§10 Длина окружности и площадь круга

Длина кривой линии

Каждый знает, что расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка, который соединяет эти точки. Ведь отрезок — самый короткий путь между ними. Однако обстоятельства часто вынуждают человека идти по «кривому» пути: дороги обходят горы и препятствия, реки имеют извилистые русла, да и берега морей или озёр никогда не бывает прямыми. Вот почему в известной песне поют: «Нормальные герои всегда идут в обход!». Ещё с древних времён люди хотели знать длину пройденного ими пути и придумывали для этого разные приспособления. В трудах римского писателя Плиния Старшего указаны очень точные расстояния, которые проходило войско Александра Македонского во время своих завоеваний. Как их определяли? Выдающиеся инженеры всех времён: Архимед, Герон, а после них Леонардо да Винчи изобретали одометры* — так называли тележки со специальными механизмами, которые считали длину пути по количеству оборотов их колёс (рис. 1). Сегодня для того чтобы посмотреть на одометр, не нужно идти в музей — он есть в любом автомобиле. А чтобы найти протяжённость маршрута на топографической карте, используют курвиметр** — аналогичный прибор со стрелкой и маленьким колёсиком.

Впрочем, длину дороги на карте с хорошей точностью можно найти и с помощью обычной нитки или циркуля. Для этого ножки циркуля по очереди ставят на линию дороги и «шагают» им по карте от начала пути до конечной точки. Потом складывают длины всех шагов и умножают на масштаб карты. Здесь действует простое правило: чем

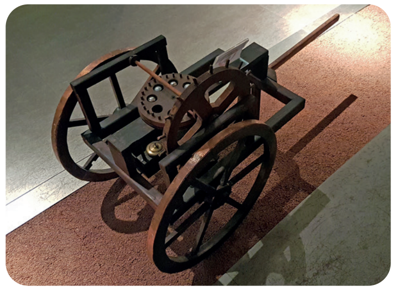


Рис. 1
С помощью таких тележек считали длину пути по количеству оборотов их колёс

Современный одометр

Курвиметр

---

* На древнегреческом языке слово ὁδός ([odos]) значит «дорога». Поэтому одометр — это измеритель дороги.

** Слово *curvus* на латыни значит «изогнутый». То есть курвиметр измеряет длину кривых линий.

более извилист участок пути, тем меньше должен быть шаг циркуля. На практике мы поступаем так же: измеряем свой путь шагами, а перегоны железной дороги промежутками между столбами.

Как же в классической геометрии определяют длину кривой линии? Поскольку расстояние между точками — это длина отрезка, то и длину кривой определяют с помощью отрезков. Поэтому сделаем так же: впишем в кривую простую ломаную так, чтобы её начало и конец совпадали с концами данной кривой, а все вершины лежали на ней (рис. 2, а). Тогда в первом приближении длину кривой можно считать равной длине вписанной в неё простой ломаной. Конечно, любая такая ломаная будет короче самой кривой (подумайте почему). Но если увеличивать число её звеньев и одновременно уменьшать длину каждого звена, то в пределе вписанная в кривую простая ломаная почти не будет отличаться от самой кривой, а её длина начнёт приближаться к некоторому числу (рис. 2, б, в). Это предельное число и берут за длину кривой линии. Сам же процесс нахождения длины кривой называют её спрямлением. Давайте запишем это как определение длины кривой линии.

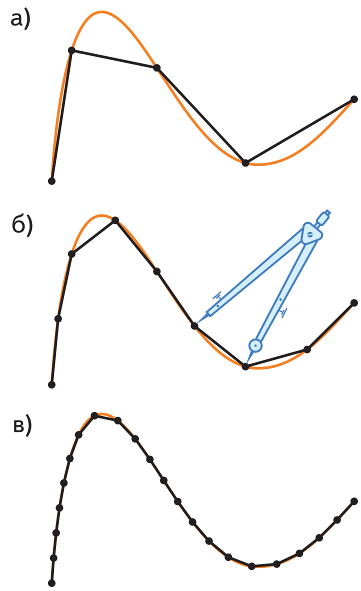
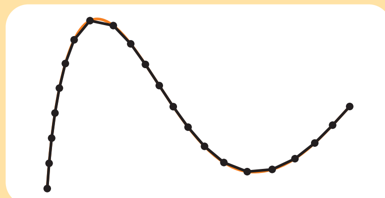


Рис. 2
Спрямление кривой

Длиной кривой называют число, к которому приближается длина вписанной в неё простой ломаной, если концы этой ломаной совпадают с концами кривой, а длина каждого её звена стремится к нулю.



Как найти длину окружности?

Наверное, самая простая кривая линия — это окружность. И одновременно она одна из самых совершенных линий на плоскости. С незапамятных времён человек чертил окружности верёвкой или циркулем на земле, на бумаге или на камне. И конечно, ему важно было знать, чему равна длина этой замкнутой кривой. На практике её длину можно найти с помощью всё той же верёвки — достаточно положить верёвку вдоль окружности, а потом распрямить. Однако такой способ не будет очень точным, а главное — он плохо применим для больших окружностей. Какой верёвкой, например, вы измерите длину орбиты космического спутника? Поэтому мы вычислим длину окружности геометрически: впишем в неё простую замкнутую ломаную и сделаем так, чтобы все её звенья были очень малы. Тогда эта ломаная почти не будет отличаться от окружности, а её длина будет лишь немного меньше длины самой кривой.

Проще всего вписать в окружность ломаную, все звенья которой имеют одинаковую длину. Давайте впишем в окружность с центром O простую замкнутую ломаную $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, все звенья которой равны a (рис. 3). Очевидно, эта ломаная будет равносторонним n-угольником. Проведём из центра O радиусы во все его вершины — они разобьют многоугольник на n равнобедренных треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, … OA_nA_1. Все эти треугольники равны по трём сторонам, поэтому будут равны их углы с вершиной в центре окружности. В сумме эти углы составляют 360°, поэтому каждый из них будет равен $360° : n$. Это позволит нам выразить длину a звена ломаной через радиус R окружности.

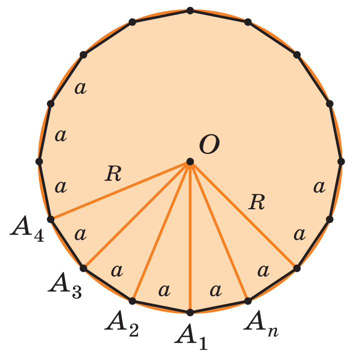


Рис. 3

Рассмотрим равнобедренный треугольник OA_1A_2: его боковые стороны равны радиусу R окружности, основание — звену a нашей ломаной, а угол A_1OA_2 равен $360° : n$. Проведём в этом треугольнике высоту OH — по свойству она будет его биссектрисой и медианой (рис. 4). Тогда отрезки A_1H и A_2H будут равны половине звена ломаной, а угол A_1OH составит половину от угла OA_1A_2, то есть будет равен $180° : n$. Из прямоугольного треугольника OHA_1 найдём, что $\frac{a}{2} = R \cdot \sin\frac{180°}{n}$. Откуда $a = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

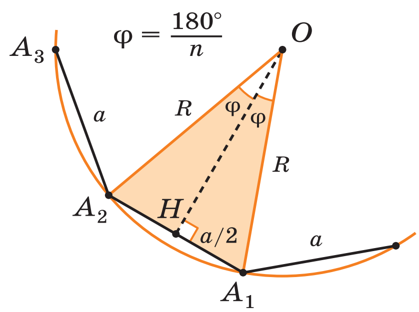


Рис. 4

Теперь легко найти периметр всего n-угольника:

$$P_n = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

Исследуем эту формулу при разных n. При $n = 6$ мы получим периметр уже известного нам правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 5):

$$P_6 = 2R \cdot 6 \cdot \sin\frac{180°}{6} = 12R \cdot \sin 30° = 6R.$$

При $n = 18$ получим $P_{18} = 2R \cdot 18 \cdot \sin\frac{180°}{18} = 36 \cdot R \cdot \sin 10°$.

