1. Законы Ньютона и законы сохранения для системы материальных точек.
2. Общие свойства одномерного движения. Период движения.
3. Одномерное движение, анализ на фазовой плоскости. Особые точки фазовой плоскости седло и центр. Сепаратриса.
4. Малые колебания при наличии трения. Слабое и сильное трение. Особые точки фазовой плоскости фокус и узел.
5. Отрицательное трение. Устойчивый и неустойчивый фокус.
6. Знакопеременное трение. Предельный цикл.
7. Обобщенные координаты. Принцип наименьшего действия и уравнение Лагранжа. Общий вид функции Лагранжа.
8. Законы сохранения как следствие инвариантности функции Лагранжа относительно некоторых преобразований. Циклические координаты.
9. Механическое подобие.
10. Теорема вириала.
11. Задача двух тел. Приведенная масса. Эффективная потенциальная энергия.
12. Движение в центрально-симметричном поле. Общие закономерности. Замыкание траектории. Падение на центр.
13. Задача Кеплера. Законы Кеплера.
14. Колебания со многими степенями свободы, нормальные координаты.
15. Вынужденные гармонические колебания без трения. Резонанс. Биения.
16.Гармонические колебания с трением и внешней силой. Резонанс.
17. Движение твердого тела. Угловая скорость. Кинетическая энергия твердого тела.
18. Момент импульса твердого тела. Тензор инерции твердого тела.
19. Общие свойства тензора инерции твердого тела. Классификация твердых тел.
20. Описание поворотов твердого тела. Углы Эйлера. Функция Лагранжа твердого тела.
21. Динамические уравнения Эйлера для движения твердого тела.
22. Свободное движение симметрического и шарового волчков. Что можно сказать о движении асимметрического волчка?
23. Неинерциальные системы отсчета.
24. Рассеяние. Сечение рассеянья. ***<u>Эти формулы используются в следующем вопросе.</u>***
25. Сечение рассеянья (определение). Формула Резерфорда.
26. Уравнение Гамильтона. Циклические координаты в методе Гамильтона.
27. Уравнение Гамильтона как следствие вариационного принципа.
28. Функция Рауса. Уравнение Рауса.
29. Канонические преобразования. Производящая функция.
30. Скобки Пуассона. Их свойства. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований.
31. Теорема Лиувилля.
32. Движение как каноническое преобразование. Уравнение Гамильтона - Якоби.
33. Амплитуда и фаза гармонического маятника как канонически сопряженные переменные. Каноническое преобразование, которое делает гармонический маятник механической системой с циклической координатой.

1. Законы Ньютона и законы сохранения для системы материальных точек.
Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Ее положение в пространстве определяется радиус-вектором **r**, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z.

Производная **r** по времени t $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$ наз. скоростью, а вторая производная $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ - ускорением точки. Основными законами классической механики являются законы Ньютона. 1 з-н Ньютона: существуют системы отсчета, в которых свободное движение частицы осуществляется с постоянной скоростью, не изменяющейся ни по величине, ни по направлению. Такие с-мы отсчета наз. инерциальными. 2 з-н Ньютона: в инерциальной системе отсчета произведение массы частицы на ее ускорение равно силе, действующей на эту частицу: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Если ввести понятие количества движения, или импульса материальной точки $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, то 2 з-н Ньютона можно записать в виде $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$. 3 з-н Ньютона – силы взаимодействия двух частиц равны между собой по величине и противоположны по направлению, зависят лишь от расстояния между частицами и действуют вдоль линии, соединяющей их: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (рис. 1).

Рассмотрим систему из N частиц. Обозначим $\mathbf{F}_{ij}$ силу, с которой частица j действует на частицу i. Силы, источники которых включены в систему, наз. внутренними, а силы, источники которых находятся вне системы, называются внешними. Сила, действующая на частицу i со стороны остальных равна $\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij}$. Сумма всех внутренних сил $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_j \mathbf{F}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_j \left(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}\right) = 0$. Силы, действующие между сложными частицами или телами A и B, не обязательно являются центральными, но обязательно удовлетворяют условию $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$. Обозначим массы частиц m_i, а их положение в какой-либо системе отсчета $\mathbf{r}_i$ (i = 1, 2, ...N). Для каждой из частиц справедлив закон Ньютона $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i^{вн}$, где последнее слагаемое представляет сумму всех внешних сил, действующих на i-ю частицу. Вектор полного импульса системы $\mathbf{P} = \sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i$. Найдем закон изменения **P** со временем:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \left(\sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i^{вн}\right) = \sum_{i,k} \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \mathbf{F}_i^{вн} = \sum_i \mathbf{F}_i^{вн}$$

. Если сумма внешних сил практически равна 0, то система называется замкнутой. В этом случае $\dot{\mathbf{P}} = 0$ и выполняется закон сохранения импульса $\mathbf{P} = const$. Введем понятие центра масс системы – это такая точка c, радиус-вектор которой выражается по формуле $\mathbf{R}_c = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \big/ M$, где $M = \sum_i M_i$ - полная масса системы. Скорость центра масс $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{R}}_c = \mathbf{P}/M$. По закону изменения полного импульса $M\dot{\mathbf{R}}_c = \mathbf{F}^{вн}$, то есть центр масс движется как частица с массой, равной массе всей системы, под действием силы, равной сумме всех внешних сил.

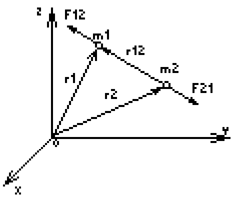
Вектор полного момента импульса $\mathbf{M} = \sum_i m_i \left[\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\right] = \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right]$.

Продифференцируем по времени: $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_i m_i \left[\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\right] + \sum_i m_i \left[\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i\right]$. Первое слагаемое в правой части равно 0. По второму закону Ньютона $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{k,i} \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] + \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{вн}\right]$. Вторую сумму называют полным моментом внешних сил: $\mathbf{K} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{вн}\right]$. Покажем, что первая сумма равна 0: $\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] + \sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] + \sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}\right]\right\}$.

Так как $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki};\ \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ik}$, то

$\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}\right] - \sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik}\right]\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\left[\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{F}_{ik}\right] = 0$. Таким образом,

$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}$. Для замкнутой системы **K**=0 и **M**=*const*, то есть момент импульса замкнутой системы сохраняется.



Закон сохранения энергии (это пиздец).

Кинетическая энергия одной частицы $T_i = \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}$. Кинетическая энергия системы из N частиц $T = \sum_i \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}$. Продифференцируем ее по времени, согласно со 2 законом Ньютона получим $\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i\right) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i = \sum_{i,k} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{вн}$. Рассмотрим первую сумму:

$\sum_{i,k}\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{F}_{ik}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{F}_{ik}+\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{F}_{ik}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{F}_{ik}-\dot{\mathbf{r}}_k\cdot\mathbf{F}_{ik}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_k\right)\cdot\mathbf{F}_{ik}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\dot{\mathbf{r}}_{ik}\cdot\mathbf{F}_{ik}$. Ведем потенциальную энергию взаимодействия U: $\mathbf{F}_{ik}=-\frac{\partial U_{ik}}{\partial r_{ik}}\cdot\frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}}$. Учитывая, что $\left(\dot{\mathbf{r}}_{ik}\cdot\mathbf{r}_{ik}\right)=r_{ik}\cdot\dot{r}_{ik}$, указанная сумма запишется в виде

$\sum_{i,k}\dot{\mathbf{r}}_{ik}\mathbf{F}_{ik}=-\sum_{i,k}\dot{\mathbf{r}}_{ik}\frac{\partial U_{ik}}{\partial r_{ik}}\frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}}=-\sum_{i,k}\frac{\partial U_{ik}}{\partial r_{ik}}\dot{r}_{ik}=-\sum_{i,k}\frac{d}{dt}U_{ik}(r_{ik})=-\frac{d}{dt}\sum_{i,k}U_{ik}$. Сумма $\frac{1}{2}\sum_{i,k}U_{ik}$ называется внутренней потенциальной энергией системы. Возвращаясь к выражению для производной dT/dt, получим $\frac{d}{dt}\left(T+\frac{1}{2}\sum_{i,k}U_{ik}\right)=\sum_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{F}_i^{вн}$. Выражение $U=T+\frac{1}{2}\sum_{i,k}U_{ik}$ называют полной внутренней энергией системы. $dU=\sum_i\mathbf{F}_i^{вн}\cdot d\mathbf{r}_i=dA$. Таким образом, изменение внутренней энергии системы за время *dt* равно работе внешних сил за это же время. Запишем внешние силы в виде $\mathbf{F}_i^{вн}=-\vec{\nabla}_iV+\mathbf{f}_i$, здесь $\mathbf{f}_i$ – непотенциальные внешние силы, V – потенциал внешних сил, зависящий от координат и, возможно, от времени.

$\sum_i\mathbf{F}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_i\dot{\mathbf{r}}_i\left(-\vec{\nabla}_iV+\mathbf{f}_i\right)=-\sum_i\left(\frac{dV}{dx_i}\dot{x}_i+\frac{dV}{dy_i}\dot{y}_i+\frac{dV}{dz_i}\dot{z}_i\right)+\sum_i\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i=-\frac{dV}{dt}+\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_i\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i$. Тогда $\frac{d}{dT}\left(T+\frac{1}{2}\sum_{i,j}U_{ij}+V\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_i\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i$. Величину $E=T+\frac{1}{2}\sum_{i,j}U_{ij}+V$ называют полной механической энергией системы. Она состоит из внутренней энергии системы и потенциальной энергии системы в поле внешних сил V.

Рассмотрим частные случаи: а) система изолирована; тогда V=0, $\mathbf{f}_i$=0 и мы получим закон сохранения внутренней энергии системы $U=T+\frac{1}{2}\sum_{i,k}U_{ik}=const$; б) внешние потенциальные силы стационарны, т.е. $\frac{\partial V}{\partial t}=0$ и, кроме того, $\sum_i\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i=0$; тогда закон сохранения энергии принимает вид $E=T+\frac{1}{2}\sum_{i,j}U_{ij}+V=const$.

Сумма $\sum_i\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i$ равна нулю, когда непотенциальные силы вообще отсутствуют, либо они есть, но такого вида, что $\mathbf{f}_i^{вн}\dot{\mathbf{r}}_i=0$ (сила Лоренца).

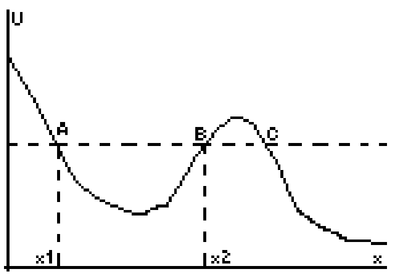
Законы сохранения являются фундаментальными законами природы. Они не есть следствия законов Ньютона, хотя их и можно получить, исходя из этих законов. Они являются следствиями свойств однородности (закон сохранения импульса) и изотропности (закон сохранения момента импульса) пространства и однородности времени (закон сохранения энергии).

2. Общие свойства одномерного движения. Период движения.

Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. наиболее общий вид лагранжевой функции такой системы, находящейся в постоянных внешних условиях, есть $L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - U(q)$ (11,1), где a(q)-некоторая функция обобщенной координаты q. в частности, если q есть декартовая координата (назовём её x), $L = \frac{m * \dot{x}^2}{2} - U(x)$ (11,2). Соответствующие этим лагранжевым функциям уравнения движения интегрируются в общем виде. при этом нет даже необходимости выписывать самое уравнение движения, а следует исходить сразу из его первого интеграла – уравнения, выражающего закон сохранения энергии. так, для Лагранжа (11,2) имеем: $E = \frac{m * \dot{x}^2}{2} + U(x)$. Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируется путём разделения переменных. Имеем: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$,

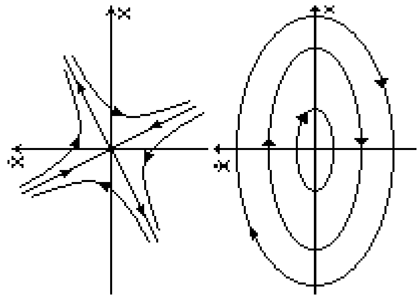
откуда $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const$. Роль произвольных постоянных в решении уравнения движения играют здесь полная энергия E и постоянная интегрирования const. Поскольку критическая энергия – величина существенно положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т.е. движение может происходить только в тех областях пространства, где U(x)<E. Пусть, например зависимость U(x) имеет вид, изображенный на графике1. проведя на этом графике горизонтальную прямую, соответсвующую заданному значению полной энергии мы сразу же выясним возможные области движения. так в изображённом на гр1 случае движение может происходить лишь в области AB или справа от C .Точки в которых потенциальная энергия равна полной U(x)=E определяют границы движения, они являются точками остановки поскольку в них скорость обращается в ноль. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства, оно является финитным, если же область движения не ограничена или ограничена с одной стороны – движение инфинитное частица уходит на бесконечность. Одномерное финитное движение является колебательным. При этом согласно общему свойству обратимость время движения от x1 до x2 равно времени обратного движения от x2 до x1 откуда следует

$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x1(E)}^{x2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$, причём x1 x2 – корни U(x)=E.



