по нижней стороне части S конуса, заданной уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. Проекцией этой части конуса на координатную плоскость xOy является замкнутый круг

$$D_{xy} = \{(x; y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 165 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Используя 4.29 и переходя к полярным координатам, находим

$$\iint_S z dx dy = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = -\frac{2\pi}{3}.$$

Пример 4.6. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_S y dz dx$$

по верхней стороне части S параболоида $z = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (рис. 4.5, а).

Разобьем поверхность S координатной плоскости xOz на две части S_1 и S_2 , расположенные по разные стороны от этой плоскости. Поверхности S_1 и S_2 представляют собой графики функций $y = \sqrt{z - x^2}$ и $y = -\sqrt{z - x^2}$. Эти функции имеют общую область определения D_{zx} - проекцию поверхности S на плоскость xOz , которая описывается неравенствами $0 \leq z \leq 2$, $z \geq x^2$ (рис. 4.5, б).

В соответствии со свойством 3 поверхностного интеграла второго рода запишем

$$\iint_S y dz dx = \iint_{S_1} y dz dx + \iint_{S_2} y dz dx.$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 166 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

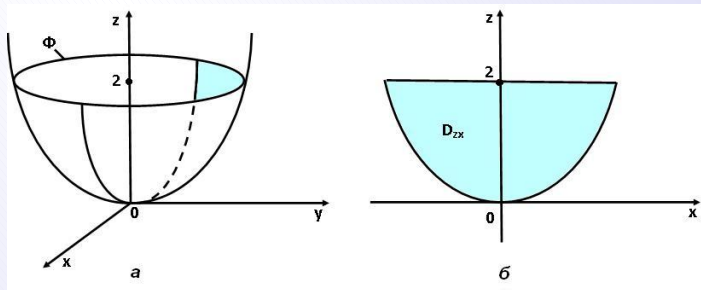


Рис. 4.5

Выбор верхней стороны поверхности S означает выбор левой стороны S_1 и правой стороны S_2 . Для поверхности S_1 с выбранной стороной имеем

$$\iint_{S_1} y dz dx = \iint_{S_{D_{zx}}} y dz dx,$$

где левая часть равенства - это поверхностный интеграл, а правая часть - двойной. Вычислим двойной интеграл:

$$\iint_{D_{zx}} y dz dx = - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z - x^2} dz =$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 167 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$-\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (z - x^2)^{3/2} \Big|_{x^2}^2 dx = -\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} dx.$$

Определенный интеграл от функции $(2 - x^2)^{3/2}$ вычислим с помощью тригонометрической замены $x = \sqrt{2} \sin t$ (при этом $dx = \sqrt{2} \cos t dt$). В результате получим

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} dx = \\ & = -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^4 t dt = -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt = \\ & = -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \cos 2t + \frac{1 + 2 \cos 4t}{2}\right) dt = -\pi. \end{aligned}$$

Для поверхности S_2 с выбранной стороной (правой) имеем

$$\iint_S y dz dx = \iint_{D_{xz}} y dz dx = - \iint_{D_{xz}} \sqrt{z^2 - x^2} dz dx.$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 168 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Вычисления аналогичны предыдущим и дают тот же результат $-\pi$. Таким образом,

$$\iint_S y dz dx = -2\pi.$$

4.6 Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Рассмотри задачу о нахождении количества жидкости, протекающей за единицу времени через заданную поверхность Φ (в этом случае говорят о расходе жидкости через Φ). Предположим, что плотность жидкости постоянна, поверхность проницаема для жидкости и процесс течения жидкости установившийся, т.е. вектор v ее скорости в каждой точке M пространства не изменяется во времени.

Если поверхность Φ площадью S является частью плоскости, а вектор v перпендикулярен этой плоскости, то объемный расход жидкости через Φ , т.е. ее объем, протекающий через Φ в единицу времени, равен $Q = |v|S$. Если же вектор v составляет угол ϕ с вектором нормали к этой плоскости, то $Q = |v|S \cos \phi$. Ясно, что в зависимости от выбора направления вектора нормали к плоскости расход может быть положительным, отрицательным, а в частном случае и равным нулю.

Пусть теперь Φ - некоторая *гладкая поверхность* и в каждой точ-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 169 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 170 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

ке $M(x; y; z) \in \Phi$ задан вектор скорости с помощью векторной функции $v(M) = v(x, y, z)$. Выберем разбиение поверхности Φ на n частичных областей Φ_i с площадями ΔS_i и диаметрами $d_i, i = \overline{1, n}$, и в каждой частичной области Φ_i рассмотрим произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Естественно считать, что при малых значениях диаметров d_i каждую частичную область Φ_i можно заменить его проекцией на *касательную плоскость* к поверхности Φ в точке M_i . Кроме того, предполагаем, что в пределах частичной области Φ_i вектор скорости жидкости можно считать постоянным и равным $v(M_i)$. При этих предположениях объемный расход жидкости через поверхность Φ_i в выбранном направлении единичного вектора $n(M_i)$ нормали к поверхности в точке M_i равен

$$Q_i \approx |v(M_i)| \cos \phi_i \Delta S_i, i = \overline{1, n},$$

где ϕ_i - угол между векторами $v(M_i)$ и $n(M_i)$, а общий расход через всю поверхность Φ равен

$$Q \approx \sum_{i=1}^n |v(M_i)| \cos \phi_i \Delta S_i.$$

Ясно, что точность последнего соотношения будет тем выше, чем мельче разбиение поверхности Φ на частичные области. По определению полагают

$$Q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |v(M_i)| \cos \phi_i \Delta S_i, \quad (4.30)$$

где $d = \max_{i=1, n} d_i$.

Пусть $\cos \alpha(M_i)$, $\cos \beta(M_i)$, $\cos \gamma(M_i)$ - направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}(M_i)$, так что

$$\mathbf{n}(M_i) = \cos \alpha(M_i)\mathbf{i} + \cos \beta(M_i)\mathbf{j} + \cos \gamma(M_i)\mathbf{k},$$

а $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ - координаты вектора $\mathbf{v}(M)$ скорости жидкости, т.е.

$$\mathbf{v}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}. \quad (4.31)$$

Тогда

$$|\mathbf{v}(M_i)| \cos \varphi_i = \mathbf{v}(M_i)\mathbf{n}(M_i) = P(M_i) \cos \alpha(M_i) + \\ + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i), \quad M_i \in \Phi_i.$$

Подставляя это равенство в (4.30), согласно определениям *поверхностного интеграла первого рода* и *поверхностного интеграла второго рода*, приходим к следующему:

$$Q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (P(M_i) \cos \alpha(M_i) + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i)) \Delta S_i =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 171 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 172 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$= \int_{\Phi} (P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \cos \beta(M) + R(M) \cos \gamma(M)) dS.$$

Поэтому для объемного расхода жидкости, протекающей через поверхность Φ и имеющей вектор скорости $\mathbf{v}(M)$ вида (4.31), можем записать

$$Q = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

Выбор стороны поверхности Φ , определяемый выбором единичного вектора нормали этой поверхности, влияет на знак объемного расхода жидкости.

4.7 Формула Стокса

Пусть гладкая двусторонняя поверхность Φ , ограниченная гладким контуром L , задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

$(u, v) \in D$ с помощью функций $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $D \subset R^2$, ограниченной гладким контуром L^* . Контур L^* при отображении, определяемом функциями $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, соответствует контуру L , ограничивающий поверхность Φ . Обходу контура L^* на плоскости отвечает обход контура L , и наоборот. Условия считать положительными такое направление обхода контура L , которому соответствуют положительные направления обхода контура L^* . Если единичный вектор n определить формулой 4.20, то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора n . Таким образом, положительное направление обхода границ поверхности согласуется с выбором ее стороны. Как и ранее, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющий косинус вектора n в произвольной точке поверхности Φ .

Теорема 4.2. Пусть в некоторой пространственной области G , целиком содержащей поверхность Φ , заданы непрерывные дифференцируемые функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$. Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Phi} ((Q'_x - P'_y) \cos \gamma + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (R'_y - Q'_z) \cos \alpha) dS, \quad (4.32)$$

где обход контура L при выбранной стороне поверхности Φ происходит в положительном направлении.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 173 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Эту формулу, используя *поверхностный интеграл второго рода*, можно следующим образом:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz. \quad (4.33)$$

Докажем, что

$$\oint_L Pdx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (4.34)$$

Сначала преобразуем *криволинейный интеграл второго рода* по контуру L в левой части (4.34). Пусть контур L^* , ограничивающий область D , задан параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in T = [t_1, t_2]$, где $u(t)$ и $v(t)$ - функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда параметрические уравнения, задающие контур L , примут вид

$$x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t)), t \in T.$$

В соответствии с правилами вычисления криволинейного интеграла второго рода, запишем

$$\oint_L Pdx = \int_{t_1}^{t_2} P \left(\frac{\partial x}{\partial y} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt =$$

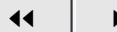


Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 174 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \oint_{L^*} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right).$$

К интегралу в правой части этого равенства применим *формулу Грина для односвязной области*:

$$\begin{aligned} \oint_{L_*} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv = \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) dudv - \\ &- \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) dudv \Big). \end{aligned}$$

Так как смешанные производные функции $x(u, v)$ непрерывны, верно равенство $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$. Поэтому после упрощения получим

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv - \\ &- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv = \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 175 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

что доказывает равенство 4.34. Аналогично можно доказать, что

$$\oint_L Q dy = \iint_{\Phi} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz, \quad (4.35)$$

$$\oint_L R dz = \iint_{\Phi} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz. \quad (4.36)$$

Складывая 4.34 - 4.36, получаем формулу Стокса 4.33. Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через общий поверхностный интеграл второго рода по поверхности Φ , ограниченной этим контуром (иногда говорят "опирающийся на контур L "). Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости xOy , то формула Стокса переходит в формулу Грина. Как и формула Грина, формула Стокса обобщается на случай, когда поверхность ограничена несколькими кусочно гладкими контурами. При этом в левой части равенства 4.32 появляется сумма криволинейных интегралов по граничным контурам, проходимым в положительном направлении, т. е. так, что при обходе каждого контура поверхность остается слева, если смотреть с конца выбранного вектора нормали к поверхности. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограничен-



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 176 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

ных несколькими контурами, аналогично доказательству формула Грина для многосвязных областей.

Пример 4.7. Вычислим двумя способами (непосредственным подсчетом криволинейного интеграла второго рода и по формуле Стокса) криволинейный интеграл

$$I = \oint_L ydx + z^2dy + x^2dz,$$

где L - окружность, по которой плоскость $z = \sqrt{3}$ пересекает сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Подставляя в уравнение сферы значение $z = \sqrt{3}$, получаем $x^2 + y^2 = 1$, т. е. радиус окружности L равен единице. Чтобы вычислить криволинейный интеграл непосредственно, составим параметрические уравнения окружности L :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0, 2\pi]. \\ z = \sqrt{3}, \end{cases}$$

Из параметрических уравнений находим $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ и $dz = 0$ Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, по-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 177 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

лучим

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3 \cos t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = -\pi.$$

Чтобы вычислить криволинейный интеграл с помощью формулы Стокса, положим $P = y$, $Q = z^2$, $R = x^2$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z.$$

Согласно 4.33, рассматриваемый криволинейный интеграл сводится к поверхностному интегралу

$$I = - \iint_{\Phi} dx dy + 2x dz dx + 2z dy dz, \quad (4.37)$$

где Φ - произвольная гладкая поверхность, ограниченная контуром L . Рассмотрим два варианта такой поверхности: верхний сегмент сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, на которой расположен контур L , и круг в плоскости $z = \sqrt{3}$, ограниченный контуром L .