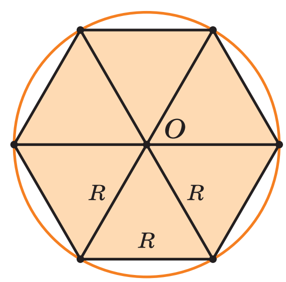


Рис. 5
Периметр правильного шестиугольника равен $6R$

Из тригонометрической таблицы на стр. 17 найдём, что $\sin 10° \approx 0{,}173$. Тогда $P_{18} = 2R \cdot 18 \cdot 0{,}173 \approx 6{,}228 \cdot R$.

Возьмём n значительно больше. Пусть $n = 180$. Тогда

$$P_{180} = 2R \cdot 180 \cdot \sin\frac{180°}{180} = 360 \cdot R \cdot \sin 1°.$$

По тригонометрической таблице учебника можно найти, что $\sin 1° \approx 0{,}017$. Правда, здесь нам потребуется уже бóльшая точность. Не зря же астрономы прошлых веков различными способами старались вычислить синус одного градуса с пятью или шестью знаками после запятой. Из их таблиц или на современном калькуляторе можно найти, что $\sin 1° \approx 0{,}017452$. Если мы подставим это значение в нашу формулу, то получим, что

$$P_{180} = 360 \cdot R \cdot \sin 1° \approx 360 \cdot 0{,}017452 \cdot R = 6{,}282 \cdot R.$$

Чему же равна длина окружности радиуса R? Ясно, что она должна быть чуть больше числа $6{,}282 \cdot R$. Можно строго доказать*, что длина ломаной с любым числом звеньев, которая вписана в окружность радиуса R, должна быть меньше $6{,}284 \cdot R$. Таким образом, мы будем считать, что длина окружности радиуса R равна $6{,}283 \cdot R$ с точностью до одной тысячной её радиуса.

Число π

Леонард Эйлер

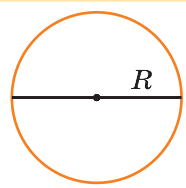
Что такое число π? Ответить на этот вопрос можно так: π — главное число окружности. Но почему его обозначили такой буквой? Здесь всё просто: с этой буквы начинается греческое слово π ε ρ ι φ ε ρ ε ί α, которое и значит «окружность». Это слово читается как периферия, оно существует в современном русском языке и обозначает то же самое, что и окраина, то есть область, сильно удалённую от центра. Обычно так и говорят: «уехать на периферию», «периферия сознания» или даже «периферия компьютера». А для древних греков это слово просто означало окружность. Вот первую букву π от этого греческого слова и взял Леонард Эйлер в XVIII веке для обозначения главного числа окружности.

Что же это за число? Число π показывает, во сколько раз длина окружности больше её диаметра. То есть окружность с диаметром D должна иметь длину $\pi \cdot D$. А поскольку диаметр окружности в два раза больше её радиуса, то её длина так же равна $2\pi R$. Вписывая ломаные в окружность радиуса R, мы выяснили, что её длина L равна $6{,}283 \cdot R$ с точностью до одной тысячной радиуса. Поэтому $L = 2\pi R \approx 6{,}283 \cdot R$. Отсюда можно найти, что число π примерно равно $3{,}1415$. Давайте запишем это как определение числа π.

Число π равно отношению длины L любой окружности к её диаметру D. Число π Y 3,1415.

Из определения следует важная формула, выражающая длину окружности через её радиус: $L = \pi \cdot D = 2\pi R$.

$$L = 2\pi R$$

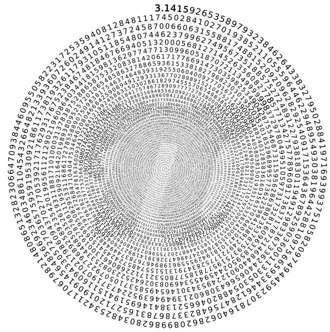


---

* Наметим идею такого доказательства. Опишем вокруг данной окружности 180-угольник, все стороны которого имеют длину b. Легко доказать, что окружность будет касаться его сторон в серединах, откуда получить, что $b = 2R \cdot \operatorname{tg} 1^\circ \approx 2R \cdot 0{,}017455$. Периметр такого 180-угольника будет равен $180 \cdot 2R \cdot 0{,}017455 \approx 6{,}2838 \cdot R$. Этот многоугольник будет содержать окружность внутри себя, а значит, и все вписанные в неё многоугольники. А поскольку все эти многоугольники выпуклые, то их периметры всегда будут меньше $6{,}2838 \cdot R$.

Мы нашли число π с точностью до одной тысячной. Но история его вычисления продолжалась тысячи лет. В Древнем Вавилоне его считали равным $\frac{25}{8} = 3{,}125$. В Древнем Египте полагали, что $\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16$. А в Древней Индии за число π принимали $\sqrt{10}$. Великий Архимед вписал в окружность правильный 96-угольник и получил, что число $\pi \approx 3\frac{1}{7}$. В настоящее время π вычислено с огромным числом верных знаков с помощью числовых рядов: $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327950 2\ldots$

Доказано, что число π иррациональное, то есть оно не может быть записано как отношение двух целых чисел и в десятичной записи его цифр после запятой никогда не будет периода. А для запоминания первых цифр числа π даже придумывают стихи.



Надо только постараться
И запомнить всё как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть.

Земля и апельсин

Все окружности — это подобные фигуры, поэтому и отношение длины каждой из них к своему диаметру одинаково. По сути это означает, что число π для них одно и то же. С одной стороны, это очевидно, а с другой... давайте разберём один парадокс, придуманный в прошлом веке замечательным писателем и популяризатором науки Яковом Перельманом.