3. Одномерное движение, анализ на фазовой плоскости. Особые точки фазовой плоскости седло и центр. Сепаратриса.

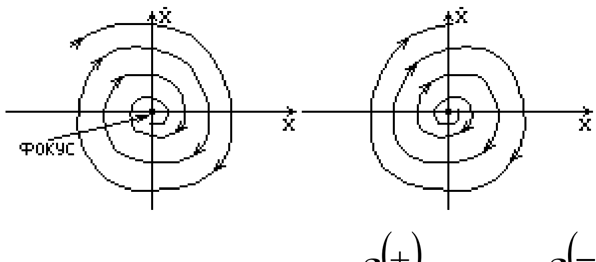
Если задача не сводиться к квадратурам (ур-ние Лагранжа не решается) то её можно решить используя геометрию. Ведём фазовую плоскость. Вся она покрыта фазовими траекториями, которые не могут пересекаться. *Сепаратриса-особлива фазова траєкторія, розділяючи всякі типи рухів. Вона може починатися або закінчуватися в особливій точці, або іти в нескінченність.*



4. Малые колебания при наличии трения. Слабое и сильное трение. Особые точки фазовой плоскости фокус и узел.

Рассмотрим одномерное движение частицы массой m под действием упругой силы f=-kx (k>0) и силы трения $f_T = -\alpha \dot{v}$. Уравнение движения в этом случае имеет вид $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$. Поделим на m: $\ddot{x} + \alpha\dot{x}/m + kx/m = 0$. Введем обозначения $\alpha/m = 2\lambda, k/m = \omega_0^2$, получим $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 = 0$. Характеристическое уравнение $\delta^2 + 2\lambda\delta + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \delta = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Решение уравнения движения $x = C_1 e^{\delta^{(+)}t} + C_2 e^{\delta^{(-)}t}$. Рассмотрим случай слабого трения: $\lambda^2 < \omega_0^2$. Тогда $\delta = -\lambda \pm i\omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ и $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \tilde{a}e^{-\frac{\lambda}{\omega_0}\Phi}\cos\Phi$,

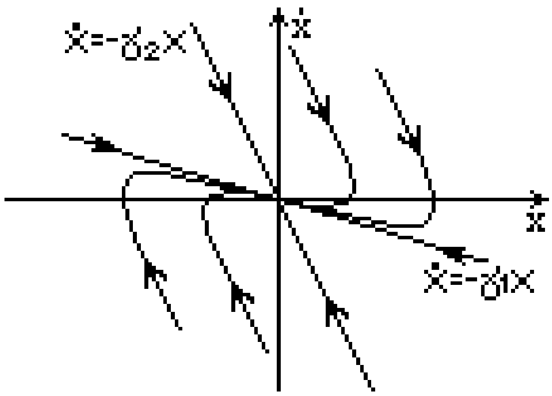
$\dot{x} = -a\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \tilde{a}\omega_0 e^{-\frac{\lambda}{\omega_0}\Phi}\sin\Phi$, где $\Phi = \omega_0 t + \varphi_0$. Уравнения, записанные при помощи $\tilde{a}$, являются параметрическими уравнениями логарифмической спирали на фазовой плоскости. Фокус спирали называется особой точкой фазовой плоскости типа «фокус». При α>0 (положительное трение) он является устойчивым, при α<0 (отрицательное трение) он является неустойчивым.

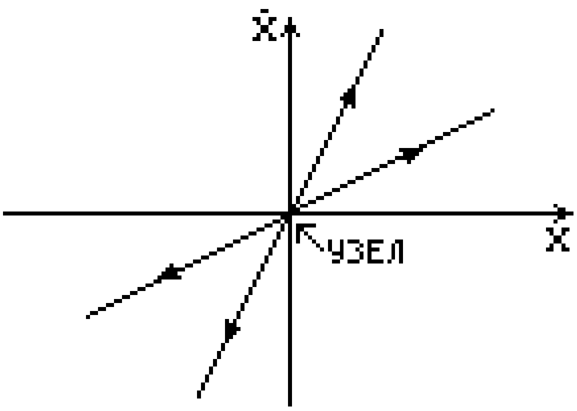


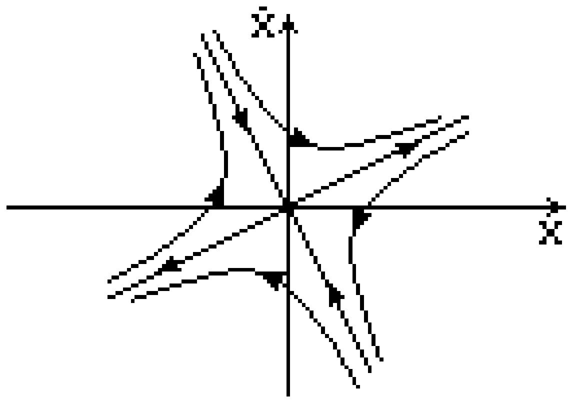
Теперь рассмотрим сильное трение: $\lambda^2 > \omega_0^2$.

Введем обозначение $\delta^{(+)} = -\gamma_1, \delta^{(-)} = -\gamma_2$, тогда γ_1 и γ_2 – действительные числа.

Решение уравнения движения принимает вид $x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$, причем $\gamma_2 > \gamma_1$. $\dot{x} = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t}$. Найдем уравнения фазовых траекторий для случая положительного трения ($\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$). Если $C_2=0$, то $\dot{x} = -\gamma_1 x$ - прямая на фазовой плоскости. Если $C_2 \neq 0$, то при $t \to +\infty$ $x \to 0, \dot{x} \to 0$, а фазовая траектория приближается к прямой $\dot{x} = -\gamma_2 x$; при $t \to -\infty$ фазовая траектория приближается к прямой $\dot{x} = -\gamma_1 x$, получаем особую точку типа устойчивый узел. Для случая отрицательного трения $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0$, получается неустойчивый узел. Если γ_1 и γ_2 разных знаков, то фазовая траектория имеет вид седла. Ниже приведены фазовые портреты, ПОВЕРНУТЫЕ ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ НА 90°







5. Отрицательное трение. Устойчивый и неустойчивый фокус.

<u>«Преамбула», которую надо (ну ладно…, желательно знать, но можно не писать :) Колебательные системы и их свойства.</u> Колебательные системы разделяют на классы. Такие как: линейные и нелинейные, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные (по энергетическому признаку), автономные и неавтономные. Особый класс представляют автоколебательные системы. Колебательная система называется <u>линейной или нелинейной</u> в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют <u>сосредоточенными или точечными системами</u>. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная. <u>Математические модели распределенных систем</u> - это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. <u>Консервативные системы</u> характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют Гамильтоновыми. Для консервативных систем с n степенями свободы определяется гамильтониан системы H(p, q), где qi - обобщенные координаты, pi - обобщенные импульсы системы, i = 1, 2, _, n. Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются <u>неконсервативными</u>. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются <u>диссипативными</u>. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с **отрицательным трением** или **отрицательной диссипацией**. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное. Динамические системы называются <u>автономными</u>, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии неконсервативны. Среди них выделяется особый класс <u>автоколебательных</u> систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.--Конец Преамбулы--Ну а теперь посмотрим на всё это попроще. Расмотрим колебания при одной степени свободы. Колебания возникают при движении вокруг минимума

$$U(q)=U(q_0)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_0}\cdot x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_0}\cdot x^2+\ldots+x^3+\ldots\ldots$$

(Где q_0- минимум нашей

фунции (U=f(q)), и $x=q-q_0$). Так как q_0- минимум нашей фунции, значит второе слогаемое равняется нулю (так как первая производная ноль).Когда мы рассматриваем малие колебания, мы можем отбросить все слогаемые кроме первого и третьего. Они не существенны (х – очень мало) в сравнении с растоянием до ближайшего екстремуму. $U(q_0)$=const-отбрасываем. => $U=\frac{1}{2}kx^2$ $\left(k=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_0}\right)$ $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{1}{2}kx^2$

Уравнение движения : $m\ddot{x}+kx=0$ $\ddot{x}+w_0^2x=0$ $w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow x=a\cos(w_0t+\varphi_0)=\mathrm{Re}(Ae^{iw_0t})$, где $A=ae^{i\varphi_0}$ - комплексная амплитуда. ←

Это уравнение малых колебаний без трения. Трение не есть механическим явлением, Механика не может описатьтрение ибо, при замене t на (-t) слогаемое силы трения изменяет знак. Поэтому никакие функции Лагранжа не вщитывают силу трения. Поэтому нам нужен другой метод анализа, метод фазовой плоскости, именно там для описания разной хуйни нам и понадобится отрицательное трение. Отрицательное трение, это чисто математическая поторота, которую придумали для описания некоторых выебонов (например автогенераторы, и т.д, и т.п.). Мы знаем что простое трение - $\mathbf{F}_{mp}=-\alpha\dot{\mathbf{x}}$, логично, что отрицательное трение имеет вид $\mathbf{F}_{mp}=\alpha\dot{\mathbf{x}}$ - это когда жидкость или газ в котором движется тело, не находится в состоянии равновесия, тогда энергия макроскопического тела не снижается, а увеличивается. Отрицательное трение может быть, когда мы подводим к системе некоторую энергию.

В случае трения: $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$, $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+w_0^2x=0$, $\left(\lambda=\frac{\alpha}{3m}\right)$.

Получаем $x\propto e^{\gamma t}$, где $\gamma=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-w_0^2}$; 1)

$\lambda<w_0\Rightarrow x=ae^{-\lambda t}\cos(wt+\varphi_0),\ w=\sqrt{w_0^2-\lambda^2}$ (Периодический процес); 2)

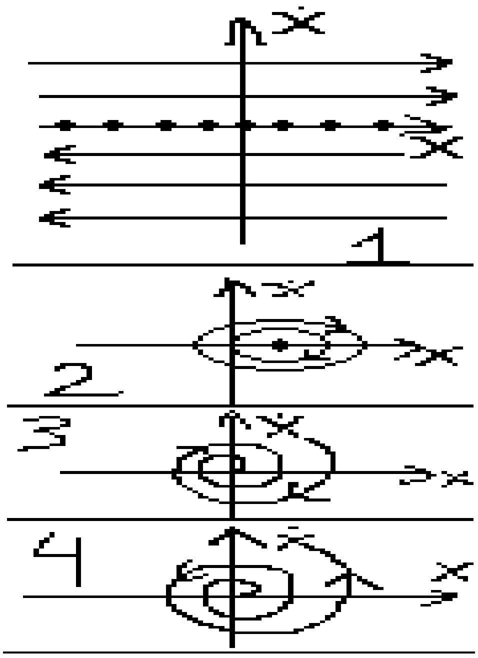
$\lambda>w_0\Rightarrow x=C_1e^{-\gamma_2t}+C_2e^{\gamma_2t}$ (Апериодический процес). При отрицательном трении в 2) мы будем иметь, что колебания будут (при линейном приближении) рости до безконечности. **<u>Устойчивый и неустойчивый фокус.</u>** <u>Фазовыя плоскость</u>- это плоскость в координатах, приведённой координаты и скорости (импульсу). Точка на фазовой плоскости называеться <u>возбуждённой точкой</u>.Со временем она движется, получаем <u>фазовую траекторию</u>. Касательная к ней –<u>фазовая скорость</u>. Точка в которой фазовая скорость не определена называется <u>особенной точкой</u> фазовой плоскости. Главный постулаты фазовой плоскости: 1) Фазовые траектории не пересекаются; 2)

Вся плоскость должна быть покрыта фазовыми траекториями. Запишем уравнения движения в виде $\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} = v \end{cases}$. Если правые части =0, то имеем особенные точки (V=0, F=0). Поэтому все особенные точки лежат на на осях x=0, v=0, и совпадают с экстремумом потенциала (рис. 1). Дальше, научимся строить фазовые траектории: если трение отсутствует, тогда: $\dot{x} = \frac{2}{m}\left[E - U(u)\right]$, для определённых значений E построим кривые. Для точек рядом с min потенциала $(\alpha = 0)$:

$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$ -елипс, (рис 2). Такая особенная точка наз точкой типу центр.

