УДК 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОТДЕЛЬНЫЕ АКТИВЫ

© 2008 Е.Н. Климова,[1] В.Л. Шур, О.В. Москалец[2]

Проведены исследования математического моделирования оптимального портфеля ценных бумаг и разработан алгоритм решения задачи по формированию оптимального портфеля ценных бумаг с учётом ограничений на размеры инвестиций в отдельные активы. В ходе алгоритма в зависимости от ожидаемой доходности портфеля получены задачи двух типов: портфель с безрисковым активом Тобина–Шарпа–Линтнера и классический портфель Марковица, состоящий из рискованных активов. Произведены расчеты реальных показателей рынка акций для двадцати компаний. Они сопровождаются экономическими выводами. Приведена графическая иллюстрация. На основе анализа даны практические рекомендации по формированию портфелей ценных бумаг.

Ключевые слова и фразы: *оптимизация портфеля, ожидаемая доходность, квадратичное программирование, целевая функция, ограничения.*

Переход экономики РФ к рыночным отношениям привел к развитию рынка ценных бумаг. Как следствие, вырос интерес юридических и физических лиц к вложениям финансовых средств в акции и облигации ведущих российских эмитентов и их производные инструменты. Российская Федерация относится к категории стран с развивающейся рыночной экономикой. Рынки ценных бумаг в таких условиях характеризуются как высокой доходностью, так и значительными рисками в сравнении с рынками развитых экономик. Одним из основных способов уменьшения риска инвестиций в финансовые инструменты является диверсификация активов, что приводит к формированию портфелей ценных бумаг. Вопрос ограничений на вложения в отдельные активы для физических лиц регулируется индивидуальными предпочтениями инвестора. Для юридических лиц, кроме

[1]Климова Елена Николаевна (elenaklimova25@gmail.com), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Шур Валерий Леонидович (shur1964@mail.ru), Москалец Ольга Вячеславовна (omoskalez@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного университета путей сообщения, 443066, Россия, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

того, существуют и законодательные ограничения. В соответствии с "Положением о составе и структуре активов акционерных инвестиционных фондов и активов паевых инвестиционных фондов", утвержденным приказом ФСФР от 20 мая 2008 г. N 08-19/пз-н оценочная стоимость ценных бумаг одного эмитента может составлять не более 15 процентов стоимости активов открытых и интервальных паевых инвестиционных фондов и не более 35 процентов стоимости активов акционерных инвестиционных фондов и закрытых паевых инвестиционных фондов . Таким образом, проблема моделирования оптимального портфеля ценных бумаг с учетом ограничений инвестиций в отдельные активы на российском финансовом рынке приобретает особую актуальность.

В основу формирования портфеля ценных бумаг положим [1] концепцию Марковица. Задача оптимизации инвестиционного портфеля из n различных активов состоит в обеспечении заданного уровня доходности m_p при минимальном уровне риска:

$$D_p = \sigma_p^2 = \Omega^{T\ 1/0}\Sigma\ \Omega \ \rightarrow \min_{\Omega \in \Gamma \subset R^n}, \tag{1}$$

$$\Omega^T M = m_p, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 - \omega_0, \tag{3}$$

$$0 \leqslant \omega_i \leqslant k_i, \tag{4}$$

где D_p, σ_p — дисперсия и среднеквадратичное отклонение; Ω — вектор-столбец весов ω_i активов в портфеле; ω_0 — остаток свободных денежных средств; ${}^{1/0}\Sigma$ — ковариационная матрица доходностей портфеля, рассчитанная в момент инвестирования t_0 и до конца инвестиционного периода t_1 предполагаемая неизменной (статическая модель); M — вектор-столбец ожидаемых доходностей m_i активов; k_i — ограничение сверху на вложения в соответствующий актив; Γ — многогранник в пространстве R^n, определяемый ограничениями (2)–(4).

Предположим также, что инвестор не использует заемных средств и не открывает коротких позиций

$$0 \leqslant \omega_0 \leqslant 1, \tag{5}$$

$$k_i \geqslant 0. \tag{6}$$

Задача (1)–(4) представляет собой [2] задачу квадратичного программирования. Нужно определить оптимальный вектор долей активов Ω на выпуклом множестве всех планов Γ, обеспечивающий минимальное значение целевой функции волатильности (среднеквадратичного отклонения) портфеля при заданном уровне доходности портфеля m_p. В рассматриваемой задаче, в зависимости от значения m_p можно выделить два случая: портфель с безрисковым активом Тобина–Шарпа–Линтнера (неравенство (5) неактивно) и классический портфель Марковица, состоящий только из рискованных активов ($\omega_0 = 0$).