Сначала вычислим поверхностный интеграл по верхнему сегменту сферы. Чтобы направление обхода контура L было положительным, на сегменте сферы следует выбрать верхнюю сторону. Проекциями сегмента сферы Φ на координатные плоскости будут области

$$D_{xy} = \{(x; y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 178 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 179 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$D_{xz} = \{(x; z) \in R^2; -\sqrt{4 - z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\},$$

$$D_{yz} = \{(y; z) \in R^2 : -\sqrt{4 - z^2} \leq y \leq \sqrt{4 - z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\}.$$

На область D_{yz} проектируются две части поверхности, на которые она разделяется плоскостью yOz . Одна из этих частей описывается уравнением $x = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$, и для нее $\cos \alpha \geq 0$, а другая - уравнением $x = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, и для нее $\cos \alpha \leq 0$. Поэтому для входящего в 4.37 поверхностного интеграла второго рода от функции $2z$ получаем

$$\iint_{\Phi} 2z dy dz = 2 \iint_{D_{yz}} z dy dz - 2 \iint_{D_{yz}} z dy dz = 0.$$

Аналогично для области D_{xz} имеем

$$\iint_{\Phi_{hi}} 2x dz dx = 2 \iint_{D_{xz}} x dz dx - 2 \iint_{D_{xz}} x dz dx = 0.$$

Учитывая, что $\cos \gamma > 0$ для выбранной стороны сегмента сферы, найдем

$$\iint_{\Phi} dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi,$$

поскольку область D_{xy} есть круг радиуса 1 с площадью π . Подставляя полученные результаты в 4.37, приходим к полученному ранее результату $I = -\pi$. Теперь вычислим поверхностный интеграл 4.37 по верхней

стороне круга $x^2 + y^2 \leq 1$ в плоскости $z = \sqrt{3}$. В этом случае $dz = 0$, и поэтому получаем

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{\Phi} dx dy + 2x dz dx + 2z dy dz = \\ &= - \iint_{\Phi} dx dy = - \iint_{D_{xy}} dx dy = -\pi. \end{aligned}$$

. Итак, все три способа вычисления рассматриваемого криволинейного интеграла дали одинаковый результат.

4.8 Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве

Для криволинейных интегралов второго рода общего вида вдоль пространственной кривой AB можно сформулировать условия независимости их от пути интегрирования, аналогичные тем, которые были установлены для криволинейного интеграла второго рода от пути на плоскости.

Пространственную область G назовем поверхностно односвязной, если любой контур L , целиком лежащий в G , является границей некоторой поверхности, лежащей в G . Примером поверхностно односвязной области является шар. Поверхностно односвязной областью является также



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 180 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

полный шар, т.е. область, заключенная между двумя концентрическими сферами. К поверхностно односвязным не относится область внутри тора - поверхности, образованной вращением окружности вокруг оси, которая расположена в плоскости окружности и с окружностью не пересекается.

Теорема 4.3. Пусть G - поверхностно односвязная область в пространстве и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в G . Тогда следующие четыре условия эквивалентны.

1. Выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом dF некоторой функции $F(x, y, z)$, дифференцируемой в G .

2. В области G верны равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.38)$$

3. Для любого кусочно гладкого контура L , целиком лежащего в области G , справедливо равенство

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \quad (4.39)$$

4. Для любых двух точек A и B в области G криволинейный инте-



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 181 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

грал второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не зависит в этой области от пути интегрирования.

Доказательство этой теоремы можно провести "в круговую" аналогично доказательству теоремы на плоскости для криволинейного интеграла второго рода, с той лишь разницей, что нужно опереться на формулу Стокса, а не на формулу Грина, которая по сути является частным случаем формулы Стокса. Отметим, что если криволинейный интеграл в пространстве не зависит от пути интегрирования, то, как и в плоском случае, в его обозначении указывают лишь начальную и конечную точки кривой. При этом для любой кусочно гладкой кривой AB с начальной точкой $A(x_A, y_A, z_A)$ и конечной точкой $B(x_B, y_B, z_B)$, целиком лежащей в G , имеет место формула Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла вдоль пространственной кривой

$$\begin{aligned} & \int_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = F(x_B, y_B, z_B) - F(x_A, y_A, z_A) = F(x, y, z) \Big|_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)}, \end{aligned} \quad (4.40)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 182 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 183 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

где $F(x, y, z)$ - произвольная функция, имеющая дифференциал $dF = Pdx + Qdy + Rdz$. Такую функцию можно найти, как и в случае плоской области, интегрированием по отрезкам прямых, параллельных координатным осям. Можно использовать формулу

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = C + \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \\ + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz, \quad (4.41)$$

где $C = const$, а (x_0, y_0, z_0) - какая-нибудь фиксированная точка области G . Приведенная формула соответствует интегрированию вдоль трехзвенной ломаной, первое звено которой параллельно оси Ox , второе - оси Oy , а третье - оси Oz . Применение формулы возможно в том случае, когда эта ломаная целиком попадает в область G .

4.9 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами. Аналогичная связь существует между по-

верхностным интегралом и тройным интегралом. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, введем одно понятие.

Пространственную область G назовем объемно односвязной, если для любой замкнутой поверхности, лежащей в G , ограничиваемая этой поверхностью область также целиком лежит в G . Объемно односвязными областями являются шар и внутренность тора (часто также называемая тором), в то время как полый шар (область между двумя концентрическими сферами) к объемно односвязным областям не относится.

Предположим, что замкнутая пространственная область G может быть разделена на конечное число областей, правильных в направлении оси Ox . Пусть аналогичное свойство выполняется и в отношении двух других осей Oy и Oz . Такую область мы будем называть простой.

Теорема 4.4. Если функция $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в объемно односвязной области G , то для любой простой замкнутой области $V \subset G$, ограниченной кусочно гладкой замкнутой поверхностью Φ , верна формула Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (4.42)$$

где поверхностный интеграл второго рода вычисляется по внешней стороне поверхности Φ .



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 184 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

◀ Формула Остроградского-Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P , Q и R . Эти три равенства доказываются схожим образом, и мы остановимся на одном из них, например на равенстве

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz. \quad (4.43)$$

Рассматриваемое равенство обладает свойством аддитивности. Это означает, что если замкнутая область V разбита на частичные области V_k , $k = \overline{1, m}$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k , и для этих замкнутых областей доказываемое равенство будет выполняться и для самой области V . Действительно, пусть

$$\iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy = \iiint_{V_k} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz, \quad k = \overline{1, m}.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \iint_{\Phi_k} R(x, y, z) dx dy &= \sum_{k=1}^m \iiint_{V_k} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 185 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 186 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ , так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k , не входящим в поверхность Φ , интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Так как замкнутая область V является простой, ее можно разбить на частные области $V_k, k = \overline{1, m}$, являющиеся правильными в направлении оси Oz . Таким образом, равенство 4.43 достаточно доказать для случая замкнутой области, правильной в направлении оси Oz .

Итак, пусть замкнутая область $V \subset G$ является правильной в направлении оси Oz . Это значит, что она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены в замкнутой области D_{xy} на плоскости и удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y), (x; y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующими, параллельными оси Oz . По правилу вычисления тройного интеграла по правильной области V имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Полученные двойные интегралы по области D_{xy} можно заменить рав-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 187 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

ными им поверхностными интегралами второго рода по поверхностям Φ_2 и Φ_1 , причем для учета знаков двойных интегралов для поверхности Φ_2 нужно выбрать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 - нижнюю. К этим интегралам добавим равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой поверхности Φ_3 (цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz). В итоге получим

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Phi_2} R dx dy + \iint_{\Phi_3} R dx dy = \iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy,$$

что равносильно 4.43. ►

Формулу Остроградского-Гаусса можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \oint_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS &= \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности Φ .

Формула Остроградского-Гаусса используется во многих приложениях. Одно из ее возможных применений - вычисление интегралов по замкнутым поверхностям сведением их к тройному интегралу или, наобо-

рот, вычисление тройных интегралов с помощью поверхностных (аналогично тому, как площадь плоской области может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла). Правая часть формулы 4.42 Остроградского-Гаусса равна объему замкнутой области V , если функции P, Q, R удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1. \quad (4.45)$$

Например, объем области V , который обозначим также через V , можно найти при помощи поверхностного интеграла

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Phi} xdydz + ydzdx + zdx dy, \quad (4.46)$$

вычисляемого по внешней стороне замкнутой поверхности Φ , ограничивающей эту область. Нетрудно выписать целый ряд аналогичных формул, используя различные подходящие комбинации функций P, Q, R .

Пример 4.8. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_{\Phi} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

по внешней стороне Φ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 188 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

В соответствии с 4.44 имеем

$$I = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz,$$

где V – замкнутый шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

С учетом равенства $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R (\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) r^3 \sin \theta dr = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} ((\cos \varphi + \sin \varphi) \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = 0,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 189 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

то второе слагаемое в подынтегральной функции двойного интеграла можно опустить. В результате находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) \sin^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

4.10 Векторный анализ. Элементы теории поля

Пусть в области $V \subset R^3$ задано векторное поле $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Определение 4.3. Если координаты векторного поля \vec{a} являются непрерывно дифференцируемыми функциями в V , то

1°. скалярная величина

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией поля \vec{a} и обозначается $\operatorname{div} \vec{a}$;

2°. Вектор



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 190 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k}$$

называется ротором (вихрем) поля \vec{a} и обозначается $\text{rot } \vec{a}$;

3°. Если γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая в области V , то интеграл

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

называется циркуляцией векторного поля \vec{a} вдоль кривой γ и обозначается

$$\text{Ц} = \oint_{\gamma} \vec{a} d\vec{r}, \text{ где } d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$

Запишем формулы Стокса и Остроградского-Гаусса в терминах векторного анализа.

Теорема 4.5. (формула Остроградского-Гаусса). Пусть область V лежит в R^3 и граница $\partial V = S$ состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Тогда если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в V , то имеет место формула



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 191 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

где поверхностный интеграл второго рода берется по внешней относительно V стороне S .

В терминах векторного анализа эта теорема выглядит так:

Поток гладкого в V векторного поля \vec{a} через поверхность S равен тройному интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$ по V

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \vec{n}) dS = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{a}) dxdydz. \quad (4.47)$$

Теорема 4.6. (формула Стокса). Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в G ; ориентированный контур $\gamma \subset G$ и $S \subset G$ – натянутая на γ ориентированная поверхность, ориентация которой согласована с ориентацией γ . Тогда

$$\oint_{\gamma} Pdz + Qdy + Rdz =$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-

ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 192 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right)$$

или

$$\oint_{\gamma} Pdz + Qdy + Rdx = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали к поверхности S , характеризующего ориентацию S .

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_{\gamma} \vec{a} \vec{r} d = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Edz = \iint_S (\text{rot } \vec{a} \vec{n}) dS = \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial & \partial & \partial \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS, \end{aligned}$$

Пример 4.9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = xz^2 \vec{i} + yx^2 \vec{j} + zy^2 \vec{k}$

через внешнюю поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

◁ Поток векторного поля через замкнутую поверхность

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \vec{n}) dS = \iiint_V \text{div } \vec{a}(M) dxdydz =$$



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 193 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Для вычисления полученного тройного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам:

$$x = \sin \Theta \cos \varphi, y = \sin \Theta \sin \varphi, z = r \cos \Theta;$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \Theta dr d\varphi d\Theta, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \Theta \leq \pi$$

Тогда

$$\Pi = \iiint_V r^4 \sin \Theta dr d\varphi d\Theta =$$

$$\int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

■

Пример 4.10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$

по окружности $\gamma: x^2 + y^2 = 4, z = 3$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора \vec{k} двумя способами:

- 1) исходя из определения циркуляции;
- 2) используя формулу Стокса



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 194 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

◁ 1) Так как при возрастании параметра t от 0 до 2π движение по окружности происходит против хода часовой стрелки относительно единичного вектора $\vec{k} = (0, 0, 1)$, то параметрическое уравнение γ имеет вид:

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 3, t \in [0; 2\pi]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y dx + x^2 dy - z dz &= \int_0^{2\pi} 2 \sin t (-2 \sin t) dt + 4 \cos^2 t 2 \cos dt - 3 \times 0 = \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t + 8 \cos^3 t) dt = \int_0^{2\pi} (-2)(1 - \cos 2t) dt + 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

2) В качестве поверхности S , краем которой является кривая γ возьмем круг $z = 3, x^2 + y^2 \leq 4$ (4.6)

$$\text{Тогда } \vec{n} = \vec{k} = (0, 0, 1); \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x - 1) \vec{k}$$

$$\int_S \iint (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D (2x - 1) dx dy = \iint_D (2r \cos \varphi - 1) r dr d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r^2 \cos \varphi - r) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} r^3 \cos \varphi - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 d\varphi =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 195 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 196 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

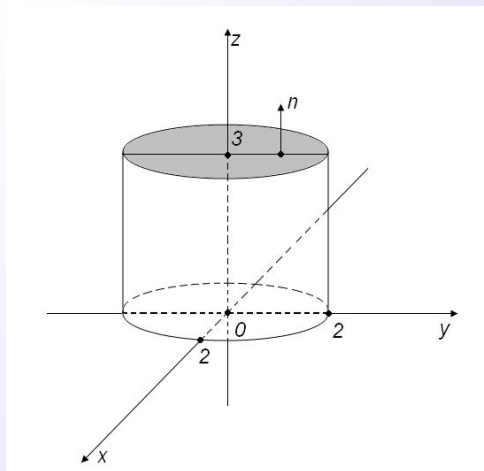


Рис. 4.6

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} \cos \varphi - 2 \right) d\varphi = \left(\frac{16}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Пример 4.11. Вычислить поток векторного поля

$\iint_S (M) = (x + z, 2y - x, z)$ через внешнюю поверхность пирамиды,

образуемую плоскостью $(P) : x - 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями, двумя способами:

- 1) используя определение потока;
- 2) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

◁

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS.$$

1. Поверхность тетраэдра состоит из четырех треугольников ABC , AOC , ABO и BOC .