Представим себе земной шар и обыкновенный апельсин. Мысленно плотно обтянем их железными обручами по экваторам. Ясно, что обруч апельсина будет маленьким, а обруч Земли огромным. Теперь разрежем эти обручи, добавим к каждому из них по одному метру длины и снова замкнём их (рис. 6, 7). Наши обручи тогда уже не будут плотно прилегать к поверхностям апельсина и земного шара — у каждого из них появится свой зазор. Понятно, что расстояние, на которое обруч отступит от поверхности апельсина, будет довольно большим: ведь целый метр по сравнению с апельсином — это много. И наоборот: тот же метр по сравнению с окружностью Земли — это совсем мало, его и заметить будет нельзя. Но тогда и зазор, на который железный обруч отступит от поверхности земного шара, будет практически незаметен. Поэтому возникает такой вопрос: этот зазор будет больше или меньше одного миллиметра? Не знаете? Тогда зададим ещё один совсем уж «глупый» вопрос: пролезет ли под этим обручем обыкновенная мышка? А для справки напомним, что длина экватора земного шара равна 40 000 км.

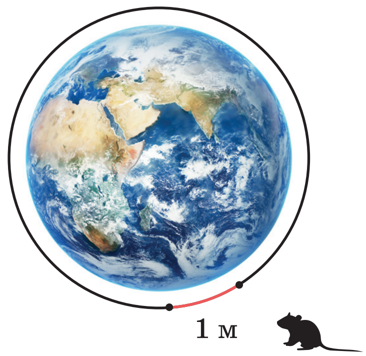


Рис. 6

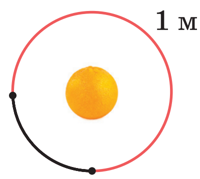
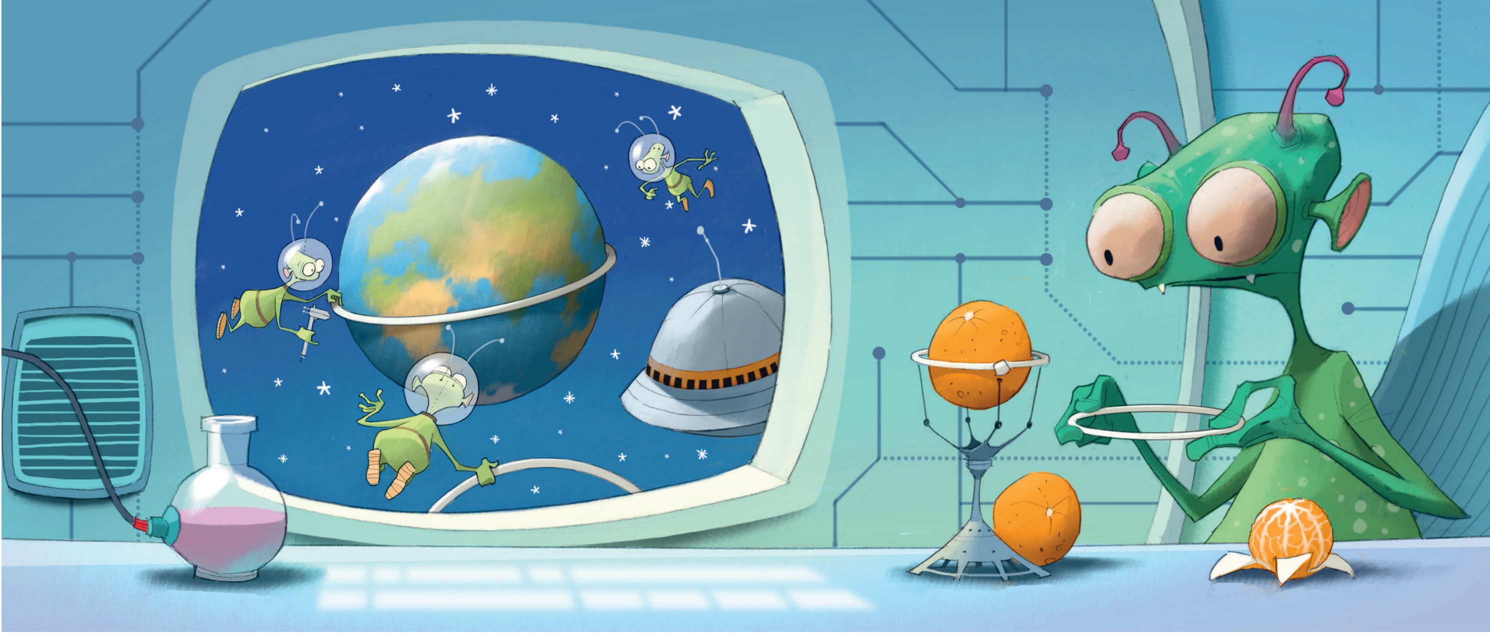


Рис. 7

Наверняка у вас уже сложилось своё мнение по поводу мышки, апельсина и земного шара. Не будем пока



отвечать на заданные вопросы, а просто посчитаем. Пусть радиус обруча равен R. Тогда длину L этого обруча можно найти по формуле: $L = 2\pi R$. Если мы увеличим длину обруча на 1 м, то его радиус увеличится на величину зазора h (рис. 8). Тогда для увеличенного обруча можно записать уравнение: $L + 1 = 2\pi(R + h) = 2\pi R + 2\pi h$.

Подставим в него выражение для длины первого обруча: $L = 2\pi R$. Тогда $2\pi R + 1 = 2\pi R + 2\pi h$.

Откуда $1 = 2\pi h$. Теперь найдём величину зазора:

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1\text{ м}}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{100\text{ см}}{6{,}28} \approx 15{,}9\text{ см}.$$

Таким образом, зазор h, на который обруч отступит от поверхности любой окружности, будет около 16 см. Но самое удивительное состоит в том, что он будет одинаковым для апельсина и земного шара! Конечно, в такой зазор под обручем пролезет не только мышка, но и любая кошка!

Этот удивительный парадокс следует из того, что длина любой окружности выражается через её радиус по одной и той же формуле. А можно было бы сказать и так: он наглядно показывает, что число π постоянно для всех окружностей.

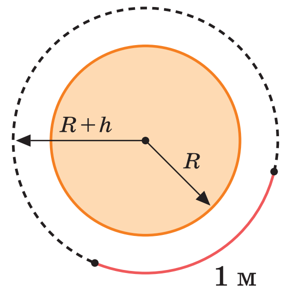


Рис. 8

УПРАЖНЕНИЯ

1. С точностью до 1 мм найдите длины окружностей, показанных на клетчатой бумаге, если сторона одной клетки равна 1 см (рис. 9).

2. Если колесо без проскальзывания катится по прямой дороге и делает ровно один оборот вокруг оси, то от-

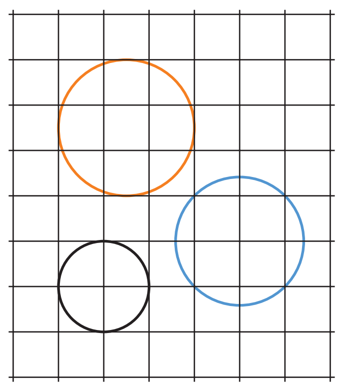


Рис. 9

носительно дороги оно перемещается на длину своей окружности. Найдите радиус колеса телеги, если она проехала 157 м, а каждое её колесо сделало ровно 100 оборотов (рис. 10).