Перейдем от системы ограничений-неравенств (4), к системе ограничений-равенств и введением дополнительные переменные

$$\omega_i - k_{1i} + \mu_{1i} = 0, \tag{7}$$

$$k_{2i} - \omega_i + \mu_{2i} = 0. \tag{8}$$

Для решения задачи минимизации квадратичной функции (1) при условиях (2)–(8) составим функцию Лагранжа:

$$L(\omega_i, \omega_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_i, \nu_i) = \Omega^{T\,1/0}\Sigma\Omega + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i - m_0\right) + \\ +\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i - 1 + \omega_0\right) + \sum_{i=1}^{n}\nu_i\left(\omega_i - k_i + \mu_i\right). \tag{9}$$

Условие минимума риска при заданной доходности имеет вид:

$$\operatorname{grad} L(\omega_i, \omega_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_i, \nu_i) = 0.$$

Найдем частные производные функции Лагранжа по всем $3n+2$ переменным и приравняем их к нулю. При дифференцировании воспользуемся формулами:

$$\frac{d}{d\Omega}\left(\Omega^{\mathrm{T}\ 1/0}\Sigma\ \Omega\right) = 2\ {}^{1/0}\Sigma\ \Omega, \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\Omega}\left(\Omega^{\mathrm{T}} M\right) = M, \tag{11}$$

где $\dfrac{d}{d\Omega} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\omega_1}, \ \cdots \ , \dfrac{\partial}{\partial\omega_n}\right)^{\mathrm{T}}$.

Дифференцируя (9) по ω_0, μ_i получаем:

$$\lambda_2 = \nu_i = 0. \tag{12}$$

Производные по ω_i, с учетом (12), дают следующие n уравнений:

$$2\ {}^{1/0}\Sigma\,\Omega + \lambda_1 M = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя по λ_2, ν_i, получаем систему ограничений (2), (3), (7), (8).

В результате использование функции Лагранжа приводит решение задачи квадратичного программирования (1)–(4) к решению системы $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными и условий отрицательности дополнительных переменных μ_{1i}, μ_{2i} и неотрицательности остатка денежных средств

$$\mu_i \leqslant 0, \tag{14}$$

$$\omega_0 \geqslant 0. \tag{15}$$

Система уравнений (13) и уравнение (2), представленная в матричном виде, есть

если условие (3) неактивно, то

$$A \cdot \overline{\Omega} = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & m_1 \\ p_{21} & p_{21} & \cdots & p_{2n} & m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n & 0 \end{pmatrix}, \overline{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_p \end{pmatrix}, \quad (16)$$

если условие (3) активно, то

$$A \cdot \overline{\Omega} = B,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & m_1 & 1 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & m_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{n1} & m_n & 1 \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Коэффициенты $p_{ij} = 2\sigma_{ij}$, где σ_{ij} — коэффициенты ковариационной матрицы.

Решение системы уравнений (13) и уравнения (2) в большинстве случаев приводит к невыполнению условий (14) и (15). Это означает, что оптимальное с точки зрения минимизации волатильности портфеля соотношение акций, не соответствует системе ограничений на вложения в отдельные активы.

Предлагаемая методика основана на рассмотрении величины предполагаемой доходности m_p как параметра. Известно, что при решении классической задачи без ограничений ω_i линейно зависят от m_p. В рассматриваемой задаче данное условие выполняется только во внутренней области множества планов. Достижение одной из функций соответствующей грани предполагает переход к следующему этапу решения задачи.

На первом этапе задача решается при произвольном значении m_p. Для удобства программирования акции рекомендуется перенумеровать в порядке убывания ω_i. Акции с наибольшим по модулю отрицательным значением ω_i присваивается значение 0 и задача решается снова. Если в решении снова имеются отрицательные значения, то процесс повторяется до тех пор, пока в решении не останутся только положительные значения ω_i. Далее определяем, какая прямая первой достигнет своего верхнего значения. Аналог системы уравнений (16) в этом случае для верхней границы принимает вид:

$$A_1 \cdot \overline{\Omega_1} = B_1,$$
$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & m_2 \\ p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & m_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & m_n \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_n & 0 \end{pmatrix}, \ \overline{\Omega_1} = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} -2p_{12}k_{11} \\ -2p_{13}k_{11} \\ \vdots \\ -2p_{1n}k_{11} \\ m_p \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В случае нижней границы цены, в матрице (16) удаляется не первая, а n-ая строка, а в векторе B_1 индекс 1 изменяется на n.