Рассмотрим сначала интеграл по поверхности $\triangle ABC$. Грань ABC лежит в плоскости $z = 2 - \frac{x}{2} + y$, нормаль к этой грани образует острый угол с осью Oz , следовательно,

$$\vec{n} = \frac{(\frac{1}{2}, -1, 1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{3} 2 dx dy.$$

Поэтому

$$\Pi_1 = \iint_{\triangle ABC} \left(\frac{x+z}{3} - \frac{2}{3}(2y-x) + \frac{2}{3}z \right) \frac{3}{2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\triangle ABC} (x+z-2y+2x+2z) dx dy =$$



Кафедра

математического

анализа и дифференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 197 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 198 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

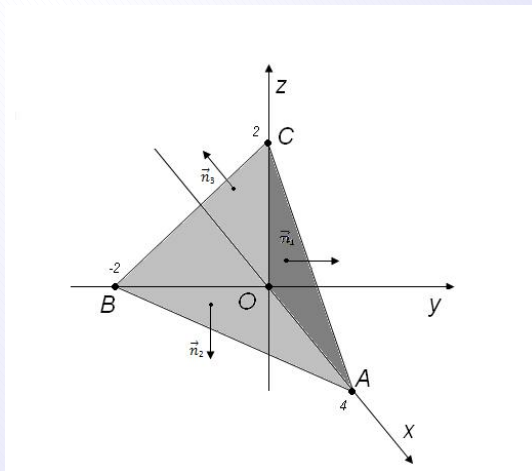


Рис. 4.7

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \left(\frac{3}{4}(2y+4)^2 + (6-y)(3y+4)\right) dy = \frac{52}{3}.$$

Грань AOC лежит в плоскости $y = 0$, $dS = dzdx$, $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0)$.

Тогда поток векторного поля через грань



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 199 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\Delta AOC} (2y - x) dz dx = \iint_{\Delta AOC} (-x) dz dx = \\ &= - \int_0^4 x dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} dz = - \int_0^4 x \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Грань AOB лежит в плоскости $z=0$, нормаль $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, $dS = dx dy$.

$$\Pi_3 = \iint_{\Delta AOB} z dx dy = \iint_{\Delta AOB} 0 \times dx dy = 0.$$

Грань BOC лежит в плоскости $x=0$, нормаль $\vec{n}_3 = (-1, 0, 0)$, $dS = dy dz$

$$\Pi_4 = \iint_{\Delta BOC} (-x - z) dy dz = \iint_{\Delta BOC} -z dy dz = - \int_0^2 z dz \int_0^{z-2} dy = -\frac{4}{3}.$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

2. Вычислим поток векторного поля через поверхность пирамиды $ABCD$ по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dx dy dz.$$

Находим $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 + 1 = 4.$

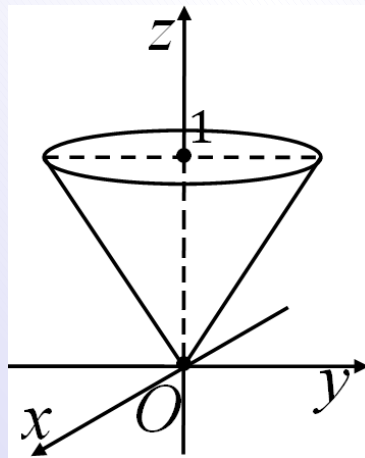
Тогда $\Pi = \iiint_V 4 \, dx dy dz = 4 \iiint_V \, dx dy dz.$

Так как интеграл $\iiint_V \, dx dy dz$ равен объему пирамиды $ABCD$, то

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} OC = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8}{3}, \text{ тогда } \Pi = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}.$

Пример 4.12. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x^3, y^3, z^3)$ через внутреннюю сторону конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 200 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

$S : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z < 1$ ориентировано положительно, т.к. $\cos(\vec{n}, \vec{Oz}) > 0$.

Нормальный вектор $\vec{n} = \frac{(-z'_x, -z'_y, 1)}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$, т.е.

$$\vec{n} = \frac{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}; \quad dS = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} dx dy.$$

Тогда

$$\Pi = \iint_D \left(x^3 \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y^3 \cdot \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ J(r, \varphi) = r; \end{array} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2 r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) d\varphi \int_0^1 r^4 dr =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 201 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$= \frac{1}{10} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4\varphi)}{2} d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$

II способ решения. Запишем поверхность S в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r; \end{cases}$$

$$dydz = \frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & 1 \\ r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -r \cos \varphi;$$

$$dzdx = \frac{D(z, x)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r \sin \varphi;$$

$$dxdy = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I = \Pi &= \iint_D (r^3 \cos^3 \varphi (-r \cos \varphi) + r^3 \sin^3 \varphi (-r \sin \varphi) + r^4) dr d\varphi = \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (-r^4 \cos^4 \varphi - r^4 \sin^4 \varphi + r^4) d\varphi = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (1 - (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)) d\varphi = \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 202 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} (1 - ((\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)) d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{10} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4\varphi)}{2} d\varphi = \frac{1}{10} \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}$.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 203 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 5

Практические задания

51 Контрольная работа №1. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы (аудиторная работа)

1. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ , пробегаемой так, что ее внутренность остается слева

(a) $\oint_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy$, Γ - окружность $x^2 + y^2 = R^2$;

(b) $\oint_{\Gamma} (x + y)dx - (x - y)dy$, Γ - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(c) $\oint_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, Γ - окружность $x^2 + y^2 = ax$;

(d) $\oint_{\Gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, Γ - граница прямоугольника с вершинами $(1; 1)$, $(3; 2)$, $(2; 5)$;

(e) $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$, Γ - граница квадрата с вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$.

(f) $\oint_{\Gamma} (2xy - y)dx + x^2 dy$, Γ - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

(g) $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где Γ - контур треугольника с верши-



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 204 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

нами $A(0;0), B(1;0), C(0;1)$ при положительном направлении обхода контура.

(h) $\oint_{\Gamma} (x^2 - y^2)dx + 2xydy$, Γ - контур треугольника с вершинами $A(1;1), B(3;1), (3;3)$.

(i) $\oint_{\Gamma} xydx + 2xy^2dy$, Γ - контур треугольника с вершинами $A(1;0), B(0;1), C(0;0)$.

(j) $\oint_{\Gamma} (x-y)^2dx + (x+y)^2dy$, Γ - ломаная ABC , $A(0;0), B(2;2), C(0;1)$.

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S , где S - часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями:

(a) $\iint_S (2xm + 3y + 2z)dS$, $(p) : x + 3y + z = 3$.

(b) $\iint_S (2 + y - 7x + 9z)dS$, $(p) : 2x - y - 2z = -2$.

(c) $\iint_S (5x - 8y - z)dS$, $(p) : 2x - 3y + z = 6$.

(d) $\iint_S (3x + 2y + 2z)dS$, $(p) : 3x + 2y + 2z = 6$.

(e) $\iint_S (9x + 2y + z)dS$, $(p) : 2x + y + z = 4$.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 205 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 206 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$(f) \iint_S (4y - x + 4z) dS, (p) : x - 2y + 2z = 2.$$

$$(g) \iint_S (7x + y + 2z) dS, (p) : 3x - 2y + 2z = 6.$$

$$(h) \iint_S (3x + 8y + 8z) dS, (p) : x + 4y + 2z = 8.$$

$$(i) \iint_S (2x - 3y + z) dS, (p) : x + 2y + z = 2.$$

$$(j) \iint_S (2x + 5y - z) dS, (p) : x + 2y + z = 2.$$

3. Применяя формулу Грина-Остроградского вычислить поверхностные интегралы второго рода.

$$(a) \iint_S z dx dy + (5x + y) dy dz, \text{ где } S - \text{внешняя сторона полной поверхности конуса } x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 4;$$

$$(b) \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \text{ где } S - \text{внутренняя сторона поверхности параллелепипеда } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c;$$

$$(c) \iint_S z dx dy + (5x + y) dy dz, \text{ где } S - \text{внутренняя сторона границы области } 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4.$$

$$(d) \iint_S yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx, S - \text{внутренняя сторона плоской поверхности цилиндра } x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 4.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 207 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

(e) $\iint_S (2x^2 + y^2 + z^2) dydz$, S – внешняя сторона полной поверхности конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 4$.

(f) $\iint_S (y - z) dydz + (z - x) dzdx + (x - y) dxdy$, S – внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 4$.

(g) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, S – внешняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(h) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, S – внутренняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(i) $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S – нижняя сторона полной поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 4$.

(j) $\iint_S x^2 y dydz - xy^2 dzdx + z(x^2 + y^2) dxdy$, S – внешняя сторона полной поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq 4$.

4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по кривой Γ :

(a) $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \phi)$.

(b) $\int_{L_{OB}} y dl$, где L_{OB} – дуга параболы $y^2 = \frac{2}{3}x$ между точками $O(0; 0)$ и $B(\sqrt{33}/6, \sqrt{35}/3)$.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 208 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

- (c) $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, где L_{AB} - отрезок прямой AB ; $a(-1; 0)$, $B(0; 1)$.
- (d) $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, L_{OA} - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.
- (e) $\int_L (x + y) dl$, L - дуга лемнискаты Бернулли $p^2 = \cos 2\phi$, $-\pi/4 \leq \phi \leq \pi/4$.
- (f) $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, где L - окружность $x^2 + y^2 = 4x$.
- (g) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L - окружность $x^2 + y^2 = 2y$.
- (h) $\int_L y dl$, где L - дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $x^2 = 2y$.
- (i) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, где L_{AB} - отрезок прямой, заключенный между точками $A(4, 0)$ и $B(6, 1)$.
- (j) $\oint_L (x - y) dl$, где L - окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

5.2 Приложение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

(индивидуальные домашние задания)

1. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной заданными линиями.

(a) $D : x = -2y^2, x = 1 - 3y^2, x \leq 0, y \geq 0;$

(b) $D : y = \frac{8}{x^2+4}, x^2 = 4y;$

(c) $D : 2y = \sqrt{x}, x + y = 5, x \geq 0;$

(d) $D : x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0;$

(e) $y = x^2, y = \frac{3}{4}x^2 + 1;$

(f) $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x;$

(g) $y = 2^2, y = 2x - x^2, x = 2, x = 0;$

(h) $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2;$

(i) $y = 4x^2, 9y = x^2, y \leq 2;$

(j) $x = \sqrt{4 - y^2}, y = \sqrt{3x}.$

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями

(a) $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2};$

(b) $2x + 3y - 12 = 0, z = \frac{y^2}{2}, x = 0, y = 0, z = 0;$



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 209 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 210 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

(c) $z = 12 - 3x - 4y, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 1;$

(d) $x^2 + y^2 = 2ax, z = \frac{x^2+y^2}{a}, z = 0;$

(e) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 2z$

(f) $by = x^2 + z^2, y = b(b > 0);$

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2(0 < a < b), x^2 + y^2 = z^2(z \geq 0)$

(h) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z;$

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = 12, x^2 + z^2 = 4y;$

(j) $y^2 = -3x + 4, y^2 = x, z = \pm 9.$

3. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V , ограниченную указанными поверхностями.