Если присутствует трение, но маленькое $(\lambda < w_0)$: $x = ae^{-\lambda t}\cos(wt + \varphi_0)$ =>

$\dot{x} = -\dot{a}(\lambda e^{-\lambda t}\cos(wt + \varphi_0) + we^{-\lambda t}\sin(wt + \varphi_0))$. Если ($\lambda << w_0$) - получим логарифмическую спираль (рис. 2). Тоесть если окрутить особенную точку сплошной кривой, то все фазовые траектории будут заходить всередину. Это – особенная точка типа фокус. Существует стойкий $(\lambda > 0)$, (рис. 3) и нестойкий $(\lambda < 0)$,(рис. 4) фокус (отрицательное трение). Пример, генератор Ван-дер-поля



6. Знакопеременное трение. Предельный цикл.

Напишем формулу для нормального трения $F_{тр} = -\alpha\dot{x}$, и также запишем для отрицательного $F_{тр} = \alpha\dot{x}$. $F_{mp} = \dot{x}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Поэтому имеем, когда |x|<a уравнение Ван-дер-Поля: $\ddot{x} - 2\lambda\dot{x}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \varpi_0^2 x = 0$

, $\frac{1}{m}\frac{dE}{dt} = 2d\dot{x}^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, при |x|<a : $\frac{dE}{dt} > 0$ энергия будет увеличиваться, а при |x|>a : $\frac{dE}{dt} < 0$, уменшатся соответственно. Если мы приближаемся с внешней стороны к нашему овалу (к нашему предельному циклу), то тогда траектория будет раскручиваться внутри нестойкий фокус.

Если же $\int_0^T \frac{dE}{dt}dt = 0 \Rightarrow \exists$ баланс энергии, с другой стороны

$\frac{2\lambda}{T}\int_0^T \dot{x}^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dt$ - это среднее за временем $x = A\cos(wt + \alpha)$

$$\dot{x} = -wA\sin(w_0 t + \alpha) \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} \sin w_0 t\, dt \pm \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \left(1 - \frac{A^2 \cos wt}{w}\right)dt = \frac{1}{T}\left(\frac{2\pi}{w_0} - \frac{2\pi}{w_0}\frac{A^2}{4a^2}\right) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{A^2}{4a^2} = 0 \Rightarrow A = 2a \quad . \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{2} + U(x)\right) = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}$$

7. Обобщенные координаты. Принцип наименьшего действия и уравнение Лагранжа. Общий вид функции Лагранжа.

Число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется числом её степеней свободы. Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких либо других координат. Любые s величин q1,q2,q3,….,qs вполне характеризующие положение системы называют её обобщёнными координатами, а их производные по времени обобщёнными скоростями. Одновременное задание всех координат и скоростей полностью определяет состояние системы и позволяет определить её поведение в последующие моменты времени. Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями называются ур-ми движения. **Принцип наименьшего действия (Гамильтона):** Каждая механическая система характеризуется определённой ф-ией L(q1,q2,…,qs,q’1,q’2,q’3,…,q’s,t), движение системы удовлетворяет условию: в моменты времени т1 и т2 система занимает определённые положения с координатами q(1) и q(2) Тогда между этими положениями система движеться таким образом чтобы интеграл

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, q', t)dt$$

Имел наименьшее возможное значение. Ф-ция L называется ф-й Лагранжа, а интеграл – действием. Нахождение решения условия минимума интеграла: q=q(t)– искомая ф-я при которой S – минимально. Значит S возрастёт при замене q(t) на q(t)+kq(t). А kq(t) – вариация q(t).по скольку фиксируются начальные и конечные условия kq(t1)=kq(t2)=0. Имеем – разность S.

$$\int_{t1}^{t2} L(q + kq, q' + kq', t)dt - \int_{t1}^{t2} L(q, q', t)dt$$

Разложение этой разности по степеням kq u kq’ (в подинтегральном выражении) начинается с членов первого порядка. Необходимым условием минимальности S является обращение в нуль совокупности этих членов; её называют первой вариацией интеграла. Таким образом принцип наименьшего действия можно записать в виде :

$$kS = k\int_{t1}^{t2} L(q, q', t)dt = 0 = \int_{t1}^{t2} (\partial L / \partial q * kq + \partial L / \partial q' * kq')$$

замечая что kq’=d/dt*kq проинтегрируем второй член по частям получим: учитывая нулевые условия для kq(t1) kq(t2) получаем d/dt ∂L/∂q’=∂L/∂q. L=T-U – общий вид ф-ции Лагранжа.

8. Законы сохранения как следствие инвариантности функции Лагранжа относительно некоторых преобразований. Циклические координаты.

При движении механической системы 2s величин qi и q'i определяющих ее состояние, изменяются со временем. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняют при движении постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Эти функции называют *интегралами движения.* Число независимых интегралов движения для замкнутой механической системы с s степенями свободы равно 2s — 1. Это очевидно из следующих простых соображений. Общее решение уравнений движения содержит 2s произвольных постоянных. Поскольку уравнения движения замкнутой системы не содержат времени явно, то выбор начала отсчета времени совершенно произволен, и одна из произвольных постоянных в решении уравнений всегда может быть выбрана в виде аддитивной постоянной /о во времени. Исключив *14- to* из 2s функций мы выразим 2s — 1 произвольных постоянных Ci в виде функций от *q* и *q,* которые и будут интегралами движения. Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с *однородностью времени.* В силу этой однородности лагранжева функция замкнутой системы не зависит явно от времени. Поэтому полная производная функции Лагранжа по времени может быть записана следующим образом: dL/dt = Σ∂L/∂qi*q'I+Σ∂L/∂q'I*q'' (если бы *L* зависела явно от времени, к правой стороне равенства добавился бы член - ∂L/∂t) Заменяя производные согласно уравнениям Лагранжа

получим: $$\frac{d}{dt}\left(\sum q'\frac{\partial L}{\partial q'}-L\right)=0$$ Отсюда видно, что величина под дифференциалом – Е – энергия сохраняется. Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности функции- Лагранжа, через которую она выражается линейным образом. Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянном (т. е. не зависящем от времени) внешнем поле- единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа— отсутствие явной зависимости от времени—имеется и в этом случае. Механические системы, энергия которых сохраняется, иногда называет *консервативными. Л*агранжева функция замкнутой системы имеет вид *L=T(q,q')-U(q)* и*д*е *T* -—. квадратичная функция скоростей. Применяя к ней известную. теорему Эйлера об однородная функциях, получим

$$\sum q'\frac{\partial L}{\partial q'}=\sum q'\frac{\partial T}{\partial q'}=2T$$ откуда E=T+U.

Другой закон сохранения возникает в связи'с *однородностью пространства.* В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый перенос на отрезок s и потребуем. чтобы функция Лагранжа осталась неизменной. Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы сместятся на один н тот же постоянный вектор **s,** т. е. Их радиус-векторы r = r +s Изменение функции L в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть ΔL=sΣ∂L/∂r где суммирование производится по. всем материальным точкам системы. В силу уравнений Лагранжа (5,2) получаем отсюда: $\frac{d}{dt}(P = \sum \frac{\partial L}{\partial v}) = 0$ Таким образом, мы приходим к выводу, что в замкнутон механической системе векторная величина P остается неизменной при движении. Вектор P называется импульсом системы. Дифференцируя функцию Лагранжа найдем, что импульс следующим образом выражается *через* скорости точек $P = \sum mv$ АДДИТИВНОСТЬ Импульса очевидна. Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в отсутствие внешнего поля. Перейдём к выводу закона сохранения, связанного с изотропией пространства. Механические свойства системы не зависят от произвольного поворота. Введём вектор ∂φ безконечно малого поворота, величина котрого равна углу поворота, а направление совпадает с осью поворота. Приращение радиус-вектора: l∂rl=r sina ∂φ ∂r=[∂φ r] ∂v=[∂φ v] подставляем в условие неизменяемости ф-ции Лагранжа: $\Delta L = \sum(\frac{\partial L}{\partial r}\partial r + \frac{\partial L}{\partial v}\partial v) = 0$ заменяем производные $\sum(\dot{p}[\partial\varphi * r] + p[\partial\varphi * v]) = 0$ произведя циклическую перестановку множителей и выноса ∂φ получим

$$\partial\varphi\sum([r * \dot{p}] + [v * p]) = \partial\varphi\frac{d}{dt}\sum[r * p] = 0$$

ввиду произвольности ∂φ момент импульса (то шо под диференциалом) сохраняется

9. Механическое подобие.

Умножение функцию Лагранжа па любой постоянный множитель очевидным образом не меняет уравнений движения. Это обстоятельство даёт возможность в ряде важных случаев сделать некоторые существенные заключения о свойствах движения, не производя конкретного интегрирования уравнений движения. Сюда относятся случаи, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат, т. е- функцией, удовлетворяющей условию $U(ar1,ar2,\ldots,arn)=a^kU(r1,r2,\ldots,rn)$ где a — любая постоянная, а *число k* — степень однородности. Произведем преобразование, при котором наряду с изменением всех координат в a раз одновременно изменяется (в b раз) время *Все* скорости v изменяются при этом в a/b раз**,** а кинетическая энергия—в $(a/b)^2$ раз. Потенциальная же энергия умножается на a^k.

Если связать a и b условием $(a/b)^2=a^k$ то в результате такого преобразования функция Лагранжа целиком умножится на постоянный множитель a^k, т. е. уравнения движения останутся неизменными. Изменение всех координат частиц в одинаковое число раз означает переход от одних траэкторий к другим, геометрически подобным первым и отличающимся от них лишь своими линейными размерами. Таким образом, мы приходим *к* заключению, что если потенциальная энергия системы является однородной *функцией* k-й степени от координат то уравнения движения допускают геометрически подобные траектории, причем все времена движения относятся, как $t'/t=(l'/l)^{1-k/2}$ где l'/l;-—отношение линейных размеров двух траекторий. Вместе с временами определёнными степенями отношения *l'/l* являются также значения любых механических величин в соответственных точках траекторий в соответственные моменты времени.

10. Теорема вириала.

Поскольку T=f(v*v), то по теореме Эйлера об однородных ф-ях: $\sum_a \frac{\partial T}{\partial v_a} v_a = 2T$

(1). Средние значение определяется по формуле: $\overline{U} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} U(t)dt$ из (1):

$T = \frac{1}{2}\sum_a r_a' p_a = \frac{1}{2}\sum_a (r_a p_a)' - \frac{1}{2}\sum_a r_a p_a'$ $\quad \overline{T} = \overline{\frac{1}{2}\sum_a (p_a r_a)' - \frac{1}{2}\sum_a r_a \dot{p}_a}$.

Первый член при финитном движении = 0, а во втором учтем : $p_a' = -\frac{\partial U}{\partial r_a}$ (за вторым законом Ньютона). Получаем : $2\overline{T} = \overline{\sum_a r_a \frac{\partial U}{\partial r_a}}$. Если U есть однородной ф-ей k-ой степени от всех радиус-векторов : $2\overline{T} = k\overline{U}$. Учтем, что $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E}$: $\overline{T} = \frac{k}{k+2}\overline{E}$;

$\overline{U} = \frac{2}{k+2}\overline{E}$ Что такое k и откуда оно берется смотрим в билет №9.

11. Задача двух тел. Приведенная масса. Эффективная потенциальная энергия.

В общем случае система двух тел имеет S=6 степеней свободы и 7 интегралов движения (из которых 6 независимых) (Или 6, 12 и 11 соответственно - прим. редакции)

Запишем уравнение Лагранжа для двух взаимодействующих тел:

$L = \frac{m_1 (r_1^2)'}{2} + \frac{m_2 (r_2^2)'}{2} - U(|r_1 - r_2|), (1)$. Введем вектор взаимного расстояния : r = r1 – r2. И поместим начало координат в центре инерции, что дает m1r1+m2r2=0. Из двух последних равенств находим: $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r$. Подставляя эти выражения в (1), получим : $L = \frac{m (r')^2}{2} - U(r), где\ m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m – приведенная масса. Эффективная потенциальная энергия: (пример введения приведен в билете №12). В общем случае U(эфф.) есть оптимизация потенциальной энергии составного движения к общему простому одномерному движению. Билет №11 в лекциях тесно связан с билетом №12 и билетом №13.