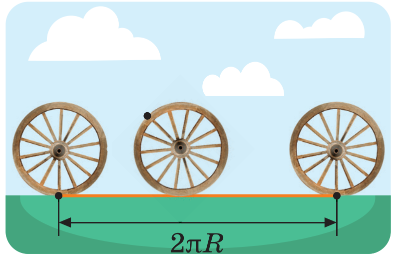


Рис. 10

Длина дуги окружности

Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. А чему может быть равна длина её дуги? В частных случаях это очевидно. Например, диаметр делит окружность на две равные части — полуокружности. Значит, их длины одинаковы и составляют половину от длины всей окружности, то есть πR (рис. 11). А если всю окружность, как циферблат часов, разделить на 12 равных частей, то длина каждой дуги между делениями может быть вычислена как $2\pi R : 12 = \pi R : 6$ (рис. 12).

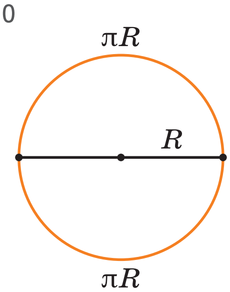


Рис. 11

А как быть в общем случае? Из приведённых примеров видно, что длина дуги окружности должна зависеть от её градусной меры — величины угла, под которым она видна из центра окружности. Очевидно, что с увеличением этого угла увеличивается и длина такой дуги. Мы докажем, что эта зависимость линейная, то есть длина дуги пропорциональна её градусной мере. А поскольку вся окружность видна из её центра под углом 360°, то справедлива следующая теорема.

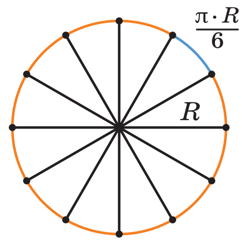
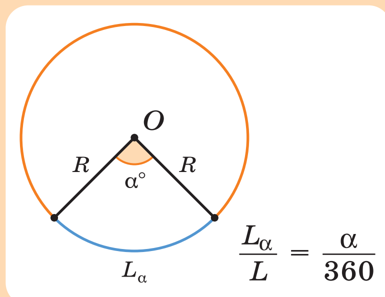


Рис. 12

ТЕОРЕМА

Длина дуги окружности относится к длине всей окружности как её градусная мера к полному углу 360°.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы докажем теорему для случая, когда градусная мера α дуги окружности относится к полному углу 360° рационально, то есть как два целых числа*. Пусть $\alpha : 360 = k : n$, где k, n — натуральные числа.

---

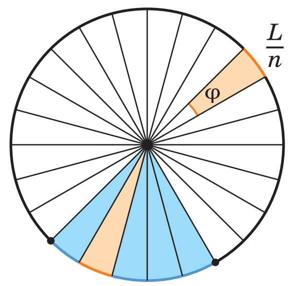
* Общий случай можно свести к этому, поскольку любое действительное число сколь угодно точно можно приблизить натуральной дробью.

Разобьём весь круг на n равных секторов с углами φ. Они разделят всю окружность длины L на n равных частей длины $L : n$ (рис. 13).

Очевидно, что $n \cdot \varphi = 360°$. По условию $\alpha : 360 = k : n$, поэтому $\alpha = k \cdot \varphi$. Значит, центральный угол α данной дуги вместит ровно k таких секторов. Следовательно, сама дуга состоит из k частей с длиной $\frac{L}{n}$.

Откуда получим, что длина дуги окружности, соответствующая углу α, равна $L_\alpha = k \cdot \frac{L}{n}$. Поэтому $\frac{L_\alpha}{L} = \frac{k}{n} = \frac{\alpha}{360}$.

Что и требовалось доказать.



$$L_\alpha = k \cdot \frac{L}{n}$$

Рис. 13

СЛЕДСТВИЕ

Из доказанной теоремы следует формула, выражающая длину дуги L_α окружности через её радиус R и градусную меру α этой дуги (рис. 14): $L_\alpha = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360}$.

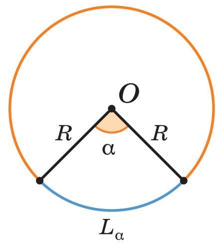


Рис. 14

УПРАЖНЕНИЯ

3. Докажите формулу для вычисления длины дуги окружности.

4. В квадрат со стороной 1 поместили дуги окружностей так, как это показано на рисунке 15. Найдите длину каждой из этих дуг, если их центры находятся на сторонах этого квадрата.

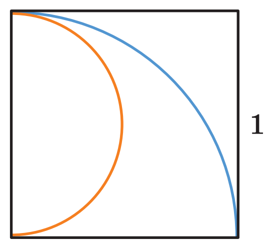


Рис. 15

5. На кафельной плитке изображён «месяц». С точностью до 1 см найдите периметр этого «месяца», если он состоит из дуг двух окружностей. Сторона одной плитки 10 см (рис. 16).

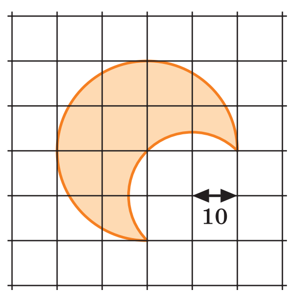


Рис. 16

Радианы

Вы уже знаете, как найти длину дуги окружности по её радиусу и центральному углу. Оказывается, что можно поступить ровно наоборот: центральный угол выразить через длину дуги, которую он высекает на окружности. Если дугу измерять в радиусах самой окружности, то по длине дуги однозначно можно определить угол, под которым она видна из центра. Определённая так величина угла называется его *радианной мерой*. Получается, что углы можно мерить не только в привычных уже нам градусах, но и в радианах.

А что такое радианы? Давайте «согнём» радиус окружности и превратим его в дугу той же самой окружности. Тогда из её центра такой «согнутый в дугу» радиус будет виден под некоторым углом. Именно этот угол и называют одним радианом (рис. 17). В каком-то смысле радианная мера угла даже более универсальна, чем привычная нам градусная мера. Как бы, например, вы объяснили инопланетянам, что углы на Земле нужно измерять в 180 частях развёрнутого угла? А объяснить, что такое один радиан, можно просто на рисунке. Арабские астрономы ещё в XIV веке откладывали на окружности части её радиуса и мерили так центральные углы. Но само слово «радиан» появилось лишь во второй половине XIX века, и образовали его от слова «радиус». А теперь давайте запишем определение одного радиана.

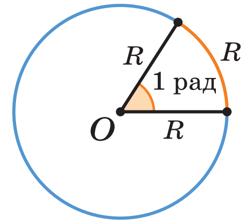
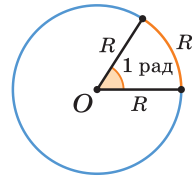


Рис. 17

Радианом называют центральный угол окружности, длина дуги которого равна её радиусу.

Угол с величиной α радиан записывают так: α рад.



На рисунках 18 а и б вы можете видеть углы величиной 2 и 3 радиана. Согласно данному определению этим углам должны соответствовать дуги окружности, равные $2R$ и $3R$. На последнем рисунке видно, что угол в 3 рад немного меньше развёрнутого угла. Это легко объяснить: развёрнутому углу должна соответствовать ровно половина окружности, длина которой равна πR. Значит, радианная мера половины окружности равна π, что немного больше 3 (рис. 19). Ну а мера целой окружности в радианах должна составлять 2π. Это позволяет составить таблицу пересчёта углов из градусов в радианы.

