Лекция 16. Линейная оболочка системы векторов. Ранг системы векторов. Теорема о базисном миноре

§ 1. Линейная оболочка системы векторов

Пусть $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ – линейная система векторов в линейном пространстве L. Рассмотрим множество векторов, которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов

$$\mathcal{L}(S) = \{\vec{x} \in L : \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_m \vec{u}_m\},$$

это множество называется линейной оболочкой системы векторов S.

Утверждается, что линейная оболочка $\mathcal{L}(S)$ является линейным подпространством, так как

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}(S) \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{L}(S),$$

$$\forall\, \vec{x} \in \mathcal{L}(S), \ \forall\, \lambda \in R \quad \lambda \vec{x} \in \mathcal{L}(S).$$

Определение. Рангом системы векторов S называют размерность их линейной оболочки $\mathcal{L}(S)$

$$\mathrm{rg}(S) = \dim \mathcal{L}(S).$$

Замечание. Любое линейное подпространство или пространство можно представить как линейную оболочку некоторой системы векторов.

Если $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ система линейно независимых векторов, то векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ образуют базис линейного пространства (подпространства) и

$$\mathrm{rg}(S) = \dim \mathcal{L}(S) = m.$$

Если $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ линейно зависимые векторы, то выделим из них линейно независимую подсистему.

Теорема. Пусть все векторы системы $S_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ линейно выражаются через векторы системы $S_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k\}$, тогда $\mathrm{rg}(S_1) \le \mathrm{rg}(S_2)$.

Доказательство. $\mathcal{L}(S_1) \subseteq \mathcal{L}(S_2)$, так как $\forall\, \vec{x}_i \in \mathcal{L}(S_1)$

$$\vec{x}_i = \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \dots + \lambda_k \vec{y}_k \in \mathcal{L}(S_2),$$

следовательно, $\dim \mathcal{L}(S_1) \le \dim \mathcal{L}(S_2)$.

Пример. $S_1 = \{1, t, t^2\}$, $S_2 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. $S_1 \subseteq S_2$, $\mathrm{rg}(S_1) = 3$, $\mathrm{rg}(S_2) = 5$.

§ 2. Сохранение ранга системы векторов при элементарных преобразованиях

Элементарные преобразования:

1) перестановка векторов системы;

2) умножение вектора системы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному из векторов системы другого вектора, умноженного на число.

Теорема. При элементарных преобразованиях системы векторов её ранг не меняется.

Доказательство. Пусть S – исходная система векторов, а система S_1 получена из исходной системы элементарными преобразованиями, следовательно,

$$S_1 \subseteq S \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}(S_1) \le \mathrm{rg}(S).$$

Но из системы S_1 можно получить систему S обратными преобразованиями, следовательно,

$$S \subseteq S_1 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}(S) \le \mathrm{rg}(S_1).$$

Окончательно получаем $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(S_1)$.

§ 3. Ранг матрицы

Пусть A – матрица размера $m \times n$. Минор матрицы A k-го порядка – это определитель, полученный выделением k строк и k столбцов.

Определение. Ранг матрицы A – это максимальный порядок, отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначение $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{r}(A)$.

Иначе: $\mathrm{rg}(A) = k$ означает, что 1) у матрицы A существует минор k-го порядка, отличный от нуля; 2) все миноры матрицы A порядка $\ge k+1$ равны нулю (если они есть).

Для определения ранга матрицы её следует привести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду; число ненулевых строк в ступенчатом виде и есть ранг матрицы.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\1&1&1&1&1\\2&1&1&1&3\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&2\\0&-1&-1&-1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&2\\0&0&-1&-1&3\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&2\\0&0&-1&-1&3\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow\ \mathrm{rg}(A)=4.$$

§ 4. Теорема о базисном миноре

Определение. Базисным минором матрицы A называется отличный от нуля минор максимального возможного размера (равного рангу матрицы).

Для ступенчатой матрицы базисный минор стоит в верхнем левом углу.

Определение. Строки и столбцы, в пересечении которых стоит базисный минор, называются базисными.

Обозначим i -ую строку матрицы A так

$$A_i=(a_1,a_2,\dots,a_n).$$

Эти строки можно рассматривать как векторы из R^n, их можно складывать, умножать на числа, говорить о линейной зависимости и независимости. Например, запись

$$A_i=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\cdots+\lambda_rA_r$$

означает что i-ая строка линейно выражается через строки $1,2,\dots,r$.

Теорема о базисном миноре.

Пусть A – ненулевая матрица, тогда:

1) базисные строки (столбцы) линейно независимы;

2) все остальные строки (столбцы), если они есть, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Доказательство. Считаем для определённости, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы (в противном случае этого можно добиться перестановкой базисных строк и столбцов матрицы A)

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ где } r = \mathrm{rg}(A) \geq 1.$$

1) Докажем линейную независимость базисных строк $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Допустим противоположное, что строки линейно зависимые. Тогда по критерию линейной зависимости одна из строк линейно выражается через другие, например

$$A_r = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{r-1} A_{r-1}.$$

Вычтем в определителе M из r-ой строки линейную комбинацию строк, стоящую в правой части этого выражения. При этом определитель не изменится, а его r-ая строка станет нулевой. Определитель, у которого есть нулевая строка, равен нулю $M = 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, базисные строки $A_1, A_2, \ldots, A_r$ линейно независимы.

2) Докажем, что все остальные строки линейно выражаются через базисные, то есть

$$A_k = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r \text{ для } k = r+1, \ldots, m.$$

Рассмотрим минор

$$D_j = \left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ & \cdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hdashline a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{kj} \end{array}\right| \text{ где } j = \overline{1, n}.$$

Для любого $j = \overline{1, n}$ этот минор равен нулю $D_j = 0$, так как:

а) если $j = \overline{1, r}$, то в миноре D_j будет два одинаковых столбца и он равен нулю;

б) если $j = \overline{r+1, n}$, то D_j – минор порядка $r+1$ и он равен нулю.

Разложим минор D_j по последнему столбцу

$$0 = D_j = a_{1j} A_{1j} + \cdots + a_{rj} A_{rj} + a_{kj} M.$$

Так как $M \neq 0$, то из последнего выражения получаем

$$a_{kj} = -\frac{A_{1j}}{M}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{M}a_{2j} - \cdots - \frac{A_{rj}}{M}a_{rj}.$$

Заметим, что отношение $-\frac{A_{ij}}{M}$ не зависит от j, обозначим его $\lambda_i = -\frac{A_{ij}}{M}$, тогда

$$a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_r a_{rj} \text{ для всех } j = \overline{1,n}.$$

А это означает, что k-ая строка A_k есть линейная комбинация строк $A_1, \dots, A_r$

$$A_k = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r.$$

Замечание. Теорема была доказана для строк, она справедлива и для столбцов.

При транспонировании ранг матрицы не меняется, так как определитель матрицы не меняется при транспонировании, а все миноры транспонируются.

Следствие. Пусть A – матрица размера $n \times n$, тогда справедливо утверждение: определитель матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одна из его строк (столбцов) линейно выражается через другие строки (столбцы).

Доказательство. Для квадратных матриц A размера $n \times n$ с определителем, отличным от нуля $\det A = |A| \neq 0$ определитель $|A|$ и является базисным минором. Поэтому

$$\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg} A < n \;\Leftrightarrow\; \exists \text{ не базисные строки (столбцы)} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \exists \text{ строки (столбцы), линейно выражающиеся через базисные.}$$

§ 5. Дополнение базиса подпространства до базиса всего пространства. Теорема Штейница

Пусть $S_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ – полная система векторов в линейном пространстве L, то есть $\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) = L$ (говорят, что это система образующих). И пусть $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ – линейно независимая система векторов в L. Тогда:

1) $k \leq m$;

2) некоторые векторы системы S_1 можно заменить на векторы системы S_2 так, что полученная система останется полной в L.

Рассмотрим некоторое линейное подпространство M в линейном пространстве L: $M \subseteq L$. Пусть $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_k\}$ – базис в M и $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ – базис в L. Тогда по теореме Штейница какие-то k векторов в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ можно заменить на векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_k$ и полученная система $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ будет базисом в L.

Пример: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle$, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \{t^3 + t^2, t^2 + 3\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t^3 & t^2 & t & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$