(a) $V : x = 6(y^2 + z^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0;$

(b) $V : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8;$

(c) $V : 9y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 4, y = 0;$

(d) $V : y^2 + z^2 = 8x, x = 2;$

(e) $V : x^2 + z^2 = 4y, y = 9;$

(f) $V : z = 8(x^2 + y^2), z = 32;$

(g) $V : y^2 + z^2 = 3x, x = 9;$

(h) $V : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4;$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 211 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

(i) $V : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0;$

(j) $V : x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

4. Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x, y)$ по дуге AB плоской кривой Γ , если:

(a) Γ - отрезок AB , $A(1; 1), B(2; 3), \rho(x; y) = 2x + y;$

(b) $\Gamma : y = \frac{x^2}{2}, A(1; 1, 5), B(2; 2), \rho(x; y) = \frac{y}{x};$

(c) $\Gamma : y^2 = x, A(1; 1), B(4; 2), \rho(x; y) = y;$

(d) $\Gamma : y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, A(0; 0), B(4; \frac{16}{3}), \rho = ks$, где s - длина дуги от точки $(0; 0);$

(e) $\Gamma : r = a\sqrt{\cos 2\phi}, \rho = kr;$

(f) $\Gamma : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, \rho = y^{\frac{3}{2}};$

(g) $\Gamma : 2y = x^2, A(0; 0), B(1; \frac{1}{2}), \rho(x; y)$ пропорциональна в точке $M(x; y)$ абсциссе этой точки;

(h) $\Gamma : r = 3 \sin \phi, \phi \in [0; \frac{\pi}{4}]$, а плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\phi = \frac{\pi}{4}$ равна 3;

(i) Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке $(2; 0)$ равна 4;



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 212 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

(j) Найти массу контура треугольника с вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 4)$, если его плотность в точке $M(x; y)$ равна $\frac{x}{3} + \frac{y}{4}$.

5. Найти работу поля \vec{F} вдоль дуги AB кривой Γ :

(a) $\vec{F} = (xy; x + y)$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $\Gamma : y = x^2$;

(b) $\vec{F} = (y; -2x)$, $\Gamma : x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $y \geq 0$, $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$;

(c) $\vec{F} = (-y; x)$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$, AB - дуга верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$;

(d) $\vec{F} = (3xy^2; -x - y)$, $A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $\Gamma : y^2 = x + 1$;

(e) $\vec{F} = (x - y; 2y)$, $A(1; -3)$, $B(0; 0)$, $\Gamma : y = -3x^2$;

(f) $\vec{F} = (y; x + y)$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $\Gamma : y = x^2$;

(g) $\vec{F} = (x + y; -x)$, $\Gamma : x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (по ходу часовой стрелки);

(h) Вычислить работу силы $\vec{F} = (x - y; x)$ при перемещении материальной точки вдоль контура квадрата, образованного прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$;

(i) $\vec{F} = (\sin^2 x; y^2)$, $A(0; 1)$, $B(\pi; -1)$, $\Gamma : y = \cos x$;

(j) $\vec{F} = (x; \frac{1}{y^2})$, $A(1; 1)$, $B(4; \frac{1}{4})$, $\Gamma : xy = 1$.

6. Механические приложения поверхностного интеграла первого рода



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 213 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

- (a) Найти массу части однородного параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$, плотности ρ ;
- (b) Найти массу части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, если плотность $\rho = x$; 0
- (c) Найти массу части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, $0 \leq z \leq 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до вершины;
- (d) Найти координаты центра масс верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна расстоянию от этой точки до оси Oz ;
- (e) Найти координаты центра масс части однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2cz$, $0 \leq z \leq c$;
- (f) Определить массу, распределенную по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с плотностью $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$;
- (g) Определить массу, распределенную по части эллиптического параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, $z \leq 1$, $\rho = kz$;
- (h) Определить координаты центра масс однородной поверхности $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, $z \geq 0$;
- (i) Определить массу, распределенную по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ с плотностью $\rho = k(x^2 + y^2)$;
- (j) Найти массу поверхности куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$,

если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна произведению ее координат.

7. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; 2) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

(a) $\mathbf{a}(M)=3x\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x-z)\mathbf{k}; \quad (p): x+3y+z=3;$

(b) $\mathbf{a}(M)=(y+2z)\mathbf{i}+(x+2z)\mathbf{j}+(x-2y)\mathbf{k}; \quad (p): 2x+y+2z=2;$

(c) $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+(y-z)\mathbf{k}; \quad (p): 2x-y-2z=-2;$

(d) $\mathbf{a}(M)=(3x-y)\mathbf{i}+(2y+z)\mathbf{j}+(2z-x)\mathbf{k}; \quad (p): 2x-3y+z=6;$

(e) $\mathbf{a}(M)=4x\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+2z)\mathbf{k}; \quad (p): 2x+y+z=4;$

(f) $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k}; \quad (p): x-y+z=2;$

(g) $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}; \quad (p): 2x+2y+z=4;$

(h) $\mathbf{a}(M)=(3x+y)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+y\mathbf{k}; \quad (p): x+2y+z=2;$

(i) $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(2x-z)\mathbf{j}+(y+3z)\mathbf{k}; \quad (p): 2x+y+3z=6;$

(j) $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}; \quad (p): x+3y+2z=6.$

8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 214 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$(p) : Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\mathbf{n}=(A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса (4.32).

(a) $\mathbf{a}(M)=z\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}; \quad (p) : 2x + y + 2z = 2;$

(b) $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(x+6y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}; \quad (p) : x + 2y + 2z = 2;$

(c) $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+x\mathbf{k}; \quad (p) : x + 2y + 2z = 4;$

(d) $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(3x+z)\mathbf{k}; \quad (p) : x + y + 2z = 2;$

(e) $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k}; \quad (p) : x - y + z = 2;$

(f) $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}; \quad (p) : 3x - 2y + 2z = 6;$

(g) $\mathbf{a}(M)=(2y+z)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}-2z\mathbf{k}; \quad (p) : x - y + z = 2;$

(h) $\mathbf{a}(M)=(3x-1)\mathbf{i}+(x-y+z)\mathbf{j}+4z\mathbf{k}; \quad (p) : 2x - y - 2z = -2;$

(i) $\mathbf{a}(M)=4z\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+z)\mathbf{k}; \quad (p) : x - 2y + 2z = 2;$

(j) $\mathbf{a}(M)=3x\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x-z)\mathbf{k}; \quad (p) : x + 3y + z = 3.$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 215 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

5.3 Контрольная работа №2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных (для специальности «Математика» (ОЗО))



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 216 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

1. Найти область определения функции:

(a) $z = \sqrt{\log_{x-1} y - 1}$.

(b) $z = \sqrt{\pi^2 - 16 \operatorname{arctg}^2(2 - xy)}$.

(c) $z = \ln \cos x - \ln y + \sqrt{1 - 0.04x^2 - 0.25y^2}$.

(d) $z = \frac{\ln(xy - y^2)}{\sqrt{x - 4y^2 + 2} + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

(e) $z = \sqrt{\frac{1 - x^2 + y^2}{x^2 + 4x + y^2}}$.

(f) $z = \arcsin \frac{2y - 1}{x}$.

(g) $z = \arccos \frac{1}{2x + y^2}$.

(h) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

(i) $z = \sqrt{y \sin x}$.

(j) $z = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - 9}$.

2. Найти пределы :

(a) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x^2}{2x + 3y}}$;



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 217 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$(b) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{3x^2}{2x+y}}$$

$$(c) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 4}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+4y}}$$

$$(d) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{2}{y}\right)^{\frac{3y^2}{y-5x}}$$

$$(e) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{\frac{4y^2}{y-2x}}$$

$$(f) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (2y - x)^{\frac{2}{2xy+4y-x^2-3x-2}}$$

$$(g) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \frac{1}{2}}} (2y + 1 - x)^{\frac{3}{2xy-x^2+2y-x}}$$

$$(h) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (2x + 2 - y)^{\frac{x+y}{2xy-y^2-4x+3y-2}}$$

$$(i) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\ln(2x+y)}{\sqrt{2x+y-1}}$$

$$(j) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin 5xy}{\sqrt{1+xy}} - 1.$$

3. Доказать, что следующие функции непрерывны в точке $(0; 0)$, имеют в этой точке обе частные производные $f'_x(0; 0)$, $f'_y(0; 0)$

, однако не являются дифференцируемыми в точке $(0; 0)$:

(a) $f(x, y) = x + y + \sqrt{|xy|}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = y = 0; \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0; \end{cases}$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0; \end{cases}$

(f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(g) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$;

(h) Показать, что функция $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$

дифференцируема в точке $(0; 0)$, хотя частные производные разрывны в этой точке.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 218 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 219 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

(i) Показать, что функция $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$

если $x = y = 0$ дифференцируема в точке $(0; 0)$, хотя частные производные разрывны в этой точке.

(j) Доказать, что функция $f(x, y) \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

обладает в окрестности $(0; 0)$ частными производными, разрывными в точке $(0; 0)$, и что функция $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

4. Найти частные производные и полный дифференциал первого порядка функции.

$$(a) z = \arcsin^2 \frac{5\sqrt{2-3y^2}}{x \ln \frac{1}{xy}}.$$

$$(b) z = \arccos^3 \frac{3\sqrt{1-x^2}}{y \log_3 2x}.$$

$$(c) z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$(d) z = 7^{-2 \cos^4 \frac{x}{\sqrt{2x^3 - xy}}}.$$

$$(e) z = -\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(\sqrt{1 - 2y^2} \sqrt[3]{\frac{x}{y}}).$$

$$(f) z = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2(\cos \frac{2x^2}{3y+1} \sqrt[3]{xy^2}).$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 220 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$(g) z = \sin^2\left(\frac{2x^2+1}{y \log_2 xy}\right).$$

$$(h) z = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3\left(\sqrt{1 - 2x^2} \frac{2}{3^{\frac{x}{y}}}\right).$$

$$(i) z = \sqrt[3]{\log_2 \frac{1}{x^3(y+1)}} - 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$(j) z = \operatorname{ctg}^4\left(3^{\frac{1}{xy}} \sqrt{2 - y^2}\right).$$

5. Исследовать на локальный экстремум функцию.

$$(a) z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

$$(b) z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$(c) f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y.$$

$$(d) f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$(e) f(x, y) = e^{-x^2 - y^2(x^2 - 3y^2)}.$$

$$(f) z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y).$$

$$(g) z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$(h) z = x^3 y^3 (12 - x - y), \text{ если } x > 0, y > 0.$$

$$(i) f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

$$(j) z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2.$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:



Кафедра

математического

анализа и диф-

ференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 221 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

(a) $f = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

(b) $f = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1.$

(c) $f = x^3 + 3y^2 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$

(d) $f = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2), x^2 + y^2 \leq 4.$

(e) $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1.$

(f) $f = x^2 + y^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a).$

(g) $f = x^2 + y^2 - xy - x - y, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$

(h) $f = 3xy, x^2 + y^2 \leq 2.$

(i) $f = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике ограниченном прямыми $x = 0$
 $y = 0, x + y = 6.$

7. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах.

(a) $\int_{-1}^2 dx \int_{2x}^{\frac{7x+10}{6}} f(x, y) dy.$

(b) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$

(c) $\int_2^4 dx \int_{\frac{2}{3}(x-1)}^{\log_2 x} f(x, y) dy.$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 222 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$(d) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(e) \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

$$(f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy.$$

$$(g) \int_{-1}^2 dx \int_{x-1}^{3+2x-x^2} f(x, y) dy.$$

$$(h) \int_0^1 2dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx.$$

$$(i) \int_{-2}^1 dx \int_{-2}^x f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{2x-4}^x f(x, y) dy.$$

$$(j) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

8. Решить задачу на геометрические приложения двойных и тройных интегралов:



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 223 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

- (a) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $2z = x^2, z = 0, y = 0, 3x + 2y = 12$.
- (b) Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, заключенный внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.
- (c) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2} (z < \sqrt{x^2 + y^2})$.
- (d) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = z^2$ и $x^2 + y^2 = 2z$.
- (e) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 12 - 3x - 4y$ и $z = 1$.
- (f) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (g) Найти массу вещества, заполняющего общую часть двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.
- (h) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 6 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, x = 0, z = 0$.
- (i) Найти площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, заключенный между плоскостями $x = -8$ и $x = 6$.
- (j) Определить массу тела, ограниченного поверхностями $z = h$ и $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

9. Решить задачу с вычислением криволинейного интеграла первого рода. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по кривой Γ :

(a) $\int_{\Gamma} (x+y)dS$, где Γ - граница треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$.

(b) $\int_{\Gamma} \frac{dS}{y-x}$, где Γ - отрезок, соединяющий точки $A(0; -2)$, $B(4; 0)$.

(c) $\int_{\Gamma} xy dS$, где Γ - четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая во второй четверти.

(d) $\int_{\Gamma} x^2 dS$, где Γ - дуга окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$.

(e) Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x, y) = \frac{\sqrt{y+2}}{x}$ по дуге AB плоской кривой Γ , где Γ - отрезок AB , $A(1; 0)$, $B(4; 6)$.

(f) Вычислить $\int_{\Gamma} (x - y)dS$, где Γ - окружность $x^2 + y^2 = ax$.