12. Движение в центрально-симметрическом поле. Общие закономерности. Замыкание траектории. Падение на центр. Ц-С поле-поле в котором потенц. энергия частицы зависит только от расстояния r. Сила F=-grad(U(r)). Сохраняется M=[r*p] – момент импульса – посему r постоянно лежит в одной плоскости (соответственно и вся траектория).

Введем полярные координаты: $L = \frac{m}{2}((r')^2 + r^2(\varphi')^2) - U(r)$ Поскольку ф-ия не содержит φ (циклическая координата), в силу ур-ия Лагр. получаем :

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Соответствующий импульс Pi – есть интеграл движения. В данном случае обобщенный импульс совпадает с моментом:

$M_z = p_\varphi = mr^2\varphi' = const \Rightarrow \varphi' = \frac{M}{mr^2}$. Полное решение получим из законов сохранения энергии и момента:

$$E = \frac{m}{2}((r')^2 + r^2(\varphi')^2) + U(r) = \frac{m(r')^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (1)$$

Отсюда : $r' = dr/dt = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{(mr)^2}} \Rightarrow$

$$t = \int \frac{dr}{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{(mr)^2}} + const(*)$$

$$d\varphi = \frac{Mdt}{mr^2} \Rightarrow \varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + const(**)$$

Ф-лы (*) и (**) решают в общем виде поставленную задачу. Из (1) : видно, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с эффективной энергией : $U_e = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ Значения r при которых U(эфф)=E определяют границы обл. движения. Если обл. движения ограничена лишь условием r > = r(min) – движение инфинитно, а если r(min)<=r<=r(max), то движение финитно и целиком лежит внутри кольца , ограниченного окружностями r1=r(min) r2=r(max). За время, когда r изменится от r(min) до r(max), радиус-вектор повернется на угол :

$$\Lambda\varphi = 2\int_{r\min}^{r\max} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$$

. Условие замкнутости траектории: Δφ есть рациональная часть от 2π. Падение частицы на центр возможно лишь, если потенциальная энергия достаточно быстро стремиться к -∞ при r→0.

Из ур-ия (1): $$\frac{m(r')^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0 \quad r^2U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

$$r^2U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}$$

. Т.е. U(r) должно стремиться к -∞ либо как –a/r*r, где a>M*M/2m, либо пропорционально –1/r^n, n>2.

13. Задача Кеплера. Законы Кеплера.

Насколько я понял задача Кеплера это задача двух тел при движении в центральном поле. Поле наз. центральным если потенциальная енергия частички в этом поле зависит только от расстояния **r** до определенной неподвижной точки. Запишем ф-ию Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Эта ф-ия не сожержит в явном виде координату φ. (Такую координату наз. циклической). Для такой коор. Из уравнения Лагранжа следует что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M = const$$

Тобиж момент М сохраняется. Для плоского движения в центральном поле мона сделать такую геом. интерпретацию. Выражение $\frac{1}{2}r \cdot \dot{r}d\varphi$ представляет собой площадь сектора образованого двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом траектории.Обознаичм ее как *df*, тада : $M = 2m\dot{f}$ где производную наз. секториальной скоростью. Тобиж сохранение момента озн. постоянство секс. скорости за равные промежутки времени ⇔ радиус вектор описывает равные площади - II закон Кеплера. Выразим $\dot{\varphi}$ через *M* и подставим в выражение для полной энергии:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr} + U(r) \Leftrightarrow \dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}$$

интегрурия имеем: $$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const$$ Из того что момент сохрн. имеем: $$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$$ - подставим сюда *dt* *и интегрируя имеем:* $$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + const$$ *(1)* Из выражения для полной энергии имеем, что радиальную часть движения мона рассматривать как одномерное в поле с эффективной пот. энерг.

$$U_{эфф} = U(r) + M^2 / 2mr^2$$ ту бядягу что 3 по счету с лева наз.

центробежной энерг. Значения ***r*** при которых $U_{эфф} = E$ опред. границы обл. движения . Рассморим поле притяжения где

$$U = -\frac{\alpha}{r} \Leftrightarrow U_{эфф} = -\frac{\alpha}{r} + M^2 / 2mr^2$$ - график похож на гр. пот. енергии грав. взаимод. двух точ тел. али зарядов (это писать не надо надо нарисовать ибо мне впадло ☺) Подставим эту эенрг. в (1). Имеем:

$$\varphi = arr\cos \frac{\frac{M}{r} - \frac{ma}{M}}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2 / M^2}}$$ Выберем const=0 и получим:

$$\frac{p}{r} = e\cos\varphi + 1$$ (2) где $p = \frac{M^2}{m\alpha}, e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} < 1$ $E = -|E|$ и е – понятное дело, эксцентриситет. И када е<1 траектория будет – элипс.с такими параметрами $a^2 = c^2 + b^2$ $e = \frac{c}{\alpha}$

$$(2\alpha - p)^2 = (2c)^2 + p^2 \Rightarrow \alpha = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{M}{\sqrt{2mE}}$$ Тобиж, в гравитационном поле ($U = -\frac{\alpha}{r}$) траекторией движения планеты будет елипс – I закон Кеплера!

14. Колебания со многими степенями свободы, нормальные координаты.

Движение которое совершает система вблизи своего положения устойчивого равновесия наз. малыми колебаниями. Тобиж при малых отклонениях от пол. равновесия появляется сила $-\frac{dU}{dq}$ которая возвращает систему обратно. Пусть $U=f(q_i)_{i=1..s}$ имеет мин. при $q_i=q_{io}$ Пусть $x_i=q_i-q_{io}$ Разложим *U* по сепеням x_i до членов 2-го пор. Получим пот. энергию в виде квадр. формы: $U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k$ отсчет эн. от минимума. $U(q_{io})=0$ коеф. $k_{ik}=k_{ki}$ поскольку входят симетрично. Кин. эн. в общем виде: $\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k$ положим $q_i=q_{io}\ \&\ a_{ik}(q_o)=m_{ik}$

Тада $T=\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$ причем $m_{ik}=m_{ki}$ тоже симетр. Тобиж имеем ф-ию Лагранжа: $L=T-U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)$ Тада:

$$dL=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_id\dot{x}_k+m_{ik}\dot{x}_kd\dot{x}_i-k_{ik}x_idx_k-k_{ik}x_kdx_i\right)\Leftrightarrow dL=\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_kd\dot{x}_i-k_{ik}x_kdx_i\right)\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\sum_k m_{ik}\dot{x}_k\ \_\_\&\_\_\ \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\sum_k k_{ik}x_k$$

Тобиж имеем ур. Лагранжа: $\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=0$ В общем виде эти ур-ния решаются в виде

$$x_k=A_ke^{i\omega t},A_k=const$$

Подставляем, получаем: $\sum_k\left(-\omega^2m_{ik}+k_{ik}\right)A_k=0$ Для того шоб эта система имела решение необх. шоб $\left|k_{ik}-\omega^2m_{ik}\right|=0$ - хар.ур-ние. Оно имеет *s* корней причем $\omega_a\in R$ - собственные частоты системы. Када найдем ω_a подставим в ур-ние и найдем

A_k ; если все корни различны то A_k пропорц. минорам хар.ур-ния. Обозначим их как Δ_{ka} .Тада частное реш. ур. Лагранжа :

$$x_k = \Delta_{ka} C_a e^{i\omega_a t}; C_a = const$$

Тада общее реш. будет:

$$x_k = \mathrm{Re}\left(\sum_{a=1}^{s} \Delta_{ka} C_a e^{i\omega_a t}\right) \equiv \sum_a \Delta_{ka} \Theta_a$$

где

$$\Theta_a = \mathrm{Re}\left(C_a e^{i\omega_a t}\right)$$

Из последнего мона сделать вывод, шо движение системы представляет собой наложение *s* простых период. Колебаний $\Theta_1; \Theta_2 \ldots \Theta_s$ с произвольными амплитудами и фазами но с определеными частотами. Тада $\Theta_1; \Theta_2 \ldots \Theta_s$ считать новыми обобщенными коорд. Причем каждая коорд. При этом будет совершать простые колебания. Такие координаты наз. нормальными а простые колебания совершаемые ними – нормальными кол. системы. В нормальных координатах ур-ния движения расспадаются на *s* независимых ур-ний. Оч., что ф-ия Лагранжа в нормальных коорд. Расспадается на сумму выражений, каждое з которых соответствует ономерному колебанию с одной из частот ω_a т.е. имеет вид:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} (\dot{\Theta}^2 - \omega_a^2 \Theta_a^2)$$

С мат. точки зрения это означает, квадратичные формы пот. и кин. эн приводяться к диагональному виду.

15. Вынужденные гармонические колебания без трения. Резонанс. Биения.

Если на систему которая совершает колебательное движение действует некоторое переменное внешнее поле то такие колебания наз. вынужденными.Причем внешнее поле достаточно слабое шоб не вызвать больших смещений. В этом случае в системе появляется доп. пот. эн. $U_e(x,t)$ Разложим его в ряд по степеням малой величины *x* имеем: $U_e(x,t) \approx U_e(0,t) + x\frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{x=0}$ Первый член – ф-ия токо от времени (тобиж опускаем ее) $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$ - внешняя сила обозн. ее как *F(t)*. Тада:

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)$ Ур-ние движения: $m\ddot{x} + kx = F(t) \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t)$ где ω - частота своб. кол. Рассморим случай када вынуждающая сила есть простой периодической ф-ией времени с нек. частотой γ : $F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)$ Тада частный интеграл ур-ния движения ищем в виде $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ Подставляя в ур-ние имеем: $b = \frac{f}{m}(\omega^2 - \gamma^2)$ прибавляя сюда решение однородного ур-ния имеем:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta)$$

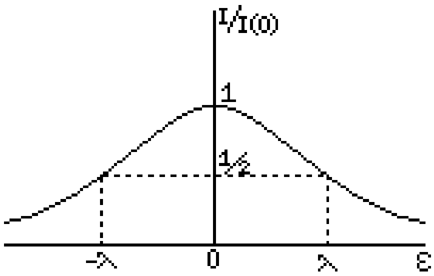
Таким образом, под дейтсвием пер. вынужд. силы система совершает движение представляющее собой наложение двух колебаний с собственной частотой ω и с частотой вынуждающей силы γ . В случае резонанса (тобиж када ω=γ) раскроем неопрелеленность правилом Лопиталя получим: $x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t + \beta)$ Тобиж ситема при резонансе будет совершать колебания с амплитудой линейно возрастающей со временем. Пусть $\gamma = \omega + \varepsilon$ ___ $\varepsilon \to 0$ тада общее решение:

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\omega t})e^{i\omega t}$$

Пусть $C = |A + Be^{i\omega t}|$ - амплитуда. Тада представим *A и B* в виде $ae^{i\omega t}, be^{i\omega t}$ получим:

$C^2 = a^2 + b^2 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha)$ Таким образом амплитуда колеблется с частотой ε между : $|a - b| \leq C \leq a + b$ Это явление наз. биением.