Отметим также, что кроме непосредственного нахождения ковариационной матрицы, например, с помощью программы "Excel", можно воспользоваться следующей формулой:

$$^{1/0}\Sigma = H\ ^{1/0}P\ H, \tag{19}$$

где H, $^{1/0}P$ — диагональная матрица среднеквадратичных отклонений относительных доходностей акций и корреляционная матрица.

Предложенную методику рассмотрим для случая портфеля из 3 акций и остатка денежных средств. Пример из трех активов позволяет проиллюстрировать методику расчета наглядно с помощью трехмерных рисунков. Целевая функция (1) и ограничения (2)-(4) примут вид:

$$\begin{aligned} D = D_1\omega_1^2 + D_2\omega_2^2 + D_3\omega_3^2 + \\ + 2\sigma_{12}\omega_1\omega_2 + 2\sigma_{13}\omega_1\omega_3 + 2\sigma_{23}\omega_2\omega_3 \to \min, \end{aligned} \tag{20}$$

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = m_p, \tag{21}$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 - \omega_0, \tag{22}$$

$$0 \leqslant \omega_i \leqslant k. \tag{23}$$

Предполагается отсутствие заемных средств $\omega_0 \geqslant 0$ и коротких позиций. Вложения в один актив не могут превышать k. Целевая функция (20) задает семейство эллипсоидов. Система неравенств (23) задает куб со стороной k, уравнение (21) — плоскость, пересекающую оси координат в точках $\omega_i = \dfrac{m_p}{m_i}$. Таким образом, множество планов представляет собой куб со срезом плоскостью (20). Кроме того, при больших значениях m_p, при отсутствии денежного остатка в портфеле, многогранник пересекает плоскость $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

В качестве примера составим оптимальный портфель из акций трех эмитентов: "Газпрома" и привилегированных акций "Сбербанка" и "Сургутнефтегаза" по итогам торгов за 2007 год. Ковариационная матрица и вектор относительных ожидаемых доходностей (%) выглядят так:

$$^{1/0}\Sigma = \begin{pmatrix} 19.1 & 14.3 & 17.0 \\ 14.3 & 20.1 & 21.6 \\ 17.0 & 21.6 & 38.1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 10.3 \\ 8.6 \\ 10.0 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Вложения в один актив не должны превышать 40 % от общей суммы инвестиций, привлечение заемных средств и открытие коротких позиций не предусмотрены

$$0 \leqslant \omega_i \leqslant 0.4, \quad \omega_0 \geqslant 0. \qquad (25)$$

Отметим также, что задаваемые ограничения накладывают ограничение на максимальное значение ожидаемой доходности портфеля

$$m_p^{\max} = 0.4\, m_1 + 0.4\, m_3 + 0.2\, m_2 = 9.84 \ (\%). \qquad (26)$$

Рассмотрим подробно алгоритм решения этой задачи.

1. Решаем задачу без ограничений при произвольном значении параметра, например, $\mathrm{m_p} = 5$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 38,2 & 28,6 & 34,0 & 10,3 \\ 28,6 & 40,2 & 43,2 & 8,6 \\ 34,0 & 43,2 & 76,2 & 10,0 \\ 10,3 & 8,6 & 10,0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Получаем вектор

$$\overline{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} 0,417 \\ 0,084 \\ -0,00094 \end{pmatrix}.$$

Видно, что в решении есть отрицательный элемент. Поэтому возьмем значение $\omega_3 = 0$. Следовательно, в матрице A_0 убираем третью строчку и третий столбец и решаем соответствующую систему уравнений. Получаем:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0,417 \\ 0,083 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По двум точкам $(0;0)$ и $(0,417;5)$ находим прямую $\omega_1 = 0,0834\, m_p$. Аналогично находим $\omega_2 = 0,017\, m_p$. $\Omega_1 = m_p \begin{pmatrix} 0,0834 \\ 0,0166 \\ 0 \end{pmatrix}$. Учитывая, что $\omega_1 \leqslant 0,4$, находим правую границу первого интервала $m_p^1 = \dfrac{0,4}{0,0834} = 4,796$.