(g) Вычислить $\int_{\Gamma} (x + y)dS$, где Γ - правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

(h) Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$ по дуге AB плоской кривой Γ , если $\Gamma : y = \frac{x^2}{2}$, $A(1; \frac{3}{2})$, $B(2; 2)$.



Кафедра

математического

анализа и дифференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 224 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического

анализа и дифференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 225 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

- (i) Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x, y) = 2x + y$ по дуге Γ , если Γ - отрезок AB , $A(1; 1)$, $B(2; 3)$.
- (j) Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (x + y) dS$, где Γ - окружность $x^2 + y^2 = -8x$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по кривой L , пробегаемый от точки A к точке B :

- (a) $\int_L x dy - y dx$, L - дуга параболы $y = 2x^2$, $A(0; 0)$, $B(1; 2)$.
- (b) $\int_L xy dx - y^2 dy$, L - дуга параболы $y^2 = 2x$, $A(0; 0)$, $B(2; 2)$.
- (c) $\int_L \frac{3x}{y} dx - \frac{2y^2}{x} dy$, L - дуга параболы $x = y^2$, $A(4; 2)$, $B(1; 1)$.
- (d) $\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{y-x}{x} dy$, L - дуга параболы $y = x^2$, $A(2; 4)$, $B(1; 1)$.
- (e) $\int_L x dy$, L - полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $A(0; -a)$, $B(0; a)$.
- (f) $\int_L x^3 dy - xy dx$, L - отрезок AB , $A(0; -2)$, $B(1; 3)$.
- (g) $\int_L xy^2 dy$, L - дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$.
- (h) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, L - верхняя половина эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.



(i) $\int_L 2xydx + x^2dy$, L – дуга кривой $y^2 = x$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$.

(j) $\int_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, L – граница треугольника с вершинами $A(1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 2)$.

11. Найти работу поля F вдоль дуги AB кривой Γ :

(a) $\vec{F} = (xy; x + y)$; $\Gamma : y = x^2$; $A(0; 0)$, $B(1; 1)$.

(b) $\vec{F} = (4x - 5y; 2x + y)$; $\Gamma : y = -x$; $A(1; -1)$, $B(3; -3)$.

(c) $\vec{F} = (2xy; -y)$; $\Gamma : y = x^2 - 1$; $A(1; 0)$, $B(2; 3)$.

(d) $\vec{F} = (4x - 5y; 2x + y)$; $\Gamma : x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;
 $A(0; 0)$, $B(2\pi a; 0)$.

(e) $\vec{F} = (y; -2x)$; $\Gamma : x = a \cos t$, $y = \sin t$, $y \geq 0$; $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$.

(f) $\vec{F} = (-y; x)$; Γ : верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$;
 $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$.

(g) $\vec{F} = (-y; x)$; Γ : нижняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$;
 $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$.

(h) $\vec{F} = (y; -2x)$; $\Gamma : x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$; $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$.

(i) $\vec{F} = (3xy^2; -x - y)$; $\Gamma : y^2 = x + 1$; $A(0; 1)$, $B(3; 2)$.

(j) $\vec{F} = (4x - 5y; 2x + y)$; Γ : ломаная APB ;
 $A(1; -9)$, $B(3; -3)$, $P(1; -3)$.

5.4 Образцы решения типовых задач контрольной работы №2

5.4.1 Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Пример 5.1. Доказать, что функция $f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ является бесконечно малой в точке $O(0;0)$.

Решение.

Согласно определению бесконечно малой функции, требуется доказать, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} f(x, y) = 0$.

Точка $O(0;0)$ является предельной такой области $(x, y) \rightarrow (0; 0)$ определения $f(x,y)$.

Воспользуемся определением предела функции по Коши. Зададимся любым $E > 0$. Оценим расстояние $|f(x, y) - 0| = |(x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leq |x| + |y| < E$

Положив $|x| < \frac{E}{2}$ и $|y| < \frac{E}{2}$, можно взять в качестве $\delta \leq \frac{E}{2}$. Следовательно, если расстояние $\rho(M(x, y), O(0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ то $|x| < \delta$ и $|y| < \delta$, тогда $|f(x, y) - 0| < 2\delta \leq E$

А это и означает, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} f(x, y) = 0$.

Пример 5.2. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 227 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

Решение.

Пусть $y \neq 0$ - любые фиксированные числа. Тогда

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x_0y}{(x_0)^2 + y^2} = f(x_0, y)$. Если же $y=0$, то при любом $x_0 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = 0 = f(x_0, 0).$$

Наконец, если $y=0$ то $x_0 = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, при каждом фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x . Ввиду симметрии относительно x и y при любом фиксированном x функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной y .

Покажем, что функция $f(x, y)$ не является непрерывной по обеим переменным x и y в точке $(0;0)$. Для этого достаточно показать, предел функции $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0;0)$ не существует. Пусть точка $M(x, y)$ стремится к точке $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, проходящей через точку $O(0,0)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Следовательно, приближаясь к точке $O(0;0)$ по различным прямым, соответствующим разным значениям k , получаем разные предельные значения.



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 228 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 229 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Замечание 5.1. Отсутствие предела функции в точке $O(0;0)$ можно показать и по-другому, а именно: обе последовательности $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ и $(\frac{2}{n}; \frac{1}{n})$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к точке $O(0;0)$, а соответствующие им последовательности значений функции сходятся при $n \rightarrow \infty$ к различным предельным значениям: $f(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$, $f(\frac{2}{n}; \frac{1}{n}) = \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{4}{5}$.

Пример 5.3. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0;0)$, имеет в этой точке обе производные $f'_x(0;0)$, $f'_y(0;0)$ однако, не является дифференцируемой в точке $O(0;0)$.

Решение

Найдем полное приращение функции в точке $O(0;0)$:

$$\Delta f(0, 0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0; 0) = \frac{\Delta x * \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

$$\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0.$$

Покажем, что

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0;0)} \frac{\Delta x * \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\Delta x = \rho \cos \varphi, \Delta y = \rho \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{\Delta x * \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\rho^2 * \cos \varphi \cos \varphi}{\rho} = \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi, \text{ условие, } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$$

эквивалентно условно $\rho \rightarrow 0$. Ограниченность второго множителя $\frac{\sin 2\varphi}{2}$ очевидна, т.е. $|\frac{\sin 2\varphi}{2}| \leq \frac{1}{2}$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда следует, что

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x * \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$. вдоль каждого луча $\Delta x = \rho \cos \varphi, \Delta y = \rho \sin \varphi$, проходящего через точку $O(0;0)$.

$$\text{С другой стороны } \left| \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \leq \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta y^2}} \leq 1,$$

т.е. функция $\varphi(\Delta x, \Delta y) = \frac{y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ Ограничена в некоторой проколотовой окрестности точки $(0;0)$. Поэтому при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Delta x \times \phi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$.

Согласно определения непрерывности функции в точке на языке бесконечно малых «приращений» и следует, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$.

Найдем частные приращения функции $f(x, y)$ в точке $O(0,0)$:

$$\Delta_x f(0,0) = f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = \frac{\Delta x * 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0}} = 0,$$

$$\Delta_y f(0,0) = f(0,0 + \Delta y) - f(0,0) = \frac{0 * \Delta y}{\sqrt{0 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Тогда существуют частные произведения:

$$\frac{Df}{Dx}(0;0) = f_x = f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 230 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\frac{Df}{Dy}(0; 0) = f_y, (0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{yf(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Докажем, что функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$. Предположим противное. Тогда приращение функции в этой точке, равное

$$\Delta f(0; 0) = \frac{\Delta y \times \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

можно представить в виде:

$$\Delta f(0; 0) = \frac{Df}{Dx}(0; 0)\Delta x + \frac{Df}{Dy}(0; 0)\Delta y + O(p), \text{ где } p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Так как $\frac{Df}{Dx}(0; 0) = 0, \frac{Df}{Dy}(0, 0)$, то из условия дифференцируемости получим

$$\frac{\Delta x \times \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0 \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \times \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0.$$

На самом деле этот предел не существует, так как положив $\Delta x = \Delta y$, будем иметь

$$\lim_{\Delta y = \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x * \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что сделанное предположение неверно, и значит, функция не дифференцируема в точке $(0;0)$.

Пример 5.4. Пусть $u = f(\frac{y}{x}) + x\phi(\frac{y}{x})$. Показать, что $x^2 \frac{D^2 u}{Dx^2} + 2xy \frac{D^2 u}{Dx \delta y} + y^2 \frac{D^2 u}{Dy^2} = 0$, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f и ϕ .

Решение.



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 231 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Обозначим $\frac{y}{x}$ через t . Тогда $u = f(t) + x\phi(t)$, где $t = \frac{y}{x}$. Находим частные производные функции до второго порядка включительно.

$$\begin{aligned}
 \frac{Du}{Dx} &= f'_t * t'_x + \phi(t) + x * \phi'_t * t'_x = -\frac{y}{x^2} * f'_t\left(\frac{y}{x}\right) + \phi(t) - \frac{y}{x} * \phi'_t\left(\frac{y}{x}\right), \frac{Du}{Dy} \\
 &= f'_t * t'_y + x * \phi'_t * t'_y = \frac{1}{x} f'_t\left(\frac{y}{x}\right) + \phi'_t, \frac{D^2u}{Dx^2} \\
 &= \frac{2y}{x^3} * f'_t - \frac{y}{x^2} * f''_{tt} * t'_x + \phi'_t * t'_x + \frac{y}{x^2} \phi'_t - \frac{y}{x} * f''_{tt} * t'_x \\
 &= \frac{2x}{x^2} f'_t + \frac{y^2}{x^4} f''_{tt} + \frac{y^2}{x^3} f''_{tt}, \frac{D^2u}{Dy^2} = f''_{tt} * t'_y * \frac{1}{x} + f''_{tt} * t'_y \\
 &= \frac{1}{x^2} f''_{tt} + \frac{1}{x} f''_{tt}, \frac{D^2u}{DxDy} = \frac{1}{x^2} * f'_t + \frac{1}{x} * f''_{tt} * t'_x + \phi''_{tt} * t'_x \\
 &= -\frac{1}{x^2} f'_t - \frac{y}{x^3} f''_{tt} - \frac{y}{x^2} \phi''_{tt}.
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходные выражения, получаем

$$\frac{2y}{x} f'_t + \frac{y^2}{y^2} f''_{tt} + \frac{y^2}{x} \phi''_{tt} - \frac{2y}{x} t'_x - \frac{2y^2}{x^2} f''_{tt} - \frac{2y^2}{x} f''_{tt} + \frac{y^2}{x^2} f''_{tt} + \frac{y^2}{x} \phi''_{tt} \equiv 0.$$

Пример 5.5. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 232 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Решение. В соответствии с необходимыми условиями

$$\frac{Du}{Dx}(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{Du}{Dy}(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{Du}{Dz}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Напишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dx} = 4x - y + 2z = 0, \\ \frac{Du}{Dy} = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{Du}{Dz} = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

из которых находим две критические точки:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Поскольку

$$\frac{D^2u}{Dx^2}(x, y, z) = 4, \frac{D^2u}{DxDy}(x, y, z) = -1, \frac{D^2u}{Dz^2}(x, y, z) = 2,$$

$$\frac{D^2u}{DxDz}(x, y, z) = 2, \frac{D^2u}{DyDz}(x, y, z) = 0, \frac{D^2u}{Dy^2}(x, y, z) = 6y,$$

то квадратная форма от переменных dx, dy, dz в указанных двух точках имеет соответственно вид

$$W_1 = 4dx^2 - dxdy - dydx + 4dy^2dz^2 + 2dzdx + 2dxdz,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 233 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$W_2 = 4dx^2 - dxdy - dydx - 3dy^2dz^2 + 2dzdx + 2dxdz,$$

Исследование определенности квадратичной формы проведем с помощью критерия Сильвестра. Матрица квадратичной формы в точке

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как главные миноры этой матрицы положительны $\Delta_1 = 4 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

,то согласно критерию Сильвестра квадратичная форма W_1 положительно определена. Следовательно, в точке

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 234 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

функция имеет локальный минимум. Матрица квадратичной формы W_2 имеет

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta_1 = 4 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13 < 0,$$

$$\Delta_3 = -14 < 0$$

,то квадратичная форма W_2 не является знакоопределенной квадратичной формой dx, dy, dz . Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма - знакопеременная. В самом деле, если положить $dx \neq 0, dy = dz = 0$, то получим $W_2 = 4dx^2 > 0$, а если положить $dx = dz = 0, dy \neq 0$, то

$$W_2 \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right) = -3dy^2 < 0.$$

Следовательно, в точке

$$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$$

функция не имеет локального экстремума.