16. Гармонические колебания с трением и внешней силой. Резонанс. Прибавив к уравнению свободных колебаний внешнюю силу f cos γt и разделив на m, получим уравнение движения в виде: $x''+2\lambda x'+\omega_0 x=(f/m)\cos\gamma t$ (1)решение удобно искать в комплексной форме, для чего правую часть заменим на $(f/m)e^{i\gamma t}$. Частный интеграл ищем в виде $x=Be^{i\gamma t}$ и находим для B: $B=f/m(\omega_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)$ (2). Представим B в виде $be^{i\delta}$, имеем для b и δ: $b=f/(m\sqrt{((\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2)})$, $\operatorname{tg}\delta=2\lambda\gamma/(\gamma^2-\omega_0^2)$ (3). Для случая $\omega_0>\gamma$ получим окончательно: $x=\alpha e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta)$ (4). Через большой промежуток времени останется: $x=b\cos(\gamma t+\delta)$ (5). Выражение (3)для амплитуды b вынуждено колебаться хотя и возрастает при приближении частоты γ к ω_0, но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствии трения. При заданной амплитуде силы f амплитуда колебания максимальна при частоте $\gamma=\sqrt{(\omega_0^2-2\lambda^2)}$; при $\lambda<<\omega_0$ это значение отличается от ω_0 лишь на величину второго порядка малости. Рассмотрим область в близи резонанса. Положим $\gamma=\omega_0+\varepsilon$, где ε-малая величина; будем также считать, что $\lambda<<\omega_0$. Тогда в (2)можно приближённо заменить: $\omega_0^2-\gamma^2=(\omega_0+\gamma)(\omega_0-\gamma)\approx 2\omega_0$, $2i\lambda\gamma\approx 2i\lambda\omega_0$, так что $B=-f/(2m(\varepsilon+\lambda)\omega_0)$ (6), или $b=f/(2m\omega_0\sqrt{(\varepsilon^2+\lambda^2)})$, $\operatorname{tg}\delta=\lambda/\varepsilon$ (7). Обозначим посредствам $I(\gamma)$ кол-во энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, как функцию частоты внешней силы. Согласно формуле $dE/dt=-2F$ имеем: $I(\gamma)=2\underline{F}$, где $\underline{F}$–среднее (по периоду колебаний) значение диссипативной функции. Для одномерного движения выражение диссипативной функции сводится к $F=\alpha x'^2/2=\lambda m x'^2$. Подставив сюда (5), получим: $F=\lambda m b^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta)$. Среднее по времени значени квадрата синуса равно ½, поэтому: $I(\gamma)=\lambda m b^2\gamma^2$ (8). В близи резона нса, подставляя амплитуду колебаний из (7), имеем: $I(\varepsilon)=(f^2/4m)(\lambda/(\varepsilon^2+\lambda^2))$ (9). Такой вид зависимости поглощения от частоты называется дисперсионным. Полушириной резонансной кривой называют значение $|\varepsilon|$, при котором величина $I(\varepsilon)$ уменьшается вдвое по сравнению с её максимальным значением при $\varepsilon=0$.



Из формулы (9) видно, что в данном случае эта полуширина совпадает с показателем затухания λ. Высота же максимума $I(0)=f^2/4m\lambda$ обратно пропорциональна λ. Таким образом, при уменьшении показателя затухания резонансная кривая становится уже (от слова узкий) и выше. Площадь же под резонансной кривой остаётся при этом неизменной. Последняя даётся интегралом

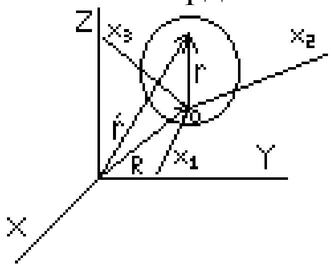
$$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon$$

. Поскольку $I(\varepsilon)$ быстро убывает при увеличении $|\varepsilon|$, так, что область больших $|\varepsilon|$ всё равно не существенна, можно при интегрировании писать $I(\varepsilon)$ в виде (9), а нижний предел заменить на $-\infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}$$

17, Движение твёрдого тела (ТТ). Угловая скорость. Кинетическая энергия ТТ.

Для описания движ. т. т. введём две системы координат: "Неподвижную" т. е. инерциальную систему XYZ, и движущуюся систему координат x_1=x, x_2=y, x_3=z, которая предполагается жестоко связанной с т. т. и участвующая во всех его движ. Начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела. Положение т. т. относительно неподвижной системы координат вполне определяется заданием положением движущийся системы



Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение т. т. Представим это движение в виде сумы параллельного переноса и поворота тела вокруг центра инерции. Тогда смещение dŕ точки P складывается из перемещения dR вместе с центром инерции и перемещения [dφ·r] относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол dφ: dŕ=dR+[dφ·r]. разделив это равенство на dt, в течении которого происходило рассматриваемое перемещение, и введя скорости dŕ/dt=v, dR/dt=V, dφ/dt=Ω, получим соотношение между ними: v=V+Ω, где V–скорость поступательного движения; Ω–угловая скорость вращения т. т. Допустим теперь, что жёстко связанная с т. т. система координат выбрана так, что её начало находиться не в точке O, а в некоторой точке O' на расстоянии a от точки O. Скорость перемещения начала O' этой системы обозначим через V', а угловую скорость её вращения – через Ω'. Рассмотрим снова какую-либо точку P т. т. и обозначим её радиус-вектор относительно начала O' через r'. Тогда r = r' + a и подстановка даёт: v=V+[Ωa]+[Ωr']. С другой стороны, по определению V' и Ω',должно быть v=V'+[Ω'r']. Поэтому мы заключаем, что V'=V+[Ωa], Ω'=Ω. Если так выбрать систему координат, что движение будет представлено чистым вращательным движением вокруг какой-то оси, то эта ось называется мгновенной осью вращения тела. Для вычисления кинетической энергии т. т. рассматриваем его как дискретную систему материальных точек и напишем: $T=\sum(mv^2/2)$, где суммирование производиться по всем точкам, составляющим тело. Подставим сюда v=V+Ω,

получим: $T=\sum\frac{m}{2}(V+[\Omega r])^2=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum mV[\Omega r]+\sum\frac{m}{2}[\Omega r]^2$. Скорость V и Ω одинаковы для всех точек т. т. Поэтому в первом члене $V^2/2$ выносится за знак суммы, а сумма по m есть масса тела, которую мы будем обозначать по средствам μ. Во втором члене

пишем: $\sum mV[\Omega r]=\sum mr[V\Omega]=[V\Omega]\sum mr$. Отсюда видно, что если начало движущийся системы координат выбрано, как условленно, в центре инерции, то этот член обращается в нуль, так как тогда ∑mr=0. Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения и в результате находим:

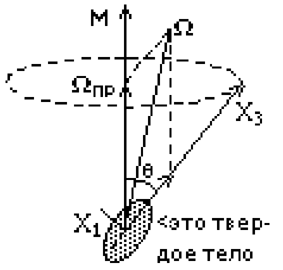
$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\{\Omega^2 r^2-(\Omega r)^2\}$$

18. Момент импульса твёрдого тела. Тензор инерции твёрдого тела.

Перепишем кинетическую энергию вращения

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\{\Omega^2 r^2 - (\Omega r)^2\}$$

в тензорных обозначениях, т. е. через компоненты x_i, Ω_i векторов r, Ω. Имеем $T_{BP}=(1/2)\sum m\{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\}=(1/2)\sum m\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\}=(1/2)\Omega_i\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_i x_k)$, где δ_{ik} – единичный тензор (компоненты которого равны единице при i=k и нулю при i≠k). Введя тензор $I_{ik}=\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_i x_k)$, получим окончательное выражение для кинетической энергии т. т. в виде: $T=(\mu V^2/2)+(1/2)I_{ik}\Omega_i\Omega_k$. Тензор I_{ik} называется тензором моментов инерции или просто тензором инерции тела. Как ясно из определения он симметричен, т. е. $I_{ik}=I_{ki}$. Выпишем его



$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Компоненты I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, иногда называют моментами инерции относительно соответствующих осей. Тензор инерции, очевидно, аддитивен – моменты инерции тела равны суммам моментам инерции его частей. Если т. т. можно рассматривать как сплошное, то в определении сумма заменяется интегралом по объёму тела: $I_{ik} = \int \rho(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)dV$. Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведён к диагональному виду путём соответствующего выбора направления осей. Эти направления называются главными осями инерции, а соответствующие значения компонент тензора – главными моментами инерции. $T_{BP}=(1/2)(I_1\Omega_1^2+ I_2\Omega_2^2+ I_3\Omega_3^2)$. Каждый из трёх моментов не может быть больше суммы двух других. Если все три главных момента различны, то это асимметрический волчок, если два совпадают – симметричный волчок, если совпадают три – шаровой волчок.

При выборе начала координат в центре инерции его момент M совпадает с "собственным моментом", связанным лишь с движением точек тела относительно центра инерции. Другими словами, в определении M=∑m[rv] надо заменить v на [Ωr]: M=∑m[r[Ωr]]=∑m{r² Ω–r(r Ω)}, или в тензорных обозначениях: $M_i=\sum m\{x_l^2\Omega_i - x_i x_k\Omega_k\}=\Omega_k\sum m\{x_l^2\delta_{ik}-x_i x_k\}$. Наконец, учитывая определение тензора инерции, получим окончательно: $M_i=I_{ik}\Omega_k$. Если оси

x_1, x_2, x_3 направлены вдоль главных осей инерции тела, то эта формула даёт: $M_1=I_1\Omega_1$, $M_2=I_2\Omega_2$, $M_3=I_3\Omega_3$. В частности для шарового волчка получим $M=I\Omega$.

Воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции x_1, x_2 (перпендикулярных к оси симметрии волчка x_3), выберем ось x_2 перпендикулярно к плоскости, определяемой постоянным вектором M и мгновенным положением оси x_3. Направления M, Ω и оси волчка в каждый момент времени лежат в одной плоскости. Но отсюда следует, что скорости всех точек на оси волчка равномерно вращаются вокруг направления M, описывая круговой конус (так называемая регулярная процессия волчка). Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть просто проекция Ω_3 вектора Ω на эту ось: $\Omega_3=M_3/I_3=(M/I_3)\mathrm{Cos}\theta$. $\Omega_{ПР}\mathrm{Sin}\theta=\Omega_1$, а поскольку $\Omega_1=M_1/I_1=M\sin\theta/I_1$, то получаем: $\Omega_{ПР}=M/I_1$.

Также есть такой вариан 19 вопроса Момент импульса твердого тела. Тензор инерции.

Вступление: Возьмем две сис-мы коорд. Неподвижную и связанную непосредственно с телом, тогда перемещение относительно неподвижной сис-мы склад. из перемещ. центра инерции и вращательного движения.

$$d\overline{\Re} = d\overline{R} + [d\varphi * \overline{r}] \qquad (1)$$

Разделим (1) на dt. Получим: **v = V+[Ω*r]** (2). Вектор **V** скорость центра инерции, **Ω** угловая скорость вращения, которая совпадает с направлением оси вращения, **v** – скорость любой точки тела относительно неподвижной сис-мы коорд. Всегла можновыбрать такую сис-му коорд, что **V** = 0. Тогда движ. Тела в данный момент будет представлено как чистое вращения вокруг оси , проходящей через O’ (центр выбранной сис-мы коорд). Эту ось называют *мгновенной осью вращения тела.Ответ на вопрос:*Твердое тело – сис-ма мат. точек. Найдем кинет. энергию: $T = \sum \frac{mv^2}{2}$. Подставим (2) , получим:

$$T = \sum \frac{m}{2}(V + [\Omega r])^2 = \sum \frac{m}{2}V^2 + \sum mV[\Omega r] + \sum \frac{m}{2}[\Omega r]^2$$

Для второго члена суммы несложными преобразованиями:

$$\sum mV[\Omega r] = \sum mr[V\Omega] = [V\Omega]\sum mr$$

Т.к. V и Ω для всех точек тела одинаковы то вынесли за знак суммы. Если центр коорд. совпадает с центром инерции то сумма m*r= 0. сумма m это масса тела -- μ. Окончательно преобразовав получим

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\{\Omega^2 r^2 - (\Omega r)^2\} \qquad (3)$$

Первый член – кин энерг поступат движения. Второй – вращ движ со скоростью Ω вокруг оси проходящей через центр инерции. Перепишем энергию вращ движ в тензорах :

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega_i{}^2 x_l{}^2 - \Omega_i x_i \Omega_l x_l\right\} = \frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\} = \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\}$$

Использовано тождество $\Omega_i=\delta_{ik}\Omega_k$, где δ_{ik} – единичный тензор. Ввведём тензор

$$I_{ik}=\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k) \quad (4)$$

Подставим в (3): $$T=\frac{\mu V}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$ (5). Ф-ция Лагранжа тв тела: L = (5) – U. (6) Тензор I_{ik} наз *тензором моментов инерции* или *тензором инерции.* Он симметричен : $I_{ik}=I_{ki}$. Запишем его копоненты:

$$I_{ik}=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}$$

Компоненты I_{xx} I_{yy} I_{zz} наз моментами инерции относ соответв осей.