Сделать это вы можете в качестве упражнения.

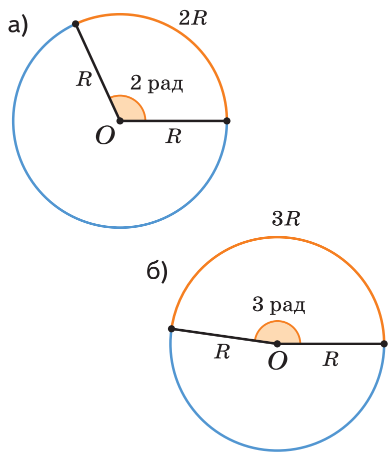


Рис. 18

УПРАЖНЕНИЕ

6. Заполните пустые места в таблице пересчёта углов из градусов в радианы.

Градусы	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радианы	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$			π

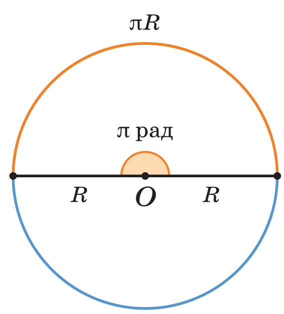


Рис. 19

Теперь поставим обратную задачу: выясним, сколько градусов составляют угол в 1 рад. Обозначим градусную меру этого угла за α. Мы знаем, что углу $180°$ соответствует π радиан. Радианная мера угла, как и дуга окружности, пропорциональна её градусной мере, поэтому должна выполняться пропорция $\frac{1}{\pi} = \frac{\alpha°}{180°}$. Откуда $\alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$.

Какова должна быть величина острого угла, чтобы и в градусах, и в радианах этот угол имел один и тот же синус?

Значит, один радиан содержит чуть больше 57 градусов. А для того чтобы привыкнуть переводить радианы обратно в градусы, сделайте следующее упражнение.

УПРАЖНЕНИЕ

7. Переведите углы в таблице из радианов в градусы.

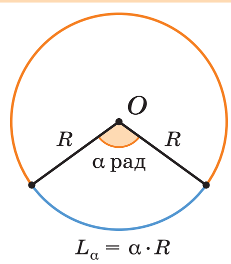
Радианы	2π	$1{,}5\pi$	$1{,}25\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	3,1415	1,57
Градусы	$360°$						

Почему углы решили измерять в радианах? Главная причина состоит в том, что многие формулы в радианах записывать короче и понятнее. Например, формулу для вычисления длины дуги окружности. Посмотрим, как она будет выглядеть в радианах. Пусть радиус окружности равен R, а её дуга видна из центра под углом α рад. Длина дуги L_α должна относиться к длине всей окружности так же, как её угол α к полному углу, под которым из центра видна вся окружность. Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, а полный угол в радианах равен 2π, то можно записать такую пропорцию $\frac{L_\alpha}{2\pi R} = \frac{\alpha_{\text{рад}}}{2\pi}$.

Откуда мы получим, что $L_\alpha = \alpha : 2\pi$. Давайте запишем это как формулу длины дуги окружности.

ФОРМУЛА ДЛИНЫ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Длину L_α дуги окружности радиуса R, которая видна из её центра под углом α радиан, можно найти по формуле: $L_\alpha = \alpha \cdot R$.



УПРАЖНЕНИЕ

8. Окружность радиуса 1 касается сторон угла величиной 1 рад в точках A и B. Найдите длину меньшей из дуг AB этой окружности (рис. 20).

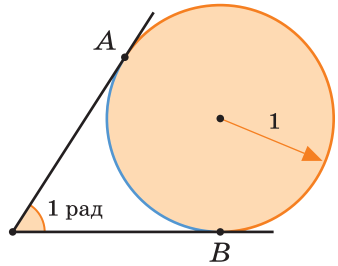


Рис. 20

Площадь круга

Замкнутая линия на плоскости ограничивает некоторую площадь. Если эта линия — многоугольник, найти его площадь можно, просто разбив многоугольник на треугольники. А что делать, если эта линия кривая? Например, если она окружность? В начале этого параграфа мы определяли длину окружности и приближали её многоугольниками, вписанными в эту окружность. Для вычисления площади круга давайте поступим так же: впишем в окружность многоугольник с большим числом сторон и найдём его площадь. Если каждая сторона такого многоугольника будет очень мала, то он почти не будет отличаться от окружности, а его площадь будет практически равна площади круга. Получить нужный многоугольник можно методом удвоения сторон* из любого треугольника, который вписан в эту окружность. Но проще вписать в окружность многоугольник, все стороны которого равны между собой, и сделать их число очень большим. Примерно так и поступил великий Архимед, когда доказывал теорему о площади круга. До него эту площадь вычисляли, пользуясь неточными формулами (рис. 21). Сам же Архимед формулировал свою теорему так:

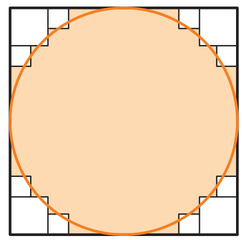
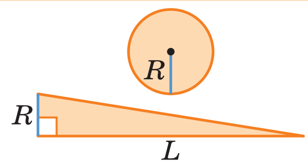


Рис. 21
По одной из гипотез так вычисляли площадь круга в Древнем Египте. Египтяне считали, что она составляет $\frac{64}{81}$ от площади квадрата, в который вписан круг. Интересно, что при этом ошибка составляла меньше процента.

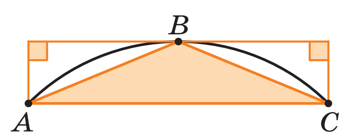
Всякий круг равновелик прямоугольному треугольнику, один катет которого равен радиусу круга, а другой — периметру его окружности.



Мы дадим современную формулировку теоремы Архимеда и назовём ее теоремой о площади круга.

---

* *Метод удвоения* заключается в том, что все дуги окружности между соседними вершинами вписанного многоугольника делят пополам и полученные точки добавляют к его вершинам. При этом каждый раз количество вершин многоугольника удваивается и можно доказать, что разница между площадью круга и многоугольника уменьшается более, чем в два раза. Поэтому после 10 таких удвоений площадь многоугольника будет отличаться от площади круга меньше чем на 0,001 его площади.



$$\frac{S_{\text{сегм}}}{2} < S_{\triangle ABC}$$

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ КРУГА

Площадь круга равна половине произведения его радиуса на длину окружности.

$$S_о = \frac{1}{2}L \cdot R$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Впишем в окружность n-угольник $A_1A_2...A_n$, все стороны которого имеют длину a (рис. 22) данной окружности. Проведём радиусы во все его вершины — они разделят многоугольник на n равнобедренных треугольников с вершиной в центре O данной окружности. Все эти треугольники будут равны по трём сторонам, а сумма их площадей будет составлять площадь всего многоугольника.