2. На втором интервале фиксируем $\omega_1 \equiv 0,4$ и при значении $\mathrm{m_p} = m_p^1$ и произвольном значении m_p решаем следующую систему уравнений:

$$A_1 = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} & m_2 \\ p_{23} & p_{33} & m_3 \\ m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0,4\,p_{21} \\ -0,4\,p_{31} \\ m_p - 0,4\,m_1 \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Получаем

$$\overline{\Omega}_2\left(m_p^1\right) = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,08 \\ -0,00093 \end{pmatrix}.$$

Т.к. значение $\omega_3 \leqslant 0$, то на этом интервале $\omega_3 = 0$. Следовательно, рост ожидаемой доходности на этом интервале происходит только за счет увеличения доли второй акции:

$$\Omega_2 = \left(m_p - m_p^1\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0,116 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,0773 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Правая граница второго интервала находится либо в точке, в которой вторая акция достигает своего максимального значения $0,4$, либо в точке выхода в положительную область доли третьей акции. Для определения второй величины найдем решение системы (27) при произвольном значении m_p: $\omega_3\,(5) = 0,00192$. Тогда $\omega_3\left(m_p\right) = 0,014\,m_p - 0,068$. Тогда правая граница второго интервала находится из условия $\omega_3 = 0$, т.е. $m_p^2 = 4,86$.

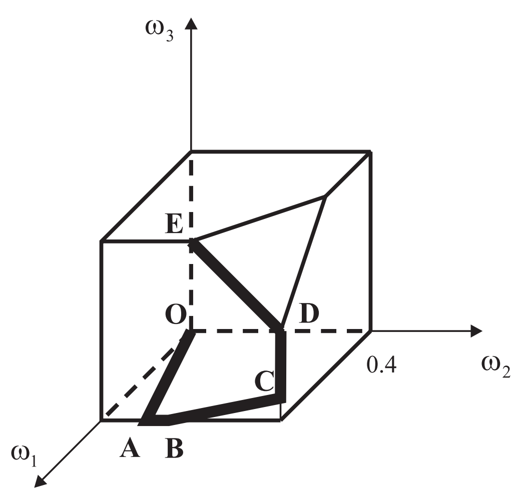

Рис. 1. Геометрическая интерпретация решения

3. На третьем интервале в оптимальный портфель входят все три акции. Решая систему (27) находим:

$$\Omega_3 = \left(m_p - m_p^2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0,114 \\ 0,014 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,085 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что правая граница этого интервала в точке достижения долей второй акции максимального значения 0,4: $m_p^3 = 7,62$.

4. На четвертом интервале доли первой и второй акции принимают максимальные значения $\omega_1 = \omega_2 = 0,4$. Доля третьей акции определяется из уравнения (21):

$$\omega_3 = \left(m_p - m_1\,\omega_1 - m_2\,\omega_2\right)\Big/ m_3 = 0,1\,\left(m_p - m_p^3\right) + 0,039.$$

Данный интервал ограничен условием: $\omega_3 \leqslant 1 - \omega_2 - \omega_3 = 0,2$, $\omega_p^4 = 9,23$.

5. На этом интервале происходит постепенная смена приоритетов. Увеличение доходности на предыдущих интервалах происходило за счет уменьшения доли свободных денежных средств. При этом пропорции долей акций сохранялись и определялись только их коэффициентом Шарпа. При отсутствии свободных средств увеличение доходности происходит за счет увеличения доли акций с более высокой доходностью, но и более волатильных. В данном примере первая акция обладает наибольшей потенциальной доходностью и коэффициентом Шарпа. Поэтому ее доля по-прежнему определяется максимальным значением: $\omega_1 = 0,4$. Коэффициент Шарпа второй акции выше третьей, но ожидаемая доходность у нее меньше. Поэтому увеличение ожидаемой доходности портфеля достигается увеличением доли третьей акции за счет доли второй. Количественно доли этих акций определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \omega_2 + \omega_3 = 1 - \omega_1, \\ m_2\,\omega_2 + m_3\,\omega_3 = m_p - m_1\,\omega_1, \end{cases}$$

$\omega_2 = 0,4 - 0,328\left(m_p - m_p^4\right)$, $\omega_3 = 0,2 + 0,328\left(m_p - m_p^4\right)$, $m_p^5 = 9,84$.