19.Общие свойства тензора инерции(ТИ) тв.тела.Класификация тв.тел(тт)

Σm(y*y+z*z) -Σmxy -Σmxz Ixx,Iyy,Izz называют моментами инерции отн.соотв.осей

Iik= -Σmyx Σm(x*x+z*z) -Σmyz

-Σmzx -Σmzy Σm(x*x+y*y)

ТИ аддитивен - мом. инерции тела=суме моментов инерции его частей. Если ТТ можно рассматривать как сплошное то **I**ik=∫ρ(xi*xi*δik-xi*xk)dV. ТИ может быть приведен к диагональному виду путем соответсв выбора направл. осей x1,x2,x3.Эти направл. назыв. *главными осями инерции*. а соответств значения компонент ТИ - *главными моментами инерции*. При этом кин вращательная энергия тела: Твр=1/2(I1Ω1^2+I2Ω2^2+I3Ω3^2). Каждый из трех гл. моментов не может быть больше сумы двух др.

Так: I1+I2=∑m(x1^2+x2^2+2*x3^2)≥∑m(x1^2+x2^2)=I3. Тело к которого все 3 гл. момента разные назыв.- асимметричным волчком. Если все три равны то тело – шаровой волчок ,в этом случае произволен выбор всех осей(могут быть ∀3 перпендик. оси).Если два момента равны то тело - симметричный волчок и тогда главные оси в плоскости x1x2 произвольны. Нахождение главных осей упрощается если тело обладает симметрией тогда положение центра инерции и направл. гл. осей должно обладать той же симметрией .Если тело обладает плоскостью симметрии то центр инерции лежит в этой плоскости. В ней лежат две гл. оси и третья перпендикулярна к ней. Если тело обладает осью симметрии любого порядка то центр инерц. лежит на этой оси с ней же совпадает одна из главных осей инерции а две другие перпендикулярны к ней, при этом если порядок оси симметрии выше второго то тело - симметр. волчок.

Так-же есть такой вариант вопроса 20. Общие свойства инерции тв тела. Классификация тв тел.

Тензор инерции, очевидно, аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей, если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в. определении- $I_{ik} = \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$ сумма заменяется интегралам по, объему, тела: $I_{ik} = \int \rho \ (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей *x1,x2,x3.* Эти направления называют *главными осями инерции,* а соответствующие значения компонент тензора—*главными моментами инерции;* обозначим их как /;, /а, /з. При таком выборе осей ^i, *Хг. x-s* вращательная кинетическая энергия выражается особенно просто:

$$T_{вр} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

Отметим, **что** каждый из трех главных моментов инерции **не** может быть больше суммы двух других. Так, $I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3$. Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют *асимметрическим волчком.*

Если два главных момента инерции равны друг другу, $I_1=I_2\neq I_3$. то твердое тело называют *симметрическим 'волчком.* В этом случае выбор направления главных осей в плоскости x_1 x_2 произволен Если все три главных момента инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком.* В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции: в качестве их можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

Нахождение главных осей очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной симметрией; ясно, что положение центра инерции и направления главных осей инерции должны обладать той же симметрией.

Так, если тело обладает плоскостью симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, и третья — перпендикулярна к ней. Очевидным случаем такого рода является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае существует простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Если плоскость системы выбрана в качестве плоскости x_1 x_2, то поскольку

для всех частиц x_3. = 0,имеем: $I_1 = \sum m x_2^2$, $I_1 = \sum m x_1^2$, $I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2)$ так что $I_1=I_2+I_3$.Если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка, то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна .из главных осей инерции, а две другие— перпендикулярны к ней. При этом, если порядок оси симметрии выше второго, то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно повернуть тогда на угол, отличный от 180°, т. е. выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка.

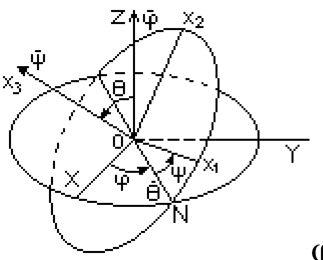
Особым случаем является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси *xз,* то для всех частиц $x1 = x2 = 0$, и потому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю: $I_1 = I_2 = \sum m x_3^2$, $I_3 = 0$.Такую систему называют *ротатором.* Характерной особенностью ротатора в отличие от общего случая произвольного тела является то, что он имеет всего две (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей *x1* и *x2;* говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Наконец, сделаем еще одно замечание по поводу вычисления тензора инерции. Хотя мы определили этот тензор по отношению к системе координат с началом в центре инерции, но для его вычисления может иногда оказаться удобным вычислить предварительно аналогичный тензор $I'_{ik} = \sum m(x'^{}_i \delta_{ik} - x'_i x'_k)$
Определенный по отношению к другому началу *O'*. Если расстояние *00'* дается вектором **a,** то $r = r' + a$, $x_i = x'_i + a_i$ учитывая также, что $\sum mr = 0$ по определению точки *O,* найдем: $I_{ik}{}' = I_{ik} + \mu(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$

По этой формуле, зная $I_{ik}{}'$, легко вычислить искомый тензор I_{ik} .

20.Описание поворотов ТТ. Углы Эйлера. Функция Лагранжа ТТ.

Функция Лагранжа ТТ получается из $T=1/2*\mu V\text{^}2+1/2*I_{ik}\Omega_i\Omega_k$ (см. тензор инерции) вычитанием потен. энергии $L=1/2*\mu V\text{^}2+1/2*I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U$. Где I_{ik}-тензор инерции Ω-угловая скорость($d\varphi/dt=\Omega$). Для описания движения ТТ можно пользоваться тремя к-тами его центра инерции и тремя углами определяющих ориентацию осей x1,x2,x3 движущейся СК относительно неподвижной XYZ.В качестве этих углов удобно брать эйлеровы. Начала обеих систем в одной точке. подвижная плоскость x1x2 пересекает неподвижную XY по некоторой прямой ON которую называют линеей узлов.Эта линия перпенд к осям Z и x3.В качестве величин определяющих положение осей x1,x2,x3 отн.осей XYZ примем следующие углы:θ(teta)-между Z и x3,φ-между X и N,ψ между N и x1.



φ и ψ отсчитываются в направл соотв. Правилу правого винта соответствено вокруг осей Z and x3.($0<\theta<\pi;0<\varphi<2\pi;0<\psi<2\pi$).Выразим компоненти угловой скорости по подвижным осям через ейлеровы углы и их производные .Для этого надо спроектировать на эти оси угловые скорости θ',φ',ψ':θ'-направлена по линии узлов ON и ее составляющие по x1x2x3 равны соответствено:$\theta_1'=\theta'\cos\psi$,$\theta_2'=-\theta'\sin\psi$,$\theta_3'=0$.углоавя скорость φ' направлена вдоль Z ее проекция на x3 равна $\varphi_3'=\varphi'\cos\theta$,а проекция на x1x2 равна $\varphi'\sin\theta$ разлагая последнею по осям x1 и x2 получим: $\varphi_1'=\varphi'\sin\theta\sin\psi$,$\varphi_2'=\varphi'\sin\theta\cos\psi$.$\psi'$-направлена по оси x3. Собирая все эти составляющие по каждой из осей получим:$\Omega_1=\varphi'\sin\theta\sin\psi+\theta'\cos\psi$;$\Omega_2=\varphi'\sin\theta\cos\psi$---$\theta'\sin\psi$;$\Omega_3=\varphi'\cos\theta+\psi'$.Если оси x1x2x3 выбраны по главным осям инерции то вращательную кинетическую енергию получим подстановкой этих формул в $T_{вр}=1/2(I_1\Omega_1\text{^}2+I_2\Omega_2\text{^}2+I_3\Omega_3\text{^}2)$. Для симметричного волчка $T_{вр}=I_1/2*(\varphi'\text{^}2\sin\theta\text{^}2+\theta'\text{^}2)+I_3/2(\varphi'\cos\theta+\psi')\text{^}2$.

Примечание: на рисунке величины с точками соответствуют величинам со штрихами в тексте.

21.Динамические уравнения Эйлера для движения ТТ

Пусть dA/dt-скорость изменения какогото вектора А по отношению к неподвижной СК.Если по отношению к вращающейся системе вектор А не изменится то его изменение относительно неподвижной системы обусловлен только вращением и тогда dA/dt=[ΩA].в общем случае к правой части равенмтва надо добавить скорость изменения вектора А по отношению к подвижной СК;обозначив эту скорость d'A/dt имеем dA/dt=d'A/dt+[ΩA].С помощю этой формулы мы можем переписать уравнения движения ТТ dP/dt=F and dM/dt=K в виде d'P/dt+[ΩP]=F and d'M/dt+[ΩM]=K

Поскольку диф-ние по t производится в подвижной СК то можно спроецировать уравнения на оси этой СК:(d'P/dt)1=dP1/dt, …,(d'M/dt)1=dM1/dt, …,где индексы 1 2 3 означают комп.по осям x1x2x3

При этом в первом ур-ии заменяем P на μV :μ(dV1/dt+Ω2V3-Ω3V2)=F1;μ(dV2/dt+Ω3V1-Ω1V3)=F2 μ(dV3/dt+Ω1V2-Ω2V1)=F3,Предполагая оси x1x2x3 выбраными по главным осям инерции пишем во втором уравнении (с моментом и K) M1=I1Ω1 и т.д. и получаем:I1*dΩ1/dt+(I3-I2)Ω2Ω3=K1 I2*dΩ2/dt+(I1-I3)Ω3Ω1=K2;I3dΩ3/dt+(I2-I1)Ω1Ω2=K3-Эти уравнения называют уравнениями Эйлера

22. Свободное движение симметрического и шарового волчков. Что можно сказать о движении асимметрического волчка? Кинетическая энергия, выраженная через тензор

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i$$ где $$I_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$$ –тензор инерции

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$ Приводя тензор инерции к диагональному виде

путём выбора новых осей x1, x2, x3, тогда I1,I2,I3 –главные моменты инерции. За определением I1=I2=I3 –Шаровой волчок, в этом случае можно выбирать любые главные оси инерции. I1=I2≠I3 –симметричный волчок, в этом случае в плоскости x1,x2 можно выбирать любые главные моменты инерции. I1≠I2≠I3- Асимметричный волчок. Для асимметричного волчка можно записать интегралы уравнения Эйлера.

$$\frac{M_1 * 2}{I_1} + \frac{M_2 * 2}{I_2} + \frac{M_3 * 2}{I_3} = 2E \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2$$ Эти уравнения представляют собой геометрический эллипсоид, и выполняется неравенство $2EI_1<M^2<2EI_3$. Вращение вокруг осей x1 x3 устойчиво, а вокруг оси x2 нет. При $M^2=2EI_3$ тогда $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ $\Omega_3 = const$ т.е. вектор омега постоянно вращается вдоль ось инерции x3. Аналогично при $M^2=2EI_1$ – равномерное вращение вокруг оси x1.

23.Функция Лагранжа для одной частицы в инерц. системе отсчета.

$L_0 = (\frac{mv_0^2}{2}) - U$ Рассмотрим систему k‘ которая движется относительно системы k_0 со скоростью V(t). V_0 – скорость в системе k_0, а v’ – в системе k’. Эти скорости связанны между собой соотношением $V_0 = V' + V(t)$ и $L' = \frac{mv'^2}{2} + mv'V + (\frac{m}{2})V^2 - U$ Заменяя v’=dr’/dt, где dr- радиус-вектор в системе k’ тогда

$$mV(t)v' = mV(\frac{dr'}{dt}) = \frac{d}{dt}(mVr') - mr'(\frac{dV}{dt})$$

Заменяя W(t)=dV/dt. Тогда фун-ю Лагранжа $L' = \frac{mV'^2}{2} - mW(t)r'U$

Вводя новую систему К которая имеет общее с системой К’ начало и вращается с угловой скоростью омега(t). Скорость v’ складывается со скорости v относительно системы К и со скорости вращения [омега*r] вместе с системой К’, тогда

$$v' = v + [\Omega r] \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2} + mv[\Omega r] + \frac{m[\Omega r]^2}{2} - mWr - U$$

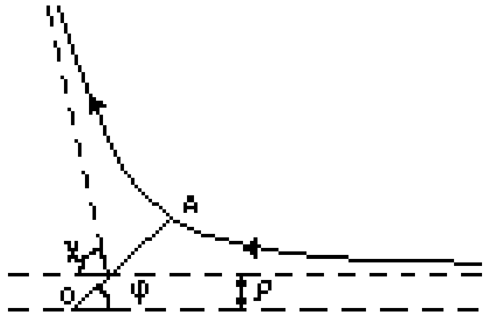
Это общий вид функции Лагранжа частици в произвольной неинерциальной системе отсчёта. Рассмотрим особый случай, когда омега=const и W=0 то

$$L = (\frac{MV^2}{2}) + MV[\Omega r] + \frac{m[\Omega r]^2}{2} - U$$

$\frac{m[\Omega r]^2}{2}$ - дополнительная потенциальная энергия (центробежная).