Замечание 5.2. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ достаточный признак экстремума состоит в следующем: пусть $f : G \rightarrow$,



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 235 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

где f дважды дифференцируемая функция в области G , (x_0, y_0) - критическая точка функции f . Обозначим $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Тогда:

а) если

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

и $a_{11} > 0$ то в точке (x_0, y_0) функция имеет строгий локальный минимум;

б) если

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

и $a_{11} < 0$ то в (x_0, y_0) функция имеет строгий локальный максимум;

в) если

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0,$$

то точка (x_0, y_0) - седловая точка функции f , т.е. не есть точка минимума или максимума.

Пример 5.6. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.



Кафедра

математического

анализа и дифференциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 236 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение.

1) находим стационарные точки, т.е. точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Для этого вычислим частные производные, приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 18 = 0, \\ z'_y = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

Решением системы

$$\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

являются четыре стационарные точки:

$$M_1(1; 3), M_2(3; 1), M_3(-1; -3), M_4(-3; -1).$$

2) Проверим выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке. Для этого вычислим частные производные второго найдем значения их в соответствующих критических точках.

$$z''_{x^2} = 6y, z''_{xy} = 6x, z''_{y^2} = 6y$$

Для точки M_1 имеем $a_{11} = z''_{x^2}(M_1) = 18; a_{12} = z''_{xy}(M_1) = 6; a_{22} = z''_{y^2}(M_1) = 18$. Так как

$$I_2 = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} > 0$$

и $a_{11} > 0$, то в $(1, 3)$ функция имеет строгий локальный минимум.

Для точки M_2 имеем $a_{11} = z''_{x^2}(M_2) = 6; a_{12} = z''_{xy}(M_2) = 18; a_{22} =$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 237 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

$z''_{y^2}(M_2) = 6$. Так как

$$I_2 = \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} < 0,$$

то в точке $(3, 1)$ - седловая точка функции f , т.е. в этой точке нет экстремума.

Для точки $M_3 = (-1, -3)$ имеем $a_{11} = z''_{x^2}(M_3) = -18$; $a_{12} = z''_{xy}(M_3) = -6$; $a_{22} = z''_{y^2}(M_3) = -18$. Так как

$$I_2 = \begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

и $a_{11} < 0$, то в точке $(-1, -3)$ функции f имеет строгий локальный максимум.

Для точки $M_4 = (-3, -1)$ имеем $a_{11} = z''_{x^2}(M_4) = -6$; $a_{12} = z''_{xy}(M_4) = -18$; $a_{22} = z''_{y^2}(M_4) = -6$. Так как

$$I_2 = \begin{vmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{vmatrix} < 0,$$

то экстремума в этой точке нет.

Пример 5.7. На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $(0; 0; 3)$.



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 238 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Решение.

Расстояние между точками (x, y, z) и $(0; 0; 3)$ определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2}$. Поэтому исходная равносильна задаче об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z - 3)^2$ на поверхности S , заданной уравнением $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0$. Записав функцию Лагранжа $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8) = 0$ и необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{D\Phi}{Dx} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{D\Phi}{Dy} = 2y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{D\Phi}{Dz} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0 \\ \frac{D\Phi}{Dz} = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0, \end{cases}$$

находим две подозрительные на экстремум точки: $M_1 = (2; 0; -1)$, $M_2 = (-2; 0; -1)$, и обе они отвечают значению $\lambda = -1$. Составим квадратичную форму W функция $\Phi(x, y, z)$ отвечающую $\lambda = -1$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{D^2\Phi}{Dx^2} = 0, \quad \frac{D^2\Phi}{Dy^2} = 2 + 4\lambda = -2, \\ \frac{D^2\Phi}{Dz^2} = 2 + 8\lambda = -6, \quad \frac{D^2\Phi}{DyDz} = 0, \\ 2x dx + 4y dy + 8z dz = 0. \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 239 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Тогда $d^2\Phi = -2(dy)^2 - 6(dz)^2$. Подставив выражение $dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy$ в $d^2\Phi$ для dz получаем в каждом случае отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных dx, dy .

$$d^2\Phi = -2(dy)^2 - 3,5(dx)^2$$

Следовательно, функция и имеет в точках M_1 и M_2 строгий условный максимум, т.е на эллипсоиде имеются две точки $(2; 0; -1)$ и $(-2; 0; -1)$, наиболее удаленные от точки $(0; 0; -3)$.

5.4.2 Интегральное исчисление функций многих переменных

Пример 5.8. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

Решение.

Надо иметь в виду, что расстановка пределов в двойном интеграле при том или ином порядке интегрирования зависит от конфигурации области интегрирования и от кривых, образующих границы области. Наоборот, если интеграл задан с указанием порядка интегрирования и пределов по соответствующим переменным, то можно найти и область интегрирования. В рассматриваемом примере и следует начинать с построения области интегрирования, помня, что переменные пределы



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 240 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

внутреннего интеграла являются границами изменения y при произвольно фиксированном значении x на отрезке $[0; 2a]$:

$$y = \sqrt{2ax - x^2}, y = \sqrt{2ax},$$

т.е. область

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2a, \\ \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}. \end{cases}$$

Кривые $y = \sqrt{2ax - x^2}$ и $y = \sqrt{2ax}$ представляют соответственно окружность и параболы, лежащие выше оси Ox . Так как x изменяется от 0 до $2a$, то область D помимо указанных кривых, ограничена также прямыми $x = 2a$ и прямой $x = 0$.

Меняя порядок интегрирования, мы должны проследить, как при произвольно фиксированном значении y будет меняться x внутри области. Если к полуокружности $y = \sqrt{2ax - x^2}$ провести касательную, параллельную оси, то она разобьет данную область на три части (области): I - между параболой и окружностью, ограниченной сверху отрезком упомянутой касательной; II - между окружностью, касательной и прямой $x = 2a$; III - область ограничена касательной, дугой параболы и прямой $x = 2a$.

Если провести прямую l , параллельную оси между 0 и a , то в I области прямая пересечет сначала параболу, а затем окружность. Абсцисса первой точки найдется из уравнения параболы и будет равна $x_1 = \frac{y^2}{2a}$, а



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 241 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

второй - из уравнения окружности $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, которое нужно разрешить относительно x : $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$. Для этой точки $x_2 = a - \sqrt{a^2 - y^2}$. Значение $x_3 = a + \sqrt{a^2 - y^2}$ даст абсциссу второй точки пересечения той же прямой с окружностью и x во второй области изменяется от x_3 до $x_4 = 2a$. Пересечение y в области I и II будет меняться от $y = 0$ до $y = a$. В области III (при фиксированном y) x будет меняться от $x = \frac{y^2}{2a}$ до $x = 2a$, а y от $y_1 = a$ до значения $y_2 = 2a$, т. е. до значения y в точке пересечения линий $y_2 = 2ax$ и $x = 2a$.

Итак, области I, II, III заданы соответственно системой неравенств:

$$I : \begin{cases} 0 \leq y \leq a, \\ \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}. \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} 0 \leq y \leq a, \\ a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a. \end{cases}$$

$$III : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2a, \\ \frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a. \end{cases}$$

При изменении порядка интегрирования данный интеграл разбить на



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 242 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

три, что приводит к выражению: $\int_0^2 adx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)dy =$

$$= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)dx + \int_0^2 ady \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)dx.$$

Пример 5.9. Найти объем тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = rx$ из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и расположенного в первом октанте.

Решение. Изобразим тело на рисунке 5.1, предварительно преобразовав уравнение $x^2 + y^2 = rx$, а именно $x^2 - rx + y^2 = (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = (\frac{r}{2})^2$. Поверхность $(x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = (\frac{r}{2})^2$ есть круговой цилиндр, а $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ - сфера с центром в начале координат.

Проекцией тела на плоскость xOy является полукруг, изображенный на рисунке 5.2.

Искомый объем ищем по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)dx dy.$$

В нашем случае $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, а областью интегрирования является полукруг $x^2 + y^2 = rx, y \geq 0$.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 243 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 244 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

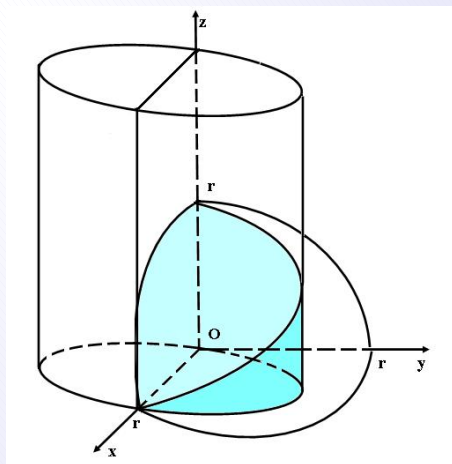


Рис. 5.1:

Для вычисления двойного интеграла

$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

перейдем к полярным координатам, полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ преобразуется к виду $\rho = r \cos \varphi$.
Из рисунка 5.2 видим, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq r \cos \varphi$.

Используя теорему о замене двойного интеграла повторным, получим



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

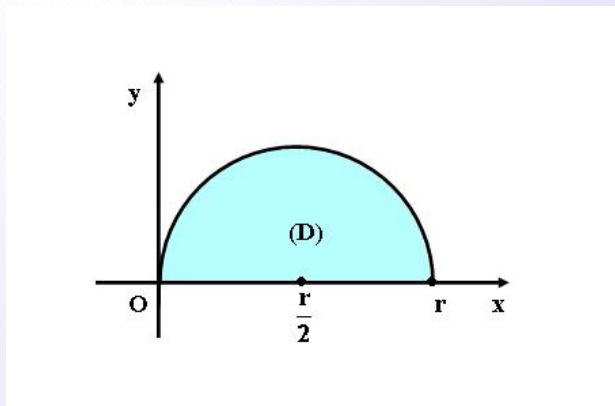


Рис. 5.2

$$V = \iint_{(D)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r \cos \varphi} \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r \cos \varphi} (r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(r^2 - \rho^2) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{r \cos \varphi} d\varphi =$$

Начало

Содержание



Страница 245 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^3(1 - \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - r^3) d\varphi = \frac{1}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = \frac{\pi r^3}{6} + \frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} r^3 \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi r^3}{6} - \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{9} r^3 = \frac{\pi r^3}{6} - \frac{2}{9} r^3 = \frac{r^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: искомый объем равен $V = \frac{r^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$. (куб. ед.).

Пример 5.10. *Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл*

$$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Решение. Изобразим область интегрирования (рис. 5.3).

Проекцией тела V на плоскость xOy является круг $x^2 + y^2 = 4$, поэтому для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, якобиан преобразования $I = r$. Тогда $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\frac{r^2}{2} \leq z \leq 2$.

Начало

Содержание



Страница 246 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

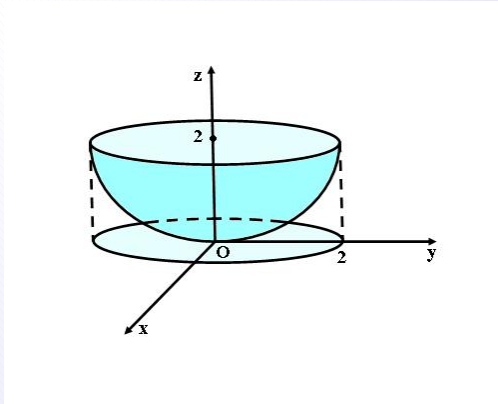


Рис. 5.3

В таком случае

$$\begin{aligned}
 \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \, dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 z \Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr =
 \end{aligned}$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 247 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= 2\pi \left(2 \cdot \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Пример 5.11. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 - ax = 0$, заключенной внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

Решение

Ввиду того, что уравнение поверхности цилиндра не содержит z и его нельзя привести к уравнению вида $z = f(x, y)$, необходимо уравнение цилиндра разрешить относительно y и для вычисления искомой площади применить формулу

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta z}\right)^2} dx dz,$$

проектируя площадь на плоскость xOz . Так как площадь цилиндра плоскость xOz разделяется на две равные части, то можно вычислить половину искомой площади. Для определения области интегрирования D следует линию пересечения данных поверхностей спроектировать на плоскость xOz , для чего из уравнений этих поверхностей исключаем y .