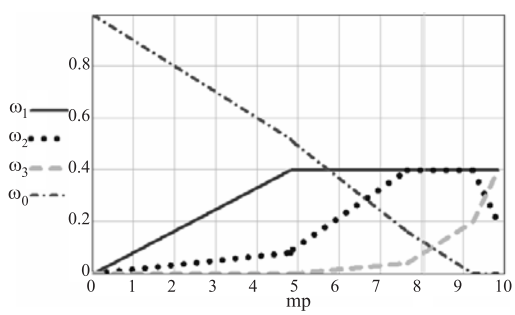

Рис. 2. Зависимость долей активов и остатка денежных средств от заданной доходности

Теперь приведем пример конкретной реализации для 20 акций российских компаний.

Вложения в один актив не должны превышать 15 % от общей суммы инвестиций, портфель состоит только из рискованных активов:

$$0 \leqslant \omega_i \leqslant 0.15, \quad \omega_0 = 0. \tag{28}$$

Максимальное значение ожидаемой доходности портфеля:

$$m_p^{\max} = 0.15\,m_{19} + 0.15\,m_1 + 0.15\,m_{14} + 0.15m_{20} + \\ + 0.15m_9 + 0.15m_{11} + 0.1m_{10} = 21.98 \ (\%)\,. \tag{29}$$

Нам понадобятся исторические и фундаментальные показатели доходностей акций. Мы включаем актив в портфель по показателю фундаментальной доходности, который содержит информацию о финансовом состоянии эмитента, сроках окупаемости и прибыли. Затем мы рассчитываем историческую доходность и строим ковариационную матрицу. Показатели доходностей могут существенно отличаться друг от друга. Как мы можем увидеть из таблицы 1, не всегда акция, которая по прогнозам имеет хороший потенциал для роста, показывает увеличение своей рыночной стоимости. Составляя портфель, инвестор обычно включает акции с большей фундаментальной доходностью, рассчитывая на их рост.

Рассчитав показатели относительных доходностей за определенные периоды, мы можем прогнозировать наиболее удачный срок вложения для акций. Наибольшую доходность показывает вложение акций сроком на год.

В нашем случае мы составили оптимальные портфели с различной средней доходностью, на основе полугодовых показателей. В таблице 2 представлены результаты оптимального соотношения весов акций компаний для заданного уровня доходности.

Интересно отметить, что с увеличением средней доходности по портфелю, уменьшается количество акций, попавших в него. Акции, которые вошли во все портфели: Ростелеком, Газпром и Газпром нефть. Акции, которые не вошли ни в один портфель: Ростелеком пр., Сбербанк пр., Волгателеком об. и Волгателеком пр.

Приведем пример показателей полугодовой относительной доходности для 5 акций российских эмитентов за период с 01.2006 г. по 03.2008 г. Мы проанализировали так называемые "голубые фишки" — акции наиболее надежных и прибыльных компаний.

Акции Сбербанка хорошо коррелируют друг с другом, коэффициент корреляции составляет 0,92. При этом привилегированные показывают большую волатильность и меньшую доходность. Отрицательную коррелированность, то есть курсы акций определяются разными внешними факторами, показывают Сбербанк обыкновенные и Лукойл (-0,209), Лукойл и ГМК Норильский Никель (-0,195) и Сбербанк привилегированные и Лукойл (-0,08). Следуя теории Марковица, мы можем формировать портфель с минимальным риском, включив в него отрицательно коррелированные бумаги.

Таблица 1

№	Акция	Тикер	Годовая истор. доходность (%)	Полугод. истор. доходность (%)	Истор. дох-ть по месяцам (%)	Фундаментальная доходность* (%)
1	Ростелеком	RTKM	74,37	30,98	4,99	-70,6
2	Ростелеком пр	RTKMP	1,91	$-1,06$	$-0,67$	80,81
3	Сургутнефт. об	SNGS	$-20,03$	$-10,45$	$-1,53$	58,8
4	Сургутнефт.пр	SNGSP	$-35,06$	$-19,21$	$-2,89$	125,98
5	Татнефть	TATN	9,62	4,78	1,27	13,8
6	Газпром нефть	SIBN	13,97	5,99	0,68	1,8
7	Газпром	GAZP	8,8	5,55	0,78	76,4
8	Лукойл	LKOH	$-3,4$	$-0,15$	0,08	48
9	Сбер об	SBER	46,24	17,45	1,57	39,9
10	Сбер пр	SBERP	28,89	10,52	0,31	100
11	МТС	MTSI	34,36	12,58	1,24	37,4
12	Северсталь	CHMF	36,46	$-12,57$	1,49	45,3
13	Банк Москвы	MMBM	53,16	22,39	2,63	41,58
14	Волгателеком	NNSI	8,67	1,88	$-0,76$	65,8
15	Волгатеком пр	NNSIP	$-6,37$	$-6,18$	$-2,07$	70
16	Дальсвязь	DLSV	22,99	6,19	0,14	69,1
17	Дальсвязь пр	DLSVP	10,31	1,21	$-0,23$	196,08
18	КАМАЗ	KMAZ	106,44	36,17	4,67	71,38
19	Мосэнерго	MSNG	0,51	$-2,98$	$-0,95$	65,5
20	ГМК НорНикель	GMKN	50,03	19,96	2,89	31,7

* Примечание.

Источники: http://www.smoney.ru/img/issue/2008/07/21/5944_a_pic02.gif и http://www.quote.ru

Выводы

1. На рис. 1. представлена геометрическая интерпретация предложенного метода решения. Каждый участок решения представляет собой переход с одной грани куба на другую. При этом размерность грани может, как снижаться, так и увеличиваться. Параметром изменения координат линии является ожидаемая доходность портфеля. В связи с этим предлагаемый метод можно считать разновидностью метода перебора граней.

2. На рис. 2 представлен график зависимости долей акций в портфеле

Таблица 2

Процентное соотношение акций в портфеле

№	Акция	Тикер	Ожидаемая доходность портфеля						
			3	5	7	9	12	15	20
1	Ростелеком	RTKM	9,46	13,59	15	15	15	15	15
2	Ростелеком пр	RTKMP	0	0	0	0	0	0	0
3	Сургутнефт. об	SNGS	15	13,67	9,64	10,33	4,38	0	0
4	Сургутнефт. пр	SNGSP	15	15	11,54	3,44	0	0	0
5	Татнефть	TATN	2,73	3,44	8,79	14,33	15	13,09	0
6	Газпром нефть	SIBN	15	15	15	15	15	15	15
7	Газпром	GAZP	15	15	15	15	15	15	1,62
8	Лукойл	LKOH	15	15	15	15	15	13,33	0
9	Сбер об	SBER	0	0	0,97	3,22	6,89	4,78	15
10	Сбер пр	SBERP	0	0	0	0	0	0	0
11	МТС	MTSI	0	0	0	0	0	0	4,44
12	Северсталь	CHMF	0	0	0	0	3,33	0	15
13	Банк Москвы	MMBM	0	0	0	0	0	0	3,94
14	Волгателеком	NNSI	0	0	0	0	0	0	0
15	Волгатеком пр	NNSIP	0	0	0	0	0	0	0
16	Дальсвязь	DLSV	0,62	0,46	0	0	0	0	0
17	Дальсвязь пр	DLSVP	2,41	0	0	0	0	0	0
18	КАМАЗ	KMAZ	7,42	8,84	9,07	8,67	10,4	15	15
19	Мосэнерго	MSNG	2,36	0	0	0	0	0	0
20	ГМК Никель	GMKN	0	0	0	0	0	8,8	15

и остатка денежных средств на счету. На нем отчетливо видны две зоны, отличающиеся наличием и отсутствием остатка денежных средств на инвестиционном счету. Принципиальное отличие в поведении графиков объясняется сменой приоритетов при оптимизации. При наличии денежного остатка наибольшим весом обладают акции с более высоким коэффициентом Шарпа. Увеличение доходности при этом происходит за счет привлечения дополнительных средств и доли акций пропорционально возрастают. При отсутствии свободных средств для увеличения доходности приходится увеличивать долю более потенциально доходных, но и более рискованных активов. На этом участке увеличивается доля третьей акции за счет второй.