24. Рассеяние. Сечение рассеяния. Решим сначала задачу об отклонении частицы массой m в поле U(r) неподвижного силового центра расположенного в центре инерции частиц. Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой проведенной в ближайшую к центру точку орбиты ОА. Поэтому обе асимптоты пересекают эту прямую под одинаковыми углами □□□тогда угол □□отклонения частицы при пролетании мимо центра есть, как видно из рисунка,

$\chi = \left|\pi - 2\varphi\right|$. Угол φ определяется интегралом $$\varphi = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}}$$ (1) где $r_{\min}$ корень подрадикального выражения. Введем величины ρ-прицельное расстояние на котором бы прошла частица мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало, v_∞-скорость частицы на бесконечности, тогда $E=(m v_\infty^2)/2$, $M=m\rho v_\infty$ и



$$\varphi = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$ (2) , определяющая зависимость φ от ρ.

Рассеяние пучка. dN-число частиц пучка рассеиваемых за единицу времени на углы лежащие в интервале χ и χ+dχ, n-число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (пучок однороден), σ=dN/n – эффективное сечение рассеяния, которое полностью определяется видом рассеивающего поля. В заданный интервал углов будут рассеиваться частицы, летящие с прицельного расстояния между ρ(χ) и ρ(χ)+dρ(χ). Число таких частиц dN=2πρdρn, тогда dσ=2πρdρ. Зависимость эффективного сечения от угла рассеивания

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$$ (3) или через телесный угол $$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin(\chi)}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$$, где

$$do = 2\pi\sin\chi d\chi$$. Формула (3) определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеивания в системе центра инерции. Для нахождения эффективного сечения в зависимости от угла рассеивания θ в лабораторной системе надо выразить χ через θ. Угол рассеивания падающего пучка

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi}$$, угол рассеивания первоначально покоившихся частиц $\theta_2=(\pi-\chi)/2$

25. Формула Резерфорда. (Сечение рассеяния см. ответ 24).

Рассмотрим рассеяние частиц в поле $U=\alpha/r$ (кулоновское). Подставим это в формулу (2) ответа 24 и производя ЭЛЕМЕНТАРНОЕ интегрирование, получим

$$\varphi = \arccos\frac{\alpha/mv_\infty^2\rho}{\sqrt{1+\left(\alpha/mv_\infty^2\rho\right)^2}}$$ откуда $$\rho^2 = \alpha^2 \operatorname{tg}^2\varphi \Big/ m^2v_\infty^4 = \alpha^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}\Big/ m^2v_\infty^4$$, где

$\varphi=(\pi-\chi)/2$. Дифференцируя это выражение по χ и подставляя в (3) ответа 24, получим

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$ - формула Резерфорда

в системе покоящегося центра инерции сталкивающихся частиц. Преобразование к лабораторной системе производится с помощью двух последних формул ответа 24, там где θ_1 и θ_2 выражаются через χ. Получим $$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2}$$ - сечение рассеяния покоящихся частиц. Для налетающих частиц имеем два случая и трёх телок 'Ƴ' ♿: 1)

$m_2>m_1$ $$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}}$$ где $E_1 = mv_\infty^2/2$ - энергия падающей частицы. 2)

$m_1=m_2$ $$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1$$. Если частицы тождественны, общее эффективное

сечение $$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta do$$. Энергия, теряемая

налетающей частицей m_1 при соударении равна $$\varepsilon = \frac{2m^2v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}}{m_2}$$ где

$m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ – приведенная масса. Тогда эффективное сечение как функция от потери энергии: $d\sigma = \dfrac{2\pi\alpha^2 d\varepsilon}{m_2 v_\infty^2 \varepsilon^2}$ где ε пробегает значения от 0 до

$$\varepsilon_{\max} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$$

26.Полный дифференциал ф-и Лагранжа (ф-я координат и скоростей): По $\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \Rightarrow dL = \sum \dot{p}_i d\dot{q}_i + \sum p_i d\dot{q}_i.$ сле простейших преобразований получаем:

$d(\sum p_i \dot{q}_i - L) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i$ Величина в скобках - полная энергия системы ф-я Гамильтона (через координаты и импульсы): $H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}, q, t)$.Из дифференциального равенства:

$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \Rightarrow \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}.$ Это искомые ур-я движения в переменных p и q

Также можно написать: $\sum_i \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = E.$ Канонические преобразования –это преобразования координат импульса, которые допускается в формализма Гамильтона: $\vec{r}_a \to q_{i(t)}$ К.п. допускают преоб. коорд.q_i и p_i без изменения ур-й Гамильтона. Новые координаты: $Q_i=Q_i$ (p_i,q,t) и $P_i=P_i(p.q,t)$ $\dot{Q}_i = \dfrac{\partial H'}{\partial P_i}, gde \dot{P}_i = -\dfrac{\partial H'}{\partial \dot{Q}_i}$ ....

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q, t) + \frac{d}{dt} F(q_i, p_i, Q_i, P_i, , t)$$

Если задать такую ф-ю :$F=F_{другюобозню}(q_i,Q_i,t)$,то можно получить преобразования:

$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$ и $p_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$.Пусть ф-я $F = \sum_i q_i Q_i$ из нее можно получить :P_i=-q_i,Q_i=p_i.С другой стороны $F = \Phi(P_i, q_i, t) \Rightarrow P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_i}$ Значить можно написать Ф в виде: $\Phi = \sum_i P_i Q_i + F(q, Q, t)$ преобраз. Лежандра. Полный диффер.:

$$\sum_i \{P_i dQ_i + Q_i dP_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} dQ_i\} + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}$$ и $$P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$.

А $H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ Ф-я Ф может быть∀

27.Уравнения Гамильтона как следствие вариационного принципа.

С помощью принципа Гамильтона можно найти вариационный принцип который приводит к тем же уравнениям : $\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ Подставив ф-ю Лагранжа, выраженую через гамильтониан получим: $\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_{ti} p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) dt = 0$ - модифицированный принцип Гамильтона или $\delta \sum_i \int_{q_1}^{q_2} p_i q_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0$ Запишем м.п.Гам. с помощью параметра α ($\delta \to d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$,где δ -вариация интеграла):

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} [\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0$$

или можно записать:

$$d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i (\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}) dt = 0$$

(*) ($t_1, t_2 \notin \alpha$).Можна заменить $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}$ на $\frac{d}{dt}(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha})$ ->

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt$$.Так как $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = 0$ и

$d\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \delta q_i, d\alpha \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \delta p_i$ можна равенство (*) переписать в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i [\delta p_i(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) - \delta q_i(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})]dt = 0$$,но так как вариации δq_i и δ p_i являются независимыми, то этот интеграл может обращаться в 0 тогда, когда равны 0 коэффициенты при вариациях. Следовательно ебаные равенства:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$ совпадают с уравнениями Гамильтона

28. Уравнения Рауса

Преобразование, с помощью которого из уравнений Лагранжа получены уравнения Гамильтона, Называется преобразованием Лежандра (это преобразование широко используется в Теор. Физике)Используя преобразование Лежандра, получим уравнения Рауса, т.е. уравнения движения которые относительно одной части переменных имеют вид уравнений Лагранжа, а относительно другой части переменных – вид уравнения Гамильтона. Действительно возьмем переменные

$$t, q_i, \dot{q}_i (i = 1,2..., \ m), q_a, p_a (a = m+1,..., \ s; m < s)$$

и введем функцию этих переменных -- функцию Раусса

$$R = \left\{ \sum_{a=m+1}^{s} p_a \cdot \dot{q}_a - \mathbf{L} \right\}_{\dot{q}_a \to \dot{q}_a \left(\dot{q}, \dot{q}_1, \dot{q}_m, p, t\right)^*}$$

Рассматривая Дифференциалы этой функции приходим к уравнениям Раусса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -Q_i^d ; (i = 1,2..., \ m)$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial R}{\partial p_a}, \dot{p}_a = -\frac{\partial R}{\partial q_a} + Q_a^d ; \left(i = 1,2,..., \ m\right)$$

если все координаты $q_a \left(a = m+1,..., \ s\right)$ являются циклическими координатами, а все $Q^d = 0$ То функция Раусса будет иметь вид

$$R = R\left(q_1,..., \ q_m; \dot{q}_1,..., \ \dot{q}_m; p_{m+1,0},..., \ p_{s,0}\right)$$

Поскольку справедливы соотношения $\frac{\partial R}{\partial q_a} = -\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$ а импульсы p_a постоянны $\left(a = m+1,..., \ s\right)$

Таким образом в этом случае задача сводится к решению задачи Лагранжа относительно координат $q_1,..., \ q_m;$ **P.S. :** Выражение для энергии через функцию Раусса имеет вид

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + q_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = p\dot{q} + q_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L; E = R - \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

29. Канонические преобразования. Каноническими преобразованиями называются такие преобразования канонических переменных, которые не изменяют общей формы уравнений $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(i = 1,2,..., s\right)$ для любой гамильтоновой системы . Эти преобразования дают возможность свести задачу с данным гамильтонианом к задаче о системе с более простым гамильтонианом, в связи с чем метод канонических преобразований имеет большое значение. Итак преобразование :

$$Q_j = Q_i(q_1,...., q_s, p_1,..., p_s, t), P_j = P_i(q_1,...., q_s, p_1,..., p_s, t), \left(j = 1 ... s\right)$$

$$\frac{\partial(Q_1,..., Q_s, P_1,..., P_s)}{\partial(q_1,..., q_s, p_1,..., p_s)} \neq 0$$

называется каноническим, если оно преобразует ур-ние Гамильтона с любой функцией H:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(i = 1,2,..., s\right)$$

также в каноническое уравнение с другой вообще говоря функцией Гамильтона

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial HH}{\partial \dot{P}_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial HH}{\partial \dot{P}_i} \left(i = 1,2,..., s\right)$$

Где новая функция Гамильтона HH не совпадает вообще говоря со старой По принципу наименьшего действия получаем

$$\sum_{i=1}^{s} p_i dq_i - Hdt = \sum P_i dQ_i - H' dt + dF$$

или

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + \left(H' - H\right) dt$$

отсюда видно, что $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$,

$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$, $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$, при этом F=F(q, Q, t). Эти формулы связывают старые и новые переменные и дают выражение для новой гамильтоновой функции.

30. Скобки Пуассона Движение механической системы связано с обобщенным потенциалом U и голономными идеальными связями в отсутствие диссипативных сил подчиняется уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(i = 1,2,\ldots, s\right)$$

(1)Найдем необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторая функция f(q,p,t) сохраняла постоянное значение с течением времени f(q,p,t)=const (2) то есть представляла собой первый интеграл уравнений (1) Пусть (2) Имеет место ; тогда полная производная по времени от функции f равна 0, т.е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j \right\} = 0$$

Используя уравнения (1) Получим интересующее нас необходимое условие в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[f, H\right] = 0$$

(3) где

$$\left[f, H\right] = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\}$$

Обратные рассуждения убеждают в достаточности условия (3) Это условие записано с помощью дифференциального выражения обозначенного символом *[f,H]*. Вообще для двух функций канонических переменных можно составить выражение

$$[f_1, f_2] = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_{ji}} - \frac{\partial f_1}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q_j} \right\}$$

(4)которое называется СКОБКАМИ ПУАССОНА. Оно обладает свойствами антисимметрии, так как $\left[f_1, f_1\right] = 0; \left[f_1, f_2\right] = -\left[f_2, f_1\right]$ и рядом других столь же очевидных свойств, вытекающих из определения (4)

$$\left[f_1, (f_2 + f_3)\right] = [f_1, f_2] + [f_1, f_3]; \frac{\partial}{\partial t}[f_1, f_2] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right] + \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right] : \left[f_1, \left[f_2, f_3\right]\right] = \left[f_1, f_2\right] \cdot f_3 + \left[f_1, f_3\right] \cdot f_2$$

Также есть охуенное доказательство тождества Пуассона

$$\left[f_1, \left[f_2, f_3\right]\right] + \left[f_2, \left[f_3, f_1\right]\right] + \left[f_3, \left[f_1, f_2\right]\right] = 0$$

С помощью этого тождества нетрудно доказать теорему Пуассона в которой утверждается : если функция $f_1(q, p, t)$ и $f_2(q, p, t)$ являются первыми интегралами канонических уравнений то и $\left[f_1, f_2\right]$ также будет первым интегралом этих уравнений, т.е. $\left[f_1, f_2\right]$ =C

Действительно из условий теоремы в силу (3) имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \left[f_1, H\right] = 0; \frac{\partial f_2}{\partial t} + \left[f_2, H\right] = 0$$

Составляя далее тождество Пуассона для функций

f_1, f_2 и Н и исключая из него с помощью уравнения сверху над этим скобки

$[f_1, H], [f_2, H]$ получим тождество $-\left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right] + \left[f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t}\right] + [H, [f_1, f_2]] = 0$

Которое сводится к условию для функции $[f_1, f_2]$: $\frac{\partial [f_1, f_2]}{\partial t} + [[f_1, f_2], H] = 0$ что и доказывает теорему. P.S.: Если одна из функций f или g совпадает с одним из импульсов или координат ,то скобки Пуассона сводятся просто к частной производной.

31. Теорема Лиувилля.

Для геометрической интерпретации механических явлений часто пользуются понятием о так называемом *фазовом пространстве* как о пространстве 2s измерений, на координатных осях которого откладываются значения s обобщенных координат и s импульсов данной механической системы. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую фазовой траекторией. Произведение дифференциалов $d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s dp_1 \ldots dp_s$ можно рассматривать как «элемент объема» фазового пространства. Рассмотрим теперь интеграл $\int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям:если произвести каноническое преобразование от переменных p, *q* к переменным P, Q, то объемы соответствующих друг другу областей пространств p, *q и P, Q* одинаковы:

$$\int \ldots \int dq_1 \ldots dq_s dp_1 \ldots dp_s = \int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s dP_1 \ldots dP_s$$

(46,1). Преобразование переменных в кратном интеграле производится по формуле

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_S dP_1 \ldots dP_S = \int \ldots \int D dq_1 \ldots dq_S dp_1 \ldots dp_S$$

где

$$D = \frac{\partial(Q_1,\ldots, Q_S, P_1,\ldots, P_S)}{\partial(q_1,\ldots, q_S, p_1,\ldots, p_S)}$$

(46,2) это якобиан преобразования. Поэтому доказательство теоремы (46,1) сводится к доказательству того, что якобиан всякого канонического преобразования равен единице:D=l.(46,3). Воспользуемся свойством якобианов, которое позволяет обращаться с ними в определенном смысле, как с дробями. «Разделив числитель и знаменатель» якобиана на $\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)$, получим:

$$D = \frac{\partial(Q_1,\ldots, Q_S, P_1,\ldots, P_S)}{\partial(q_1,\ldots, q_S, P_1,\ldots, P_S)} / \frac{\partial(q_1,\ldots, q_S, p_1,\ldots, p_S)}{\partial(q_1,\ldots, q_S, P_1,\ldots, P_S)}$$

Согласно другому правилу якобиан, у которого в «числителе» и «знаменателе» фигурируют одинаковые величины, сводится к якобиану от меньшего числа переменных, причем при всех дифференцированиях в нем выпавшие одинаковые величины должны считаться постоянными. Поэтому

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1,\ldots, Q_S)}{\partial(q_1,\ldots, q_S)} \right\}_{P=const} / \left\{ \frac{\partial(p_1,\ldots, p_S)}{\partial(P_1,\ldots, P_S)} \right\}_{q=const}$$

(46.4) Рассмотрим якобиан, стоящий в числителе этого выражения, Согласно определению это есть определитель ранга s, составленный из элементов $\partial Q_i/\partial q_k$ (элемент на пересечении (-i-й строки и *k-го* столбца). Представив каноническое преобразование с помощью производящей функции Φ *(q, P)* в форме (45,8) – ($p_i=\partial\Phi/\partial q_i$, $Q_i=\partial\Phi/\partial P_i$, $H'=H+\partial\Phi/\partial t$) получим: $\partial Q_i/\partial q_k=\partial^2\Phi/(\partial q_k * \partial P_i)$ Таким же образом найдем, что I, k-й элемент определителя в знаменателе выражения (46,4) равен $\partial^2\Phi/(\partial q_i * \partial P_k)$ Это значит, что оба определителя отличаются только заменой строк на столбцы и обратно. Поэтому они равны друг другу, так что отношение (46,4) равно единице, что и требовалось доказать. Представим себе теперь, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы, Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом его объем остается неизменным: $$\int d\Gamma = const$$ Это утверждение - ***теорема Лиувилля,*** непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях и из того, что самое изменение *p* и *q* при движении можно рассматривать как каноническое преобразование. Совершенно аналогичным образом можно доказать инвариантность интегралов $\iint \sum_i dq_i dp_i$,

$$\iiiint \sum_{i \neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k$$

, …, в которых интегрирование производится по заданным двух-, четырёх-, и т.д. –мерным многообразиям в фазовом пространстве.

32. Движение как каноническое преобразование. Изменение величин p,q при самом движении можно рассматривать как канонические преобразования. Пусть q_t, p_t – значения канонических переменных в момент времени t, а $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ их значения в момент $t+\tau$. Последние являются некоторыми функциями от первых и от величины интервала τ как от параметра: $q_{t+\tau}=q(q_t,p_t,t,\tau)$, $p_{t+\tau}=p(q_t,p_t,t,\tau)$. Если рассматривать эти формулы как преобразование от переменных q_t,p_t к переменным $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ то это преобразование будет каноническим. Это очевидно из выражения

$$dS=\sum\left(p_{t+\tau}dq_{t+\tau}-p_t dq_t\right)-\left(H_{t+\tau}-H_t\right)dt$$

для дифференциала действия $S(q_{t+\tau},q_t,t)$, взятого вдоль истинной траектории, проходящей через точки q_t и $q_{t+\tau}$ в моменты времени t и $t+\tau$ при заданном τ. Сравнение этой формулы с

$$dF=\sum p_i dq_i-\sum P_i dQ_i+(H'-H)dt$$

показывает, что S и есть производящая функция преобразования. **Уравнение Гамильтона – Якоби.** Действие – S есть функция координат и времени – S(q,t). Частная производная по времени от этой функции *S (q, t)* связана с функцией Гамильтона соотношением $\partial S/\partial t+H(q,p,t)=0$, а ее частные производные по координатам совпадают с импульсами. Заменив в соответствии с этим импульсы *p* в функции Гамильтона производными $\partial S/\partial q$ мы получим уравнение $\partial S/\partial t+H(q_1,\ldots,q_s;\partial S/\partial q_1,\ldots,\partial S/\partial q_s;t)=0$ (47.1) которому должна удовлетворять функция *S(q,t).* Это уравнение в частных производных первого порядка; оно называется ***уравнением Гамильтона — Якоби.*** Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями, уравнение Гамильтона - Якоби также является основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движения. Переходя к изложению этого метода, напомним предварительно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения. В механических применениях, однако, основную роль играет не общий интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, а так называемый *полный интеграл;* так называется решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных. В уравнении Гамильтона — Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому для системы с *s* степенями свободы полный интеграл этого уравнения должен содержать s + 1 произвольных постоянных. При этом, поскольку функция S входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом, т. е, полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид $S=f(t,q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s)+A$ (47.2) где $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ и A – произвольные постоянные. {Хотя общий интеграл уравнения Гамильтона—Якоби нам не понадобится, но укажем, что он может быть найден, если известен полный интеграл. Для этого будем считать величину *A* произвольной функцией остальных постоянных: $S= f(t,q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s)+A(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$

Заменив здесь величины α_i функциями координат и времени, которые находим из s условий $\partial S/\partial\alpha_I=0$ получим общий интеграл, зависящий от вида произвольной функции $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$. Действительно, для полученной таким способом функции S имеем $\frac{\partial S}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}\right)_q\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$ Но величины $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби, поскольку функция $S(t,q,\alpha)$ есть по предположению полный интеграл этого уравнения. Поэтому удовлетворяют ему и производные $\partial S/\partial qi$ } Выясним теперь связь между полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби и интересующим нас решением уравнений движения. Для этого произведем каноническое преобразование от величин *q, p* к новым переменным, причем функцию $f(t, q, \alpha)$ выберем в качестве производящей функции, а величины $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_s$— в качестве новых импульсов. Новые координаты обозначим посредством β_1,β_2,β_s. Так как производящая функция зависит от старых координат и новых импульсов, мы .должны пользоваться формулами $p_i=\partial f/\partial q_i$, $\beta_I=\partial f/\alpha_I$, $H'=H+\partial f/\partial t$. Но поскольку функция *f* удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, то мы видим, что новая функция Гамильтона обращается тождественно в нуль: $H'=H+\partial f/\partial t=H+\partial s/\partial t=0$. Поэтому канонические уравнения для новых переменных имеют вид $(\alpha_I)'=0$, $(\beta_I)'=0$, откуда следует, что $\alpha_I=\text{const}$, $\beta_I=\text{const}$. (47.3) С другой стороны s уравнений $\partial f/\partial\alpha_I=\beta_I$ дают возможность выразить s координат *q* через время и 2s постоянных α и β. Тем самым мы найдем общий интеграл уравнений движения. Таким образом, решение задачи о движении механической системы методом Гамильтона — Якоби сводится к следующим операциям. По функции Гамильтона составляется уравнение Гамильтона — Якоби и находится полный интеграл (47,2) этого уравнения. Дифференцируя его по произвольным постоянным α и приравнивая новым постоянным β, получаем систему s алгеб-раических уравнений $\partial S/\partial\alpha_I=\beta_I$ (47.4) решая которую, найдем координаты q как функции времени и 2s произвольных постоянных. Зависимость импульсов от времени можно найти затем по уравнениям $p_i=\partial S/\partial qi$. Если мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, зависящий от меньшего чем s числа произвольных постоянных, то хотя с его помощью нельзя найти общий интеграл уравнений движения, но можно несколько упростить задачу его нахождения. Так, если известна функция **S,** содержащая одну произвольную постоянную α, то соотношение $\partial S/\partial\alpha=\text{const}$ дает одно уравнение, связывающее $q_1,\ldots,q_s$ и t. Уравнение Гамильтона—Якоби принимает несколько более простую форму в том случае, когда функция *H* не зависит от времени явно, т. е. система консервативна. Зависимость действия от времени сводится при этом к слагаемому *Et:* $S=S_0(q)-Et$ (47,5), и подстановкой в (47,1) мы получаем для укороченного действия *So(q)* уравнение Гамильтона—Якоби в виде $H(q_1,\ldots,q_s;\partial S_0/\partial q_1,\ldots,\partial S_0/\partial q_s)=E$ (47,6)

33. Амплитуда и фаза гармонического маятника как канонически сопряженные переменные. Каноническое преобразование, которое делает гармонический маятник механической системой с циклической координатой.

Розглянемо задачу: маємо гармонічний маятник, функція Гамільтона - $H=p^2/2m+kq^2/2$ Придумаємо таке канонічне рівняння, щоб була така залежність від координати $p=\sqrt{2m}*f(p)\cos\Theta$,

$q=\sqrt{\frac{2}{k}}*f(p)\sin\Theta$, Тоді $H=f^2(p)$ – якась функція імпульсу. Потрібно за допомогою канонічного претворення підібрати f таке, щоб при умові що $\{p,q\}_{Q,P}=1$ (то что в фигурных скобках это скобки Пуассона, что это такое я без понятия ☺)

$2\sqrt{\frac{m}{k}}(\frac{df}{dp}f)=\frac{2}{w_0}w_0\frac{1}{2}=1$ при $f=\sqrt{w_0 p}$ тому перетворення канонічне:

$p=\sqrt{2mw_0p}\cos\Theta$ на функцію Гамільтона, $q=\sqrt{\frac{2}{k}w_0p}\sin\Theta$ на $H=f^2(p)=w_0p$. Тоді легко розв'язати рівняння Гамільтона $P'=\partial H/\partial Q=0 \Rightarrow P=const$ (вообще не факт, что здесь большая бкува P поэтому лучше писать среднюю), $Q'=\partial H/\partial P=w_0$. Звідси виходить що p – фаза, а q – амплітуда. H=0, P=P(0), Q=Q(0).