Вычитая одно уравнение из другого, находим: $z^2 = a^2 - ax$. Это есть уравнение параболы, лежащей в плоскости xOz с вершиной на оси Ox на расстоянии a от начала координат, пересекающей ось Oz в точках $z = a$ и $z = -a$. Дуга параболы вместе с соответствующим



Кафедра

математического
анализа и диффе-
ренциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 248 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического

анализа и диффе-

ренциальных

уравнений

Начало

Содержание



Страница 249 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

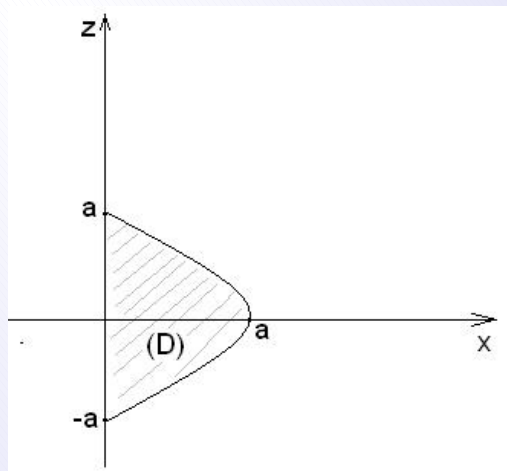


Рис. 5.4

отрезком оси Oz составляет границу области D (см. рис. 5.4) , которую можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - ax} \leq z \leq \sqrt{a^2 - ax}. \end{cases}$$

Из уравнения цилиндра $x^2 + y^2 - ax = 0$

находим

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a-2x}{2y}, \quad \frac{\delta y}{\delta z} = 0$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}S = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-ax}}^{\sqrt{a^2-ax}} \sqrt{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} dz = \int_0^a \sqrt{\frac{4ax-4x^2+a^2-4ax+4x^2}{4(ax-x^2)}} \times z \Big|_{-\sqrt{a^2-ax}}^{a^2-ax} dx =$$

$$= a \int_0^a \frac{2\sqrt{a^2-ax}}{2\sqrt{ax-x^2}} dx = a \int_0^a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx = 2a\sqrt{a} \times \sqrt{x} \Big|_0^a = 2a^2.$$

Поэтому $S = 4a^2$.

Пример 5.12. Вычислить массу неоднородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, если плотность распределения массы равна расстоянию от начала координат.

Решение

Каноническое уравнение сферы имеет вид $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Плотность распределения массы $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Искомая масса вычисляется по формуле

$$M = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам, полагая $x = r \cos \phi \sin \Theta$, $y = r \sin \phi \sin \Theta$, $z = r \cos \Theta$, якобиан преобразования $j(r, \phi, \Theta) = r^2 \sin \Theta$.

Уравнение сферы представим в виде $r^2 = 2r \cos \phi \sin \Theta$ или $r = r \cos \phi \sin \Theta$.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 250 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

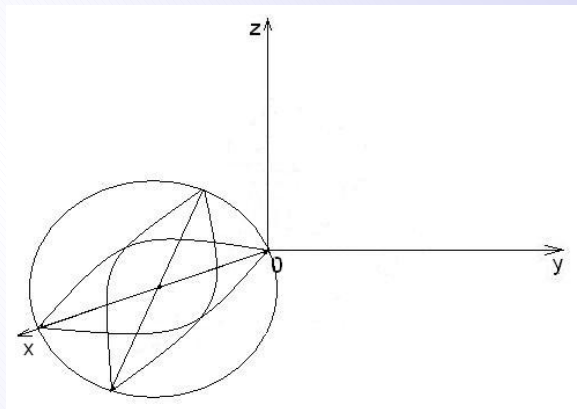


Рис. 5.5

В таком случае

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\pi} d\Theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} r^4 \cos^4 \phi \sin^4 \Theta dy = \\
 &= 4 \int_0^{\pi} \sin^5 \Theta d\Theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \phi d\phi = 4 \int_0^{\pi} -(1 - \cos^2 \phi)^2 (\cos \Theta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2}\right)^2 d\phi = \\
 &= 4 \int_0^{\pi} (-1 + 2\cos^2 \Theta - \cos^4 \Theta) d(\cos \Theta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos 2\phi + \frac{1 + \cos 4\phi}{2}}{4} d\phi = (-\cos \Theta + \\
 &+ \frac{2\cos^3 \Theta}{3} - \frac{\cos^5 \Theta}{5}) \Big|_0^{\pi} \left(\phi + 2\frac{\sin 2\phi}{2} + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{8}\sin 4\phi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \right.
 \end{aligned}$$

Начало

Содержание



Страница 251 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$+ \frac{1}{5})(\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{16}{15} \frac{3\pi}{2} = \frac{89\pi}{5}.$$

Ответ: искомая масса $M = \frac{8\pi}{5}$.

Пример 5.13. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболой $x^2 + y^2 = 37$.

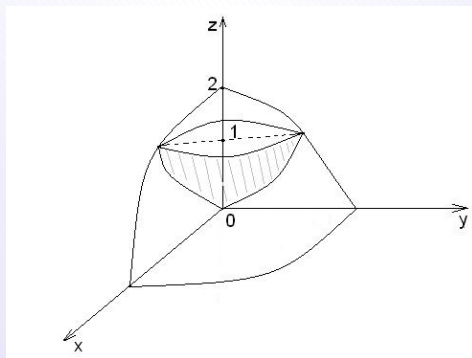


Рис. 5.6

Тело ограничено сверху сферой, снизу - параболоидом.

Проекцией тела на плоскость xOy является область, ограниченная линией, представляющей проекцию на эту плоскость линии пересечения упомянутых поверхностей. Уравнение проекции получится исключением z из уравнений данных поверхностей и будет иметь вид: $x^2 + y^2 =$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 252 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$-3, z = 0.$$

Для искомого объема применим формулу

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам, полагая $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = z, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \sqrt{\frac{z^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$, якобиан преобразования $J = r$

Используя формулу замены переменной в тройном интеграле, находим:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{3}) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - \frac{r^3}{3}) dr = \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-r^2} d(4-r^2) - \frac{r^4}{12} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{3}{4} \right) = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{3}{4} \right) = \\ &2\pi \left(-\frac{1}{3} (1-8) - \frac{3}{4} \right) = 2\pi \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4} \right) = \frac{19\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $V = \frac{19\pi}{6}$ (куб. ед.)

Пример 5.14. Вычислить

$$\int_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS,$$

где Γ - выпуклый контур, ограниченный кривыми $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ (r и φ - полярные координаты).



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 253 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть

Контур состоит из отрезка OA полярной оси длиной a , дуги AB окружности $r = a$ и отрезка луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому $\int_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS = \int_{OA} + \int_{\overset{\check{A}}{AB}} + \int_{BO} = \int_0^a e^x dx + \int_{\overset{\check{A}}{AB}} e^a dS + \int_0^a e^r dr$, Так как на $y=0$ и $dS=dx$, на $\overset{\check{A}}{AB}$ $x^2 + y^2 = a^2$ и на $\overset{\check{B}}{BO}$ $x^2 + y^2 = r^2, x = r\frac{\sqrt{2}}{2}, y = r\frac{\sqrt{2}}{2}, dS = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2} dr = dr$ и $\int_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS = \int_{\overset{\check{O}}{OB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS &= E^x \Big|_0^a + e^a \int_{\overset{\check{A}}{AB}} dS + e^r \Big|_0^a = e^a - 1 + e^a \int_{\overset{\check{A}}{AB}} dS + e^a - 1 = \\ &= 2(e^a - 1) + e^a I; \end{aligned}$$

I есть длина дуги окружности радиуса a , соответствующей центральному углу, равному $\frac{\pi}{4}$, то есть $I = \frac{\pi}{4}a$.

Итак,

$$\int_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS = e^a \frac{\pi a}{4} + 2(e^a - 1).$$

Пример 5.15. Найти массу дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащей между точками $(1; \frac{1}{2})$ и $(2; 2)$, если линейная плотность $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$.

Решение. Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 254 из 275

Назад

На весь экран

Закреть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 255 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

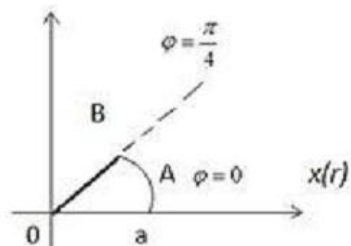


Рис. 5.7

$m = \int_{(\Gamma)} \rho(x; y) dS$, где $\rho(x; y) = \frac{y}{x}$, Γ - дуга параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащая

между точками $(1; \frac{1}{2})$ и $(2; 2)$.

Находим дифференциал длины дуги

$$y = \frac{x^2}{2}, y'_x = x, dS = \sqrt{1 + y'_x{}^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Тогда

$$m = \int_{(\Gamma)} \frac{y}{x} dS = \int_1^2 \frac{x^2}{2x} \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1 + x^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

Ответ: $m = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}$.

Пример 5.16. Найти массу четверти эллипса $x = a \cos t, y = \sin t$, расположенной во втором квадрате, если линейная плотность в каждой точке кривой пропорциональна ординате этой точки.

Решение. Плотность $\rho(t) = ky = kb \sin t, x'_t = -a \sin t, y'_t = b \cos t$, дифференциал длины дуги.

$$dS = \sqrt{x'_t{}^2 + y'_t{}^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$
 В этом случае

$$m = \int_{(\Gamma)} \rho(x, y) dS = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} kb \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt =$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 256 из 275

Назад

На весь экран

Заккрыть



$$\begin{aligned} &= -bk \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 - a^2 \cos^2 t} d(\cos t) = -bk \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} d(\cos t) = \\ &[\cos t = z, t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0, t = \pi \Rightarrow z = -1] = \\ &= -bk \int_0^{-1} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)z^2} dz = -\frac{bk}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{-1} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)z^2} d(\sqrt{a^2 - b^2}z) = \\ &[\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c] = -\frac{bk}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}z}{a} + \right. \\ &\left. \frac{\sqrt{a^2 - b^2}z}{2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)z^2} \right) \Big|_0^{-1} = \\ &= \frac{bk}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a^2 - b^2}{a} + \frac{bk}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = \frac{kb^2}{2} + \frac{kab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ - эксцентриситет эллипса.

Итак, масса $m = \frac{kb^2}{2} + \frac{kab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon$.

Пример 5.17. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{(\Gamma)} \sqrt{x^2 + y^2} dS,$$

, где Γ - окружность $x^2 + y^2 = -2x$.

Решение. Переходим к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. В этом случае уравнение окружности имеет вид

$$r = -2 \cos \varphi; \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; r'_\varphi = 2 \sin \varphi,$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 258 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

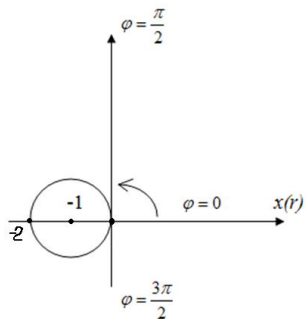


Рис. 5.8

дифференциал длины дуги

$$dS = \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2} d\varphi = \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2d\varphi.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3\pi}{2} r 2d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3\pi}{2} - 4 \cos \varphi d\varphi = -4 \sin \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= -4(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \pi) = 8. \end{aligned}$$

Ответ: $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dS = 8$

Пример 5.18. Вычислить $\oint_{ABCD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, где ABCDA - контур квадрата с вершинами A(1; 0), B(0; 1), C(-1; 0), D(0; -1)

Решение: Имеем $\oint_{ABCD} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$.