Давайте вычислим площадь одного из таких треугольников A_1OA_2. Его боковые стороны равны радиусу R данной окружности, а основание имеет длину a. Опустим в этом треугольнике высоту на основание. Так как треугольник равнобедренный, то эта высота совпадает с медианой и разбивает его на два равных прямоугольных треугольника. Обозначим длину высоты за h (рис. 23) и запишем теорему Пифагора для одного из этих прямоугольных треугольников: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$.

Из полученного равенства видно, что если длина стороны a многоугольника становится близкой к нулю, то длина высоты h приближается радиусу R окружности. То есть $h \to R$, если $a \to 0$.

Площадь S треугольника A_1OA_2 найдём по формуле:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Многоугольник состоит из n равных ему треугольников, поэтому можно найти его площадь S_n:

$$S_n = n \cdot S = n \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{2}h \cdot (na).$$

Поскольку периметр P_n многоугольника равен na, то последнее равенство можно записать так $S_n = \frac{1}{2}h \cdot P_n$.

Сделаем теперь число n сторон многоугольника очень большим. Тогда сам многоугольник будет почти неотличим от окружности, а его площадь S_n станет практически равна площади круга $S_о$. Периметр P_n многоугольника будет очень близок к длине L окружности, а его сторона будет близка нулю. Мы знаем, что в этом случае высота h будет мало отличаться от радиуса R окружности (рис. 24). Значит, при очень большом числе n сторон можно написать приближённое равенство $S_о \approx \frac{1}{2}R \cdot L$.

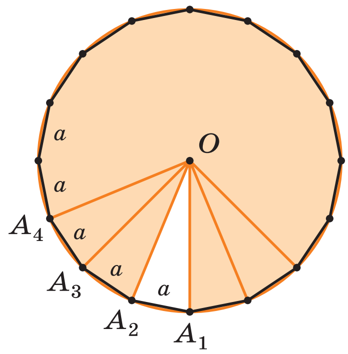


Рис. 22

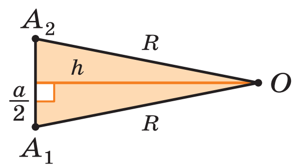


Рис. 23

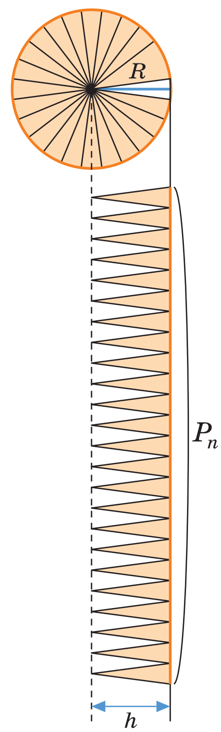


Рис. 24

Это равенство будет выполняться тем точнее, чем больше число n сторон многоугольника. А при увеличении числа n до бесконечности мы получим, что

$$S_n \to S_о, \quad P_n \to L, \quad h \to R.$$

Тогда приближённое равенство станет уже точным:

$$S_о = \frac{1}{2} R \cdot L.$$

Значит, площадь круга будет равна половине произведения его радиуса на длину окружности.

Что и требовалось доказать.

Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, то из доказанной теоремы легко вывести формулу для площади круга:

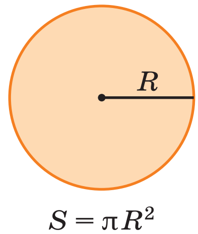
$$S_о = \frac{1}{2} R \cdot L = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

Эту формулу легко запомнить и просто применять. Давайте её запишем как формулу для вычисления площади круга.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ КРУГА

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$



Из формулы площади круга следует, что площади кругов относятся как квадраты их радиусов. В этом нет ничего удивительного, ведь круги — это подобные фигуры. Поэтому если в кафе вместо трёх одинаковых круглых пицц вам предлагают взять одну, но вдвое большего диаметра, то соглашайтесь не раздумывая!

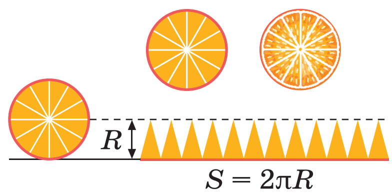


Рис. 25

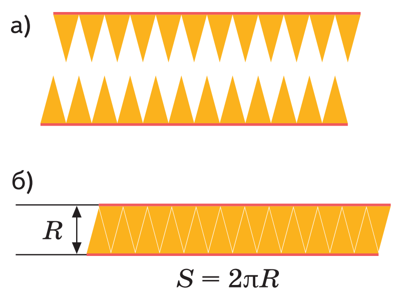


Рис. 26

Площадь круга можно вычислить на пальцах. Идею такого рассуждения придумал Леонардо да Винчи. Возьмём два одинаковых круга радиуса R и разрежем их на много одинаковых секторов. Потом раскроем каждый из них, как кружок апельсина, не отделяя от него кожуры (рис. 25). Если мы совместим зубчиками две эти «цитрусовые пилы», то получим один параллелограмм с высотой R и основанием, равным длине окружности $L = 2\pi R$ (рис. 26 а, б). Площадь этого параллелограмма будет равна $R \cdot L = 2\pi R^2$. Тогда мы получим, что удвоенная площадь $S_о$ круга равна площади параллелограмма, то есть $2S_о = 2\pi R^2$. Откуда получим нужную формулу для площади круга $S_о = \pi R^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

9. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью длиной: а) π; б) $10\sqrt{\pi}$; в) 62,83.

10. Найдите площадь кругов, изображённых на клетчатой бумаге, если сторона клетки равна 1. Как относятся друг к другу их площади (рис. 27)?

11. Найдите площадь кольца, изображённого на клетчатой бумаге, если сторона клетки равна 1. (рис. 28).

12. Три металлических круглых диска одинаковой толщины с радиусами 40, 40 и 70 см переплавили в один диск такой же толщины. Чему будет равен радиус этого диска?

13. Катушка ниток имеет форму цилиндра с малым отверстием. Изначально в ней было 2000 м нитки. Сколько примерно метров нитки в ней останется, когда диаметр этой катушки уменьшится в два раза?

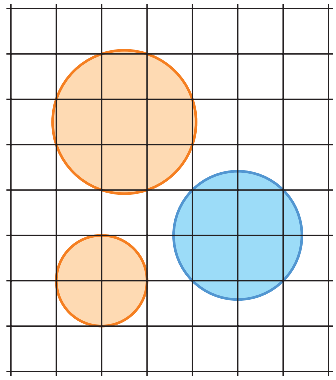


Рис. 27

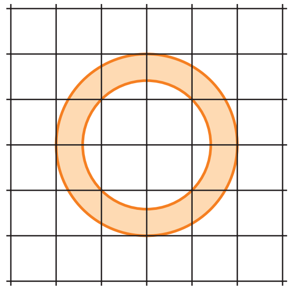


Рис. 28

Площадь сектора круга

Площадь сектора круга так же линейно зависит от величины его угла, как и длина дуги окружности. Что это значит? Ровно то, что при разделе круглой пиццы на части площади её кусков будут относиться друг к другу так же, как относятся их углы в центре круга (рис. 29). Это очевидно, когда угол одного сектора в несколько раз больше угла другого. Но само утверждение будет верно во всех случаях. И обосновать его можно тем же способом, который мы использовали для получения длины дуги.

Давайте по аналогии с дугой окружности запишем соотношение для площади сектора круга и получим нужную формулу.

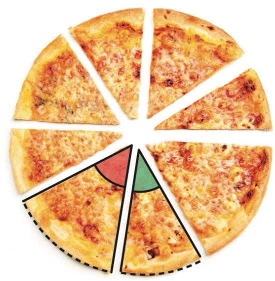
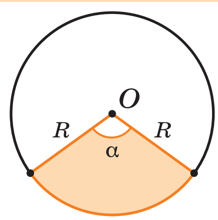


Рис. 29

Площадь сектора относится к площади всего круга как градусная мера его угла α к полному углу 360°.



$$\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

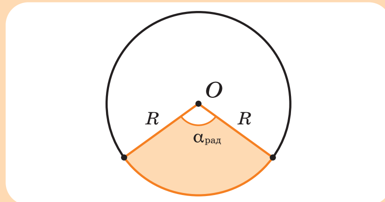
Формулу для площади сектора круга можно записать и через его угол, выраженный в радианах. Для этого нужно лишь помнить, что углу 360° соответствует 2π радиан. Тогда по аналогии мы получим пропорцию

$$\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{\alpha_{\text{рад}}}{2\pi}.$$

Подставив в эту пропорцию выражение πR^2 для площади круга, получим формулу площади сектора.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ СЕКТОРА

Сектор круга радиуса R, угол которого равен $\alpha_{\text{рад}}$, имеет площадь: $\dfrac{\alpha_{\text{рад}} \cdot R^2}{2}$.



Интересно, что площадь сектора круга можно найти тем же методом Архимеда и получить $S_{\text{сектора}} = \dfrac{R \cdot L_\alpha}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

14. Найдите площадь сектора круга, если его радиус равен 2, а длина дуги составляет: а) π; б) 3.

15. Найдите площадь круговых секторов, показанных на клетчатой бумаге. Сторона клетки равна 1 (рис. 30).

16. Из бумаги вырезали сектор круга радиуса 24 см с прямым углом, а потом свернули из него коническую воронку (рис. 31). Найдите радиус R окружности, идущей по краю этой воронки.

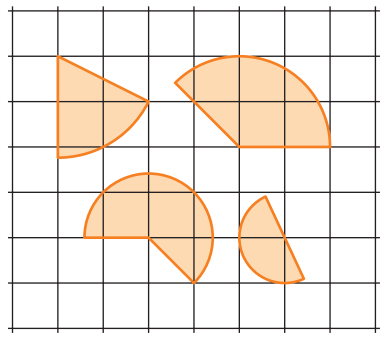


Рис. 30

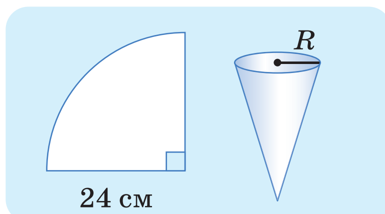


Рис. 31

ВОПРОСЫ

1. Какие способы измерения длины кривой вы знаете?

2. Что означает число π? Чему оно равно?

3. Во сколько раз длина окружности больше её радиуса?

4. Как зависит длина дуги окружности от её градусной меры?

5. Чему равна длина дуги окружности радиуса 6, градусная мера которой равна 60°?

6. Что такое 1 радиан? Сколько радиан соответствует прямому углу?

7. Чему равна длина дуги сектора радиуса 5 с центральным углом, равным 2 радиана?

8. По какой формуле вычисляют площадь круга?

9. Какую формулу площади кругового сектора вы знаете?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Город имеет форму круга, по границе которого проходит дорога. Путь между точками A и B по окружной дороге оказался равен пути между ними через центр города. Чему равен угол α между двумя проспектами, идущими из точек A и B в центр?

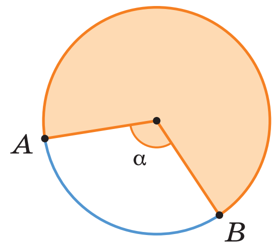


Рис. 32

РЕШЕНИЕ

Пусть O — центр города, а R — радиус его круга. Обозначим величину угла AOB за α радиан (рис. 32). Путь между точками A и B по окружной дороге будет равен длине дуги AB окружности, поэтому он равен $\alpha \cdot R$. Длина пути через центр города равна $2R$. По условию $\alpha \cdot R = 2R$. Откуда $\alpha = 2$ рад $\approx 114°$.

Ответ: 2 радиана.

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Две окружности радиуса 1 проходят через центры друг друга. Найдите площадь пересечения кругов, образованных этими окружностями (рис. 33).

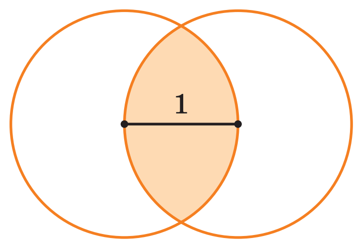


Рис. 33

РЕШЕНИЕ

Пусть окружности радиуса 1 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Поскольку центр O_1 первой окружности лежит на окружности с центром O_2, то $O_1O_2 = 1$. Значит, треугольники AO_1O_2 и BO_1O_2 равносторонние и все их углы равны $60°$ (рис. 34). Площадь каждого из этих треугольников найдём по формуле

$$S_\Delta = \frac{1\cdot 1\cdot \sin 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

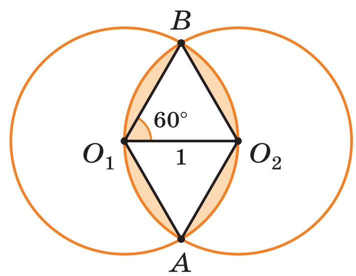


Рис. 34

Пересечение данных кругов состоит из этих двух равносторонних треугольников и четырёх круговых сегментов, прилегающих к их сторонам.

Давайте найдём площадь сегмента, прилегающего к стороне BO_2 (рис. 35). Поскольку угол BO_1O_2 равен $60°$, то сектор круга с центром O_1 и дугой BO_2 составляет шестую часть этого круга. Значит, его площадь будет равна $\pi : 6$. Чтобы найти площадь сегмента, вычтем из площади этого сектора площадь треугольника BO_1O_2. Тогда мы получим, что $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

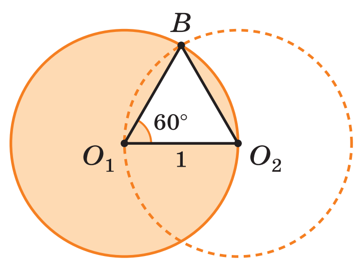


Рис. 35

Площади остальных трёх сегментов будут такими же. Теперь можно найти площадь пересечения кругов

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 4\cdot\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}29.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ПРИМЕР 3. ★★☆ Фигура, образованная тремя полуокружностями с концами в точках A, B и C, лежащих на одной прямой, называется арбелосом Архимеда. Найдите площадь арбелоса, если отрезок CK, перпендикулярный диаметрам полуокружностей, равен h (рис. 36).

Арбелосом в древних Сиракузах называли нож, которым кожевенники разрезали шкуры животных. В точке C его насаживали на деревянную рукоять.

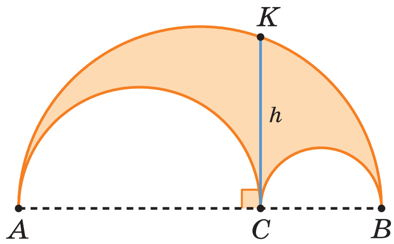


Рис. 36

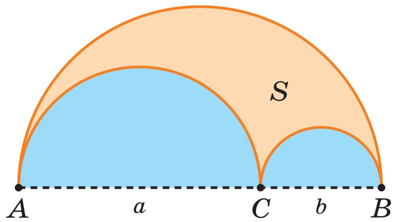


Рис. 37

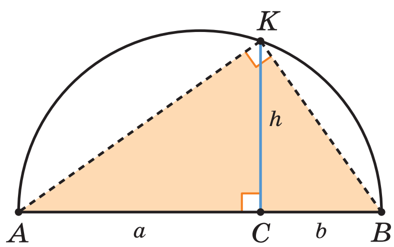


Рис. 38

РЕШЕНИЕ

Обозначим длины отрезков AC и BC за a и b. Тогда длина отрезка AB будет $a + b$ (рис. 37). Каждый из этих отрезков — диаметр своей окружности, поэтому их радиусы будут соответственно равны $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ и $\frac{1}{2}(a+b)$. Полукруги с такими диаметрами будут иметь площади

$$\frac{\pi \cdot a^2}{8}, \frac{\pi \cdot b^2}{8} \text{ и } \frac{\pi \cdot (a+b)^2}{8}.$$

Тогда площадь S арбелоса будет равна

$$S = \frac{\pi \cdot (a+b)^2}{8} - \frac{\pi \cdot a^2}{8} - \frac{\pi \cdot b^2}{8} = \frac{\pi \cdot 2ab}{8} = \frac{\pi \cdot ab}{4}.$$

Теперь давайте вспомним, что из точек окружности её диаметр всегда виден под прямым углом. Значит, угол AKB равен $90°$. Поэтому треугольник AKB прямоугольный, а отрезок CK — это его высота, опущенная на гипотенузу (рис. 38). По свойству прямоугольного треугольника высота равна среднему геометрическому отрезков, на которые она разбивает его гипотенузу. Поэтому $h = \sqrt{ab}$. Откуда следует, что $ab = h^2$.

Теперь площадь арбелоса Архимеда можно выразить через h:

$$S = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi h^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi h^2}{4}$.

ПРИМЕР 4. ★★☆ Докажите, что для острого угла α радиан выполняется двойное неравенство: $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R. Проведём в этой окружности радиусы OA и OB так, чтобы $\angle AOC = \alpha$. Тогда длина дуги AB окружности, лежащая внутри этого угла, будет равна $R\alpha$. Длина дуги AB по определению больше длины любой вписанной в неё простой ломаной. Значит, она больше длины хорды AB окружности. Поэтому $AB < R\alpha$.

Опустим из точки B перпендикуляр BH на прямую OA (рис. 39). Тогда из прямоугольного треугольника OBH можно найти, что $BH = OB \cdot \sin\alpha = R \cdot \sin\alpha$.

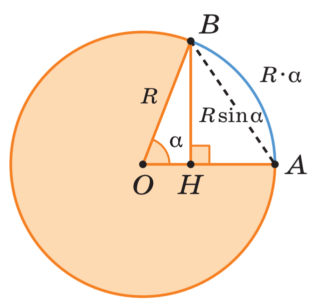


Рис. 39

Перпендикуляр к прямой всегда короче наклонной, проведённой из той же точки, поэтому $BH < BA$. Значит, $R\sin\alpha < AB < R\alpha$. Откуда $\sin\alpha < \alpha$. Таким образом, мы доказали, что синус острого угла всегда меньше величины этого угла в радианах.

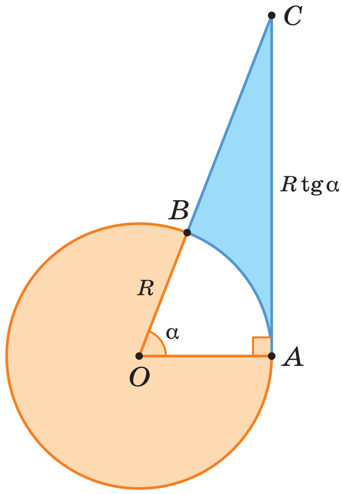


Рис. 40

Теперь докажем вторую часть двойного неравенства. Для этого проведём касательную к окружности в точке A и пересечём её с прямой OB в точке C (рис. 40). По свойству касательной угол OAC будет равен $90°$. Тогда из прямоугольного треугольника AOC мы получим, что $AC = R\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Найдём площадь этого треугольника:

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}OA\cdot CA = \frac{1}{2}R^2\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Найдём теперь площадь S сектора AOB круга:

$$S = \frac{\alpha\cdot R^2}{2}.$$

Сектор AOB целиком содержится в треугольнике AOC, поэтому $S < S_{AOC}$. Значит,

$$\frac{\alpha\cdot R^2}{2} < \frac{R^2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Откуда получим, что $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5. ★★★ На круглом столе радиуса 25 лежат 156 монет радиуса 1, и они не касаются друг друга. Всегда ли на этот стол можно положить ещё одну такую же монету так, чтобы она не коснулась других монет (рис. 41)?

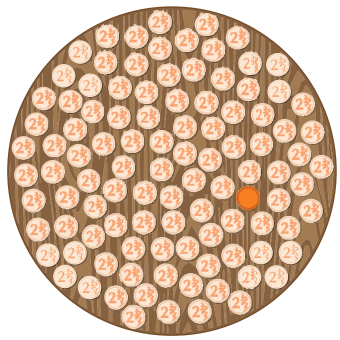


Рис. 41

РЕШЕНИЕ

Построим 156 кругов радиуса 2, центры которых совпадают с центрами монет, лежащих на столе. Сумма их площадей равна $156\cdot\pi\cdot 2^2 = 624\pi$. Площадь же всего стола равна $\pi\cdot 25^2 = 625\pi$. Значит, сумма площадей построенных кругов меньше площади стола и они не могут полностью покрыть все точки этого стола.

Рассмотрим точку A на столе, которую не покрывает ни один из кругов радиуса 2. Расстояние от неё до центра любого из них больше 2 (рис. 42). Положим на стол ещё одну монету радиуса 1 так, чтобы её центр совпадал с точкой A. Тогда она не будет касаться ни одной из других монет, лежащих на столе. Значит, на стол всегда можно положить ещё одну монету.

Ответ: всегда можно.

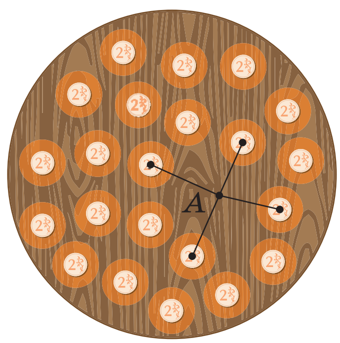


Рис. 42