3. На рис. 4 показаны зависимости доходностей отдельных активов и оптимального портфеля. В данном наборе активов наиболее интересна первая акция. У инвестора может возникнуть искушение вложить все средства

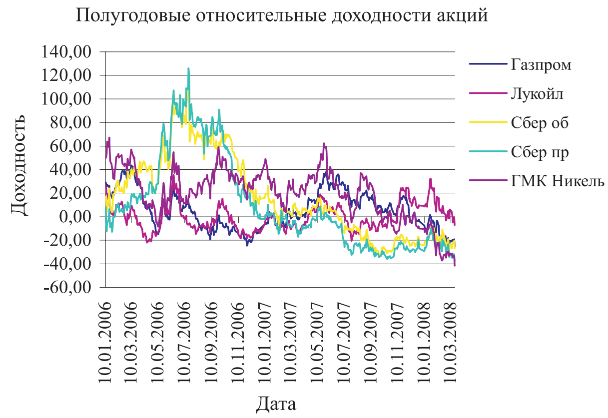

Рис. 3. Полугодовые относительные доходности акций 5 компаний

в первый актив. Тем не менее, необходимо учитывать, что теория Марковица опирается на нормальный закон распределения цены актива и не рассматривает "хвостовые" риски, т.е. не учитывает обстоятельства резко меняющие оценку акций. Например, акции "Юкоса", показывавшие впечатляющий рост в 2001–2003 годах, после предъявления налоговых претензий в 2004 году упали более чем в 10 раз. Таким образом, диверсификация портфеля, а, следовательно, и ограничения на вложения в один актив, каким бы привлекательным он не казался, являются обязательным условием успешных инвестиций.

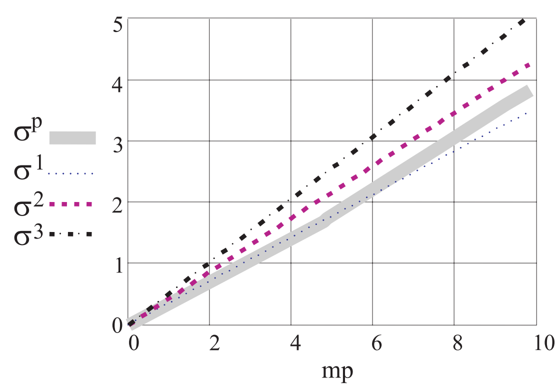

Рис. 4. Кривые Марковица для портфеля ценных бумаг и отдельных активов

4. Используя данный метод, мы можем составить оптимальный портфель для большего количества акций. В таблице 1 приведены показатели исторических и фундаментальных доходностей ценных бумаг, сравнив которые, мы можем выбрать желаемое количество для анализа. В таблице 2 представлены векторы весов акций, составляющих оптимальный портфель

для заданного уровня доходности. Отметим, что максимальная доходность для заданного набора активов составляет 21,98 %. Более высокая доходность сделает задачу некорректной. На рис. 3 показан график полугодовых относительных доходностей для 5 акций. Включив в портфель отрицательно коррелированные пары активов, инвестор снижает общий риск по портфелю. Кроме того, минимизируя целевую функцию с учетом законодательных ограничений на вложение в отдельные активы, потенциальные инвесторы+минимум, что особенно актуально в современных условиях нестабильности.

Литература

[1] Касимов, Ю.Ф. Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг / Ю.Ф. Касимов. – М.: Анкил, 2005. – С. 144.

[2] Даугавет, В.А. Численные методы квадратичного программирования: Учебное пособие / В.А. Даугавет. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2004. – 128 с.

Поступила в редакцию 17/*XI*/2008;
в окончательном варианте — 17/*XI*/2008.

Paper received 17/*XI*/2008.
Paper accepted 17/*XI*/2008.

MATHEMATICAL MODELLING OF AN OPTIMUM PORTFOLIO OF SECURITIES WITH RESTRICTIONS ON SEPARATE ACTIVES

© 2008 Y.N. Klimova,[3] V.L. Shur, O.V. Moskalets[4]

Researches of mathematical modelling of an optimum portfolio of securities are conducted and the algorithm of the decision of a problem on formation of an optimum portfolio of securities with the account of restrictions on the sizes of investments into separate actives is developed. During algorithm depending on expected return of a portfolio problems of two types are received: a portfolio with active out of risk of Tobin-Sharp-Lintner and the classical portfolio of Markowitz, which consist of risky actives. Calculations of real indicators of the share market are made for twenty companies. These calculations are accompanied by economic conclusions. The graphic illustration is resulted. On the basis of the analysis practical recommendations about formation of portfolios of securities are made.

Keywords and phrases: *portfolio optimization, expected return, quadratic programming, criterion function, restrictions.*

[3]Klimova Yelena Nikolaevna (`elenaklimova25@gmail.com`), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

[4]Shur Valerij Leonidovich (`shur1964@mail.ru`), Moskalets Olga Vjacheslavovna (`omoskalez@mail.ru`), Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Transport, 443066, Russia.