Отрезок AB лежит в первой четверти на прямо $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$, поэтому $y = 1 - x, 0 \leq y \leq 1$.

$$\int_{AB} = \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} = \int_{AB} \frac{dx + dy}{1} = \int_{AB} dx + dy = \int_1^0 dx + \int_1^0 -dx = 0.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 259 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 260 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

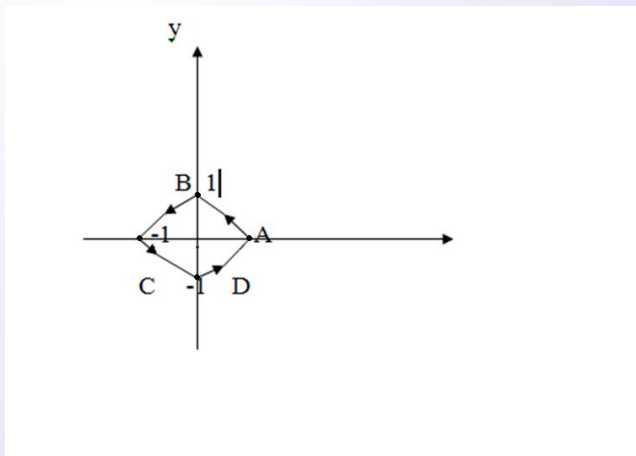


Рис. 5.9

Отрезок BC лежит во второй четверти на прямой $y = 1 + x$, $-1 \leq x \leq 0$, $y \geq 0$, в силу чего $|x| + |y| = -x + y = 1$. Следовательно,

$$\int_{BC} = \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} = \int_{DC} dx + dy = (x + y)|_{B(0;1)}^{C(-1;0)} = -1 - 1 = -2.$$

Отрезок CD лежит в третьей четверти на прямой $-x - y = 1$, здесь x и

y отрицательны, в силу чего $|x| + |y| = -x - y = 1$. Следовательно,

$$\int_{CD} = \int_{CD} \frac{dx + dy}{1} = (x + y) \Big|_{C(-1;0)}^{D(0;-1)} = -1 - (-1) = 0.$$

Отрезок DA лежит в четвертой четверти на прямой $x - y = 1$, здесь x положителен, y отрицателен, в силу чего $|x| + |y| = x - y = 1$, тогда

$$\int_{DA} = \int_{DA} dx + dy = (x + y) \Big|_{D(0;-1)}^{A(1;0)} = 1 - (-1) = 2.$$

Итак,

$$\int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0.$$

Пример 5.19. Вычислить криволинейный интеграл второго рода с помощью формулы Грина

$$\int_{\Gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

где (Γ) - контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$ в положительном направлении.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 261 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Решение. Преобразуем данный криволинейный интеграл с помощью формулы Грина

$$\oint_{(\Gamma)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

к двойному интегралу.

В нашем случае $P(x, y) = (x, y)^2$, $Q(x, y) = -(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$ Следовательно,

$$\oint_{(\Gamma)} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = \iint_{(D)} (-2x - 2(x+y)) dx dy = \iint_{(D)} (-4x - 2y) dx dy,$$

где (D) - треугольник ABC , изображенный на рисунке 5.10.

Сторона треугольника AB имеет уравнение $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$ или $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.
Сторона треугольника BC имеет уравнение $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-5}{2-5}$ или $y = -3x + 11$.
Наконец, сторона CA имеет уравнение $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{5-1}$, откуда $y = 4x - 3$

Разобьем область (D) на две области D_1 и D_2 прямой $x = 2$. То-

$$\iint_D (-4x - 2y) dx dy = \iint_{(D_1)} + \iint_{(D_2)} = \int_1^2 dx \int_{\frac{x+1}{2}}^{4x-3} (-4x - 2y) dy +$$

$$\int_2^3 dx \int_{\frac{x+1}{2}}^{-3x+11} (-4x - 2y) dy = \int_1^2 (-4xy - y^2) \Big|_{\frac{x+1}{2}}^{4x-3} dx + \int_2^3 (-4xy - y^2) \Big|_{\frac{x+1}{2}}^{-3x+11} dx =$$

$$\int_1^2 (-4x(4x-3) - (4x-3)^2 + 4x \frac{x+1}{2} + (\frac{x+1}{2})^2) dx + \int_2^3 (-4x(-3x+11) - (-3x+11)^2 + 4x \frac{x+1}{2} + (\frac{x+1}{2})^2) dx$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 262 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

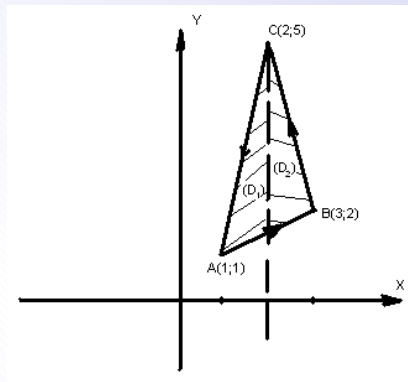


Рис. 5.10

$$\begin{aligned}
 & 11)^2 + 4x \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} dx = \int_1^2 \left(-\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4} \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{21}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4} \right) dx = \\
 & \left(-\frac{119}{4} \frac{x^3}{3} + \frac{77x^2}{4} - \frac{35}{4}x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{21x^3}{12} + \frac{49x^2}{4} - \frac{483}{4}x \right) \Big|_2^3 = -46\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Пример 5.20. Найти работу поля $F = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ , где Γ - ломаная AQB , где $A = (1; -9), B = (3; -3), Q = (3; -9)$.

По условию задачи $P(x, y) = 4x - 5y, Q(x, y) = 2x + y$. По формуле для вычисления работы силового поля $A = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy$ имеем: $A =$

$$\int_{AQB} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy = \int_{AQ} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy + \int_{QB} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy.$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 263 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Точки A и Q соединяет прямая $y = -9$. Следовательно, $dy = 0$ и

$$\int_{AQ} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy = \int_1^3 (4x + 45)dx = (4\frac{x^2}{2} + 45x)|_1^3 = 2 \cdot 9 + 135 - 2 - 45 = 106.$$

Точки Q и B соединяет прямая $x = 3$. Следовательно, $dx = 0$ и

$$\int_{QB} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy = \int_{-9}^{-3} (6 + y)dy = (6y + \frac{y^2}{2})|_{-9}^{-3} = -18 + \frac{9}{2} + 54 - \frac{81}{2} = 0.$$

Таким образом, работа $A = \int_{AQB} (4x - 5y)dx + (2x + y)dy = 106$.

Замечание 5.3. Если установлено, что криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, а именно выполнены условия: функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, непрерывны, причем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то его вычисление можно значительно упростить, выбирая соответствующим образом путь интегрирования, а именно удобно вычислить по отрезкам, параллельным осям координат.



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 264 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

ГЛАВА 6

Приложение

6.1 Приложение двойных и тройных интегралов

6.1.1 Двойные интегралы

1. Площадь плоской фигуры

$$S = \iint_D dx dy.$$

2. Вычисление площадей поверхностей S :

1°.

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

если $S : z = f(x, y), (x, y) \in D$;

2°. $Q = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dz dx$, если $y = f(x, z), (x, z) \in D$;

3°. $Q = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$, если $S : z = f(y, z), (y, z) \in D$.

3. Вычисление массы материальной пластинки. $m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$, где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки в точке $M = (x, y)$.



Кафедра

математического
анализа и дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 265 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 266 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

4. Вычисление статических моментов и координат центра масс материальной пластинки $\zeta(x_0, y_0)$: $x_0 = \frac{\iint_D x\rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}$, $y_0 = \frac{\iint_D y\rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}$

$M_x = \iint_D y\rho(x,y)$, $M_y = \iint_D x\rho(x,y)$ — статические моменты пластинки D относительно осей O_x и O_y соответственно. 5. Вычисление моментов инерции материальной пластинки $I_x = \iint_D y^2\rho(x,y) dx dy$, $I_y = \iint_D x^2\rho(x,y) dx dy$.

6.12 Тройные интегралы

1. Вычисление объемов тел $V = \iiint_V dx dy dz$

2. Вычисление массы тела $m = \iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz$, где $\rho(x,y,z)$ — объемная плотность.

3. Вычисление координат центра масс тела

$$x_0 = \frac{\iiint_V \rho(x,y,z)x dx dy dz}{\iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz}, y_0 = \frac{\iiint_V \rho(x,y,z)y dx dy dz}{\iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz},$$

$$z_0 = \frac{\iiint_V \rho(x,y,z)z dx dy dz}{\iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz},$$

где

$$M_{OYZ} = \iiint_V \rho(x, y, z) x dx dy dz,$$

$$M_{XOZ} = \iiint_V \rho(x, y, z) y dx dy dz, \quad M_{XOY} = \iiint_V \rho(x, y, z) z dx dy dz$$

статические моменты тела относительно координат плоскостей.

4. Вычисление моментов инерции тел.

$$I_0 = \iiint_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz;$$

$$I_x = \iiint_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz;$$

$$I_y = \iiint_V \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dx dy dz;$$

$$I_z = \iiint_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz;$$

$$I_{XOY} = \iiint_V \rho z^2 dx dy dz;$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 267 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$I_{XOZ} = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz;$$

$$I_{YOZ} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz.$$

6.2 Приложение криволинейных интегралов

6.2.1 Криволинейные интегралы первого рода

1. Вычислить длину дуги кривой AB : $L = \int_{AB} dl$, где dl — дифференциал дуги.
2. Вычисление массы кривой AB : $m = \int_{AB} \rho(M) dl$, где $\rho(M)$ — линейная плотность вещества в точке M дуги AB .
3. Координаты центра тяжести плоской кривой AB :

$$x_0 = \frac{\int_{AB} x \rho(M) dl}{\int_{AB} \rho(M) dl}$$

, $y_0 = \frac{\int_{AB} y \rho(M) dl}{\int_{AB} \rho(M) dl}$, $M_x = \int_{AB} y \rho(M) dl$, $M_y = \int_{AB} x \rho(M) dl$ — статические моменты кривой относительно координатных осей.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 268 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

6.2.2 Криволинейные интегралы второго рода

1. Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой γ в плоскости xOy :

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} -ydx + xdy.$$

2. Работа, совершаемая силой $\vec{a}(P, Q, R)$ при перемещении точки по дуге AB из точки A к точке B :

$$A = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где P, Q и R — проекции силы \vec{a} на координатные оси.

3. Восстановление функции $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$Pdx + Qdy = du(x, y), \text{ где } du(x, y) \text{ — полный дифференциал функции}$$
$$\iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. U(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$$



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 269 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

63 Приложение поверхностных интегралов

6.31 Поверхностный интеграл первого типа

1. Вычисление площади поверхности

$$Q = \iint_S dS.$$

2. Вычисление массы поверхности S : $m = \iint_S \rho(x, y) dS$, где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность поверхности S .

6.32 Поверхностный интеграл второго типа

1. Вычисление потока векторного поля через поверхность:

$$\Pi = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy,$$

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \vec{n}) dS,$$

где $\vec{a} = (P, Q, R)$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - вектор нормали к поверхности S .

2. Выполнение циркуляции векторного поля вдоль контура γ :



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 270 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS = \\ &= \iint_S \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\Pi = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a} \vec{n}) dS.$$



Кафедра
математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 271 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Перечень вопросов к экзамену (зачету)

1. Определение и свойства кратного интеграла Римана.
2. Двойные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторному:
 - а) случай прямоугольной области;
 - б) случай криволинейной области.
3. Тройные интегралы. Сведение тройных интегралов к повторным.
4. Формула замены переменной в двойном интеграле. Полярная система координат.
5. Формула замены переменной в тройном интеграле. Использование цилиндрической и сферической системы координат при вычислении тройных интегралов.
6. Криволинейные интегралы первого рода и его свойства.
7. Задача о работе плоского силового поля. Понятие криволинейного интеграла второго рода.
8. Вычисление криволинейного интеграла второго рода и его свойства.
9. Формула Грина и ее применение.
10. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
11. Площадь поверхности S в пространстве R^3 .



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 272 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

12. Поверхностный интеграл первого рода и его способы вычисления.
13. Поверхностный интеграл второго рода. Поток через ориентированную поверхность.
14. Формула Гауса - Остроградского.
15. Формула Стокса.
16. Векторный анализ. Формулы Стокса и Гауса - Остроградского в терминах векторного анализа. Циркуляция и ротор векторного поля.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 273 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

Литература

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев.- М.,1981. Ч.І-ІІ.
2. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И.Шабунин.-М.:МФТИ,2000.-720 с.
3. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич.-М.: Фазис, 1997. Ч.1-2.
4. Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, З.Г. Позняк. - М., 1982. Т. 1-2.-612 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. - М., 1967. Т. 1-2.
6. Колмагоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М., 1981.
7. Будаков, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будаков, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1967.



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 274 из 275

Назад

На весь экран

Закреть

8. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 ч. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под ред. В.А. Соговничего. - 3-е изд. - М.: Дрофа.,
9. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учебное пособие / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть; под общ. ред. А.П. Рябушко. - 2-е изд., перераб. - Мн.: Выш. шк., 2004. - 367 с.: ил.
- 10, Уваренков, И.М. Курс математического анализа / И.М. Уваренков, М.З. Маллер.-М., т.1, 1966. т.2, 1976.
11. Шило, Т.И. Математический анализ. Теория предела. Дифференциальное и интегральное исчисление / учебное пособие / Т.И. Шило.- Брест. Издательство БрГУ, 2007.-216с
- 12, Гаврилов, В.Р., Иванова, Е.Е., Морозова, В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 105005, Москва. 2003.-493с



Кафедра

математического
анализа и диф-
ференциальных
уравнений

Начало

Содержание



Страница 275 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть